

Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1 ★

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto te^{-3t^2}$

2. $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^4}$

3. $t \mapsto \frac{1}{\text{th } t}$

4. $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$

5. $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$

6. $t \mapsto \tan^2 t$

7. $t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$

8. $t \mapsto \frac{1}{t+\sqrt{t}}$

9. $t \mapsto \frac{\ln(\ln t)}{t}$

10. $t \mapsto e^{e^t+t}$

11. $t \mapsto \frac{1}{t+t(\ln t)^2}$

12. $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2 t}$

Exercice 2 ★

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

1. $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$

2. $J_{m,n} = \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt$

3. $K_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt$

Exercice 3 ★

Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad J = \int_0^1 \sqrt{e^x} dx, \quad K = \int_0^2 \frac{2^x dx}{\sqrt{2+2^x}}.$$

Exercice 4 ★★

Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad B = \int_0^\pi (\sin x)^3 dx, \quad C = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Exercice 5 ★

Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = (\sin(2x))^3 \cos(3x)$.

Exercice 6 ★

Calculer l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)^3 dx$.

Exercice 7 ★

Calcul par morceaux

Calculer, en fonction du nombre réel x , l'intégrale suivante

$$f(x) = \int_0^1 |x-t| dt.$$

Exercice 8 ★**Changements de variables**

Calculer :

1. $I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2(t)} dt$ en posant $u = \tan(t)$;

2. $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ en posant $u = \sqrt{x}$;

3. $K = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx$ en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$;

4. $L = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2 + u + 1}}$ en posant $x = \sqrt{u^2 + u + 1} - u$;

5. $M = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos(x)}$ en posant $u = \sin(x)$;

6. $N = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin(x)}$ en posant $u = \cos(x)$;

7. $O = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^3(x) dx$ en posant $u = \cos(x)$;

8. $P = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x) dx}{1 + \cos^2(x)}$ en posant $u = \cos(2x)$;

9. $Q = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ en posant $x = \cos(2u)$;

10. $R = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + x^{1/4}}{\sqrt{x+1}} dx$ en posant $u = x^{1/4}$.

Exercice 9 ★★Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et H la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que H ne s'annule pas.
2. On suppose la condition précédente satisfaite et on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{H(t)}$. Justifier que F est bien définie et continue sur \mathbb{R} et donner une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.
3. Calculer l'intégrale $F(2\pi)$.

Exercice 10 ★★★Soient α et β deux réels strictement positifs. On définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta \cos^2 x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} . On note F celle qui s'annule en 0.
2. Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer une expression de $F(x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{49 - 45 \sin^2 t}$.

Exercice 11 ★★★**TPE MP**Calculer $I = \int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x-a^2)(b^2-x)} dx$.

Exercice 12 ★

Calculer

1. $\int x \arctan^2(x) dx$
2. $\int e^x \sin^2(x) dx$
3. $\int \cos(\ln x) dx$ en posant $u = \ln x$
4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.
5. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

Exercice 13 ★★

On pose $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$.

1. Justifier que S et C sont bien définies.
2. Montrer que $S = C$ par changement de variable.
3. Que vaut $S + C$? En déduire S et C.
4. En déduire $I = \int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 14 ★★**Règles de Bioche**

Calculer

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{4 - \cos^2 t}$ en posant $u = \cos t$;
2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{\sin t}$ pour $x \in]0, \pi[$ en posant $u = \cos t$;
3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^3 t}$ en posant $u = \sin t$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \cos t}$ en posant $u = \tan \frac{t}{2}$.

Exercice 15 ★★Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire l'existence et une expression simple de $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$.

Exercice 16 ★

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$
2. $t \mapsto \frac{2-5t}{1+t^2}$
3. $t \mapsto \frac{3t+2}{2t^2-4t+3}$

Suites d'intégrales**Exercice 17 ★★**Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt.$$

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n .
2. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n \geq 0$.
3. Calculer I_n d'une autre manière et montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 18 ★★

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
3. En déduire que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 19 ★★

On considère la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Déterminer la limite de (I_n) .
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
3. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer S_n en fonction de I_n .
4. En déduire la convergence et la limite de (S_n) .

Exercice 20 ★★

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$$

2. En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21 ★★**D'après Centrale PSI 2016**

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\text{sh}(\alpha) = 1$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt$. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Justifier que (I_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite pour l'instant.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1)I_n$$

5. En déduire la limite de la suite (I_n) .

Fonctions intégrales**Exercice 22 ★**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \mapsto \int_0^1 f(t+x) dt.$$

Exercice 23 ★

Justifier que $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{1+e^t} dt$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 24 ★★★

Calculer les limites suivantes. On ne cherchera pas à calculer les intégrales.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 25 ★

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$$

1. Simplifier l'expression

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

2. Etudier les variations de F sur \mathbb{R}_+^* . Préciser les limites éventuelles de F en 0^+ et $+\infty$.

3. Tracer l'allure du graphe de F .

Exercice 26 ★★

Calculer pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt$$