POIRET Aurélien **MPSI**
TD n° 14 ★★

Analyse asymptotique pour les fonctions

1 Calculs de développements limités

Exercice N° 1 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x)$.
2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$.
3. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \cos(x)\ln(1+x)$.

Réponses : 1. $-1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + \circ(x^5)$ 2. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \circ(x^3)$ 3. $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \circ(x^4)$.

Exercice N° 2 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.
2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sin x)$.
3. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \cos(\ln(x))$.

Réponses : 1. $-x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \circ(x^3)$ 2. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \circ(x^3)$ 3. $1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \circ(x-1)^3$.

Exercice N° 3 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.
2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(2+\sin x)$.
3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{3+\cos x}$.

Réponses : 1. $\ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^3)$ 2. $\ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \circ(x^3)$ 3. $2 - \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^3)$.

Exercice N° 4 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.
2. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+\sqrt{1+x})$.
3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

Réponses : 1. $\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{\mathrm{e}}{48}x^3 + \circ(x^3)$ 2. $\ln(2) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + \circ(x^3)$ 3. $2\ln(2) + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \circ(x^3)$.

Exercice N° 5 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$.
2. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.
3. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\mathrm{sh} x}{x}\right)$.

Réponses : 1. $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + \circ(x^2)$ 2. $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \circ(x^4)$ 3. $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \circ(x^4)$.

Exercice N° 6 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1}$.
2. $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\arctan x}{\tan x}$.
3. $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$.

Réponses : 1. $1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \circ(x^3)$ 2. $1 - \frac{2}{3}x^2 + \circ(x^2)$ 3. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^2)$.

Exercice N° 7 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$.

2. $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$.
3. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$.

Réponses : 1. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + \circ(x^3)$ 2. $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + \circ(x^2)$ 3. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + \circ(x^3)$.

Exercice N° 8 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(\pi/4)$ de $x \mapsto \sin x$
2. $DL_4(1)$ de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$
3. $DL_2(1)$ de $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$
4. $DL_3(1)$ de $x \mapsto \arctan x$

Réponses : 1. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \circ(x - \frac{\pi}{4})^3$ 2. $(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + \circ(x-1)^4$ 3. $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \circ(x-1)^2$ 4. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \circ(x-1)^3$.

Exercice N° 9 : Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_{10}(0)$ de $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.
2. $DL_{1000}(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Réponses : 1. $-x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \circ(x^{10})$ 2. $x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + \circ(x^{1000})$.

Exercice N° 10 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

Réponses : $x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \circ(x^5)$.

Exercice N° 11 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

2 Application aux suites

Exercice N° 12 : Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

$$\text{a) } 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}. \quad \text{b) } \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}. \quad \text{c) } \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

Réponses : a) $\frac{1}{4n\sqrt{n}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{n}}$ c) $-\frac{\ln(n)}{n^2}$.

Exercice N° 13 : Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty} n \sin\frac{1}{n}. \quad \text{b) } \lim_{n\to+\infty} \left(n \sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}. \quad \text{c) } \lim_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right).$$

Réponses : a) 1 b) $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$ c) 1.

Exercice N° 14 : Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n.$$

Réponse : $\sqrt{ab}$.

Exercice N° 15 : Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n.$$

Réponse : $\frac{8}{9}$.

3 Application aux fonctions

Exercice N° 16 : Calculer $f^{(n)}(0)$ où f est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^4}{1+x^6}$.

Exercice N° 17 : Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

1. $x(2+\cos x) - 3\sin x$.
2. $x^x - (\sin x)^x$.
3. $\arctan(2x) - 2\arctan(x)$.

Réponses : 1. $\frac{x^5}{60}$ 2. $\frac{x^3}{6}$ 3. $-2x^3$.

Exercice N° 18 : Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}. \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}. \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - \mathrm{e}}{x}.$$

Réponses : a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Exercice N° 19 : Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x\to 2} \left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)}. \qquad \text{b) } \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}.$$

$$\text{c) } \lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} \text{ avec } a > 0.$$

Réponses : a) $\frac{1}{3}6^{4/13}5^{5/26}$ b) e c) $a^a(1+a^2)(1-\ln(a))$.

