

FONCTIONS USUELLES

SOLUTION 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel 1 est une solution évidente de l'équation ; puisque la fonction définie f sur \mathbb{R} par $f(x) = 2^x + 3^x$ est strictement croissante en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes, il s'agit de l'unique solution de l'équation.
2. Un réel x est solution de l'équation *si et seulement si*

$$3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{7}{2}},$$

ce qui équivaut à $3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+\frac{1}{2}}(1+2^3)$, puis à $3^{2x-3} = 2^{x-\frac{3}{2}}$ et donc à

$$(2x-3)\ln(3) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln(2).$$

Ainsi, l'unique solution de l'équation est

$$x = \frac{3\ln(3) - \frac{3}{2}\ln(2)}{2\ln(3) - \ln(2)} = \frac{3}{2}.$$

SOLUTION 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$. Pour x réel supérieur ou égal à 1, posons alors $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$ et donc f croît sur $[1, e]$ puis décroît.

- En particulier, pour n entier supérieur ou égal à $e = 2.71\dots$, on a $f(n) \leq f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\sqrt[n]{n} = e^{f(n)} \leq e^{f(3)} = \sqrt[3]{3} = 1,44\dots$$

Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1} = 1$ et $\sqrt[2]{2} = 1,41\dots$, pour tout entier naturel non nul, on a $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} \approx 1,44\dots$ est la valeur cherchée.

SOLUTION 3.

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $a < b$. On a alors,

$$\begin{aligned} a^b = b^a &\Leftrightarrow b \ln(a) = a \ln(b) \Leftrightarrow \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \\ &\Leftrightarrow f(a) = f(b) \end{aligned}$$

où f est la fonction étudiée $x > 0 \mapsto \ln(x)/x$. Après une étude sans difficulté, on prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Par suite, si a et b sont tous deux dans $[e, +\infty[$ ou encore dans $[3, +\infty[$, $f(a) \neq f(b)$ et le couple (a, b) n'est pas solution. Ceci impose donc $a = 2$ et $b \geq 3$. La fonction f étant strictement décroissante sur $[3, +\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ ou encore l'équation $2^b = b^2$ a au plus une solution dans cet intervalle. Cherchons cette éventuelle solution. Comme $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, puis $2^4 = 16 = 4^2$. Donc, $b = 2$ convient et il existe un et un seul couple solution, le couple $(2, 4)$.

SOLUTION 4.

Par stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , l'inégalité équivaut à

$$\forall x \in]0, 1[\quad x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2).$$

Posons alors, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) = x \ln(x) + (1 - x) \ln(1 - x).$$

Cette fonction est dérivable sur son intervalle de définition en tant que somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{x}{x} + \ln(x) + \frac{x-1}{1-x} - \ln(1-x) = \ln(x) - \ln(1-x).$$

Comme \ln est strictement croissante, $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1 - x$, i.e. $x > \frac{1}{2}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Elle admet ainsi un minimum sur $]0, 1[$ valant $f(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$, d'où le résultat.

SOLUTION 5.

Seuls les numéros 1. et 2. présentent des formes indéterminées.

1. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = e^{\ln(n) - \sqrt{\ln(n)}}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = e^{2 \ln(n) - \sqrt{n}}.$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 \ln(n) - \sqrt{n}) = -\infty$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}} \ln(n)}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. On a, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = n(\ln(n))^{\ln(n)}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

SOLUTION 6.

1. Puisque $\ln(4) < 3$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-3x} 4^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-3x} 4^x = +\infty.$$

2. D'après les théorèmes de comparaison usuels :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 4^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 4^x = 0.$$

3. D'après les théorèmes de comparaison usuels :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

4. Puisque $\ln(4) > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} 4^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} 4^x = 0.$$

SOLUTION 7.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f(x) = x^x$ existe lorsque $x > 0$ et dans ce cas, $f(x) = e^{x \ln(x)}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) x^x = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Puisque $x^x > 0$, $f'(x)$ est, sur $]0, +\infty[$, du signe de $\ln(x) + 1$. Par suite, f' est strictement négative sur l'intervalle $]0, \frac{1}{e}[$ et strictement positive sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$. f est donc strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}[$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$. f admet un minimum en $\frac{1}{e}$ égal à $(1/e)^{1/e} = 0.69\dots$

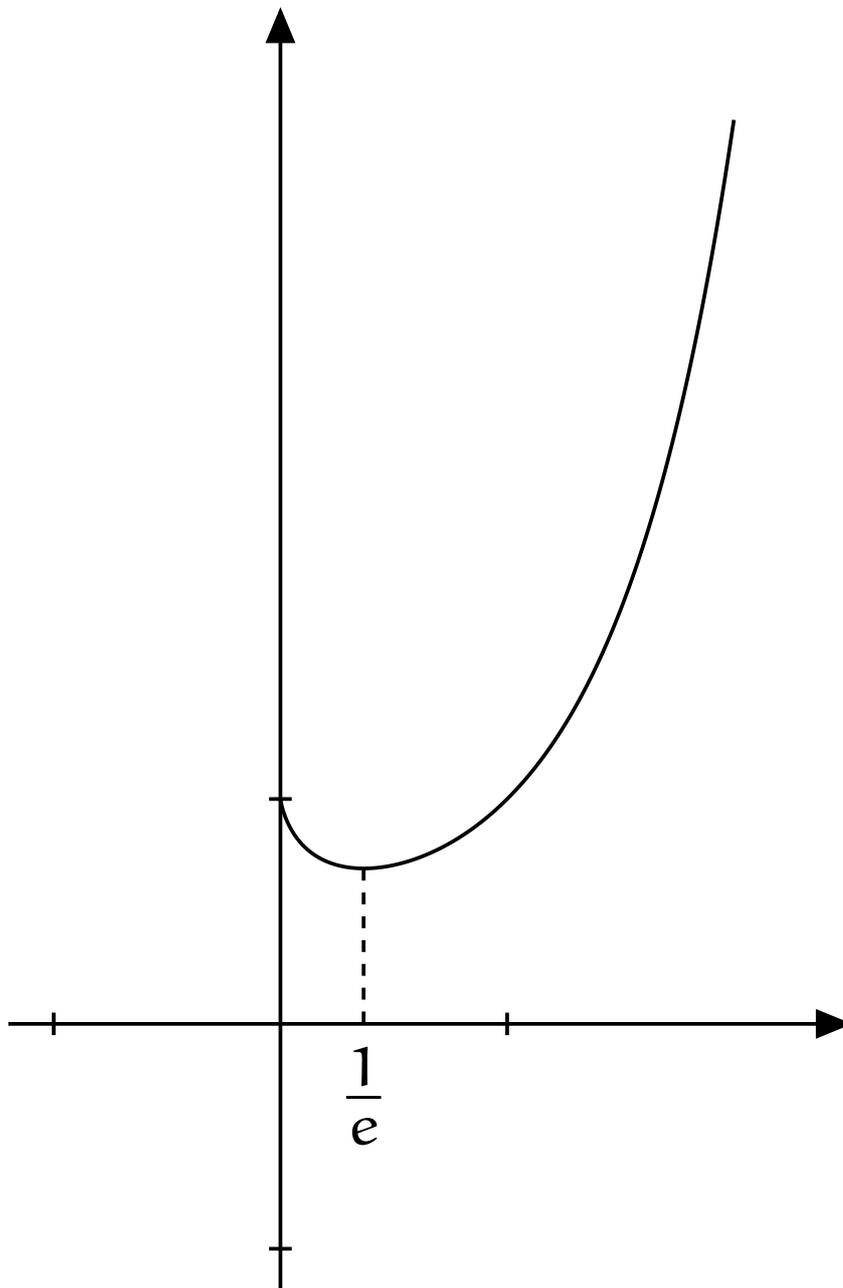
► Quand x tend vers 0, $x \ln(x)$ tend vers 0 et donc, $f(x)$ tend vers $e^0 = 1$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty,$$

