

COMPARAISON DE FONCTIONS

Croissances comparées

Au voisinage de $+\infty$

- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta)$.
- ▶ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff e^{ax} = o(e^{bx})$.
- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$.
- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x^\alpha = o(e^{\alpha x})$.

Au voisinage de 0

- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha > \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta)$.
- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Au voisinage de $-\infty$

- ▶ Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $e^{\alpha x} = o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$.
- ▶ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a > b \iff e^{ax} = o(e^{bx})$.

Équivalents usuels

Logarithme, exponentielle, puissance

Un polynôme est équivalent en 0 (resp. en $\pm\infty$) à son monôme de plus bas (resp. haut) degré.

$$\begin{array}{lll} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \ln(1+x) = x + o(x) \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & e^x = 1 + x + o(x) \\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x & \text{i.e.} & (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \end{array}$$

Fonctions circulaires

$$\begin{array}{lll} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \sin x = x + o(x) \\ 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} & \text{i.e.} & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \tan x = x + o(x) \end{array}$$

Fonctions circulaires réciproques

$$\begin{array}{lll} \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \arcsin x = x + o(x) \\ \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \arctan x = x + o(x) \end{array}$$

Fonctions hyperboliques

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \operatorname{sh} x = x + o(x) \\ \operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} & \text{i.e.} & \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \text{i.e.} & \operatorname{th} x = x + o(x) \end{array}$$