Exercice N° 20 : Soit $f :]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice N° 21 : Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice N° 22 : Soit

$$f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice N° 23 : Soit

$$f : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice N° 24 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

4 Suite définie de manière implicite

Exercice N° 25 :

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Cette solution est notée x_n.
2. Quelle relation relie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}(1)$.
4. Montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right).$$
5. En exploitant que
$$\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$
montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice N° 26 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f : x \mapsto x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x > \mathrm{th}(x) > 0$.
2. En déduire le tableau de variation de f. On précisera les limites.
3. Montrer que f admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes à déterminées.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
5. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
6. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
7. Déterminer un équivalent de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice N° 27 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation
$$x^n + x - 1 = 0$$
d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une, et une seule, solution $x_n \in]0, 1[$.
2. Étudier la monotonie de (x_n) ainsi que sa convergence.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\delta_n = 1 - x_n$.
   (a) Montrer que $\ln(\delta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\delta_n$.
   (b) Montrer ensuite que $\ln(\delta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) En déduire que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
   (d) En déduire un développement asymptotique à deux termes de la suite (x_n).

Exercice N° 28 : On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$.

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in]0, +\infty[$, puis démontrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
2. Démontrer que (x_n) tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}\big(\ln(n)\big)$.

Exercice N° 29 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et considérons l'équation

$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1$$

d'inconnue $x \in]0, 1]$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution que l'on choisit de noter x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. En déduire que (x_n) converge et donner sa limite.

Exercice N° 30 :

1. Pour $n \geqslant 2$, montrer que l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0$$

d'inconnue $x \in]0, 1]$ possède une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de (x_n).
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice N° 31 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation

$$x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une unique solution x_n.
2. Étudier la convergence de (x_n).
3. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice N° 32 :

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation

$$x^n = x + n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ possède une unique solution x_n.
2. Montrer que (x_n) converge vers 1.
3. Détermine un développement asymptotique à deux termes de la suite (x_n).

Exercice N° 33 :

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation

$$\sin(x) = \frac{x}{n}$$

d'inconnue $x \in]0, \pi[$ possède une unique solution x_n.
2. Étudier la monotonie de (x_n).
3. Montrer que la suite (x_n) converge et préciser sa limite.
4. Montrer que $x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. (a) Calculer le développement limité de la fonction arcsin à l'ordre 3 en 0.
   (b) En déduire un développement asymptotique de (x_n) à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction des exercices

Solution Exercice N° 1 :

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(2x)-\mathrm{ch}(x) &= \left(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\right)\times\left(1+2x^2+\frac{2}{3}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\right)-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\right)\\ &= x+2x^3+\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{3}x^5+\frac{1}{120}x^5-1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\\ &= -1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{121}{120}x^5+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-e^x &= \left(1+x+x^2+x^3\ \underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\circ(x^3)+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(x)\ln(1+x) &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\right)\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\right)\\ &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\\ &= x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 2 :

1.

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) &= \ln(1+x^2)-\ln(1+x) = x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\ &= -x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &= \ln\left(1+x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\ &= x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).\end{aligned}$$

3. On pose $u=x-1$.

$$\begin{aligned}\cos(\ln(x)) &= \cos(\ln(1+u)) = \cos\left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\underset{x\to 0}{\circ}(u^3)\right)\\ &= 1-\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+\underset{x\to 0}{\circ}(u^3)\right)^2+\underset{x\to 0}{\circ}(u^3)\\ &= 1-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u^3+\underset{x\to 0}{\circ}(u^3) = 1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^3).\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 3 :

1.

$$\begin{aligned}\ln(1+e^x) &= \ln\left(2+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\ &= \ln(2)+\ln\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\ &= \ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^2+\\ &\qquad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\ &= \ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\ &= \ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\ln(2+\sin(x)) &= \ln\left(2+x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^2+\\
&\qquad +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3+\cos x} &= \sqrt{4-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}\\
&= 2\sqrt{1-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}\\
&= 2\left(1-\frac{1}{16}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= 2-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 4 :

1.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+x}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= e\times\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= e\times\left(1\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\right)^2+\right.\\
&\qquad \left.\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\right)^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= e\times\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{48}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{\mathrm{e}}{48}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sqrt{1+x}) &= \ln\left(1+1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3\right)^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3-\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{192}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= \ln(2)+\frac{1}{4}x-\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{96}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) &= \ln\left(3++3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)+1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \ln\left(4+2x+2x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= 2\ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3\right)^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= 2\ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= 2\ln(2)+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{8}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 5 :

1.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{1/x} &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\right)\\
&= \exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= e\times\exp\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= e\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= e\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) &= \ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\right)\\
&= -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4\right)^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\\
&= -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{72}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\\
&= -\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right) &= \ln\left(1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\right)\\
&= \frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4\right)^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\\
&= \frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{72}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)\\
&= \frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 6 :

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} &= \frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)}\\
&= \frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\\
&= \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\\
&= 1-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{11}{24}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(x)}{\tan(x)} &= \frac{x-\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)}{x+\frac{1}{3}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\\
&= \frac{1-\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}{1+\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\\
&= \left(1-\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\times\left(1-\frac{1}{3}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\\
&= 1-\frac{2}{3}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} &= \frac{-1+x+\underset{x\to0}{o}(x^2)}{2-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{-1+x+\underset{x\to0}{o}(x^2)}{1-\frac{1}{4}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\\
&= \frac{1}{2}\times\left(-1+x+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\times\left(1+\frac{1}{4}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 7 :

1.