la courbe représentative de f tend vers son point limite $(0, 1)$ avec une pente infinie.

► Quand x tend vers $+\infty$, $x \ln(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.

► On en déduit la courbe suivante,



SOLUTION 8.

1. f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$. f est donc strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
2. Si $f(x) = x$, alors $e^{\lambda e^{\lambda x}} = f(f(x)) = f(x) = x$.
3. Soit x solution de (E), ce qui équivaut à $f(f(x)) = x$. Supposons $f(x) > x$. Comme f est strictement croissante, $f(f(x)) > f(x)$ et donc $x > f(x)$. Il y a contradiction. De même, si on suppose $f(x) < x$, alors $x = f(f(x)) < f(x)$ et il y a également contradiction. C'est donc que $f(x) = x$.
4. g est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variations.

x	$-\infty$	$-\frac{\ln \lambda}{\lambda}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		$\frac{1+\ln \lambda}{\lambda}$	

L'équation $f(x) = x$ n'admet donc aucune solution si $\frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} > 0$. Elle admet une unique solution si $\frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} = 0$ et deux solutions si $\frac{1 + \ln \lambda}{\lambda} < 0$. Comme d'après les deux questions précédentes les solutions de $f(x) = x$ sont les solutions de (E), on en déduit :

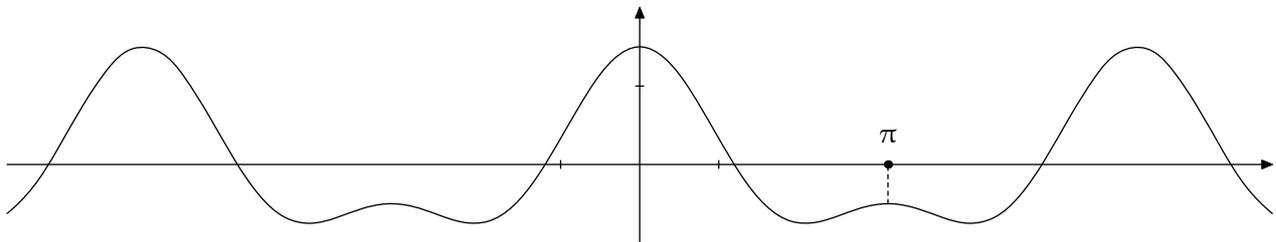
- ▶ Si $\lambda > \frac{1}{e}$, l'équation (E) n'admet aucune solution.
- ▶ Si $\lambda = \frac{1}{e}$, l'équation (E) admet une unique solution qui vaut e .
- ▶ Si $\lambda < \frac{1}{e}$, l'équation (E) admet deux solutions.

SOLUTION 9.

La fonction f est clairement paire et 2π -périodique, il suffit donc de l'étudier sur $[0, \pi]$. Elle est de plus dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle,

$$f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x) = -2\sin(x)[\cos(x) + 1/2]$$

Ainsi f' est négative sur $[0, 2\pi/3]$ puis positive sur $[2\pi/3, \pi]$, ne s'annulant qu'en $0, 2\pi/3$ et π . La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0, 2\pi/3]$ de $3/2$ à $-3/4$ et strictement croissante sur $[2\pi/3, \pi]$ de $-3/4$ à $-1/2$. On en déduit la courbe représentative.

**SOLUTION 10.**

1. On remarque que la fonction de l'énoncé, que nous noterons f , est 2π -périodique et paire. Il suffit donc de l'étudier sur $I = [0, \pi]$. Sur I , on a $\arccos(\cos(x)) = x$.

- ▶ Pour $x \in [0, \pi/2]$, $2x \in [0, \pi]$ et donc

$$\arccos(\cos(2x)) = 2x,$$

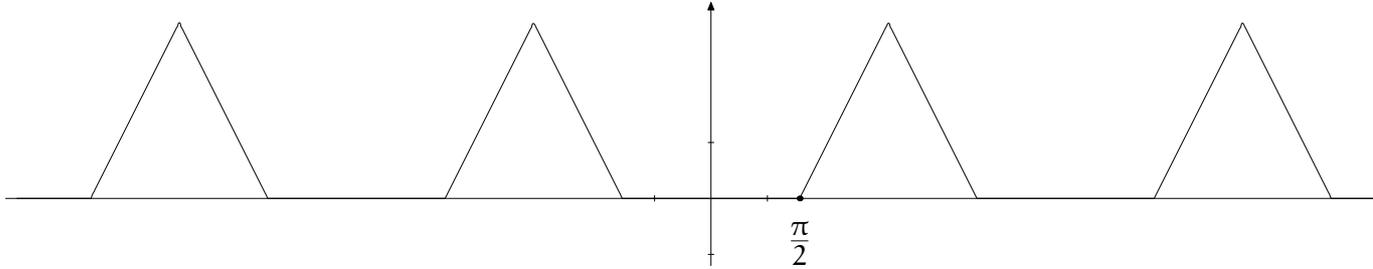
puis $f(x) = 0$.

