ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2000

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier certaines équations différentielles, d'abord dans le cadre des séries entières, ensuite dans celui des fonctions indéfiniment dérivables.

Notations des parties I, II et III.

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des suites de nombres complexes $u = (u_k)_{k=1,2,\dots}$, et par e_n la suite u où $u_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$. Pour tout u de E on note $r(u)$ le rayon de convergence, éventuellement nul ou infini, de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x^k$; pour tout nombre réel $R > 0$ on note E_R l'ensemble des u de E tels que $r(u) \geq R$; enfin on note E_+ l'ensemble des $u \in E$ tels que $r(u) > 0$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un élément u de E appartient à E_+ si et seulement s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'on ait $|u_k| \leq M^k$ pour tout k ; dans ce cas on a $r(u) \geq \dfrac{1}{M}$.

b) Si, pour un réel $M > 0$, on a $|u_k| \geq M^k$ pour tout k, on a $r(u) \leq \dfrac{1}{M}$.

2. Déterminer un nombre réel $\gamma > 0$ tel que l'on ait, pour tout $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}$$

Deuxième partie

On fixe un nombre complexe a et on désigne par A_a l'endomorphisme de E défini par $(A_a u)_k = (k+a)u_k$ pour tout k.

3. Déterminer le noyau et l'image de A_a.

4. Vérifier que, si a n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $R > 0$, la restriction de A_a à E_R est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même.

Troisième partie

On définit le produit $u * v$ de deux éléments u et v de E par $(u * v)_1 = 0$ et

$$(u * v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i \, v_{k-i} \quad \text{pour} \quad k \geq 2\ .$$

On fixe deux nombres complexes a et c, a n'étant pas un entier strictement négatif ; on note T l'application de E dans lui-même définie par $Tu = A_a u + c\, u * u$.

5.a) Supposant que $Tu = v$ où u et v sont des éléments de E, écrire u_1 en fonction de v_1, puis u_k en fonction de v_k, $u_1, \ldots, u_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

b) L'application T est-elle injective ? surjective ?

6. On se propose de démontrer que la restriction de T à E_+ est une bijection de ce sous-espace sur lui-même.

a) Vérifier que $T(E_+)$ est inclus dans E_+.

b) Soit $u \in E$ tel que $v = Tu \in E_+$. Démontrer l'existence de nombres réels δ, M, M_0, M_1 strictement positifs satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |k+a| \geq \delta$

(2) $\quad 2|c|\gamma\, M_0 \leq \delta$, où γ est la constante introduite à la question **2.**

(3) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |v_k| \leq M^k$

(4) $\qquad M \leq \delta\, M_0 M_1$

(5) $\qquad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ 2k^2 M^k \leq \delta\, M_0 M_1^k\ .$

c) Comparer $|u_k|$ et $\dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

d) Conclure.

7. *Exemple.* On prend $a = 0$, $c = -1$, $v = \lambda\, e_1$ où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et on suppose encore $Tu = v$.

a) Montrer que u_k est de la forme $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+^*$ et

$$2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \quad \text{pour tout } k\ .$$

b) En déduire un encadrement de $r(u)$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ on note $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I. On désigne par a un nombre réel non nul et par D l'endomorphisme de $C^\infty(I)$ défini par

$$(Df)(t) = t\, f'(t) + a\, f(t)\ .$$

8. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $Df = 0$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, et préciser leurs intervalles de définition.

9. Dire pour quelles valeurs de a il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, vérifiant $Df = 0$, nulle en 0 mais non identiquement nulle.

Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $]0, \theta[$ avec $\theta \in]0, +\infty]$. On désigne par t_0 un point de I, par g une fonction de $C^\infty(I)$, et enfin par α un nombre complexe.

10. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $Df = g$ sur I telle que $f(t_0) = \alpha$ [on pourra introduire la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} s^{a-1}\, g(s) ds\,]$$

11. On suppose dans cette question que a n'est pas un entier strictement négatif et que g est la restriction à I de la somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k\, t^k$ ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

Déterminer α de façon que f soit aussi la restriction à I de la somme d'une série entière ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

12. On se propose d'étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers 0, sous l'hypothèse que $g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

a) Supposant $a < 0$, déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0.

b) On suppose maintenant que $a > 0$ et que la fonction g, prolongée par 0 au point 0, admet une dérivée à droite en ce point. Trouver un nombre α tel que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers 0.

* *
*

Rapport de MM. Pierre-Vincent KOSELEFF et Claude WAGSCHAL, correcteurs.