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin x}{1-\cos x} &= \frac{\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\underset{x\to0}{o}(x^5)}{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^5)}\\
&= 2\times\frac{\frac{1}{6}x-\frac{1}{120}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)}{1-\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\\
&= 2\times\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{120}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\\
&= 2\times\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{120}x^3+\frac{1}{72}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3)\right)\\
&= \frac{1}{3}x+\frac{1}{90}x^3+\underset{x\to0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1} &= \frac{x-\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}{x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}\\
&= \frac{1-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}\\
&= \left(1-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{4}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{6}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)\\
&= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1} &= \frac{x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{24}x^5\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)-x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{120}x^5+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^5)}\\
&= \frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}\\
&= 2\times\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}{1+\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)}\\
&= 2\times\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\times\left(1-\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)\\
&= \frac{2}{3}x+\frac{1}{15}x^3-\frac{1}{18}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\\
&= \frac{2}{3}x+\frac{1}{90}x^3+\underset{x\to 0}{\circ}(x^3).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 8 :

1. On pose $u = x - \pi/4$.

$$\begin{aligned}
\sin(x) = \sin(u+\pi/4) &= \sin(u)\cos(\pi/4)+\cos(u)\sin(\pi/4)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u-\frac{1}{6}u^3+1-\frac{1}{2}u^2+\underset{u\to 0}{\circ}(u^3)+\underset{u\to 0}{\circ}(u^3)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+u-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{6}u^3+\underset{u\to 0}{\circ}(u^3)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3+\underset{x\to\pi/4}{\circ}((x-\pi/4)^3).
\end{aligned}$$

2. On pose $u = x - 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{x^2} &= \frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2}\\
&= \frac{u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+\underset{u\to 0}{\circ}(u^4)}{1+2u+u^2}\\
&= \left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+\underset{u\to 0}{\circ}(u^4)\right)\times\left(1-2u+3u^2-4u^3+\underset{u\to 0}{\circ}(u^3)\right)\\
&= u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4-2u^2+u^3-\frac{2}{3}u^4+3u^3-\frac{3}{2}u^4-4u^4+\underset{u\to 0}{\circ}(u^4)\\
&= u-\frac{5}{2}u^2+\frac{13}{3}u^3-\frac{77}{12}u^4+\underset{u\to 0}{\circ}(u^4)\\
&= (x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2+\frac{13}{3}(x-1)^3-\frac{77}{12}(x-1)^4+\underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^4).
\end{aligned}$$

3. On pose $u = x - 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{\ln(x)} &= \frac{u}{\ln(1+u)}\\
&= \frac{u}{u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \underset{u\to 0}{\circ}(u^3)}\\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u^2 + \underset{u\to 0}{\circ}(u^2)}\\
&= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{4}u^2 + \underset{u\to 0}{\circ}(u^2)\\
&= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{12}u^2 + \underset{u\to 0}{\circ}(u^2)\\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^2).
\end{aligned}$$

4. Notons $f : x \mapsto \arctan x$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1.
$f(1) = \frac{\pi}{4}$.
$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.
$f'' : x \mapsto -2\frac{x}{(1+x^2)^2}$ donc $f''(1) = -\frac{1}{2}$.
$f''' : x \mapsto -2\frac{(1+x^2)^2 - 2x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ donc $f'''(1) = \frac{1}{2}$.
Par la formule de Taylor-Young, on en déduit que

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{\circ}((x-1)^3).$$

Solution Exercice N° 9 :

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Notons F la primitive de f s'annulant en 0 dont l'existence est assurée par le théorème fondamental de l'analyse.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = F(x^2) - F(x).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} &= 2xF'(x^2) - F'(x)\\
&= \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\\
&= 2x - x^9 - 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^9).
\end{aligned}$$

Par intégration termes à termes, on obtient

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{10}).$$

2. Par la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{1000!})\right)\\
&= x + \ln\left(1 - e^{-x}\left(\frac{1}{1000!}x^{1000} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{1000})\right)\right)\\
&= x + \ln\left(1 - \left(1 + \underset{x\to 0}{\circ}(1)\right) \times \left(\frac{1}{1000!}x^{1000} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{1000})\right)\right)\\
&= x + \ln\left(1 - \frac{1}{1000!}x^{1000} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{1000})\right)\\
&= x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{1000}).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 10 : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2) > 0$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. La fonction f induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $\mathbb{R}$. Cette dernière admet donc un $DL_5(0)$ selon le théorème de Taylor-Young.
Comme f est impaire alors f^{-1} aussi : le $DL_5(0)$ de f^{-1} est donc de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5).$$

