TD 29 : Variables aléatoires finies

▶ Lois de variables aléatoires, espérance, variance

Exercice 29.1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$. **F**

Exercice 29.2 Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. **PD**
Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs.
On note X le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de X.
Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de Y.

Exercice 29.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. **PD**
On effectue alors un second tirage et on note Y le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 29.4 Loi triangulaire **PD**
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n-1]\!]$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = i) = \lambda i,\ \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!],\ \mathbf{P}(X = i) = \lambda(2n - i)$$

où λ est un réel fixé.

1. À quelle condition sur λ définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2. Prouver alors que X et $2n - X$ ont même loi. En déduire $\mathbf{E}(X)$.
3. Calculer $\mathbf{V}(X)$. *On pourra admettre que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 29.5 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. **PD**
On tire simultanément deux boules, on note X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.
Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 29.6 On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une permutation σ de $[\![1, n]\!]$. **AD**
On note alors N le plus grand entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

Exercice 29.7 De l'intérêt des variables indicatrices **AD**
Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble ($k \in \mathbf{N}^*$). Au rez-de-chaussée, n personnes ($n \in \mathbf{N}^*$) entrent dans l'ascenseur, et chacune descend à un étage donné avec probabilité $\frac{1}{k}$ indépendamment du choix de ses voisins. On suppose de plus que personne ne monte dans l'ascenseur aux étages.
On note X_i la variable indicatrice de l'événement «l'ascenseur s'arrête à l'étage i», et X le nombre total d'arrêts de l'ascenseur.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. En déduire $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 29.8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$. **PD**

Exercice 29.9 Le problème des rencontres **AD**
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne par des tirages successifs (et sans remise !), et on dit qu'il y a une rencontre une $i^{\text{ème}}$ tirage si celui-ci donne la boule numéro i.
Donner le nombre moyen de rencontres.

Exercice 29.10 Une urne contient b boules blanches et b boules rouges. On y effectue une suite de tirages de la manière suivante : on replace dans l'urne la boule obtenue, en rajoutant b boules de la même couleur. **AD**
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 29.11 **PD**

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k)$.

2. **Application** : une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement et sans remise. On note alors X_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, et on note X la variable aléatoire égale au plus grand entier k tel que $X_1 < X_2 < \cdots < X_k$.
Déterminer les valeurs de $\mathbf{P}(X \geqslant k)$, et en déduire $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 29.12 On dispose de N urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note Z_n la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.
Déterminer $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k)$, et en déduire la loi de Z_n.

Exercice 29.13 **(Banque CCP)** AD
Un téléconseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p \in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.
2. Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer alors l'espérance et la variance de Z, ainsi que $\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 29.14 Un téléphone contient $n \geqslant 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. AD
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1. Déterminer le support de X_k.
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_k = 1)$ et $\mathbf{P}(X_k = k)$.
3. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, prouver que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \dfrac{i}{n}\mathbf{P}(X_k = i) + \dfrac{n-i+1}{n}\mathbf{P}(X_k = i-1)$.
4. Donner alors une relation entre $\mathbf{E}(X_{k+1})$ et $\mathbf{E}(X_k)$, puis l'expression générale de $\mathbf{E}(X_k)$ en fonction de k et n.

Exercice 29.15 **Une loi finie est caractérisée par ses moments** D
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Montrer que si X et Y ont même loi si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$.
($\star$) Plus généralement, montrer que deux variables aléatoires X et Y sur des univers finis ont même loi si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$.

▶ Couples et n-uplets de variables aléatoires

Exercice 29.16 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant deux lois de Bernoulli. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY. F

Exercice 29.17 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbf{P})$ soit indépendante de toute variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$. PD

Exercice 29.18 **Une caractérisation algébrique de l'indépendance** AD
Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ (où les x_i et les y_i sont deux à deux distincts).
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $m_{i,j} = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.
Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est de rang 1.

Exercice 29.19 Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p), p \in]0,1[$. AD
On pose, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $Y_i = X_i X_{i+1}$.
Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i - j| > 1$.

