Suites numériques

1 Généralités

1.1 Définition

Définition 1.1

On appelle suite réelle toute famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée sur $\mathbb{N}$ ou, de manière équivalente, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ peut-être notée u (application) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (famille). On emploie également la notation (u_n). Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, le terme général de u est noté u_n (famille) plutôt que $u(n)$ (application). ■

Remarque. Par esprit de simplification, on ne traitera dans ce chapitre que des suites définies à partir du rang 0. On adaptera pour des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. ■

Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de deux manières différentes.

De manière explicite On donne une formule explicite de u_n en fonction de n du type $u_n = f(n)$.

Par récurrence On donne les k premiers termes de la suite et une relation de récurrence exprimant u_n en fonction des k termes précédents. On dit alors que (u_n) est une suite récurrente d'ordre k. Une suite récurrente d'ordre 1 vérifie donc une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

De manière implicite u_n est défini comme solution d'une équation dépendant de n.

Exemple 1.1

- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ est une suite définie de manière explicite.
- La suite (u_n) de premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente d'ordre 2.

Attention ! Une relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite. Par exemple, il n'existe pas de suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 + \sqrt{1-u_n}$.

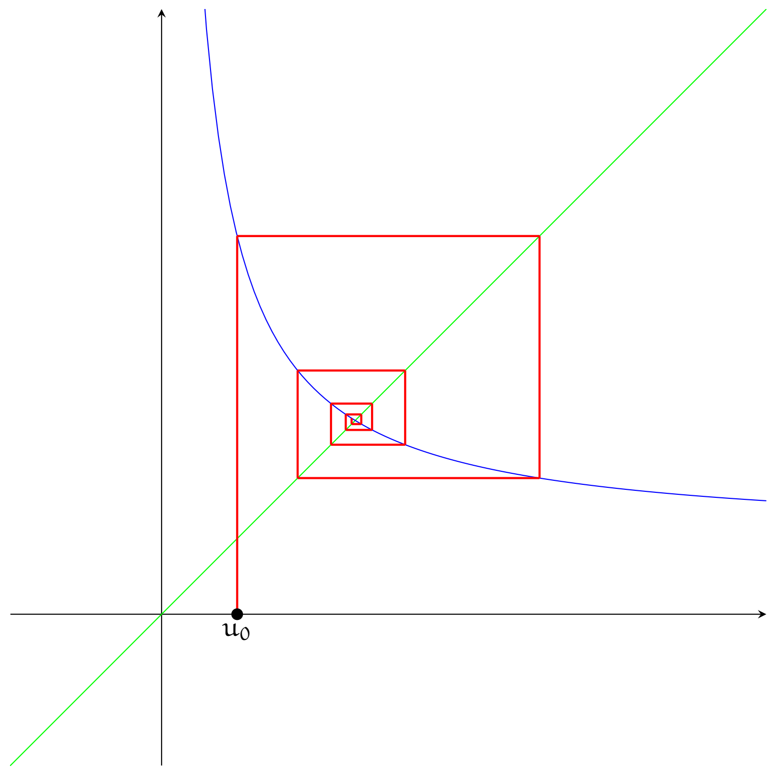
La proposition qui suit permet néanmoins de se tirer d'affaire.

Proposition 1.1

Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que D est stable par f i.e. $f(D) \subset D$. Alors, pour tout $d \in D$, il existe une unique suite définie par $u_0 = d$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.

Représentation graphique d'une suite récurrente d'ordre 1

On obtient la représentation graphique d'une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant le graphe de f et la première bissectrice.



1.2 Vocabulaire

Définition 1.2 Suites constantes, stationnaires

Une suite (u_n) est *constante* s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = C$. Une suite est *stationnaire* si elle constante à partir d'un certain rang.

Définition 1.3

On dit qu'une suite (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant C$ (resp. $u_n \geqslant C$). On dit qu'une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Méthode **Prouver qu'une suite est bornée**

Pour prouver qu'une suite (u_n) est bornée, il est nécessaire et suffisant d'exhiber une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant C$.