Pour déterminer les coefficients a, b et c, exploitons la relation $f^{-1}(f(x)) = x$. Nous avons

$$\begin{aligned}
x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}&\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5)\right) \\
&= a\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right) + b\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right)^3 + c\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right)^5 + \underset{x\to 0}{\circ}\left((x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) \\
&= ax + (a+b)\,x^3 + \left(\frac{a}{2} + 3b + c\right)x^5 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5).
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, nous obtenons

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ \frac{a}{2} + 3b + c = 0 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1$, $b = -1$ et $c = \frac{5}{2}$ puis

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5).$$

Solution Exercice N° 11 :

1. f est clairement dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Soit $x \neq 0$.
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^{n-1}\sin\frac{1}{x}.$$
   Pour tout $x \neq 0$, $0 \leqslant \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant |x|^{n-1}$.
   Par le théorème d'encadrement (et vu que $n - 1 \geqslant 1$) alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, pour $x \neq 0$.
   Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \neq 0$, $0 \leqslant \left|\frac{f(x)}{x^{n-1}}\right| \leqslant x$.

   Par le théorème d'encadrement (et vu que $n - 1 \geqslant 1$) alors $\frac{f(x)}{x^{n-1}}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, pour $x \neq 0$.
   Comme $f(0) = 0$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{\circ}(x^{n-1})$.
   f admet donc un développement limité à l'ordre $n - 1$.
   sin n'admet pas de limite en $+\infty$. Ainsi $x \mapsto \frac{f(x)}{x^n}$ n'admet pas de limite en 0.
   Par conséquent, f n'admet pas de développement limité à l'ordre n.

Solution Exercice N° 12 :

1.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n} \times \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \\
&= \sqrt{n} \times \left(2 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \\
&= \sqrt{n} \times \left(2 - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} - 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n} \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n} \times \left(\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n} &= \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln(n)+\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= 1+\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{\ln^2(n)}{2n^2}-1-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln^2(n)}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right).\\
&= -\frac{\ln(n)}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln(n)}{n^2}.
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 13 :

1.

$$n\sin\frac{1}{n}=n\times\left(\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\underset{n\to+\infty}{\circ}(1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \exp\left(n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(n^2\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{6}+\underset{n\to+\infty}{\circ}(1)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt[6]{e}}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
n^2\left((n+1)^{1/n}-n^{1/n}\right) &= n^2\times\left(\exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\\
&= n^2\times\left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\\
&= n^2\times\left(1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{\ln^2(n)}{2n^2}-1-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= 1+\underset{n\to+\infty}{\circ}(1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 14 :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(\frac{e^{\frac{\ln(a)}{n}}+e^{\frac{\ln(b)}{n}}}{2}\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(\frac{1+\frac{\ln(a)}{n}+1+\frac{\ln(b)}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)}{2}\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(a)}{2n}+\frac{\ln(b)}{2n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+\underset{n\to+\infty}{\circ}(1)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 15 :

$$\begin{aligned}
\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(3e^{\frac{\ln(2)}{n}}-2e^{\frac{\ln(3)}{n}}\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(3+\frac{3\ln(2)}{n}-2-\frac{2\ln(3)}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{3\ln(2)}{n}-\frac{2\ln(3)}{n}+\underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(3\ln(2)-2\ln(3)+\underset{n\to+\infty}{\circ}(1)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 16 : f est classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{\circ}(x^n).$$

Par ailleurs,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{4+6k} + + \underset{x\to 0}{\circ}(x^{4+6n}).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que

$$f^{(n)}(0) = \left\{ \begin{array}{ll} n! \times (-1)^k & \text{s'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 4+6k \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Solution Exercice N° 17 :

1.

$$\begin{aligned} x(2+\cos x) - 3\sin x &= x(2+1-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^4)) - 3(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5)) \\ &= \frac{x^5}{60} + \underset{x\to 0}{\circ}(x^5) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{60}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x^x - (\sin x)^x &= e^{x\ln(x)} - e^{x\ln(\sin(x))} \\ &= e^{x\ln(x)} - e^{x\ln(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^3))} \\ &= e^{x\ln(x)} - e^{x\ln(x) + x\ln(1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2))} \\ &= e^{x\ln(x)} \times \left(1 - e^{-\frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

3.

$$\arctan(2x) - 2\arctan(x) = \left(2x - \frac{1}{3}(2x)^3 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right) - 2\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3.$$

