

CONCOURS D'ADMISSION 2002

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Premier problème

L'objet du problème est d'étudier certains aspects du mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. On désignera par \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

I

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle forment un système isolé. À l'instant t , elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés dans un référentiel galiléen par $\vec{R}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{R}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, avec les vitesses \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ; on pose $\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.
2. Déterminer la position de leur centre d'inertie C . Quelle est la trajectoire de C ? Déterminer sa vitesse.
3. Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2 .
4. Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 , caractérisé par $\vec{r}(t)$, est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.
5. À quelle condition portant sur r et $v = \|\vec{v}\|$ les deux masses restent-elles à distance finie l'une de l'autre?
- 6.a) À quelle condition sur r et v les deux masses restent-elles à distance fixe r_0 l'une de l'autre?
- b) Déterminer dans ce cas la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω , en fonction des masses, de r_0 et \mathcal{G} .

II

On étudie un cas particulier du problème à trois corps « restreint », à savoir :

- Deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m , soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2 .
- Les deux masses m_1 et m_2 , à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie C . Ce mouvement, décrit au **I.6**, n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m .

On ne considère dans cette partie que les situations où les trois masses restent alignées au cours du temps. La masse m est située au point A . On prendra la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $x'Cx$ d'origine C , avec $\overrightarrow{CA_1} = -r_1\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{CA_2} = r_2\vec{e}_x$, $\overrightarrow{CA} = x\vec{e}_x$, \vec{e}_x vecteur unitaire.

1. Exprimer, en fonction de x et à l'aide des paramètres du système, la composante selon $x'Cx$ de la force totale qui s'exerce sur la masse m dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω .

2. Montrer que dans ce référentiel tournant cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une « énergie potentielle ». Expliciter $U(x)$.

3. Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x ; par une analyse graphique, montrer qu'il y a trois positions « d'équilibre » possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2 .

4. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre dans le référentiel tournant, vis-à-vis des déplacements selon l'axe $x'Cx$.

III

1. Trois masses, a priori différentes, m_1, m_2 et m_3 sont situées respectivement aux trois sommets A_1, A_2, A_3 , d'un triangle équilatéral de côté d ; soit C leur centre d'inertie.

\vec{F}_1 étant la résultante des forces de gravitation s'exerçant sur la masse m_1 , montrer que :

$$\vec{F}_1 = -Gm_1 \frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3} \overrightarrow{CA_1}$$

2. En déduire que, si les masses tournent dans leur plan avec une certaine vitesse angulaire commune Ω que l'on déterminera, elles sont en équilibre relatif.

On limite, dans toute la suite de cette partie, l'étude au cas où, comme en **II**, l'une des masses, $m_3 (= m)$, est beaucoup plus petite que les deux autres m_1 et m_2 , dont le mouvement circulaire n'est pas modifié par m . On prend la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $X'CX$. La masse m , placée en A , est repérée par $\vec{R}(t) = \overrightarrow{CA}$ de coordonnées (X, Y) . On s'intéresse à la stabilité de la masse m au voisinage du sommet A_3 du triangle équilatéral de base A_1A_2 , en limitant d'abord

l'étude aux mouvements dans ce plan. On oriente l'axe $Y'CY$ de telle sorte que l'ordonnée de A_3 soit positive.

3. Écrire, dans le référentiel tournant, « l'énergie potentielle » $U(X, Y)$ dont dérive la somme des forces gravitationnelles et d'inertie d'entraînement agissant sur la masse m ; on posera $\|\overrightarrow{AA_1}\| = d_1(X, Y)$ et $\|\overrightarrow{AA_2}\| = d_2(X, Y)$.

4. Écrire l'expression vectorielle de l'accélération \vec{a} de la masse m dans le référentiel tournant, à l'aide du vecteur rotation $\vec{\Omega}$, de la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y)$ dans ce référentiel et de $\overrightarrow{\text{grad}}(u)$ où $u(X, Y) = U(X, Y)/m$.

Dans la suite, on notera $u_x(X, Y) = \frac{\partial u(X, Y)}{\partial X}$, $u_{xy}(X, Y) = \frac{\partial^2 u(X, Y)}{\partial X \partial Y}$, etc..

5. En vue d'étudier la stabilité de m au voisinage du point A_3 , on pose $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, où (X_0, Y_0) sont les coordonnées du point d'équilibre A_3 de la masse m , dont on ne demande pas le calcul explicite.