Définition 1.4 Sens de variation

Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \leqslant p \implies u_n \leqslant u_p$$

Une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.
Une suite réelle est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n < p \implies u_n < u_p$$

Une suite est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Attention ! Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas par exemple des suites géométriques de raison négative.

Proposition 1.2

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

- (u_n) est croissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est décroissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$;
- (u_n) est strictement croissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$;
- (u_n) est strictement décroissante *si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

Méthode **Sens de variation d'une suite**

Pour déterminer le sens de variation d'un suite (u_n) :

- on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si la suite est *strictement positive*, on peut étudier la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Remarque. On utilisera la première méthode lorsque le terme général est défini à partir de sommes et de différences. On utilisera la deuxième méthode lorsque le terme général est défini à partir de produits et de quotients. ■

Exercice 1.1

Déterminer le sens de variation des suites de terme généraux $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$.

Proposition 1.3

Si une suite (u_n) est définie explicitement par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante, alors (u_n) est constante, majorée, minorée, bornée, croissante ou décroissante.

Attention ! La réciproque est *fausse*.

1.3 Suites classiques

Définition 1.5 Suites arithmétiques

On appelle suite *arithmétique* de *raison* $r \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

On a alors $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.6 Suites géométriques

On appelle suite *géométrique* de *raison* $q \in \mathbb{K}$ toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$$

On a alors $u_n = u_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.7 Suites arithmético-géométriques

On appelle suite *arithmético-géométrique* toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Méthode **Calculer le terme général d'une suite aritmético-géométrique**

Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. On suppose $a \neq 1$ (sinon (u_n) est arithmétique).

- On détermine un point fixe de $x \mapsto ax + b$ i.e. on résout l'équation $x = ax + b$. Comme $a \neq 1$, on trouve une unique solution $l = \dfrac{b}{1-a}$.
- On montre que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison a.
- On en déduit une expression du terme général de $(u_n - l)$ puis de (u_n).

Exercice 1.2

Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 3u_n - 4, \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

Définition 1.8 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

On dit que $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le *polynôme caractéristique* associée à une telle suite est $X^2 + aX + b$.

Proposition 1.4 Forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Pour $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, on note $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
- Si $\Delta = 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu) r^n$ où r est la racine double du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines réelles du polynôme caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $(\lambda n + \mu) r^n$ où r est la racine double réelle du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$, $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites de terme général $\lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. La donnée de conditions initiales (valeurs de u_0 et u_1) permettent de déterminer les constantes λ et μ. ■

Exercice 1.3

1. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la suite réelle (u_n) telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Définition de la limite

Définition 2.1 Limite d'une suite

Soit (u_n) une suite.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que (u_n) admet $+\infty$ pour limite si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \geqslant A$$

- On dit que (u_n) admet $-\infty$ pour limite si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies u_n \leqslant A$$

Remarque. Les propositions où les inégalités larges finales sont remplacées par des inégalités strictes sont équivalentes. ■

Remarque.

- Dans le premier cas (limite égale à l), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous à une distance inférieure à ε à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir ε, cela signifie que les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de l quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

- Dans le second cas (limite égale à $+\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous supérieurs à A à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir A, cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands positivement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.
- Dans le troisième cas (limite égale à $-\infty$), la définition signifie que les termes de (u_n) sont tous inférieurs à A à partir d'un certain rang N. Comme on peut choisir A, cela signifie que les termes de la suite sont aussi grands négativement que l'on veut quitte à ne considérer les termes qu'à partir d'un certain rang.

■

Attention ! L'indice N de la définition dépend du choix de ε ou A.