Solution Exercice N° 18 :

1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^3)\right)^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \times \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) - 1\right) \\ &= \frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{\circ}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)} \\ &= \frac{1}{x} \times \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)}\right) \\ &= \frac{1}{x} \times \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{\circ}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x} &= \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{x}\\
&= \frac{e^{1-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{\circ}(x)}-e}{x}\\
&= e\times\frac{e^{-\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{\circ}(x)}-1}{x}\\
&= -\frac{e}{2}+\underset{x\to 0}{\circ}(1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 19 :

1. On pose $u=2-x$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} &= \exp\left(\frac{1}{u}\ln\left(\frac{4\cdot 2^{-u}+9\cdot 3^{-u}}{8\cdot 2^{-u}+5\cdot 5^{-u/2}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{u}\ln\left(\frac{4e^{-u\ln(2)}+9e^{-u\ln(3)}}{8e^{-u\ln(2)}+5e^{-u/2\ln(5)}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{u}\ln\left(\frac{13-4u\ln(2)-9u\ln(3)+\underset{u\to 0}{\circ}(u)}{13-8u\ln(2)-5/2u\ln(5)+\underset{u\to 0}{\circ}(u)}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{u}\ln\left(1-\frac{4}{13}\ln(2)u-\frac{9}{13}\ln(3)u+\underset{u\to 0}{\circ}(u)\right)-\frac{1}{u}\ln\left(1-\frac{8}{13}\ln(2)u-\frac{5}{26}\ln(5)u+\underset{u\to 0}{\circ}(u)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{u}\left(-\frac{4}{13}\ln(2)u-\frac{9}{13}\ln(3)u+\frac{8}{13}\ln(2)u+\frac{5}{26}\ln(5)u+\underset{u\to 0}{\circ}(u)\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{4}{13}\ln(2)-\frac{9}{13}\ln(3)+\frac{8}{13}\ln(2)+\frac{5}{26}\ln(5)+\underset{u\to 0}{\circ}(1)\right)\\
&\underset{u\to 0}{\longrightarrow}\exp\left(-\frac{4}{13}\ln(2)-\frac{9}{13}\ln(3)+\frac{8}{13}\ln(2)+\frac{5}{26}\ln(5)\right)=\frac{1}{3}6^{4/13}5^{5/26}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \exp\left(x\ln(x)\left(\ln(\ln(1+x))-\ln(\ln(x))\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln(x)\left(\ln(\ln(x)+\ln(1+1/x))-\ln(\ln(x))\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln(x)\left(\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x\ln(x)}+\underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln(x)\left(\frac{1}{x\ln(x)}+\underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)\right)\right)\\
&= e^{1+\underset{x\to+\infty}{\circ}(1)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}e.
\end{aligned}$$

3. On pose $u=x-a$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^a-a^x}{\arctan x-\arctan a} &= \frac{x^a-a^x}{x-a}\times\frac{x-a}{\arctan x-\arctan a}\\
&= \frac{(a+u)^a-a^{u+a}}{u}\times\frac{u}{\arctan(a+u)-\arctan a}\\
&= a^a\frac{1+u/a)^a-e^{u\ln(a)}}{u}\times\frac{u}{\arctan(a+u)-\arctan a}\\
&= a^a\frac{u-u\ln(a)+\underset{u\to 0}{\circ}(u)}{u}\times\frac{u}{\arctan(a+u)-\arctan a}\\
&= a^a\times(1-\ln(a)+\underset{u\to 0}{\circ}(1))\times\frac{u}{\arctan(a+u)-\arctan a}\underset{u\to 0}{\longrightarrow}a^a(1+a^2)(1-\ln(a)).
\end{aligned}$$

Solution Exercice N° 20 :

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\underset{x\to 0}{\circ}(x^4)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2+\underset{x\to 0}{\circ}(x^2).$$

Ainsi f admet une développement limité à l'ordre 1 et 0. f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note encore f ce prolongement et on a $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{3}$.
La droite d'équation $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ est la tangente en 0 de prolongement
Au voisinage de 0, la courbe est en-dessus de sa tangente.