Écrire les équations du mouvement, en se limitant aux termes du premier ordre en x et y . Pour alléger l'écriture, on notera : $u_{xx} = u_{xx}(X_0, Y_0)$ $u_{xy} = u_{xy}(X_0, Y_0)$ etc..

6. On cherche des solutions du type : $x = a \exp(\lambda t)$, $y = b \exp(\lambda t)$, où a et b sont des constantes.

Montrer que λ doit vérifier l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4\Omega^2 + u_{xx} + u_{yy}) + (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 0$$

7. On admet que si l'on pose :

$$\lambda = \lambda' \Omega \quad m_1 = \alpha(m_1 + m_2) \quad m_2 = (1 - \alpha)(m_1 + m_2)$$

et que l'on évalue les dérivées partielles figurant dans l'équation caractéristique de la question **III.6**, la variable λ'^2 vérifie l'équation du second degré suivante :

$$\lambda'^4 + \lambda'^2 + \frac{27}{4}\alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

a) Que conclure sur la stabilité de la position d'équilibre si $\Delta \geq 0$?

b) Même question si $\Delta < 0$.

c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la position d'équilibre est stable.

8. Pour le système Lune - Terre, le rapport de la masse légère m_1 à la masse totale $(m_1 + m_2)$ est $\alpha = 0,012$. En considérant ce système comme isolé, quelles conclusions en tirez-vous quant à la stabilité de la position d'équilibre d'un petit objet dont la position formerait un triangle équilatéral avec les centres de la Terre et de la Lune ?

Même question pour le système Jupiter - Soleil pour lequel $\alpha = 0,001$. L'observation des « planètes troyennes », de même période de révolution que Jupiter autour du Soleil et faisant avec lui et le Soleil un triangle équilatéral, conforte-t-elle votre conclusion ?

9. Par une analyse qualitative des forces s'exerçant dans le référentiel tournant, étudier la stabilité de la position A_3 vis-à-vis de petits mouvements orthogonaux au plan XCY .

Deuxième problème

Quelques propriétés des gaz réels et des mélanges sous deux phases

Dans tout le problème, la température reste fixée et est notée T . R désigne la constante des gaz parfaits.

1. On considère un système formé d'un seul constituant.

a) Établir la relation entre l'enthalpie libre à la pression p_1 notée $G(p_1)$, l'enthalpie libre à la pression p_2 notée $G(p_2)$ et le volume V du système.

b) Que devient cette relation dans le cas où le système est un solide ou un liquide peu compressible ?

c) Que devient la relation dans le cas où le système est constitué par n moles de gaz parfait ? En déduire l'expression du potentiel chimique (enthalpie libre molaire) μ du constituant à la pression p en fonction du potentiel chimique standard μ° et de la pression standard p° .

2. Dans le cas d'un gaz réel la forme de l'expression précédente du potentiel chimique est conservée à condition de remplacer p par la fugacité f , fonction de p . On se propose de trouver le lien entre f et p .

a) Établir la relation entre f, p, T , le volume molaire V_m du gaz réel et le volume molaire V_m° du gaz parfait associé. On utilisera le fait que, lorsque la pression tend vers 0, le gaz réel se comporte comme un gaz parfait.

b) On appelle Z le facteur de compressibilité, qui représente un écart du comportement du gaz réel par rapport au gaz parfait associé :

$$Z(p) = \frac{pV_m}{RT}$$

Montrer que f peut s'écrire :

$$f = p \exp \left(\int_0^p \frac{Z(p') - 1}{p'} dp' \right)$$

c) On propose comme équation d'état d'un gaz réel l'équation de Van der Waals :

$$p + \frac{a}{V_m^2} = \frac{RT}{V_m - b}$$

dans laquelle a et b désignent deux constantes caractéristiques du gaz étudié. Quelle interprétation physique peut-on donner de ces constantes ?

En effectuant un développement limité de V_m au premier ordre en $\frac{ap}{R^2T^2}$ et $\frac{bp}{RT}$, calculer une expression approchée de f .

Application numérique. On donne pour l'ammoniac les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0,42 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b = 37 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Calculer f pour $p = 10^6 \text{ Pa}$ et $T = 298,15 \text{ K}$. On prendra $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$. L'un des deux paramètres a et b joue-t-il un rôle prépondérant ? Comment cela se traduit-il sur le volume molaire V_m ?