- Pour $x \in [\pi/2, \pi]$, $2\pi - 2x \in [0, \pi]$ et a le même cosinus que $2x$, donc

$$\arccos(\cos(2x)) = 2\pi - 2x$$

et $f(x) = 2x - \pi$.

- D'où le graphe de f sur \mathbb{R} ,



2. On remarque que la fonction de l'énoncé, que nous noterons g , vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x) + \pi.$$

On déduira donc le graphe de g sur \mathbb{R} de celui sur $[0, 2\pi]$ par translations de vecteurs

$$k\vec{u} \text{ où } \vec{u} = 2\pi\vec{i} + \pi\vec{j}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Soit $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1 + \cos 2(\pi/4 - x/4)}{2}} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin \sqrt{\cos^2(\pi/4 - x/2)} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin \sqrt{\sin^2(\pi/4 - x/2)} \\ &= \frac{x}{2} - \arcsin |\sin(\pi/4 + x/2)|. \end{aligned}$$

- Pour $x \in [0, \pi/2]$, $\pi/4 + x/2 \in [0, \pi/2]$ donc

$$g(x) = x/2 - (\pi/4 - x/2) = -\pi/4.$$

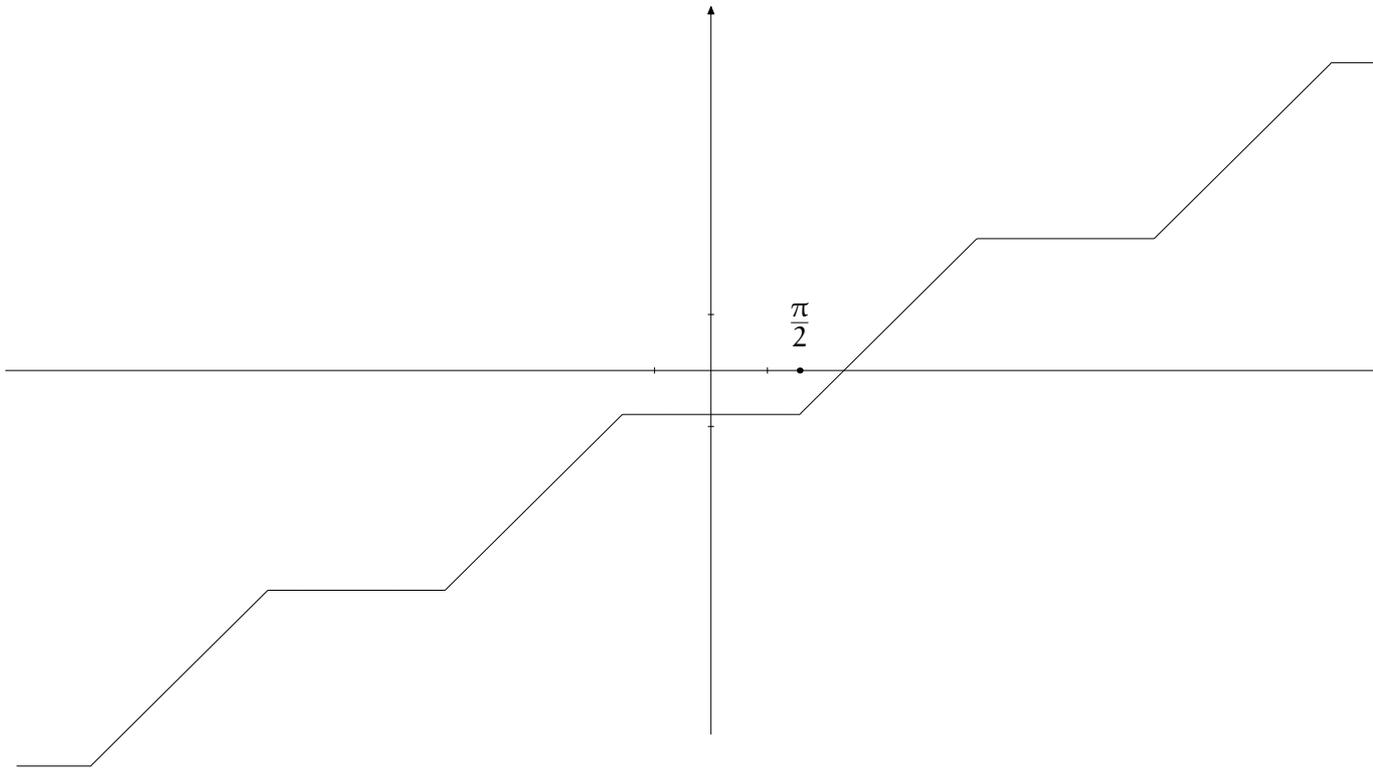
- Pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\pi/4 + (x/2) \in [\pi/2, \pi]$ donc

$$g(x) = x/2 - (\pi - \pi/4 - x/2) = -3\pi/4 + x.$$

- Pour $x \in [3\pi/2, 2\pi]$, $\pi/4 + (x/2) \in [\pi, 5\pi/4]$ donc

$$g(x) = x/2 - (\pi/4 + (x/2) - \pi) = 3\pi/4.$$

- D'où le graphe de g sur \mathbb{R} ,

**SOLUTION 11.**

1. Puisque pour tout x positif,

$$\arctan(x) = \pi/2 - \arctan(1/x),$$

l'équation est équivalente à

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque les nombres $1/2, 1/5$ et $1/8$ sont strictement compris entre 0 et $1/\sqrt{3} = \tan(\pi/6)$, leurs images par la fonction arctangente sont strictement comprises entre 0 et $\pi/6$. Posons

$$a = \arctan(1/2), \quad b = \arctan(1/5), \quad c = \arctan(1/8).$$

On a $a + b + c \in [0, \pi/2[$. L'égalité est donc équivalente à

$$\tan(a + b + c) = 1.$$

On a

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan(a + b) + \frac{1}{8}}{1 - \frac{\tan(a+b)}{8}}.$$

Or

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Ainsi,

$$\tan(a + b + c) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{72}} = \frac{65}{65} = 1.$$