Remarque. On peut condenser ces trois définitions en une seule en utilisant la notion de voisinage. La définition est la suivante.
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que (u_n) admet l pour limite si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \implies u_n \in \mathcal{V}$. ■

Remarque. La définition «epsilonesque» de la limite sert assez peu en pratique. On possède de nombreux théorèmes pour montrer l'existence d'une limite et même la déterminer le cas échéant. ■

Remarque. On considère toujours la limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$. Considérer la limite de u_n quand n tend vers un entier n'a aucun intérêt. ■

Exercice 2.1

Soit $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ de limite fine. Montrer que cette limite est entière et que u est stationnaire.

Théorème 2.1 Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) possède une limite, elle est *unique*. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. La relation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ se note aussi souvent $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarque. La notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ signifie en fait deux choses : primo, (u_n) admet une limite ; secundo, cette limite vaut l. On parle toujours de la valeur d'une limite sous réserve d'existence de celle-ci. ■

Proposition 2.1

Soient (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \iff u_n - l \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 2.2

Soit (u_n) une suite admettant $l > 0$ pour limite. Alors (u_n) est minorée par un réel *strictement positif* à partir d'un certain rang.

Remarque. Dire que (u_n) est minorée par un réel *strictement positif* à partir d'un certain rang est plus fort que de dire que (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ est strictement positive mais elle n'est en aucun cas minorée par un réel strictement positif (elle est au mieux minorée par 0). ■

2.2 Convergence et divergence

Définition 2.2 Convergence et divergence

On dit qu'une suite (u_n) *converge* ou qu'elle est *convergente* si elle possède une limite *finie*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle *diverge* ou qu'elle est *divergente*.

Attention ! Une suite divergente est une suite qui ne possède pas de limite <u>ou</u> qui tend vers $\pm\infty$.

Proposition 2.3

Toute suite convergente est bornée.

Attention ! La réciproque de cette proposition est *fausse*. Il suffit par exemple de considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

2.3 Limite et suites extraites

Définition 2.3 Suites extraites

Soit (u_n) une suite. On appelle *suite extraite* (ou sous-suite) de (u_n) toute suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application *strictement croissante* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels. On aurait pu également pu définir une suite extraite de (u_n) comme une suite de la forme $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ où $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers. ■

Exemple 2.1

Pour toute suite (u_n), les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) sont deux suites extraites de (u_n).

Lemme 2.1

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème 2.2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi l pour limite.

Attention ! Il ne suffit pas qu'une suite extraire admette une limite pour garantir l'existence d'une limite pour la suite initiale.

Remarque. Le résultat reste vrai si l'on considère une suite du type $(u_{\varphi(n)})$ où φ n'est plus forcément une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ mais une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(\varphi(n))$ soit de limite $+\infty$. ■

Proposition 2.4

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) admettent pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors (u_n) admet également pour limite l.

Méthode **Prouver qu'une suite diverge**

Le théorème précédent permet de montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite par l'absurde. On suppose en effet que (u_n) admet une limite et on exhibe deux suites extraites de (u_n) qui admettent deux limites différentes. Ceci contredit alors l'unicité de la limite.

Exercice 2.2

Montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ n'admet pas de limite.

2.4 Opérations sur les limites

Proposition 2.5 Limite d'une somme

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

Proposition 2.6 Limite d'un produit

Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	0	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 2.7 Limite de l'inverse

On suppose que la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Le tableau suivant résume les différents cas possibles.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } u_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ -\infty \text{ si } u_n < 0 \text{ à partir d'un certain rang} \\ \text{pas de limite sinon} \end{cases}$	0

Remarque.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang peut se noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

■

Remarque. La limite d'un quotient se déduit des tableaux donnant la limite d'un produit et de l'inverse puisque $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$. ■

2.5 Composition par une fonction

Proposition 2.8

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en l. Alors la suite $(f(u_n))$ admet L pour limite.

Corollaire 2.1

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue en l. Alors la suite $(f(u_n))$ admet $f(l)$ pour limite.

Corollaire 2.2 Suite récurrente et point fixe

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que f est continue en l, alors $f(l) = l$ i.e. l est un point fixe de f.

