TD 24 : Dénombrement

▸ Cardinal, injections, surjections

Exercice 24.1 Soient E et F deux ensembles non vides. Prouver que s'il existe une injection $E \to F$, alors il existe une surjection $F \to E$. **PD**

Exercice 24.2 Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre. **F**

Exercice 24.3 Soient $x_1, \dots, x_n$ des entiers. Montrer qu'il existe deux entiers $p \leqslant q$ de $[\![1, n]\!]$ tels que $x_p + x_{p+1} + \cdots + x_q$ soit un multiple de n. **AD**

Exercice 24.4 Formule du crible **D**
Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

($\star$) **Application** : on note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible astucieusement, prouver que $\mathrm{Card}\, D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 24.5 Dénombrement par construction d'une bijection **D**
Soit E un ensemble de cardinal n. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{array} \right.$ est bijective, et conclure.

▸ Dénombrement

Exercice 24.6 Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot INFO ? De 8 lettres ? De 9 lettres ? **PD**

Exercice 24.7 Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ? **PD**

Exercice 24.8 Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à n éléments ? **PD**

Exercice 24.9 Déterminer le nombre d'anagrammes (=mot obtenu par permutation des lettres) des mots suivants : COVID, CONFINE, CORONAVIRUS, CONFINEMENT. **PD**

Exercice 24.10 Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent : **PD**

1. un seul élément de $[\![1, p]\!]$?
2. au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

Exercice 24.11 On considère les entiers de 4 chiffres (en base 10), sous la forme *abcd*. On dit qu'un entier *abcd* a ses chiffres croissants si $a < b < c < d$. Par exemple, 1259 a ses chiffres croissants, pas 1065. **D**
Quel est le nombre d'entiers de 4 chiffres dont les chiffres vont en croissant ?

Exercice 24.12 Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$. **AD**

Exercice 24.13 Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$? De $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$? De $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$? **AD**

Exercice 24.14 Combien y a-t-il de manières de partitionner l'ensemble des 48 élèves de la MP2I en 16 trinômes de colle ? **AD**

Exercice 24.15

D

1. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
2. (a) Soit $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $g : k \mapsto f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.
   (b) Soit $g : [\![1,p]\!] \to [\![n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
   (c) En déduire le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 24.16 **Formule de Vandermonde**

AD

Soient $(m,r,n) \in \mathbf{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante (déjà prouvée par d'autres moyens dans le TD17) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$.

Exercice 24.17 **Le poker**

PD

Rappelons qu'un jeu de poker contient 32 cartes, c'est-à-dire 8 (du 7 à l'as) de chaque couleur. Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1. une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?
2. une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?
3. exactement trois trèfles ?
4. exactement un as et deux cœurs ?

Exercice 24.18 **(Banque CCP 113)**

AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 24.19

PD

De combien de manières peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de manière à ce qu'aucune ne puisse en prendre une autre ?
On rappelle qu'aux échecs une tour ne peut se déplacer que le long d'une ligne ou d'une colonne.

Exercice 24.20

Soient $n \geqslant p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 24.21

PD

Dans un polygone convexe on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ?

Exercice 24.22

AD

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.
2. En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, le cardinal de l'ensemble $\{(k,\ell) \in \mathbf{N}^2 \mid k+2\ell = n\}$.

Exercice 24.23 **(Oral X)**

TD

Montrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

Exercice 24.24 **(Oral ENS)**

TD

Soit $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q (on pourra par exemple penser à $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec p premier) et soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbf{K})$.

Exercice 24.25 **(ENS PC 2017)**

D

Une partie A de $\mathbf{N}$ est dite *fade* si il n'existe pas de triplet $(x,y,z) \in A^3$ tel que $x+y=z$.
Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1,\dots,n\}$.