Équations différentielles

$\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les équations différentielles

1.1 Notion d'équation différentielle

Définition 1.1

On appelle *équation différentielle* une équation dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ et qui fait intervenir cette fonction ainsi que ces dérivées successives.
On appelle *ordre* de cette équation différentielle l'ordre maximal de dérivation de la fonction inconnue.

Exemple 1.1

$y'' = x^2 e^y + 1$ est une équation différentielle d'ordre 2 dont l'inconnue est une fonction y.
Cette écriture est un abus de notation, il faut comprendre $y''(x) = x^2 e^{y(x)} + 1$ pour tout x dans un intervalle à déterminer.

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle consiste à rechercher :

- un intervalle I,
- une fonction y suffisamment dérivable et vérifiant l'équation différentielle sur I.

Exemple 1.2

Résoudre l'équation différentielle $y'' = x^2 e^y + 1$ consiste à déterminer un intervalle I et une fonction y deux fois dérivable sur I tels que

$$\forall x \in I,\ y''(x) = x^2 e^{y(x)} + 1$$

Définition 1.2 Forme résolue ou implicite

Une équation différentielle est dite *résolue* si elle est de la forme $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Dans le cas contraire, elle est dite *implicite*.

Exemple 1.3

L'équation différentielle $y'' = x^2 e^y + 1$ est résolue.

Exemple 1.4

L'équation différentielle $xy' + \sin y = e^x$ n'est pas résolue mais elle est équivalente sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{x}\sin y + \frac{e^x}{x}$ qui est résolue.

Exemple 1.5

L'équation différentielle $y''^2 + y'^3 + y = 0$ ne peut pas se mettre sous forme résolue.

Conditions initiales

On peut aussi rechercher des solutions qui vérifient certaines conditions en un point x_0 :

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0 \qquad y''(x_0) = y''_0 \qquad \dots$$

On appelle ce type de condition des *conditions initiales*.

Exemple 1.6

La fonction tan est solution de l'équation différentielle $y' - y^2 = 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

Exemple 1.7

La fonction ch est solution de l'équation différentielle $y'^2 - y^2 = -1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

Exemple 1.8

La fonction $x \mapsto x \ln x$ est solution de l'équation différentielle $xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie la condition initiale $y(1) = 0$.

Définition 1.3 Problème de Cauchy

On appelle *problème de Cauchy* la donnée d'une équation différentielle résolue d'ordre n,

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

et de n conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0 \qquad y''(x_0) = y''_0 \qquad \dots \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Le problème est qu'on ne dispose pas de méthode de résolution générale pour toutes les équations différentielles.

1.2 Équations différentielles linéaires

Néanmoins, il existe une classe d'équations différentielles que l'on sait résoudre. Ce sont les équations différentielles *linéaires*.

Définition 1.4 Équation différentielle linéaire

On appelle *équation différentielle linéaire* toute équation de la forme :

$$(E) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ et b sont des fonctions.
La fonction b est appelé le *second membre*. Si b est nulle, alors l'équation est dite *homogène* ou *sans second membre*.
L'équation différentielle

$$(E_H) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

est appelée équation différentielle homogène associée à (E).
Si $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire à *coefficients constants*.

Exemple 1.9

L'équation différentielle $(x^2+1)y'' = e^x y + \arctan x$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation différentielle homogène associée est $(x^2+1)y'' = e^x y$.

L'appellation linéaire provient de la propriété suivante.

Théorème 1.1 Principe de superposition

Si y_1 est une solution de l'EDL $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$ et y_2 une solution de l'EDL $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$, alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de l'EDL $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

Remarque. Dans le cas où $b_1 = b_2 = 0$, on a le résultat suivant.
Si y_1 et y_2 sont solutions de $(E) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$, alors toute combinaison linéaire de y_1 et y_2 est également solution de (E). ■

Les équations différentielles linéaires jouissent aussi de la propriété fondamentale suivante.

Théorème 1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Si $\bar{y}$ est une solution de l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$, alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $\bar{y} + y_H$ où y_H décrit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Équations sans second membre

Théorème 2.1 Solutions d'une EDL sans second membre

Soient I un intervalle, $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ est l'ensemble des fonctions λe^{-A} où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque. On dit que l'ensemble des solutions a une structure de *droite vectorielle* : toutes les solutions sont proportionnelles à e^{-A}. En particulier, il existe une infinité de solutions.
La donnée d'une condition initiale permet de fixer λ. ■

L'exemple suivant est à connaître.

Exemple 2.1

Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $x \mapsto e^{ax}$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' - ay = 0 \text{ avec la condition initiale } y(0) = 1$$

Exemple 2.2

Les solutions de $(1+x^2)y' - y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\arctan x}$.

