Dérivation et intégration

Opérations et dérivation

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u \circ v)' = (u' \circ v)v'$$

$$\left(u^{-1}\right)' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

Formule de Leibniz : $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

Dérivées usuelles

$$\ln x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad e^{ax} \longmapsto a e^{ax} \qquad x^\alpha \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\sin x \longmapsto \cos x \qquad \cos x \longmapsto -\sin x \qquad \tan x \longmapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\arcsin x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos x \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sh} x \longmapsto \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x \longmapsto \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x \longmapsto 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Primitives usuelles

$$\ln x \longmapsto x \ln x - x \qquad e^{ax} \longmapsto \frac{e^{ax}}{a} \ (a \neq 0) \qquad x^\alpha \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\sin x \longmapsto -\cos x \qquad \cos x \longmapsto \sin x \qquad \tan x \longmapsto -\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arcsin x \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longmapsto \arccos x \text{ ou } -\arcsin x \qquad \frac{1}{1+x^2} \longmapsto \arctan x$$

$$\operatorname{sh} x \longmapsto \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} x \longmapsto \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} x \longmapsto \ln(\operatorname{ch} x)$$

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $|f^{(n+1)}| \leqslant M$ sur I, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de Taylor-Young : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors

$$\forall x \in I, f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$