ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Dans les trois premières parties, on désigne par

- n et m des entiers > 0 tels que $n \leqslant m$;
- E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ avec son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$;
- e_j, $j = 1, \ldots, m$, des éléments non nuls de E satisfaisant une condition de la forme

$$\forall x \in E \quad \alpha\|x\|^2 \leqslant \sum_j (x \mid e_j)^2 \tag{1}$$

où α est un réel > 0 ;

- T l'endomorphisme de E défini par

$$T(x) = \sum_j (x \mid e_j)\, e_j \ .$$

Si S est un endomorphisme de E, sa norme $\|S\|$ est défini par

$$\|S\| = \sup\{\|S(x)\| : \|x\| = 1\} \ .$$

Première partie

1. Donner un exemple simple de famille (e_j) satisfaisant une condition de la forme (1).

2. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_j.

3. On prend $n = 2$, $m = 3$, $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. Déterminer $\sum_j (x \mid e_j)^2$ et T.

4. Vérifier que T est autoadjoint, inversible et satisfait $\big(T(x) \mid x\big) \geqslant \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

5. Comparer $\|T\|$ et $\sup\{\big(T(x) \mid x\big) : \|x\| = 1\}$.

6. Trouver un réel β tel que $\big(T^{-1}(x) \mid x\big) \leqslant \beta \|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Que peut-on dire de $\|T^{-1}\|$?

7. On suppose que $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x \mid e_j)^2$ pour tout $x \in E$. Déterminer T.

Deuxième partie

On note F l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \ldots, f_m)$ sa base naturelle, $(\cdot|\cdot)_F$ son produit scalaire naturel. On définit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par

$$\Phi(x) = \sum_j (x \mid e_j)\, f_j \ .$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \to E$ satisfaisant

$$(\Psi(h) \mid x) = (h \mid \Phi(x))_F \quad \texttt{pourtous} \quad \mathtt{x} \in \mathtt{E}, \mathtt{h} \in \mathtt{F} \ .$$

8. Vérifier que l'on a $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$ et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$ et on définit une application linéaire $\tilde{\Phi} : E \to F$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j (x \mid \tilde{e}_j)\, f_j \ .$$

9. Vérifier que l'on a $F = \mathtt{Im}\tilde{\Phi} \oplus (\mathtt{Im}\Phi)^{\perp}$.

10. Étant donné un élément x de E, déterminer le minimum des nombres $\sum_j h_j^2$ pour les familles (h_j) vérifiant $x = \sum_j h_j e_j$, et préciser pour quelles familles (h_j) ce minimum est atteint.

11. Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants :

a) les e_j forment une base de E ;

b) les e_j forment une base orthonormale de E ;

c) on a $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x \mid e_j)^2$ pour tout $x \in E$.

Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation $T(x) = y$ par une méthode d'itérations successives. On pose

$$a = \inf\left\{\big(T(x)\,|\,x\big) : \|x\| = 1\right\} \quad , \quad b = \|T\| \ ;$$

on a donc $0 < a \leqslant b$. Pour tout réel $s > 0$ on pose $V_s = id_E - sT$.

12. Montrer que l'on a

$$\|V_s\| = \max\left(|1 - a\,s|\,,\,|1 - b\,s|\right) \ ,$$

13. Déterminer le minimum C de la fonction $s \mapsto \|V_s\|$, préciser pour quelle valeur s_0 de s il est atteint, et montrer que $C \in [0, 1[$. À quelle condition C est-il égal à 0 ?

[Il est conseillé de dessiner les courbes représentatives des fonctions $s \mapsto |1 - a\,s|$ et $s \mapsto |1 - b\,s|$].

On fixe un élément y de E et on définit une application U de E dans lui-même par

$$U(x) = x + s_0\big(y - T(x)\big) \ .$$

14. Étant donné x et $x' \in E$, comparer $\|U(x) - U(x')\|$ et $C\|x - x'\|$.