2. La fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \arctan(x - 2) + \arctan(x) + \arctan(x + 3)$$

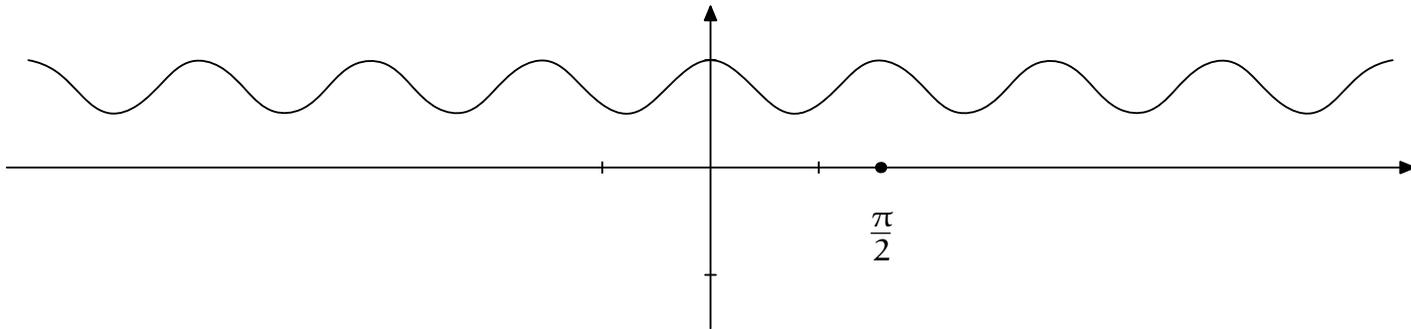
étant strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes, l'équation du 1. n'admet qu'une seule solution égale à 5.

SOLUTION 12.

- Soit f la première fonction ; f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cos(x) \sin^3(x) - 4 \sin(x) \cos^3(x) \\ &= 4 \cos(x) \sin(x) [\sin^2(x) - \cos^2(x)] \\ &= -2 \sin(2x) \cos(2x) = -\sin(4x) \end{aligned}$$

La fonction f étant paire et $\pi/2$ -périodique, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi/4]$. D'après le calcul de f' , f est décroissante sur cet intervalle : elle admet donc un minimum en $\pi/4$ valant $m = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}$, et un maximum en 0 valant 1. Voir la figure.



REMARQUE. En intégrant et en utilisant $f(0) = 1$, on obtient en fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{3}{4}.$$

Cette égalité peut également se retrouver par une linéarisation.

- Soit g la deuxième fonction ; g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5 \cos(x) \sin^4(x) - 5 \sin(x) \cos^4(x) \\ &= 5 \cos(x) \sin(x) [\sin^3(x) - \cos^3(x)] \\ &= \frac{5}{2} \sin(2x) [\sin(x) - \cos(x)] \\ &\quad \times [\sin^2(x) + \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x)] \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(2x) \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sqrt{2}} \times [1 + \sin(x) \cos(x)] \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(2x) \sin(x - \pi/4) \times [1 + \sin(x) \cos(x)] \end{aligned}$$

La fonction g étant clairement π -antipériodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple $[0, \pi]$. Puisque pour tout x réel,

$$1 + \cos(x) \sin(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2x) \geq 1 - \frac{1}{2} > 0,$$

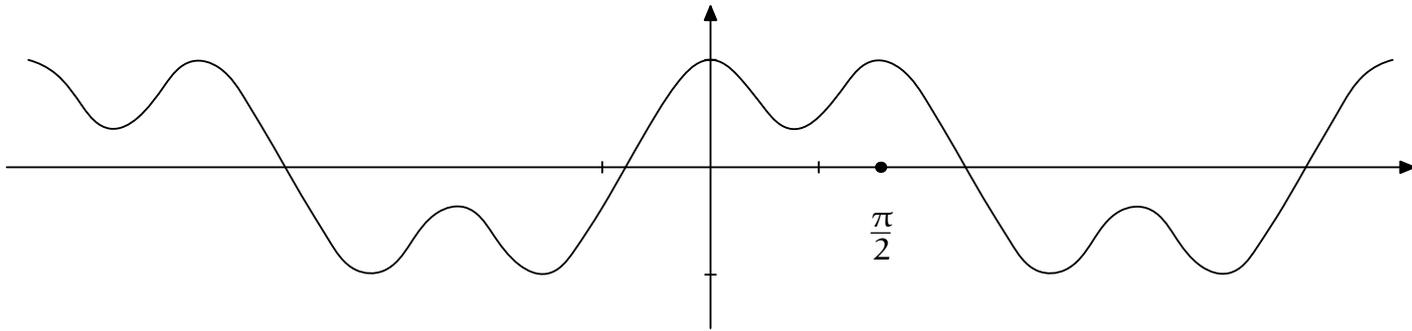
g' est du signe de $\sin(2x) \sin(x - \pi/4)$; ainsi g est décroissante sur $[0, \pi/4]$, croissante sur $[\pi/4, \pi/2]$, puis à nouveau croissante sur $[\pi/2, \pi]$. Pour déterminer les extrema de g il faut donc comparer les nombres $g(0)$, $g(\pi/4)$, $g(\pi/2)$ et $g(\pi)$:

$$g(0) = g(\pi/2) = -g(\pi) = 1,$$

et

$$g(\pi/4) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^5 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Le maximum de g vaut donc 1 et son minimum -1 . Voir la figure.

**SOLUTION 13.**

- Oui, car pour tout réel x positif, $|1 - x| \leq 1 + x$ donc $\frac{1-x}{1+x} \in [-1, 1]$, intervalle de définition de l'arccosinus.
- Soit $x \geq 0$. Posons $\theta = 2 \arctan(\sqrt{x})$. D'après les variations de l'arctangente sur \mathbb{R}_+ , on a $0 \leq \theta < \pi$. De plus, $\sqrt{x} = \tan(\theta/2)$ d'où $x = \tan^2(\theta/2)$.
- Soit $x \geq 0$. Posons $\theta = 2 \arctan(\sqrt{x})$ de sorte que $x = \tan^2(\theta/2)$. Puisque $\frac{1-x}{1+x} = \cos(\theta)$ et $0 \leq \theta < \pi$, $f(x) = \arccos(\cos(\theta)) = \theta = 2 \arctan(\sqrt{x})$.

SOLUTION 14.