3. On étudie le comportement d'un mélange de constituants en équilibre sous deux phases liquide et gazeuse.

On peut établir (mais ce n'est pas demandé) pour le constituant i l'expression suivante pour la fugacité f_i :

$$f_i = a_i^L p_i^{\text{sat}} \exp \left(\int_0^{p_i^{\text{sat}}} \frac{Z_i(p'_i) - 1}{p'_i} dp'_i \right) \exp \left(\frac{1}{RT} \int_{p_i^{\text{sat}}}^{p_i} V_{im}^L dp'_i \right)$$

dans laquelle p_i^{sat} désigne la pression de vapeur saturante du constituant i pur, V_{im}^L son volume molaire à l'état liquide, a_i^L son activité dans la phase liquide, p_i sa pression dans la phase gazeuse, Z_i son facteur de compressibilité.

Que devient cette expression dans les cas suivants :

- a) Le liquide est incompressible sur l'intervalle de pression étudié.
- b) Le volume molaire du constituant i liquide est négligeable.
- c) La condition de la question précédente est réalisée et la phase gazeuse est un mélange idéal de gaz parfaits.
- d) Les conditions de la question précédente sont réalisées et le liquide est un mélange idéal où x_i^L désigne la fraction molaire du constituant i dans la phase liquide.

4. La relation de la question **3.d)** est vérifiée pour les constituants du mélange benzène (1)-toluène (2) aux pressions faibles et modérées. x_i^L et x_i^V désignent les fractions molaires du constituant i dans la phase liquide et dans la phase gazeuse respectivement. On donne les pressions de vapeur saturante à 90°C : $p_1^{\text{sat}} = 136,1 \times 10^3 \text{ Pa}$ et $p_2^{\text{sat}} = 54,2 \times 10^3 \text{ Pa}$. Établir les courbes isothermes d'ébullition et de rosée sur le diagramme représentant p en fonction respectivement de x_1^L et x_1^V à 90°C .

* *

*

Rapport de MM. Yves BORENSZTEIN et Marc HIMBERT, correcteurs.

La deuxième composition de physique était composée de deux problèmes indépendants. Le premier proposait l'étude mécanique de certains aspects du mouvement à trois corps en interaction gravitationnelle : après avoir retrouvé les relations régissant le mouvement à deux corps (**partie I**), on s'intéressait au mouvement à trois corps « restreint » où les trois masses restent alignées (**partie II**), puis on poursuivait la description et l'étude de la stabilité relative d'un mouvement à trois corps où l'une des masses est beaucoup plus faible que les autres (**partie III**). Une certaine familiarité avec les référentiels non galiléens facilitait le travail. Le second abordait, à partir d'une modélisation simple, les propriétés des gaz réels et de leurs mélanges diphasiques : situation de gaz parfait (**question 1**), de gaz réel avec introduction de la fugacité (**question 2**), étude des mélanges diphasiques (**questions 3 et 4**).

Le barème de correction retenu a accordé presque deux fois plus de points au premier problème qu'au second. Achever correctement les deux premières parties du premier problème, ou le deuxième problème, permettait d'obtenir près de 9/20. Traiter entièrement, de façon satisfaisante, le premier, conduisait à près de 16/20. La répartition des notes des candidats français est la suivante :

$0 \leq N < 4$	7%
$4 \leq N < 8$	35%
$8 \leq N < 12$	36%
$12 \leq N < 16$	16%
$16 \leq N \leq 20$	6%

La moyenne s'établit (candidats français) à 9,1 avec un écart-type de 3,9. Le nombre de très basses notes est élevé, ce qui indique certaines négligences dans la préparation, les questions de la **partie I** du premier problème et la **question 1** du second étant de strictes applications du cours. Le nombre d'excellentes copies est cependant globalement satisfaisant.

PREMIER PROBLÈME

Première partie

Rares sont les copies qui obtiennent le maximum des points. Bien évidemment, hormis quelques erreurs de signe, ou quelques aberrations à propos de la loi de Newton (le potentiel est évidemment en $-1/r$), la quasi totalité des candidats répond à la **question 1**, et trouve (**question 2**) pour le centre d'inertie C un mouvement rectiligne uniforme.

Dès la **question 3**, certains ont rencontré de graves difficultés. Le résultat est connu, et la masse réduite doit intervenir ; encore faut-il démontrer l'égalité entre les énergies, et pour cela, élever convenablement au carré les vitesses des deux masses ponctuelles.

Plusieurs approches permettaient de montrer, à la **question 4**, l'équivalence des mouvements, et conduire à l'expression de la force centrale attractive agissant sur la masse réduite. À la **question 5**, une approche énergétique s'impose, à condition d'avoir, au **1**, explicité le choix de la constante dans l'énergie potentielle.