Exercice 29.20 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. AD

1. On pose $Z = \max(X,Y)$. Pour $k \in \mathbf{N}$, Déterminer $\mathbf{P}(Z \leqslant k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leqslant k)$. En déduire la loi de Z.
2. Déterminer de même la loi de $U = \min(X,Y)$.
3. Donner la loi de $T = X - Y$.

Exercice 29.21 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$. **PD**

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 29.22 Déterminant aléatoire (Oral Mines MP 2017) **D**

Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles $A_{i,j}$ centrées, réduites, identiquement distribuées et mutuellement indépendantes sur un univers probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.

Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

Exercice 29.23 Dés dont la somme suit une loi uniforme **D**

On souhaite prouver qu'il n'est pas possible de truquer deux dés à n faces numérotées 1 à n de telle sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$.

Pour cela, on suppose que deux tels dés existent, et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au numéro du premier (resp. du second) dé.

On note alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

1. Déterminer une relation entre p_1 et q_1, ainsi qu'une relation entre p_n et q_n.
2. Montrer que $p_1 q_n + p_n q_1 \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$.
3. Conclure.

Exercice 29.24 Inégalité de Hoeffding (Oral X-ENS PSI) **TD**

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant X_i \leqslant b$.

On pose alors $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

1. Soient $c < d$ deux réels et $\Phi : [c, d] \to \mathbf{R}$, continue, et $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$, telle que $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$ et $\forall x \in]c, d[$, $\Phi''(x) > 0$. Montrer que $\Phi \leqslant 0$.
2. En déduire que : $\forall s > 0$, $\forall y \in [c, d]$, $e^{sy} \leqslant \dfrac{c-y}{c-d} e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d} e^{sc}$.
3. Soit Y une variable aléatoire réelle centrée à valeurs dans $[c, d]$, et soit $s > 0$.
   Montrer que $\ln\left(\mathbf{E}\left(e^{sY}\right)\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right)$, puis que : $\mathbf{E}\left(e^{sY}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{s^2(d-c)^2}{8}\right)$.
   Indication : remarquer que : $\ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$.
4. Prouver que $\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{s(X_i - \mathbf{E}(X_i))}\right)$.
5. En choisissant judicieusement les Y_i, prouver à l'aide de la question 3 que :
   $$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-st + n\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$
6. Conclure.

► Covariance

Exercice 29.25 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Comparer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. **PD**

Exercice 29.26 Soit $p \in]0; 1[$ et $n \geqslant 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. **PD**

On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 29.27 (Oral Mines-Ponts PC) PD

On lance deux dés équilibrés à n faces. Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
3. Calculer de même XY et en déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 29.28 AD

On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1,\dots,6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Pour $(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2, i \neq j$, déterminer la loi de X_iX_j. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la variance de X.

Exercice 29.29 Loi trinomiale AD

Soit $n \geqslant 2$, et soient $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q < 1$.

1. Montrer qu'on définit bien une loi conjointe en posant $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} p^k q^\ell (1-p-q)^{n-k-\ell}.$$

Dans toute la suite, on considère un couple (X,Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée ci-dessus.

2. Déterminer les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbf{E}(XY)$, puis $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 29.30 PD

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
2. Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

Exercice 29.31 PD

Soit $n \geqslant 2$. On choisit au hasard une permutation σ de $[\![1,n]\!]$, et on note N son nombre de points fixes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note F_i l'événement «i est un point fixe de σ»

1. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, déterminer $\mathbf{P}(F_i)$ et $\mathbf{P}(F_i \cap F_j)$.
2. Déterminer $\mathbf{E}(N)$.
3. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j})$. En déduire $\mathbf{V}(N)$.
4. Prouver que $\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

Exercice 29.32 (Oral ENS PSI) D

Pour n un entier supérieur à 2, soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Soit θ la variable aléatoire indiquant l'unique argument de Z dans $[0, 2\pi[$, soit X la partie réelle de Z et soit Y sa partie imaginaire.

1. Calculer $\mathbf{E}(\theta)$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?