Y a pas d'secret : il faut faire apparaître du sinus puisque y est un arcsinus ...

$$\begin{aligned} \cos(4y) &= 1 - 2 \sin^2(2y) = 1 - 8 \sin^2(y) \cos^2(y) \\ &= 1 - 8u^2 [1 - u^2] \end{aligned}$$

où $u = \sin(y) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Après tout calcul,

$$\cos(4y) = -u = \sin(-y) = \cos(\pi/2 + y).$$

On a donc

$$4y \equiv \frac{\pi}{2} + y[2\pi] \quad \text{ou} \quad 4y \equiv -\frac{\pi}{2} - y[2\pi],$$

c'est-à-dire

$$y \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi/3] \quad \text{ou} \quad y \equiv -\frac{\pi}{10} [2\pi/5].$$

Or y est l'arcsinus d'un nombre positif donc $y \in [0, \pi/2]$. Or la seule solution de la première congruence appartenant à cet intervalle est $\pi/6$ qui n'est donc pas y puisque

$$\sin(y) \neq \frac{1}{2} = \sin(\pi/6);$$

la seule solution de la seconde congruence appartenant à $[0, \pi/2]$ étant $3\pi/10$, nécessairement $y = \frac{3\pi}{10}$.

SOLUTION 15.

Puisque a et b sont positifs,

$$\arctan(a), \arctan(b) \in [0, \pi/2[,$$

donc $\arctan(a) - \arctan(b) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Or,

$$\tan(\arctan(a) - \arctan(b)) = \frac{a - b}{1 + ab},$$

ainsi

$$\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right).$$

SOLUTION 16.

Notons

$$\alpha = \arctan(1/5) \text{ et } \beta = \arctan(1/239).$$

D'après les variations de l'arctangente, on sait que $0 \leq \alpha \leq 1/5$ et $0 \leq \beta \leq \alpha$, ainsi

$$0 \leq 3\alpha \leq 4\alpha - \beta \leq \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}.$$

Allons-y!

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(4\alpha)\tan(\beta)}$$

Posons $u = \tan(4\alpha)$. On a alors,

$$u = \frac{2v}{1 - v^2},$$

où

$$v = \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

donc

$$u = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

D'où

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{u - 1/239}{1 + u/239} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

Et puisque $4\alpha - \beta \in [0, \pi/2]$, $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTION 17.

Remarquons que

$$\arctan(3) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/3),$$

l'égalité est donc équivalente à

$$\arctan(1/3) + \arcsin(1/\sqrt{5}) = \frac{\pi}{4}.$$

Posons

$$a = \arctan(1/3) \text{ et } b = \arcsin(1/\sqrt{5}).$$

Puisque $0 < \frac{1}{3} < 1$, $a \in]0, \pi/4[$. Puisque $0 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $b \in [0, \pi/4]$, et ainsi $a + b \in]0, \pi/2[$. L'égalité est donc équivalente à $\tan(a + b) = 1$. C'est parti!

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \frac{\frac{1}{3} + \tan(b)}{1 - \frac{\tan(b)}{3}}$$

Or,

$$\tan^2(b) = \frac{1}{\cos^2 b} - 1 = \frac{\sin^2 b}{1 - \sin^2 b} = 1/4,$$

et puisque $\tan(b) > 0$ (Cf. les encadrements établis ci-dessus) ,

$$\tan(b) = \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

SOLUTION 18.

► *Première méthode : on dérive !*

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mapsto \arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x).$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} d'après les théorèmes sur la dérivation des fonctions composées, et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + 2 \times \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \times \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2+1} - x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right] \times \frac{1}{1+x^2 - x\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{1+x^2 - x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2 + x\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{1+x^2 - x\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{(x^2+1)^2 - x^2(x^2+1)} \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur \mathbb{R} et puisque $f(0) = \pi/2$, f est constante sur \mathbb{R} égale à $\pi/2$.

► *Deuxième méthode : en finesse...*

✦ Pour $x > 0$, l'égalité de l'énoncé est équivalente à :

$$2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \arctan(1/x).$$

Puisque dans ce cas,

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{x^2+1} - x < 1, \\ 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) &\in [0, \pi/4], \end{aligned}$$

il est donc équivalent de prouver que

$$\alpha = \tan\left(\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)\right) = \frac{1}{x}.$$

Allons-y !

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \times \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1 - (\sqrt{x^2+1} - x)^2} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

✦ Pour $x < 0$, l'égalité de l'énoncé est équivalente à :

$$2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \pi + \arctan(1/x).$$

Puisque dans ce cas,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - x &> 1, \\ 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) &\in]\pi/2, \pi[, \end{aligned}$$

il est donc équivalent de prouver que

$$\tan\left(\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)\right) = \frac{1}{x}.$$

Le calcul précédent est toujours valable.

✦ La formule est banalement vraie pour $x = 0$.

SOLUTION 19.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation étudiée, on a successivement :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) &= \tan(\pi/4) \\ \frac{3x}{1-2x^2} &= 1 \\ 2x^2 + 3x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

2. Le discriminant de l'équation précédente est $\Delta = 17$ et ses deux solutions sont :

$$x_1 = -\frac{3 + \sqrt{17}}{4} < 0, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} > 0$$

La solution x_1 est à rejeter car, d'après les variations de la fonction \arctan sur \mathbb{R} ,

$$x_1 < 0 \Rightarrow \arctan(x_1) + \arctan(2x_1) < 0,$$

On remarque que $0 < x_2 < 2x_2 < 1$, ainsi

$$0 < \arctan(x_2) + \arctan(2x_2) < 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

x_2 est donc l'unique solution de l'équation.

REMARQUE. Il faut bien comprendre le raisonnement précédent : on a vu que

$$\arctan(x_2) + \arctan(2x_2) \in [0, \pi/2[$$

et

$$\tan(\arctan(x_2) + \arctan(2x_2)) = 1 = \tan(\pi/4)$$

on en déduit que

$$\arctan(x_2) + \arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4}$$

car $\pi/4$ est l'unique angle compris entre 0 et $\pi/2$ dont la tangente vaut 1 (\tan est injective sur $[0, \frac{\pi}{2}[$).

SOLUTION 20.

1. Soit x une solution de la première équation. On a alors,

$$\tan(x) = \sin(x),$$

c'est-à-dire

$$\sin(x) \left[\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right] = 0,$$

et donc *nécessairement*

$$x \equiv 0[\pi].$$

Or $x \in \text{Im arcsin}$ donc $x \in [-1, 1]$. La seule solution envisageable est 0.

Réciproquement, on vérifie sans peine que 0 est effectivement solution.

2. La deuxième équation est équivalente à

$$\arccos(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2}),$$

c'est-à-dire

$$\arccos(x) = \arcsin(\sin(\arccos(x))),$$

Or, si $x \in [0, 1]$,

$$\arcsin(\sin(\arccos(x))) = \arccos(x),$$

et si $x \in [-1, 0[$,

$$\arcsin(\sin(\arccos(x))) = \pi - \arccos(x),$$

et

$$\pi - \arccos(x) \neq \arccos(x).$$

L'ensemble des solutions est donc $[0, 1]$.