2.6 Limites classiques

Proposition 2.9 Limite d'une suite géométrique

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$.
- Si $a = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = 1$.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.
- Si $a \leqslant -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

Exercice 2.3

Soit $a \in]-1, 1[$. Déterminer la limite de a^{2^n}.

2.7 Passage à la limite

Théorème 2.3 Passage à la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'. Soient $m, M \in \mathbb{R}$.

- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leqslant l'$.
- Si $u_n \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $l \leqslant M$.
- Si $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $l \geqslant m$.

Remarque. Autrement dit, le passage à la limite conserve les inégalités *larges*. Il ne conserve pas les inégalités strictes. Par exemple, $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$. Mais on a évidemment pas $0 > 0$. ■

Corollaire 2.3

Soit (u_n) une suite convergeant vers l.

- Si (u_n) est croissante, alors $u_n \leqslant l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est décroissante, alors $u_n \geqslant l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est strictement croissante, alors $u_n < l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si (u_n) est strictement décroissante, alors $u_n > l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Théorèmes d'existence de limites

3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Ces théorèmes proviennent de l'existence d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème des gendarmes/d'encadrement : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut l.

Théorème de minoration : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ et $v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) admet une limite et celle-ci vaut $-\infty$.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'*existence* : il prouve l'existence d'une limite. Il est vrai qu'il nous fournit en plus la valeur de la limite. Mais si l'existence de la limite était garantie, le simple théorème de passage à la limite nous aurait fourni la valeur de la limite. ■

Exercice 3.1

Déterminer la limite de $(n!)$ et de $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

Remarque. Il existe une version «améliorée» du théorème des gendarmes. Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \sim w_n$, alors $u_n \sim v_n \sim w_n$. ■

Corollaire 3.1

Soient (u_n) et (ε_n) deux suites telles que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|u_n| \leqslant \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 3.1

Soient (u_n) une suite, $l \in \mathbb{R}$ et $K \in [0, 1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leqslant K|u_n - l|$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Corollaire 3.2

Soient (u_n) une suite bornée et (ε_n) une suite de limite nulle. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n\varepsilon_n = 0$.

Corollaire 3.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- ◇ Si (u_n) est minorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
- ◇ Si (u_n) est majorée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

3.2 Caractérisation séquentielle des bornes supérieures et inférieures, de la densité

Proposition 3.1

Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $c = \sup \mathcal{A}$ (resp. $c = \inf \mathcal{A}$) si et seulement si c est un majorant (resp. un minorant) de $\mathcal{A}$ et s'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ de limite c.

Proposition 3.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A de limite x.

3.3 Théorème de convergence monotone

Ce théorèmes provient à nouveau de l'existence d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2 Théorème de convergence monotone

Toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément,

- toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;
- toute suite décroissante minorée converge, toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Attention ! Une suite décroissante et minorée (resp. majorée) ne converge pas forcément vers son minorant (resp. majorant). Lequel d'ailleurs ?

Attention ! Le majorant ou le minorant doit être une *constante*. Par exemple, si (u_n) est décroissante et si $u_n \geqslant -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut absolument rien dire sur la convergence de (u_n).

Exercice 3.2

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$.

Exercice 3.3

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

Exercice 3.4 ⋆⋆ **La série harmonique**

Soient $\geqslant 1$ et

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Quelle alternative en déduit-on quant au comportement asymptotique de $(H_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$,
$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$$
Décrire le comportement de $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

3.4 Suites adjacentes

Définition 3.1 Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.3 Suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Attention ! Si on a seulement $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, on ne peut pas déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$ car on ne sait même pas a priori que (u_n) et (v_n) admettent des limites. Ce sont les sens de variations de (u_n) et (v_n) qui garantissent l'existence de ces limites.