À la **question 6**, souvent très mal réussie, il est commode d'explicitier les équations du mouvement, qui donnent immédiatement le mouvement circulaire uniforme recherché au **6.a** et la période et la vitesse angulaire recherchées au **6.b**. Rappelons qu'une période est homogène à un temps et une vitesse angulaire à l'inverse d'un temps.

Deuxième partie

La deuxième partie étudiait le mouvement relatif rectiligne d'une masse « faible » dans le champ de potentiel créé par les deux autres, elles-mêmes en mouvement circulaire uniforme comme trouvé ci-dessus. Cette partie s'est révélée très sélective, et la médiocre qualité de la plupart des réponses a étonné les correcteurs. En effet, il suffit d'un peu de sens physique pour se convaincre que :

- le potentiel gravitationnel étant attractif, deux puits de potentiel apparaissent là où sont les deux masses ;
- la force d'inertie centrifuge doit conduire, loin des masses m_1 et m_2 , la particule m à l'infini ; et trouver ainsi, sans calcul, l'allure du graphique demandé à la **question 3**.

Au lieu de cela, les correcteurs ont rencontré, lors du passage dans le référentiel tournant, des signes et formes variés pour exprimer les composantes de la force subie :

- les termes gravitationnels : soit on distingue trois zones de part et d'autre des deux masses, soit on utilise, tout simplement, des valeurs absolues ;
- le terme d'inertie d'entraînement, qui doit être centrifuge, proportionnel au carré de la vitesse angulaire, et proportionnel à l'éloignement x ;
- le terme complémentaire, qui s'exerce hors de la trajectoire rectiligne.

De façon prévisible, intégrer des valeurs absolues pour obtenir l'énergie potentielle a occasionné de grandes difficultés (**question 2**). Mais intégrer la force en x doit conduire évidemment à un terme en x^2 ! Certes, l'épreuve de physique, même si elle fait appel largement à la modélisation mathématique, n'est jamais une épreuve d'algèbre ou d'analyse, mais tout de même. . .

Le graphe demandé à la **question 3** a en général été tracé dans les copies ayant abordé cette partie. Mais il est extrêmement rare que le candidat cherche à interpréter ce diagramme en faisant appel à son bon sens, autrement que par une voie algébrique : on voit fréquemment des courbes passer de moins à plus l'infini, de part et d'autre d'une masse (alors qu'évidemment, le potentiel gravitationnel reste attractif et que le pseudo-potential centrifuge est continu). L'imagination apparaît sans bornes pour dénicher les trois positions d'équilibre annoncées, pour certains rejetées à l'infini, ou sur les masses, ou correspondant (?) à l'équation $U = 0$. . . Il suffisait pourtant de raisonner pour trouver, presque sans calcul, sans dérivée seconde, que les trois positions d'équilibre se répar-

tissent dans les trois intervalles délimités par les masses et sont toutes trois instables (**question 4**) puisqu'elles correspondent à des maxima relatifs de U .

Troisième partie

Il s'agissait désormais d'étudier les conditions de stabilité relative d'un système quasi plan de trois masses, dont une très faible devant les autres.

Aux **questions 1** (juste de l'algèbre et de la géométrie) et **2** (du raisonnement physique) il a été répondu avec un certain manque de rigueur que les correcteurs ont peu sanctionné. Mais dès la **question 3** reprennent les erreurs constatées à la partie précédente. Au voisinage du troisième sommet du triangle équilatéral, l'expression est très simple : deux composantes attractives de l'énergie potentielle associées à chacune des masses, pour lesquelles l'emploi des distances d_1 et d_2 évite la perplexité associée aux valeurs absolues, et une composante centrifuge, là encore en R^2 , de signe négatif pour permettre « l'expulsion » à grande distance.

À la **question 4**, il faut connaître, ou si nécessaire retrouver, la forme de l'accélération complémentaire dite « de Coriolis ». Il faut aussi être attentif au choix de l'énoncé, qui intègre la masse dans l'expression de $u(X, Y)$. À la **question 5**, il convient d'être un peu ordonné : il faut projeter sur les axes X et Y , et se situer au voisinage du troisième sommet du triangle équilatéral, dans le plan à ce stade ; on développe ensuite par rapport à x et y , et on exprime les dérivées partielles de u . Comme il a été prouvé qu'on est au voisinage d'une position d'équilibre (**question 2**), les dérivées premières en X_0 et Y_0 sont nulles, et un système linéaire du second ordre à coefficients constants apparaît.

