Travaux Dirigés : Logique & Raisonnement

Exercice n° 1

On note C l'ensemble des étudiants de MPSI de L'INP-HB, F l'ensemble des filles de C et G l'ensemble des garçons de C. On va former des propositions concernant l'âge et/ou les relations d'amitié entre éléments de C : lorsque x et y désigne deux élèves de C (on peut avoir éventuellement $x = y$), on notera

- pour l'âge,

« x est plus jeune que y » par $x \leq y$

- pour les relations d'amitié,

« x aime y » par $x \heartsuit y$

et

« x n'aime pas y » par $x \not\heartsuit y$

Traduire les phrases suivantes sous forme de proposition logiques avec des quantificateurs. [1]

1/ « l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque »

2/ « chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas »

3/ « les amis de mes amis sont mes amis »

4/ « le plus âgé des élèves est un garçon et il aime toutes les filles »

5/ « personne n'aime personne »

6/ « les personnes qui ont trop d'amour propre ne sont pas aimées des autres »

Exercice n° 2

1/ Écrire la négation de chacune des assertions suivantes (où u désigne une suite réelle [2]). Uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (la suite u est croissante)

b) $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = u_n$ (la suite u est périodique)

c) $\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geq n_0] \Rightarrow [|u_n - \ell| < \varepsilon]$ (la suite u est convergente)

2/ Écrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[u_n = u_m] \Longrightarrow [n = m]$$

Exercice n° 3

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ et } a_1 = 3.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 3n$.

1. Toute ressemblance avec des situations réelles ne pourrait être que l'effet d'une coïncidence.
2. Une suite peut être notée aussi bien (u_n) (comme dans le cours) que u (c'est plus court).