TD 14 : Groupes, anneaux, corps

▸ Lois de composition interne

Exercice 14.1 Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\max(x, y)$ est bien défini. On définit ainsi une loi de composition interne, notée max sur E. PD

1. Montrer que la loi max est associative et commutative.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(E, \max)$ possède un élément neutre.
3. Lorsque cette condition est vérifiée, quels sont les éléments inversibles de E ?

Exercice 14.2 Éléments réguliers AD

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, associative, et possédant un élément neutre e. Un élément $x \in E$ est dit régulier à gauche si $\forall (y, z) \in E^2$, $x * y = x * z \Rightarrow y = z$ et régulier à droite si $\forall (y, z) \in E^2$, $y * x = z * x \Rightarrow y = z$.

1. Quels sont les éléments réguliers (à droite ou à gauche) de $(\mathbf{Z}, \times)$?
2. Soit A un ensemble. Montrer que dans $(\mathscr{F}(A, A), \circ)$, un élément f est régulier à droite si et seulement si f est surjective. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit régulier à gauche.

▸ Groupes

Exercice 14.3 On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbf{R}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que $(\mathbf{R}, \star)$ est un groupe abélien. PD

Exercice 14.4 Centre d'un groupe PD

Soit G un groupe. On appelle centre de G l'ensemble $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$ des éléments commutant avec tous les éléments de G. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G. À quelle condition a-t-on $\mathcal{Z}(G) = G$?

Exercice 14.5 Divers sous-groupes PD

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G.

1. $G = (\mathbf{C}^*, \times)$, $\quad H = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n$
2. $G = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\quad H$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G.
3. $G = GL_2(\mathbf{R})$, $\quad H$ l'ensemble des éléments de G dont tous les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$.
4. $G = GL_n(\mathbf{R})$, $\quad H$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1.
5. $G = \mathfrak{S}_n$, $\quad H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$

Exercice 14.6 Donner les tables de multiplication de $\mathbf{U}_4$ et $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$. Prouver alors que ces deux groupes ne sont pas isomorphes (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre ces groupes), bien que de même cardinal. AD

Exercice 14.7 Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$. D

1. Montrer que tout élément est égal à son propre inverse. En déduire que G est abélien.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3. On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G, différent de $\{e\}$ ou de G, et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh,\ h \in H\}$.
   (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
   (b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 14.8 Un cas particulier du théorème de Lagrange AD

Soit G un groupe commutatif fini, de cardinal n.

1. Soit $g \in G$. Montrer que $x \mapsto gx$ est une bijection de G sur lui-même.
2. Soit $g \in G$. En calculant de deux manières le produit $\displaystyle\prod_{x \in G} (gx)$, montrer que $g^n = 1_G$.
3. Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbf{C}^*, \times)$.

Exercice 14.9 Opérations sur les sous-groupes AD

Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{h \cdot k,\ (h, k) \in H \times K\}$

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
3. Si G est abélien, montrer que HK est un sous-groupe de G.

4. ($\star$) Prouver que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 14.10 Soit G un groupe. On définit une relation binaire sur G par $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ x = g^{-1}yg$. **AD**

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
2. Déterminer le cardinal de la classe d'équivalence de 1_G.
3. Si G est abélien, prouver que les classes d'équivalence sont des singletons.
4. Montrer que si $x \sim y$ et s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 1_G$, alors $y^n = 1_G$.

Exercice 14.11 Dans cet exercice, on note G l'ensemble des similitudes directes du plan, qu'on assimile à l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ tels que $\forall z \in \mathbf{C},\ f(z) = az + b$. **AD**

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.
2. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On pose $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$.
   Montrer que G_{z_0} est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbf{C}^*$. Est-il abélien ?

Exercice 14.12 Soit G un groupe, et soit $x \in G$. On dit que x est d'ordre fini s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = e_G$. **AD**

1. Montrer que si G est abélien, et que x et y sont d'ordre fini, alors xy est encore d'ordre fini.
2. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si G n'est plus abélien ?

Exercice 14.13 Conjugaison dans un groupe **AD**

Soit G un groupe. Pour $a \in G$, on pose $\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & aga^{-1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que τ_a est un morphisme bijectif de G dans lui-même (on parle alors d'automorphisme).
2. On pose $\mathscr{C}(G) = \{\tau_a,\ a \in G\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.
3. Montrer que l'application $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G)$ qui à $a \in G$ associe τ_a est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 14.14 Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. **PD**

1. Prouver que pour tout sous-groupe H_1 de G_1, $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.
2. Prouver que pour tout sous-groupe H_2 de G_2, $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1. En déduire que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1.

Exercice 14.15 Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ dans $(\mathbf{Z}, +)$. De $(\mathbf{Q}, +)$ dans $(\mathbf{Z}, +)$. **AD**

Exercice 14.16 Soit $(G, *)$ un groupe, et soit A une partie non vide **finie** de G, stable par $*$. Prouver que A est un sous-groupe de G. **D**

▸ Anneaux, corps

Exercice 14.17 Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2},\ (x, y) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un anneau. **AD**
Prouver que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2},\ (x, y) \in \mathbf{Q}^2\}$ est un corps.

Exercice 14.18 Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. Montrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau. Est-ce un corps ? **F**

Exercice 14.19 Produit direct d'anneaux **PD**
Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux. On munit $A \times B$ de deux lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_A a', b +_B b') \text{ et } (a, b) \otimes (a', b') = (a \times_A a', b \times_B b').$$

Montrer que $(A \times B, \oplus, \otimes)$ est un anneau, commutatif si A et B le sont. Cet anneau est-il intègre ?

Exercice 14.20 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, l'anneau des suites réelles ? **PD**

1. l'ensemble des suites de limite nulle
2. l'ensemble des suites croissantes
3. l'ensemble des suites convergentes
4. l'ensemble des suites divergentes
5. l'ensemble des suites bornées
6. l'ensemble des suites (u_n) telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
7. l'ensemble des suites stationnaires
8. l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang

Exercice 14.21 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Pour $a \in A$, on appelle racine carrée de a tout élément dont le carré vaut a. **AD**

1. Prouver que si A est intègre, alors tout élément de A admet au plus deux racines carrées.
2. En revanche, prouver que dans $(\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \times)$, la fonction constante $x \mapsto 1$ possède une infinité de racines carrées.

Exercice 14.22 Soit A un anneau commutatif et E un ensemble non vide. À quelle condition $\mathscr{F}(E, A)$ est-il intègre ? **PD**

Exercice 14.23 Montrer qu'un anneau commutatif intègre fini est un corps. **TD**

Exercice 14.24 Idéaux premiers (D'après oral ENS) **TD**

Soit A un anneau commutatif non nul. On appelle idéal de A tout sous-groupe I de $(A,+)$ tel que $\forall (a,x) \in A \times I,\ ax \in I$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $xA = \{ax, a \in A\}$ est un idéal de A.
2. Un idéal I est dit maximal si tout idéal de A, différent de A, et qui contient I est égal à I lui-même.
   Et un idéal I différent de A est dit premier si $\forall (a,b) \in A^2,\ ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.
   (a) Montrer qu'un idéal I est maximal si et seulement si pour tout $x \in A \setminus I$, $I + xA = A$ (où $I + aA$ est l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme somme d'un élément de I et d'un élément de aA).
   (b) Prouver qu'un idéal maximal est premier.
3. Montrer que A est un corps si et seulement si tout idéal de A est premier.