Exercice 3.5

Les suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3.6 **Théorème des segments emboîtés**

On appelle segment tout intervalle *fermé* de $\mathbb{R}$ i.e. du type $[a, b]$. On appelle *longueur* du segment $[a, b]$ le réel $b - a$. Soit (I_n) une suite décroissante de segments (i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$) dont la suite des longeurs tend vers 0. Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.
Le résultat est-il toujours vrai si les intervalles I_n ne sont plus fermés ?

Recherche d'un zéro d'une fonction continue par dichotomie

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. On construit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence de la manière suivante.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- On suppose avoir défini a_n et b_n. Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant 0$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$. Sinon, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$.

On montre alors que (a_n) et (b_n) convergent vers un zéro c de f. De plus, $a_n - c \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $b_n - c \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Algorithme 1 Dichotomie

Données : une fonction f
deux réels a et b tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$
un réel strictement positif ε
Résultat : une valeur approchée m d'un zéro de f à ε près

$c \leftarrow a$
$d \leftarrow b$
Tant que $|d - c| > \varepsilon$ **Faire**
  $m \leftarrow \frac{c+d}{2}$
  Si $f(c)f(m) \leqslant 0$ **Alors**
    $d \leftarrow m$
  Sinon
    $c \leftarrow m$
  Fin Si
Fin Tant que
$m \leftarrow \frac{c+d}{2}$

3.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant est admis.

Théorème 3.4 Bolzano-Weierstrass

De toute suite *bornée*, on peut extraire une sous-suite *convergente*.

ATTENTION ! Une même suite bornée peut admettre plusieurs sous-suites convergeant vers des limites différentes.

REMARQUE. La démonstration est hors programme mais on peut en donner l'idée :

- On construit par dichotomie une suite (I_n) décroissante de segments emboîtés contenant chacun une infinité de termes de la suite.
- On choisit dans chaque I_n un élément $u_{\varphi(n)}$ de telle sorte que $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soit strictement croissante.
- La suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge d'après le théorème des suites adjacentes.

■

REMARQUE. Dans le même ordre d'idée, de toute suite réelle non majorée (resp. non minorée), on peut extraire une sous-suite divergeant vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$). ■

3.6 Lemme de Césaro (hors programme)

Le théorème suivant est hors programme mais tellement classique qu'il mérite de figurer dans ce chapitre.

Théorème 3.5 Lemme de Césaro

Soit (u_n) une suite de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

admet aussi l pour limite.

Remarque. Autrement dit, les *moyennes* successives des termes de la suite (u_n) converge vers la même limite que (u_n). C'est également vrai si on ne débute pas au rang 0. La suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge elle aussi vers l. ■

Attention ! La réciproque de ce théorème est *fausse* comme on s'en convainc facilement avec la suite de terme général $(-1)^n$.

4 Comparaison de suites

4.1 Définition

Les définitions sont totalement similaires à celles vues dans le cadre des fonctions. C'est encore plus simple puisque dans le cas des suites, on travaille toujours au voisinage de $+\infty$.

Définition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- ◇ On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.
- ◇ On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (η_n) de limite 1 telle que $u_n = v_n\eta_n$ à partir d'un certain rang.
- ◇ On dit que (u_n) est *dominée* par (v_n) et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe une constante K telle que $|u_n| \leqslant K|v_n|$ à partir d'un certain rang.

Méthode **En pratique**

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces trois définitions sont respectivement équivalentes à :

- ◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$,
- ◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$,
- ◇ $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Tout ce qui a été dit sur la comparaison des fonctions reste, mutatis mutandis, vrai pour la compraison des suites. En particulier, on a la propritété suivante :

Proposition 4.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$. Alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

4.2 Comparaison des suites de références

Suites de référence

On appelle suites de référence les suites (a^n), (n^α), $(\ln n)^\beta$, $(n!)$ avec $a > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff a^n = o(b^n)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 0$. Alors $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
- Soit $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a^n = o(n!)$.

Exercice 4.1

Déterminer un équivalent de $\operatorname{ch}(e^{-n}) - \cos\dfrac{\pi}{n}$.