15. On désigne par x_0 un élément de E et on pose, pour tout entier $n > 0$, $x_n = U^n(x_0)$. Étudier le comportement de la suite (x_n). Conclure.

Quatrième partie

Dans cette partie, on désigne par

- E un espace préhilbertien réel ;
- T un endomorphisme continu de E (on ne le suppose pas autoadjoint) ;
- x_0 et y_0 des éléments de E.

Pour tout réel $s > 0$ on définit une application U_s de E dans lui-même par

$$U_s(x) = x + s\big(y_0 - T(x)\big) \ .$$

16.a) Trouver une condition portant sur T suffisante pour que l'on ait une majoration de la forme

$$\|id_E - s\,T\|^2 \leqslant 1 - 2a\,s + b^2\,s^2$$

avec $a > 0$, b réel.

b) Trouver alors une condition portant sur E, impliquant que la suite $x_n = U_s^n(x_0)$ soit convergente pour un s convenable ; préciser dans ce cas la nature (injectif ?, surjectif ?) de T.

* *
*

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Cette épreuve de mathématiques a été dans l'ensemble réussie, si l'on tient compte de la moindre familiarité des candidats avec l'univers des mathématiques. Il s'agissait d'un problème d'analyse spectrale d'opérateurs auto-adjoints, avec une méthode de calcul approché de l'opérateur inverse. Certaines questions étaient difficiles, et dans l'ensemble l'énoncé ne suggérait pas toujours la méthode de résolution, relativement variable au fil des questions. C'est en grande partie sur l'aptitude à changer d'optique d'une question à l'autre que s'est joué le classement des candidats.

Les solutions proposées relèvent parfois du bluff. Les correcteurs attribuent plus volontiers une fraction des points du barême à une réponse partielle mais correctement justifiée, qu'à une réponse complète mais mal démontrée.

La moyenne de l'épreuve est de 9,47, l'écart-type est de 3,98. Les notes attribuées vont de 1 à 20 inclus.

Les candidats qui ont obtenu la note de 20 ont fait correctement tout le problème, avec plus ou moins d'élégance.

Examen en détail des questions

1. est en général bien traitée.

2. a soulevé déjà quelque difficulté, le raisonnement par double orthogonal ne venant pas spontanément à l'esprit. Certains ont remarqué que la surjectivité de T demandée à la question **4** donnait la solution, sans toujours l'écrire de façon convaincante, sans parler de ceux qui invoquent la question **4** pour résoudre la question **1,** et la question **1** pour faciliter la solution de la question **4**. On trouve déjà des affirmations étranges du type

$$x \notin \vec{t}(e_j) \Rightarrow (x|e_j) = 0 \ \forall j$$

et, pour les sous-espaces de E, la confusion qui guette toujours entre « non vide » et « non réduit à $\{0\}$ ».

3. Ce calcul facile réserve quelques surprises : il est parfois entièrement faux, mais on trouve aussi parfois une réponse juste pour T, et une réponse fausse pour $\sum(x|e_j)^2 = (x|Tx)$.

4. donne lieu à quelques raisonnements bien compliqués, par exemple diagonaliser T dans la base canonique pour y vérifier que sa matrice est symétrique, et à quelques affirmations un peu rapides, du type « les e_j engendrant E, T est surjective ».

On notera dans un nombre élevé de copies un long calcul pour vérifier $(Tx|x) = (x|Tx)$ $\forall x$, d'où ils se croient en droit de déduire que T est auto-adjoint (rappelons qu'on travaille dans des espaces réels).

Cette question et les suivantes (ainsi que la question **12**) pouvaient être résolues en quelques lignes si on diagonalisait T en base orthonormée. Cette procédure semble ne plus faire partie des automatismes de bien des candidats.