Méthode **Résolution non rigoureuse**

D'où a-t-on sorti le e^{-A} du théorème précédent ? On va voir qu'on peut le retrouver grâce à une méthode pratique mais non rigoureuse. On va supposer que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ne s'annulent pas, ce qu'on ne peut pas savoir a priori. On peut alors écrire :

$$\frac{y'}{y} = -a$$

On reconnaît en $\frac{y'}{y}$ la dérivée de $\ln|y|$ (attention, on suppose aussi implicitement que y est à valeurs *réelles*). En intégrant, on a donc :

$$\ln|y| = -A + C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. On passe à l'exponentielle de sorte que $|y| = e^C e^{-A}$. e^C est une constante positive qu'on peut noter λ. y est continue et ne s'annule pas donc elle est de signe constant. On peut donc se débarrasser de la valeur absolue et dire que y est de la forme λe^{-A} avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Attention ! Cette méthode est non rigoureuse et, pour résoudre une équation différentielle, il faut invoquer le théorème précédent.

Exercice 2.1

Résoudre l'équation différentielle $y' = y \tan x$. On pensera notamment à définir auparavant l'intervalle sur lequel on cherche les solutions.

Exercice 2.2 **Équation fonctionnelle des exponentielles**

Montrer que les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifient l'*équation fonctionnelle* :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

sont soit la fonction nulle soit les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ où $a \in \mathbb{C}$.

Remarque. Les exponentielles sont donc les seules fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui transforment les sommes en produits. ■

Exercice 2.3 **Équation fonctionnelle du logarithme**

Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui vérifient *l'équation fonctionnelle* :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

2.2 Équations avec second membre

Théorème 2.2 Existence d'une solution

Soient I un intervalle et $(a, b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$. L'équation différentielle $(E) : \ y' + ay = b$ admet toujours une solution sur I.
De plus, si $\bar{y}$ est une solution de (E), les solutions de (E) sont les fonctions $\bar{y} + y_H$ où y_H décrit l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).
Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ admet une *unique* solution.

Remarque. Toute solution est de classe $\mathcal{C}^1$. ■

Méthode **Résolution d'une EDL avec second membre**

Soit à résoudre l'EDL $y' + ay = b$ avec $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On note A une primitive de a.

Résolution de l'EDL homogène associée La solution générale de l'EDL homogène est de la forme λe^{-A} où $\lambda \in \mathbb{K}$ est une constante.

Recherche d'une solution particulière Soit il existe une solution particulière évidente y_0. Soit on cherche une solution particulière sous la forme $\bar{y} = \lambda e^{-A}$ où λ est une *fonction*. Autrement dit, on remplace la constante λ de la solution générale de l'EDL homogène par une fonction : cette méthode s'appelle *variation de la constante*. On remplace donc y par λe^{-A} dans l'EDL et on obtient une équation différentielle vérifiée par λ (plus exactement, $\lambda' = be^{A}$).

Résolution de l'EDL initiale La solution générale de l'EDL initiale est de la forme $\bar{y} + y$ où y est la solution générale de l'EDL homogène.

Attention ! On vérifiera toujours si possible que les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 2.4

Résoudre l'EDL $xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2.5

Soit a et b deux fonctions impaires continues sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est paire.

Exercice 2.6

Soit a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations sans second membre

Définition 3.1 Équation caractéristique

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$. On appelle *équation caractéristique* associée à l'équation différentielle $ay'' + by + c = 0$ l'équation $aX^2 + bX + c = 0$.

Exemple 3.1

L'équation caractéristique associée à l'EDL $3y'' - 4y' + 5y = 0$ est $3X^2 - 4X + 5 = 0$.

Le théorème suivant fait le lien entre les solutions de l'équation caractéristique et les solutions de l'EDL.

Théorème 3.1 Solutions d'une EDL sans second membre (cas complexe)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ dont on recherche les solutions à valeurs *complexes*.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines *distinctes* r_1 et r_2, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.
- Si l'équation caractéristique possède une racine *double* r, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Théorème 3.2 Solutions d'une EDL sans second membre (cas réel)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ dont on recherche les solutions à valeurs *réelles*.

- Si l'équation caractéristique possède deux racines *réelles distinctes* r_1 et r_2, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Si l'équation caractéristique possède une racine *double* r, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Si l'équation caractéristique possède deux racines *complexes conjuguées* $r \pm i\omega$, alors les solutions de l'EDL sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda \sin \omega x + \mu \cos \omega x)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Ces fonctions peuvent également s'écrire $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \sin(\omega x + \varphi)$ ou $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(\omega x + \varphi)$ avec $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 3.2

Soit $\omega \in \mathbb{R}$.
Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$.
Les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$.

3.2 Équations avec second membre

Théorème 3.3 Existence d'une solution

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'équation différentielle $(E) :\ ay'' + by' + cy = d$ admet toujours une solution sur I.
De plus, si $\bar{y}$ est une solution de (E), les solutions de (E) sont les fonctions $\bar{y} + y_H$ où y_H décrit l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E).
Le problème de Cauchy $\begin{cases} ay' + by + cy = d \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ où $x_0 \in I$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$ admet une *unique* solution.

3.3 Résolution de certaines EDL à coefficients constants

Dans la suite, P désigne un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{K}$.

Résolution de $ay''+by'+cy=P(x)e^{kx}$

On cherche une solution particulière sous la forme $x^m Q(x)e^{kx}$ où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de même degré que P et :

- $m=0$ si k n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- $m=1$ si k est racine *simple* de l'équation caractéristique ;
- $m=2$ si k est racine *double* de l'équation caractéristique.