Exercice 4.2

Déterminer la limite de $n\left(\dfrac{\pi}{2}e^{\frac{1}{n}} - \arccos\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)$. Piège !

Proposition 4.3 Formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

4.3 Suites implicites

On appelle *suite implicite* une suite dont le terme général u_n est donné comme la solution d'une équation dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.4

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.
2. Déterminer un équivalent de (u_n).
3. On pose $v_n = u_n - n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite l de (v_n).
4. Déterminer un équivalent de $(v_n - l)$. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de (u_n).

5 Suites récurrentes d'ordre 1

Une suite récurrente d'ordre 1 est tout simplement une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la convergence de (u_n). On supposera f continue sur son ensemble de définition. On sait alors que *si* (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f. Graphiquement un point fixe est l'abscisse (ou l'ordonnée) de l'intersection du graphe de f et de la première bissectrice.

Méthode **Étude d'une suite récurrente d'ordre 1**

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- On trace le graphe de f et la première bissectrice et on place les premiers termes de la suite (u_n) afin d'avoir une idée de son comportement asymptotique.
  Si f est croissante
- On recherche le signe et les zéros de $x \mapsto f(x) - x$ (i.e. les points fixes de f).
- Suivant la position de u_0 par rapport au(x) point(s) fixe(s) de f on en déduit une majoration/minoration de (u_n) par un point fixe ainsi que son sens de variation.
- On utilise le théorème de convergence monotone et la convergence vers un point fixe pour conclure. On raisonne par l'absurde pour prouver la divergence le cas échéant.
  Si f est décroissante
- En remarquant que $f \circ f$ est croissante, on peut étudier les suites $(u_{2,n})$ et (u_{2n+1}) grâce à ce qui précède.
  Si f n'est ni croissante ni décroissante
- On essaie de repèrer un intervalle I stable par I tel que $u_n \in I$ à partir d'un certain rang. On peut alors se reporter à un des deux cas précédents.

Exercice 5.1

Etude des suites récurrentes (u_n) définies par

1. $u_0 \geqslant -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$,
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$,
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$,
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

6 Suites complexes

Définition 6.1 Suite complexe

On appelle suite complexe toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.2 Suite bornée

On dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| \leqslant K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Géométriquement, cela signifie que les termes de la suite sont dans un disque de centre O et de rayon K. ■

Définition 6.3 Limite d'une suite complexe

On dit qu'une suite complexe (u_n) admet $l \in \mathbb{C}$ si $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. La suite $(|u_n - l|)$ est réelle donc la définition a bien un sens. ■

Exemple 6.1

On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \in \mathbb{C}$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ (sinon (u_n) est la suite nulle).

- Si $|q| > 1$, on peut seulement dire que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, (u_n) converge vers 0.
- Si $|q| = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $q = e^{i\alpha}$ et (u_n) ne converge que si $\alpha \equiv 0[2\pi]$.

Attention ! Une suite complexe ne peut avoir une limite égale à $\pm\infty$. Ces symboles n'ont d'ailleurs pas de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$. On peut tout au plus dire que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \bar{l}$.

Corollaire 6.1

Soient (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(l)$ et $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(l)$.

Tout ce qui a été dit sur les suites réelles reste vrai pour les suites complexes excepté ce qui est lié à la relation d'ordre, c'est-à-dire :

- les opérations sur les limites contenant $\pm\infty$,
- le théorème de passage à la limite (il contient des inégalités),
- les théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration (encore des inégalités),
- le théorème de la limite monotone et celui des suites adjacentes (la monotonie n'a pas de sens pour une suite complexe).

Par contre, le théorème de Bolzano-Weierstrass reste vrai dans le cas complexe mais la version complexe n'est pas au programme en première année.

Exercice 6.1

1. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = 2z_n - \overline{z}_n \, .$$

Donner une expression explicite de z_n en fonction de n.

2. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \, .$$

Etudier sa convergence.