Solution Exercice N° 21 : f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$f(x) = \frac{x}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\circ}(x)} = 1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\circ}(x).$$

Ainsi f admet une développement limité à l'ordre 1 et 0. f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note encore f ce prolongement et on a $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 1 - x(1+x) + \underset{x\to 0}{\circ}(x^2)}{(x + \underset{x\to 0}{\circ}(x))^2} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{\circ}(1).$$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution Exercice N° 22 :

$$f(x) = (x+1) \times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 2 + \frac{3}{2x} + \underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Solution Exercice N° 23 :

$$f(x) = x\ln(2 + 1/x) = x\ln(2) + x\ln(1 + 1/(2x)) = x\ln(2) + \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi la droite d'équation $y = x\ln(2)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Solution Exercice N° 24 : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Montrons par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\ \exists P_n \in \mathbb{R}[x]\ /\ \forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x^2}}\ \text{"}.$$

— $P_0 = 1$ convient et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un n quelconque. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. En dérivant la relation,

$$\forall x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

nous obtenons

$$\forall x \neq 0,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)x^2 - 2nxP_n(x) + 2P_n(x)}{x^{2(n+1)}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

On pose alors $P_{n+1} : x \mapsto P_n'(x)x^2 - 2nxP_n(x) + 2P_n(x)$ pour obtenir $\mathcal{P}(n+1)$.

La récurrence est donc achevée.
Par croissance comparée, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x) = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, on en déduit d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^\infty$ que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Solution Exercice N° 25 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour $x \in I_n$, posons $f(x) = \tan(x) - x$.
   f est dérivable sur I_n et, pour tout $x \in I_n$, $f'(x) = \tan^2(x) > 0$, sauf en $x = n\pi$.
   Ainsi f est strictement croissante sur I_n.
   $\lim\limits_{\substack{x\to n\pi - \frac{\pi}{2}\\ x > n\pi - \frac{\pi}{2}}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n\pi + \frac{\pi}{2}\\ x < n\pi + \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.
   Par conséquent, f est bijective de I_n dans $\mathbb{R}$.
   L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

2. On a :

$$\arctan(x_n) = \arctan\tan x_n = \arctan\tan(x_n - n\pi) = x_n - n\pi$$

puisque $x_n - n\pi \in]-\pi/2, \pi/2[$.

3. Comme $x_n \geqslant n\pi - \pi/2$ alors, par le théorème de comparaison, (x_n) tend vers $+\infty$.
Par conséquent, la suite $(x_n - n\pi)$ converge vers $\pi/2$ et donc $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}(1)$.

4. On écrit $x_n = n\pi + \pi/2 + \epsilon_n$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
Comme $\tan(x_n) = x_n$ alors $n\pi + \pi/2 + \epsilon_n = -\frac{1}{\tan(\epsilon_n)}$.
Ainsi $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi}$ puis

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right).$$

5.

$$\begin{aligned} x_n = n\pi + \arctan(x_n) &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Solution Exercice N° 26 :

1. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{ch}(x) > 0$ et $\mathrm{sh}(x) > 0$ donc $\mathrm{th}(x) > 0$.
Pour $x > 0$, on pose $g(x) = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. g est dérivable et, pour tout $x > 0$, $g'(x) = x\,\mathrm{sh}(x) > 0$. Ainsi g est strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ alors g est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, pour tout $x > 0$, $x > \mathrm{th}(x)$.

2. f est paire donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Les variations sont les suivantes.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'		$+$	$\Vert$	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

3.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

4. f est strictement monotone et continue sur $]0, +\infty[$. $\frac{n+1}{n} \in]1, +\infty[= f(]0, +\infty[$.
Par le théorème de la bijection, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.

5. $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$. Ainsi $f(u_n) > f(u_{n+1})$.
Comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ alors $u_n < u_{n+1}$.
La suite (u_n) est strictement croissante.

6. Notons f^{-1} la fonction inverse de $f_{|\mathbb{R}^{+\star}}^{|]1,+\infty[}$.
On a : $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f^{-1}(x) = +\infty$.
Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que (u_n) tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

7. $f(u_n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Ainsi

$$1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$

Puis

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}.$$

Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}$.