SOLUTION 21.

Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $u = \arcsin(x)$. On a alors $x = \sin(u)$ et $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'où

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\sin(u)}{|\cos(u)|} = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \tan(u).$$

Puisque $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a donc $u = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, c'est-à-dire $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

SOLUTION 22.

Raisonnons par récurrence. Soit $n \geq 0$. On note HR(n) la proposition suivante : $\forall k \leq n$, il existe un polynôme réel P_k tel que $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(k \arccos(x)) = P_k(x)$.

- HR(0), HR(1) et HR(2) sont banalement vérifiées car $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(0 \times \arccos(x)) = 1$, $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons vérifiée HR(n). Il existe alors deux polynômes réels P_{n-1} et P_n tels que

$$\forall x \in [-1, 1], \cos((n-1) \arccos(x)) = P_{n-1}(x) \text{ et } \cos(n \arccos(x)) = P_n(x).$$

Or, puisque

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta),$$

on a $\forall x \in [-1, 1]$,

$$\cos((n+1) \arccos(x)) + \cos((n-1) \arccos(x)) = 2 \cos(\arccos(x)) \cos(n \arccos(x)) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

En posant pour tout réel x , $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$, on a

$$\forall x \in [-1, 1], \cos((n+1) \arccos(x)) = P_{n+1}(x)$$

et P_{n+1} est bien un polynôme réel en tant que somme de polynôme réels. L'hypothèse HR(n+1) est donc vérifiée.

► L'hypothèse $HR(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$ d'après le principe de récurrence.

REMARQUE. Les lecteurs cultivés auront reconnu la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ des polynômes de Tchebychev de première espèce. Au-delà des formules d'addition et des nombres complexes, le calcul de ces polynômes peut s'effectuer par récurrence (et c'est de loin la manière la plus rapide d'y parvenir avec l'avantage d'une programmation par une simple boucle sous Maple) à partir de $P_0 = 1, P_1 = X$ et $\forall n \geq 2, P_n = 2XP_{n-1} - P_{n-2}$.

SOLUTION 23.

1. Posons pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

La fonction est bien définie car $2x - 1$ appartient à $[-1, 1]$ lorsque x décrit $]0, 1[$. Puisque $\forall x \in]0, 1[, 2x - 1 \in]-1, 1[$, la fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ en tant que somme de fonctions composées dérivables. De plus, $\forall x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 0 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $]0, 1[$. Puisque $f(1/2) = \arcsin(1/\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 0 = 0$, f est nulle sur $]0, 1[$. La fonction f étant continue sur $[0, 1]$ en tant que somme de composées de fonctions continues sur $[0, 1]$, on a par continuité de f en 0 et 1,

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = 0.$$

2. Soient $x \in [0, 1]$ et $u = \arcsin(\sqrt{x})$. On a donc $\sin(u) = \sqrt{x}$ puis $x = \sin^2(u)$. On a ainsi

$$2x - 1 = 2\sin^2(u) - 1 = -\cos(2u)$$

puis $\arcsin(2x - 1) = \arcsin(-\cos(2u)) = -\arcsin(\cos(2u)) = -\arcsin(\sin(\pi/2 - 2u))$. Or, $u = \arcsin(\sqrt{x}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ car $\sqrt{x} \geq 0$ et donc $2u \in [0, \pi]$ puis $\pi/2 - 2u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc $\arcsin(\sin(\pi/2 - 2u)) = \pi/2 - 2u$. En conclusion, $\frac{1}{2} \arcsin(2x - 1) = u - \frac{\pi}{4}$. On a donc

$$\forall x \in [0, 1], \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1).$$

SOLUTION 24.

1. On a, $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1 - \sin^2(x)},$$

et ainsi,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}, \quad \sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}.$$

2. La fonction arctangente étant définie sur \mathbb{R} , g est définie sur \mathbb{R} .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\alpha = \arctan(x)$. On a, d'après les formules démontrées à la question a.,

$$\sin^2(\alpha) = \frac{x^2}{x^2 + 1},$$

et puisque $\arctan(x) = \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\sin(\alpha)$ a le même signe que x , donc

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Posons $\beta = \arctan(\sin(\alpha))$, on a

$$\cos^2(\beta) = \frac{1}{1 + \sin^2(\alpha)} = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1},$$

et puisque $\beta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos(\beta) > 0$, on a

$$f(x) = \cos(\beta) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 + 2x^2}}.$$

SOLUTION 25.

1. L'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\frac{1}{1+x^2} \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\frac{3}{5} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \arcsin\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Comme les deux membres de l'égalité appartiennent à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation équivaut à :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{5}$$

Les solutions sont donc $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2. Comme $\frac{3}{4} \in [0, 1]$, $\arccos\frac{3}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les deux membres de l'égalité appartiennent donc à $[0, \pi]$. L'équation équivaut donc à

$$x = \cos\left(2 \arccos\frac{3}{4}\right)$$

Or $\cos\left(2 \arccos\frac{3}{4}\right) = 2 \cos^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right) - 1 = \frac{1}{8}$. L'unique solution est donc $\frac{1}{8}$.

3. Comme $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ et $\frac{1}{3} \in [0, 1]$, $\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3} \in [0, \pi]$. Les deux membres de l'égalité appartiennent donc à $[0, \pi]$. L'équation équivaut donc à

$$x = \cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\arccos\frac{1}{4} + \arcsin\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12} \end{aligned}$$

L'unique solution est donc $\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12}$.

4. On vérifie que ± 1 n'est pas solution. Les deux membres de l'équation appartiennent donc à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, l'équation équivaut à

$$\tan(\arcsin x) = \tan(\arctan 2x)$$

Or $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\tan(\arctan 2x) = 2x$. L'équation équivaut donc à :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x$$

Ceci équivaut à $x = 0$ ou $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$. Après calcul, les solutions sont donc $0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Si x est solution de l'équation, alors on a *nécessairement* :

$$\tan(\arcsin 2x) = \tan(\arctan x)$$

Comme précédemment, on a :

$$\tan(\arcsin 2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \text{ et } \tan(\arctan x) = x$$

Par conséquent,

$$\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} = x$$

Ceci implique $x = 0$ ou $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 1$. Cette dernière équation n'admet pas de solution. De plus, on vérifie que 0 est bien solution : c'est donc l'unique solution.

SOLUTION 26.