La suite de cette partie ne concerne plus qu'une copie sur six environ. À la **question 6**, la résolution du système linéaire du second ordre conduit aux équations bicarrées (données) pour λ et pour λ' . Les réponses à la **question 7** données par les copies sont en très grande majorité incorrectes, et laissent les correcteurs perplexes. Bien sûr, le signe du discriminant (terme un peu maladroit, puisqu'il s'agit du discriminant de l'équation du second degré associée à l'équation donnée) donne le nombre de solutions réelles pour λ'^2 et λ^2 . Le coefficient α étant, par construction, plus petit que 1, la somme et le produit des racines sont de signe connu. Mais ce qui est important pour étudier la stabilité, c'est avant tout le signe de la partie réelle de λ , et non de son carré ! De façon analogue, il est curieux de trouver, dans des copies de bon niveau à ce concours difficile, des incorrections sur l'interprétation d'une solution imaginaire pure pour λ : on obtient des petites oscillations, ce qui dans tous les cas où on néglige, comme ici, les phénomènes de dissipation, conduit à une position d'équilibre stable. Ainsi, les réponses à la **question 8** (notamment pour les planètes troyennes) devaient conforter les résultats obtenus (stabilité lorsque α est petit ou proche de 1).

La réponse à la **question 9** (presque jamais résolue de façon satisfaisante) devait évidemment conforter cette stabilité (cf. les planètes troyennes), compte tenu du caractère « central » de la force de gravitation. Rappelons que la force d'inertie complémentaire, liée au mouvement relatif, n'intervient pas pour étudier un équilibre.

DEUXIÈME PROBLÈME

Ce problème traitait un aspect très important, en pratique, des concepts de thermo-chimie, puisqu'il permettait de relier, dans le cas particulier d'une équation d'état très générale dite de Van der Waals, la fugacité à des grandeurs observables.

La **question 1**, très simple, exigeait de la rigueur : on ne se place qu'au **1.c** dans le cas du gaz parfait. Ce dernier alinéa, qui conditionnait la suite, a été généralement bien traité.

La **question 2** a particulièrement troublé les candidats, qui n'ont pas su, pour la plupart, suivre les propositions de l'énoncé : au **2.a**, remplacer p par f , puis évidemment intégrer la relation **1.a**, exprimer la limite en $p = f = 0$, en déduire une expression exponentielle intégrale de f ; au **2.b**, remplacer tout simplement V par Z ; au **2.3**, effectuer un développement limité en exhibant au préalable dans les expressions les infiniment petits donnés dans l'énoncé, dont on pouvait se convaincre qu'ils étaient sans dimension ; dans l'application numérique, le terme en a est dominant, Z est inférieur à 1 et le volume molaire plus petit, ce qui est cohérent avec la prédominance, dans l'équation de Van der Waals, du terme en a lié à l'interaction attractive entre constituants (remarque qui n'a été trouvée dans aucune copie. . .).

Au **3**, il suffisait de transcrire en paramètres les affirmations données dans le texte : incompressible signifie que V est indépendant de p (**3.a**) ; si le volume molaire du liquide est négligeable, alors le dernier terme disparaît (**3.b**) ; s'il s'agit d'un mélange idéal de gaz parfaits, c'est en plus la première exponentielle qui disparaît (**3.c**) ; si le mélange liquide est idéal, on peut combiner le résultat avec les lois de Raoult et de Dalton (**3.d**, en vue du **4**).

Pour traiter la **question 4**, qui a été abordée avec succès par moins d'une copie sur dix, il était souhaitable d'avoir déjà vu une courbe de mélange diphasique idéale de deux constituants, pour ne pas confondre les courbes d'ébullition (où la variable est la fraction molaire dans le liquide) et de rosée (où il s'agit de la fraction molaire dans le gaz). La première est, dans l'exemple traité, rectiligne.

En conclusion, la deuxième épreuve de physique s'est révélée en 2002 très sélective. Elle a mis en évidence d'excellentes copies, et des candidats manifestement mal préparés à aborder les phénomènes physiques et physico-chimiques par le biais de la mécanique du point ou de la thermodynamique. Elle a également, nous semble-t-il, fait apparaître un manque généralisé de recul de la part des candidats vis à vis des résultats de leurs calculs, recul si nécessaire lorsqu'on traite un problème physique et que, comme ce fut dans ce problème quelquefois le cas, les calculs sont mal maîtrisés. Il est rare, à ce niveau, que les phénomènes trouvés heurtent le plus élémentaire bon sens. Encourageons les futurs candidats à ne pas manquer d'utiliser celui-ci pour valider leurs prévisions. . .