Le programme stipule que vous n'avez à connaître la méthode dans le seul cas où P est constant.

Résolution de $ay''+by'+cy=P(x)\cos kx$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\sin kx$ avec $\underline{\mathbb{K}=\mathbb{R}}$

On cherche une solution particulière *complexe* $y_{\mathbb{C}}$ de $ay''+by'+cy=P(x)e^{ikx}$ en utilisant la méthode précédente. Comme $\cos kx=\operatorname{Re}(e^{ikx})$ et que $\sin kx=\operatorname{Im}(e^{ikx})$, $\operatorname{Re}(y_{\mathbb{C}})$ et $\operatorname{Im}(y_{\mathbb{C}})$ sont des solutions particulières respectives de $ay''+by'+cy=P(x)\cos kx$ et $y'+ay=P(x)\sin kx$.

Résolution de $ay''+by'+cy=P(x)\operatorname{ch} kx$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\operatorname{sh} kx$ avec $\underline{\mathbb{K}=\mathbb{R}}$

On cherche des solutions particulières y_+ et y_- de $ay''+by'+cy=P(x)e^{kx}$ et $ay''+by'+cy=P(x)e^{-kx}$ en utilisant la méthode précédente.
Comme $\operatorname{ch} kx=\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}$ et que $\operatorname{sh} kx=\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}$, $\frac{y_++y_-}{2}$ et $\frac{y_+-y_-}{2}$ sont des solutions particulières respectives de $ay''+by'+cy=P(x)\operatorname{ch} kx$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\operatorname{sh} kx$ par principe de superposition.

Attention ! On vérifiera toujours si possible que les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation différentielle initiale.

Exercice 3.1

Résoudre les EDL suivantes :

1. $y''-y=x^2+1-e^x$;
2. $y''+y'+y=e^x\cos x$.

4 Compléments

4.1 Problèmes de raccord

Problèmes de raccord

Il s'agit de résoudre des équations différentielles du type $ay'+by=c$ où a,b,c sont des fonctions continues sur un intervalle I et où a peut s'annuler sur l'intervalle I. La méthode est la suivante.

- On résout sur les plus grands intervalles ouverts sur lesquels a ne s'annule pas (on se ramène à $y'+\frac{b}{a}y=\frac{c}{a}$). Il apparaît alors des constantes pour chacun de ces intervalles.
- On étudie la continuité d'une éventuelle solution en les points de raccord de ces intervalles pour voir si cela implique des conditions sur ces constantes.
- On étudie la dérivabilité d'une éventuelle solution en les points de raccord de ces intervalles pour voir si cela implique à nouveau des conditions sur ces constantes.
- On vérifie que si les conditions sur les constantes sont respectées, on a bien une solution (c'est toujours le cas en fait).

Exercice 4.1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

- $xy' + y = x^3$
- $xy' - y = 0$
- $x^2y' + y = 0$
- $xy' - 2y = 0$

4.2 Changement de variable

On se contentera d'un exemple.

Exemple 4.1 Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E) : \ t^2y'' + ty' + y = 0$

Soit y une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
On effectue le changement de variable $u = \ln t$, c'est-à-dire qu'on définit une fonction z par $z(u) = y(t)$, ce qui n'est pas très rigoureux.
Plus rigoureusement, on pose $z(u) = y(e^u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et on a donc également $y(t) = z(\ln t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
On remarque que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si* y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Et, dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$y(t) = z(\ln t) \qquad y'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln t) \qquad y''(t) = \frac{1}{t^2}\left(z''(\ln t) - z'(\ln t)\right)$$

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = z''(\ln t) + z(\ln t)$$

Ainsi

$$\left(\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ t^2y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0\right) \iff \left(\forall u \in \mathbb{R}, \ z''(u) + z(u) = 0\right)$$

Donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* z est solution de $z'' + z = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de cette dernière équation en z sont les fonctions de la forme $z : u \in \mathbb{R} \mapsto A\cos u + B\sin u$.
Donc, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto A\cos(\ln t) + B\sin(\ln t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4.3 Changement de fonction

On se contentera à nouveau d'un exemple.

Exemple 4.2 Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E : \ x^2y^2 - xy' - 3y = 0)$

Remarquons déjà que cette équation différentielle est du premier ordre mais qu'elle n'est pas linéaire. La méthode usuelle ne s'applique donc pas.
Pour simplifier, on cherchera les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit donc y une fonction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc poser $z = \frac{1}{y}$ et y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *si et seulement si* z l'est. De plus, dans ce cas, $y' = -\frac{z'}{z^2}$.

$$x^2y^2 - xy' - 3y = 0 \iff xz' - 3z = -x^2$$

On résout cette nouvelle équation différentielle en z sur $\mathbb{R}_+^*$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto x^2 + \lambda x^3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, $z = \frac{1}{y}$ ne s'annule pas non plus sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est possible que si $\lambda \geqslant 0$ (étudier les variations de $x \mapsto x^2 + \lambda x^3$).
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ne s'y annulant pas sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2+\lambda x^3}$ avec $\lambda \geqslant 0$.