Solution Exercice N° 27 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   Pour $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1 = 0$.
   f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$, et pour tout $x \in]0,1[$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geqslant 1 > 0$.
   Ainsi f_n est strictement croissante sur $]0,1[$ et induit donc une bijection de $]0,1[$ dans $f_n(]0,1[) =]-1,1[$.
   $0 \in]-1,1[$ donc l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,1[$, possède une unique solution.
2. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 \leqslant x_n^n + x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$.
   Ainsi $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$. On en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$.
   La suite (x_n) est donc croissante. Comme (x_n) est majorée (en l'occurrence par 1) alors (x_n) converge vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
   Si $0 \leqslant \ell < 1$ alors, de $x_n^n = e^{n\ln(x_n)}$, on en déduit que (x_n^n) converge vers 0.
   La suite $(1 - x_n)$ converge vers $1 - \ell$. Comme $x_n^n = 1 - x_n$, par unicité de la limite, on a $\ell = 0$.
   C'est absurde et donc $\ell = 1$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\delta_n = 1 - x_n$.
   (a) $\ln(\delta_n) = \ln(1 - x_n) = \ln(x_n^n) = n\ln(x_n) = n\ln(1 - \delta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\delta_n$ puisque (δ_n) converge vers 0.
   (b) Par comparaison des infiniment grands, on en déduit que $\ln(-\ln(\delta_n)) - \ln(\delta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\delta_n)$
   Ainsi $\ln(\delta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Ainsi $-n\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$ puis $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
   (d) On en déduit que
   $$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Solution Exercice N° 28 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = x + \ln(x)$.
   f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
   Ainsi f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   f induit donc une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.
   Comme $n \in \mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution $x_n \in]0,+\infty[$.
   $x_n = f^{-1}(n)$.
   f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc (x_n) est strictement croissante.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
   Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que (x_n) tend vers $+\infty$.
3. $n = x_n + \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.
   Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. On écrit $x_n = n + n\epsilon_n$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
   $n = x_n + \ln(x_n)$ donc $0 = n\epsilon_n + \ln(n) + \ln(1 + \epsilon_n)$.
   Ainsi $-\ln(n) = n\epsilon_n + \ln(1 + \epsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\epsilon_n$.
   Ainsi $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n}$ puis $x_n = n - \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{\circ}\big(\ln(n)\big)$.

Solution Exercice N° 29 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$.
   f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in]0,1]$, $f_n'(x) = 1 + x + \cdots + nx^{n-1} > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $]0,1]$.
   f_n induit donc une bijection de $]0,1]$ dans $f_n(]0,1]) =]0,n]$. Or $1 \in]0,n]$ donc l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in]0,1]$, admet une unique solution notée x_n.
2. $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n = x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^{n+1} - x_{n+1}^{n+1} = 1 - x_{n+1}^{n+1} < 1$.
   Ainsi $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$, comme f_n est strictement croissante, on a donc $x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n) est strictement décroissante.
   $f_n(1/2) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 = f_n(x_n)$.
   Ainsi, comme f_n est strictement croissante, on a donc $x_n > \frac{1}{2}$.
   (x_n) est donc minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Par le théorème de la limite monotone, (x_n) converge donc vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$.
   Pour tout $x \in]0,1[$, $f_n(x) = x \times \frac{1 - x^n}{1 - x}$.
   Pour $n \geqslant 2$, $x_n < x_1 = 1$ donc, par passage à la limite dans l'égalité $1 = x_n \times \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$, on obtient $1 = \frac{\ell}{1 - \ell}$ puis $\ell = \frac{1}{2}$.

Solution Exercice N° 30 :

1. Soit $n \geqslant 2$.
   Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.
   f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ et, pour tout $x \in]0,1]$, $f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$.
   f_n est donc strictement décroissante sur $]0,1]$.
   f_n induit donc une bijection de $]0,1]$ dans $f_n(]0,1]) = [2 - n, 1[$.
   Or $0 \in [2 - n, n[$ donc l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,1]$, possède une unique solution x_n.

2. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leqslant x_n^n - (n+1)x_n + 1 = -x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Comme f_{n+1} est strictement décroissante alors $x_n > x_{n+1}$.
La suite (x_n) est donc strictement décroissante. Etant minoré par 0, elle converge vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
$x_n^n + 1 = nx_n$. Comme la suite (x_n^n) est bornée alors, nécessairement, $\ell = 0$ (sinon (nx_n) aurait une limite égale à $+\infty$).
3. $x_n^n = e^{n\ln(x_n)}$. Or (x_n) converge vers 0 donc (x_n^n) converge vers 0. Ainsi $(x_n^n + 1)$ converge vers 1. Or $x_n^n + 1 = nx_n$ donc (nx_n) converge vers 1 et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Solution Exercice N° 31 :

1. Soit $n \geqslant 2$.
Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$.
f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1]$ et, pour tout $x \in]0,1]$, $f_n'(x) = \sqrt{n}(x^{n-1} + \sqrt{n}) > 0$.
f_n est donc strictement croissante sur $]0,1]$.
f_n induit donc une bijection de $]0,1]$ dans $f_n(]0,1]) =]-1, \sqrt{n}]$.
Or $0 \in]-1, \sqrt{n}]$ donc l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,1]$, possède une unique solution x_n.
2. $f_n(1/\sqrt{n}) = n^{n/2} > 0 = f_n(x_n)$. Comme f_n est strictement croissante, on en déduit que $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
La suite (x_n) converge donc vers 0 par le théorème d'encadrement.
3. $x_n^n = e^{n\ln(x_n)}$. Or (x_n) converge vers 0 donc (x_n^n) converge vers 0. Ainsi $(1 - x_n^n)$ converge vers 1. Or $1 - x_n^n = x_n\sqrt{n}$ donc $(x_n\sqrt{n})$ converge vers 1 et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution Exercice N° 32 :