5. Certains se contentent paresseusement de l'inégalité évidente $\sup_{||x||=1}(Tx|x) \leq ||T||$. Avec une variante moins utile mais néanmoins exacte : $\sup_{||x||=1}(Tx|x) \leq \frac{1+||T||^2}{2}$. Parmi ceux qui traitent l'inégalité dans l'autre sens, certains oublient (ou oublient d'écrire) que les valeurs propres sont toutes positives.

6. Deux réponses à cette question étaient possibles ($\beta = \alpha$ ou $\beta = \min(spectre(T))^{-1}$) . La plupart des copies proposent l'une ou l'autre. Mais les réponses sont parfois plus farfelues sans être fausses, par exemple $\beta = ||T||/||T^{-1}||^2$ ou $\beta = \sqrt{\alpha/||T||^3}$, sans compter la réponse tautologique $\beta = ||T^{-1}||$. Parmi les erreurs classiques, on relèvera $||T^{-1}|| = ||T||^{-1}$ ou $||T^{-1}|| \leq ||T||^{-1}$.

7. Cette question assez simple est toujours résolue, mais pas toujours de bonne foi. Certains affirment que les (e_j) forment une base – orthonormée de préférence – malgré le contre exemple que leur fournissait la question **3**.

8. Cette question est en général bien traitée.

9. Cette question difficile est parfois traitée avec élégance. Sinon, la plupart proposent une solution en deux temps (montrer que les espaces sont en somme directe, puis vérifier la supplémentarité des dimensions). Beaucoup prouvent l'égalité $\widetilde{\Phi} \circ T = \Phi$ pour en déduire, non pas l'égalité des images qui donne le résultat, mais uniquement l'égalité des rangs de $\widetilde{\Phi}$ et Φ.

On lit trop souvent que, comme $\Psi \circ \Phi = T$ et T est inversible, Ψ et Φ doivent être inversibles.

10. Question difficile et peu souvent traitée. Quelques bonnes copies, cependant, remarquent qu'il s'agit de projeter l'origine 0 sur l'espace affine $\Psi^{-1}\{x\}$. Certains partent de l'idée fausse que le minimum est atteint en $\Phi(x)$, et invoquent à tout hasard Cauchy-Schwarz.

11. Question ouverte qui a reçu des réponses variées, plus ou moins complètes.

12. Cette question facile a été traitée de façon inégale, en raison sans doute d'une certaine fatigue après les question plus difficiles qui la précèdent. Certains ont cru à tort que l'énoncé de la question **16.a** leur fournissait une indication de méthode, ce qui conduit à des affirmations non vérifiées (et pour cause) du type : $1-2as+s^2b^2 \leq \max((1-as)^2, (1-bs)^2)$.

Quelques copies se réfèrent à la question **5** pour écrire $||V_s|| = \sup_{||x||=1}(V_s x|x)$ en oubliant qu'ici, une valeur absolue s'impose.

13. Pour une fois, l'énoncé donnait une indication de méthode, dont les candidats ont su profiter.

14. et **15.** Des points faciles à gagner en cette fin de problème, à condition de ne pas prendre U pour une application linéaire (on lit $||U^n(x)|| \leq C^n||U_0(x)||$ donc $U^n(x) \to 0$), et de manier correctement la notion de suite de Cauchy : montrer $||U^{n+p}(x) - U^n(x)|| \leq C^n\,||U^p(x) - x||$ ne prouve pas que la suite est de Cauchy.

16. Certains oublient qu'on n'est plus en dimension finie, ou que T n'est plus autoadjoint (ou bien proposent l'un ou l'autre comme condition sufisante). D'autres hésitent sur l'existence de la norme d'un opérateur, et on trouve des hypothèses telles que « si $||T||$ existe ... » , « si $\sup_{||x||=1}||T(x)||$ existe ... » , « si $||T|| < +\infty$... » , « si il existe b tel que $||T(x)|| \leq b$ pour tout x de norme 1... ». L'existence de s tel que $1 - 2as + b^2s^2 < 1$ est trop souvent affirmée sans justification.