En posant $t = e^x$, l'équation est équivalente à

$$3t - \frac{1}{t} = 4,$$

c'est-à-dire $3t^2 - 4t - 1 = 0$, donc $t = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Puisque $t = e^x > 0$, on trouve l'unique solution

$$x = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right).$$

SOLUTION 27.

► Si $a = 0$, on a clairement $S_n = (n+1) \cosh(b)$ et $\Sigma_n = (n+1) \sinh(b)$.

► Supposons $a \neq 0$. On remarque que

$$S_n + \Sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{ka+b} \text{ et } S_n - \Sigma_n = \sum_{k=0}^n e^{-ka-b}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n + \Sigma_n &= e^b \frac{e^{(n+1)a} - 1}{e^a - 1} \\ &= \frac{e^{b+(n+1)a/2}}{e^{a/2}} \frac{e^{(n+1)a/2} - e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2} - e^{-a/2}} \\ &= \frac{\sinh((n+1)a/2)}{\sinh(a/2)} e^{b+na/2}. \end{aligned}$$

Comme $S_n - \Sigma_n$ s'obtient de $S_n + \Sigma_n$ ne changeant (a, b) en $(-a, -b)$ on trouve

$$S_n - \Sigma_n = \frac{\sinh((n+1)a/2)}{\sinh(a/2)} e^{-b-na/2},$$

d'où

$$S_n = \cosh(b + na/2) \frac{\sinh((n+1)a/2)}{\sinh(a/2)}$$

et

$$\Sigma_n = \sinh(b + na/2) \frac{\sinh((n+1)a/2)}{\sinh(a/2)}.$$

SOLUTION 28.

On remarque que f est impaire et qu'elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} puisque \cosh ne s'annule pas. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$

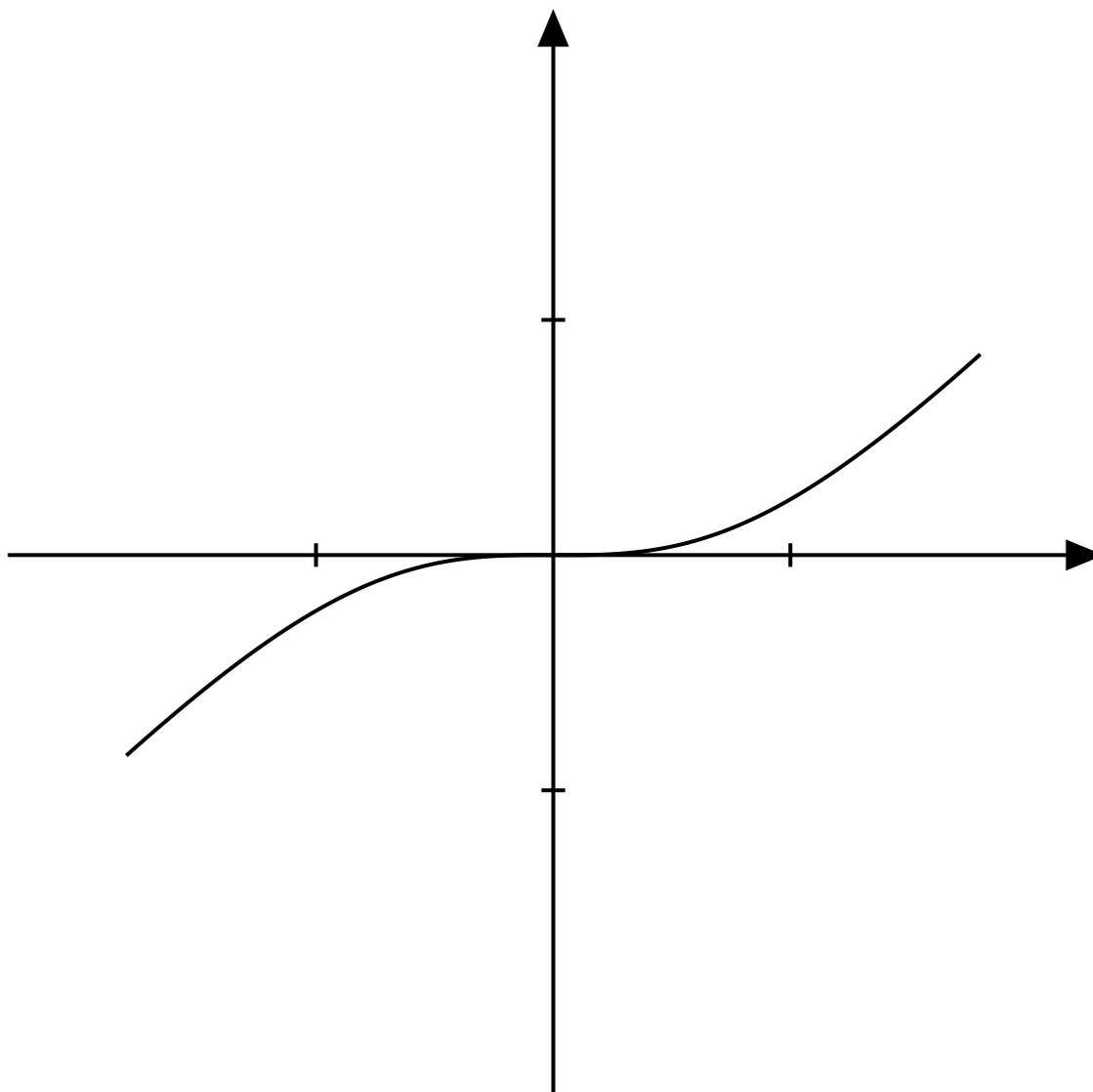
$$f(x) = x - \tanh(x),$$

ainsi

$$f'(x) = \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \tanh^2(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur \mathbb{R} . On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$



SOLUTION 29.

L'équation est définie seulement pour $x \geq 1$. On note tout d'abord que $\operatorname{argch}(x) \geq 0$ et donc $\sinh(\operatorname{argch}(x)) \geq 0$. Par suite,

$$\sinh(\operatorname{argch}(x)) = +\sqrt{\cosh^2(\operatorname{argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Puisque \sinh est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , on a alors

$$\begin{aligned} \operatorname{argch}(x) &= \operatorname{argsh}(2-x) \\ \Leftrightarrow \sinh(\operatorname{argch}(x)) &= \sinh(\operatorname{argsh}(x)) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} &= 2-x \\ \Leftrightarrow x^2 - 1 &= (2-x)^2 \text{ et } 2-x \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4x - 5 &= 0 \text{ et } 2-x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 5/4. \end{aligned}$$

SOLUTION 30.