1. Pour $n \geqslant 2$, on définit la fonction
$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - n \end{array}$$
f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1$. On en déduit les variations suivantes pour f_n :

x	0		$\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	
f_n	$-n$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}^+$.
2. En exploitant que, pour tout $u \geqslant -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$, on obtient
$$f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} - n < e - 1 - n - \frac{1}{n} \leqslant 0 = f_n(x_n)$$
puisque $n \geqslant 2$ et $e \leqslant 3$.
Or $\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \leqslant 1 \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.
La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
L'inégalité $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) < f_n(x_n)$ permet d'en déduire que $1 + \frac{1}{n} < x_n$.
De plus,
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} - x_n - (n+1) \\ &= x_n(x_n + n) - x_n - n - 1 \\ &= x_n^2 + x_n(n-1) - (n+1) \\ &\geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)(n-1) - (n+1) \\ &\geqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> 0 = f_{n+1}(x_{n+1}). \end{aligned}$$
Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ alors $x_{n+1} < x_n$.
Ainsi, la suite (x_n) est strictement décroissante.
Etant minorée par 1, on en déduit, par le théorème de la limite monotone, que (x_n) converge vers une limite ℓ vérifiant $\ell \geqslant 1$.
On a : $n\ln(x_n) = \ln(x_n^n) = \ln(x_n + n)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > 1$.
Le terme de gauche de l'égalité est équivalent à $\ln(\ell)n$.
Le terme de droite de l'égalité est équivalent à $\ln(n)$.
C'est absurde car le quotient de ces deux quantités ne converge pas vers 1.
Ainsi $\ell = 1$. (x_n) converge vers 1.

3. On écrit $x_n = 1 + \epsilon_n$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
   On a : $n\ln(x_n) = n\ln(1+\epsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\epsilon_n$.
   On a : $\ln(x_n + n) = \ln(n + 1 + \epsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   Comme ces deux quantités sont égales, on en déduit que $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
   Ainsi
$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Solution Exercice N° 33 :

1. Soit $n \geqslant 2$. Pour $x \in]0, \pi[$, on pose $f_n(x) = \sin(x) - \frac{x}{n}$.
   f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \pi[$ et, pour tout $0 < x < \pi$, $f_n'(x) = \cos(x) - \frac{1}{n}$.
   On en déduit les variations suivantes pour f_n :

x	0		$\arccos(1/n)$		π
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{n}$

   Ainsi l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0, \pi[$, possède une unique solution x_n.
2. $f_n(x_{n+1}) = \sin(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}}{n} < \sin(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}}{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
   Ainsi $f_n(x_{n+1}) < 0$.
   Au vu des variations de f_n, on a donc $x_{n+1} > x_n$.
   La suite (x_n) est donc strictement croissante.
3. (x_n) est strictement croissante et majorée par π. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite ℓ vérifiant $0 < \ell \leqslant \pi$.
   En passant à la limite dans l'égalité $\sin(x_n) = \frac{x_n}{n}$, on obtient $\sin(\ell) = 0$. Comme $\ell \in]0, \pi]$ alors $\ell = \pi$.
4. On écrit $x_n = \pi + \epsilon_n$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
   De $\sin(x_n) = \frac{x_n}{n}$, on en déduit que $-\sin(\epsilon_n) = \frac{\pi}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}$.
   Comme (ϵ_n) converge vers 0 alors on obtient $-\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{o} \frac{\pi}{n}$.
   Ainsi $\epsilon_n = -\frac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ puis $x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. (a) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$.
   Par intégration, on obtient $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$.

   (b) On écrit $x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\epsilon_n}{n}$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
   De $\sin(x_n) = \frac{x_n}{n}$ alors on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\epsilon_n}{n}\right) = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}$.
   Ainsi
$$\frac{\pi}{n} - \frac{\epsilon_n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Ainsi $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$ puis
$$x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   On écrit $x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} + \frac{\epsilon_n}{n^2}$ avec (ϵ_n) qui converge vers 0.
   De $\sin(x_n) = \frac{x_n}{n}$ alors on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} - \frac{\epsilon_n}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{n^3} + \frac{\epsilon_n}{n^3}$.
   Comme $\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} - \frac{\epsilon_n}{n^2}\right)$ converge vers 0 alors, à partir d'un certain rang,
$$\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} - \frac{\epsilon_n}{n^2} = \arcsin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{n^3} + \frac{\epsilon_n}{n^3}\right) = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{n^3} + \frac{\epsilon_n}{n^3} + \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
   Ainsi $\epsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{n}$ puis
$$x_n = \pi - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} - \frac{\pi}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$