Le sujet, cette année, proposait l'étude d'équations différentielles linéaires et non linéaires dans le cadre des séries entières, puis dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$. Bien que cela n'apparaisse pas explicitement, les trois premières parties avaient pour objet la résolution du problème de Cauchy

$$x\frac{du}{dx} + au + c\,u^2 = v,\ \ u(0) = 0,$$

où a et c sont des nombres complexes donnés et v une série entière convergente telle que $v(0) = 0$. Il s'agit d'un problème non linéaire avec une non linéarité quadratique ; de plus, le coefficient de du/dx s'annule à l'origine : de telles équations sont dites du type de Fuchs.

Ce problème nécessitait une bonne connaissance des propriétés élémentaires des séries entières convergentes. Quelques questions, assez peu nombreuses en réalité, demandaient un peu de réflexion.

Compte tenu du barème adopté la moyenne des notes des candidats français est de 10,5 avec un écart type de 3,9 ; la répartition est la suivante :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	4%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	26%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	36%
$12 \leq \mathrm{N} \leq 16$	24%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	10%

A noter 5 copies dont la note est inférieure à 2/20.

La première question de la **première partie** était élémentaire et a été traitée par la plupart des candidats. Signalons cependant que, pour la condition nécessaire de **1.a**, certains candidats ont effectué un raisonnement par l'absurde la plupart du temps insuffisant. Mentionnons également des erreurs inacceptables à un tel concours : utilisation abusive du critère de D'Alembert, convergence uniforme d'une série entière sur son disque de convergence, convergence sur le bord de ce disque, etc... La seconde question nécessitait quelque réflexion et n'a été traitée que dans les meilleures copies ; diverses méthodes permettaient d'obtenir le résultat : décomposition en éléments simples, comparaison avec une intégrale, utilisation de l'invariance par la transformation $i \mapsto k - i$, etc... Signalons, à titre de curiosité, que la meilleure constante γ vaut 41/9.

La **deuxième partie** ne présentait aucune difficulté sérieuse.

Certains candidats ont pensé que la suite (e_n) est une base de l'espace vectoriel E et expriment de façon erronée les réponses à la question **3** après avoir fait une analyse correcte de la situation. Quant à la question **4**, de nombreux candidats se sont contentés de vérifier ; de tels automatismes en dimension finie se comprennent, mais ceci révèle encore un manque d'attention qui est évidemment sanctionné.

A propos de la question **5.a** de la **troisième partie**, de nombreux candidats ont compris que l'application T n'est pas linéaire et ont vérifié son injectivité sans difficulté. La question **6.b** a souvent été l'objet de calculs compliqués alors que des majorations très simples permettent d'y répondre rapidement. En particulier, pour l'existence de δ, on se contente bien souvent de dire qu'un ensemble minoré de $]0, +\infty[$ admet une borne inférieure. Quant à la question **6.c**, de nombreux candidats ont fait correctement la récurrence nécessaire. De même, l'exemple proposé à la question **7** a été très largement traité.

La **quatrième partie** concernait la partie linéaire de l'équation, c'est-à-dire $c = 0$, dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$. La résolution de cette équation très simple a conduit à des erreurs inacceptables, en particulier l'utilisation du logarithme alors qu'il s'agit de fonctions à valeurs complexes. Bon nombre de candidats ne sont pas capables d'expliquer pour quelles raisons les solutions construites sont maximales. Pour la question **9** il faut évidemment examiner les dérivées successives, de nombreux candidats se contentent d'assurer la continuité en 0 ce qui conduit à une conclusion erronée. La question **10** est élémentaire, mais là encore on a relevé de nombreuses erreurs dans l'utilisation de la méthode de variation de la constante. Les questions **12.a** et **b** ont été abordées par quelques candidats. Divers raisonnements étaient possibles : convergence dominée, règle de l'Hôpital, etc... Certains ont fait appel à des théorèmes de comparaison entre intégrales, mais bien souvent n'en vérifient pas toutes les hypothèses. Quant à la toute dernière question, la plupart ont effectué une intégration par parties qui ne permet pas d'aboutir car la fonction g n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \theta]$ et la fonction g' n'est pas en général intégrable en 0.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2000

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.

On désigne par E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n (n \geq 1)$, par $(.|.)$ son produit scalaire usuel, et par $\|.\|$ la norme associée. Pour toute partie X de E, on note $X^{\perp}$ (resp. X^{+}) l'ensemble des éléments x de E satisfaisant $(x|y) = 0$ (resp. $(x|y) \geq 0$) pour tout y de X.