On s'inspire du passage à l'arc moitié de l'exponentielle complexe,

$$\begin{aligned} e^a - e^b &= e^{\frac{a+b}{2}} \left[e^{\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{a-b}{2}} \right] \\ &= 2e^{\frac{a+b}{2}} \sinh\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} e^a + e^b &= e^{\frac{a+b}{2}} \left[e^{\frac{a-b}{2}} + e^{-\frac{a-b}{2}} \right] \\ &= 2e^{\frac{a+b}{2}} \cosh\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

SOLUTION 31.

1. Soit x un réel. Puisque $\cosh(x)$ n'est pas nul, et d'après l'exercice ., on a

$$\begin{aligned} \tanh(2x) &= \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2 \sinh(x) \cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} \frac{2 \sinh(x)/\cosh(x)}{1 + \sinh^2(x)/\cosh^2(x)} = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)} \end{aligned}$$

et donc, $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$ (si on ne veut pas faire appel aux formules d'addition hyperboliques, le plus simple est de tout écrire en fonction de e^x). Maintenant, \tanh ne s'annulant qu'en 0, pour x non nul, on a

$$\frac{2}{\tanh(2x)} = \frac{1 + \tanh^2(x)}{\tanh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)} + \tanh(x)$$

et donc,

$$\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} = \tanh(x).$$

2. Soient a un réel strictement positif et n un entier naturel. Pour tout entier naturel k , le réel $x = 2^k a$ n'est pas nul et d'après 1.,

$$\begin{aligned} 2^k \tanh(2^k a) &= 2^k \left(\frac{2}{\tanh(2 \cdot 2^k a)} - \frac{1}{\tanh(2^k a)} \right) \\ &= \frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1} a)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k a)} \end{aligned}$$

En sommant ces égalités pour k variant de 0 à n , on obtient par télescopage

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^k \tanh(2^k a) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1} a)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k a)} \right) \\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1} a)} - \frac{1}{\tanh(a)}\end{aligned}$$

SOLUTION 32.

Notons

$$f(x) = \arctan(e^x) - \arctan(\tanh(x/2)).$$

Cette fonction est définie sur \mathbb{R} et dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x \times \frac{1}{1+(e^x)^2} - \frac{1}{2}(1 - \tanh^2(x/2)) \frac{1}{1 + \tanh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}(1 - \tanh^2(x/2)) \frac{1}{1 + \tanh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2} \frac{\cosh^2(x/2) - \sinh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2) + \sinh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2} \frac{1}{(e^x + e^{-x})/2} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle \mathbb{R} . Comme

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4},$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(e^x) = \arctan(\tanh(x/2)) + \frac{\pi}{4}.$$

SOLUTION 33.

1. Comme \arctan et \sinh sont définies et dérivables sur \mathbb{R} , f est définie et dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions dérivables. Puisque l'ensemble de définition de l'arccosinus est $[-1, 1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\cosh(x)} \in [0, 1] \subset [-1, 1],$$

la fonction g est définie sur \mathbb{R} . Comme $1/\cosh(x) = 1$ si et seulement si $x = 0$ et que \arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que composée de fonctions dérivables.

2. Pour tout x dans \mathbb{R}^* , on a

$$f'(x) = \frac{\cosh(x)}{1 + \sinh^2(x)} = \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh(x)}$$

et

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\left(\frac{1}{\cosh(x)} \right)' \frac{1}{\sqrt{1 - (1/\cosh(x))^2}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2(x)-1}{\cosh^2(x)}}} \\ &= \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)} \frac{|\cosh(x)|}{\sqrt{\sinh^2(x)}} = \frac{\sinh(x)}{|\sinh(x)| \cosh(x)}\end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\cosh(x) > 0$. Ainsi, comme $\sinh(x)$ est du signe de $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = g'(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, f'(x) = -g'(x).$$

Ainsi, il existe C et C' dans \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) + C$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -g(x) + C'.$$

Comme f et g sont continues sur \mathbb{R} en tant que composée de fonctions continues. Ainsi, par continuité en 0 ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) + C$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -g(x) + C'.$$

En particulier, $C = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$ et $C' = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -g(x).$$

SOLUTION 34.

- f est clairement définie et dérivable sur \mathbb{R} . Puisque $0 < \frac{1}{\cosh x} \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est définie sur \mathbb{R} . L'égalité $\frac{1}{\cosh x} = 1$ n'ayant lieu que pour $x = 0$, g est dérivable sur \mathbb{R}^* .
- On trouve $f'(x) = \frac{1}{\cosh x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{\sinh x}{|\sinh x| \cosh x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En particulier $f' = g'$ sur \mathbb{R}_+ , donc $f - g$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et comme $f(0) = 0 = g(0)$ et que f et g sont continues sur \mathbb{R} , on a $f(x) = g(x)$ pour tout $x \geq 0$.
On remarque que f est impaire et g est paire, donc pour tout $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -g(-x) = -g(x)$.

SOLUTION 35.

- \sinh est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et \arctan est définie sur \mathbb{R} donc $\arctan \circ \sinh$ est définie sur \mathbb{R} . \tanh est définie sur \mathbb{R} à valeurs dans $] -1, 1[$ et \arccos est définie sur $[-1, 1]$ donc $\arccos \circ \tanh$ est définie sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est définie sur \mathbb{R} .
 \sinh est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} et \arctan est dérivable sur \mathbb{R} donc $\arctan \circ \sinh$ est dérivable sur \mathbb{R} . \tanh est dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans $] -1, 1[$ et \arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ donc $\arccos \circ \tanh$ est dérivable sur \mathbb{R} . Par conséquent, f est dérivable sur \mathbb{R} .
- D'après la question précédente, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} - \frac{1}{\cosh^2 x \sqrt{1 - \tanh^2 x}}$$

Or $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$ donc $\frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh x}$. De plus, $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ donc $\sqrt{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{\cosh x}$ puisque $\cosh x > 0$. Ainsi $\frac{1}{\cosh^2 x \sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\cosh x}$. On en déduit que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question précédente, f est constante sur \mathbb{R} . De plus, $f(0) = \arctan 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\text{Im} \sinh = \mathbb{R}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh t = \frac{5}{12}$. On a alors $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t}$ car $\cosh t > 0$. On obtient $\cosh t = \frac{13}{12}$. Ainsi $\tanh t = \frac{5}{13}$. On a alors $f(t) = \frac{\pi}{2}$ ce qui nous donne l'égalité de l'énoncé.