Une partie C de E sera appelée *cône à faces* s'il existe une famille finie d'éléments $c_1, \ldots, c_r\ (r > 0)$ de E telle que C soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$. On supposera toujours les c_i non nuls, et on dira qu'ils *engendrent* C. Enfin on appelle *face* de C toute partie de C de la forme $C \cap \{w\}^{\perp}$ avec $w \in C^{+}$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

1. Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de E est un cône à faces.

2. Supposant $n = r = 2$, décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C, C^{+} et donner sous chaque figure la liste des faces de C suivant les diverses positions relatives de c_1 et c_2.

3. Supposant que $n = r = 3$ et que (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale de E, décrire sans démonstration C, C^{+} et les faces de C.

Deuxième partie

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans E.

4.a) Soit K une partie compacte de E ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme λx, où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E.

b) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose K seulement fermé, ou si K, compact, contient 0 ?

5. On considère maintenant un cône à faces C engendré par des éléments $c_1, \dots, c_r$.

a) Montrer que C est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble K des éléments $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.]

b) Soit V un sous-espace vectoriel de E (éventuellement réduit à 0) contenu dans C et distinct de C. On note P le projecteur orthogonal de E sur $V^\perp$. Vérifier que $P(C)$ est un cône à faces contenu dans C.

c) Supposant que $P(C)$ contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de E contenu dans C et contenant strictement V.

d) Montrer que C est fermé dans E.

Troisième partie

6. On se propose ici de démontrer que tout cône à faces C vérifie $(C^+)^+ = C$.

a) Soit a un élément de E. Montrer que la fonction réelle définie sur C par $c \mapsto \|c - a\|$ atteint sa borne inférieure en un point unique de C. On le notera $p(a)$.

b) Déterminer le signe de $(p(a) - a|c)$ lorsque $c \in C$, ainsi que la valeur de $(p(a) - a|p(a))$.

c) Conclure.

Quatrième partie

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de E de la forme $\{a\}^+$ avec $a \in E$, $a \neq 0$).

7. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces C :

(α) le sous-espace vectoriel de E engendré par C est égal à E ;

(β) l'intérieur de C est non vide.

8. On suppose dans cette question les conditions de la question **7.** satisfaites pour un cône à faces C.

a) Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément x de C :

(α') x est un point frontière de C ;

(β') x appartient à une face de C distincte de C.

b) Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question **7.** ?

c) Soit x un point de E n'appartenant pas à C. Construire une face F de C, distincte de C et ayant la propriété suivante : pour tout $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $(x|w) < 0$.

[On pourra considérer le segment de droite joignant x à un point x_0 de l'intérieur de C].

9.a) Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.

b) Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

10. Déduire de ce qui précède que, si C est un cône à faces, il en est de même de C^+.

* *
*

Rapport de M^{me} Hélène AIRAULT et M. Paul GÉRARDIN, correcteurs.

Le problème concernait le premier résultat fondamental de la programmation linéaire, à savoir que les solutions des systèmes finis d'inéquations linéaires à un nombre fini d'inconnues sont les combinaisons linéaires positives d'un nombre fini de vecteurs. Il s'agit d'un résultat de géométrie affine. La méthode suivie dans l'énoncé du problème utilise les outils de géométrie euclidienne.

Ainsi, le problème demande aux candidats d'établir avec rigueur des propositions relatives aux cônes à faces définis comme les sommes d'un nombre fini de demi-droites, et aboutit à leur représentation comme les intersections des familles finies de demi-espaces. Il n'a pas toujours été compris qu'il y avait des cônes à faces qui nécessitaient plus de vecteurs que la dimension ambiante, même s'ils ne contenaient aucun sous-espace vectoriel non nul : considérer un cône à base carrée dans l'espace usuel.

La majorité des candidats est parvenue à traiter les trois premières parties du problème. La dernière partie, bien plus ardue, a été moins souvent abordée. Dans cette partie, hormis à la question **7** et à l'implication $(\beta') \Rightarrow (\alpha')$, très peu de réponses satisfaisantes ont été fournies. De sérieuses erreurs de raisonnement apparaissent lors des dernières questions.

Les notes des candidats français se répartissent de la façon suivante (le pourcentage est celui des candidats ayant obtenu la note N) :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	8%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	26%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	33%
$12 \leq \mathrm{N} \leq 16$	21%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	12%

La moyenne s'élève à 10,1 et l'écart-type à 4,6.

Analysons question par question le problème et les réponses des candidats.

Première Partie

1) La bonne réponse fut donnée par presque toutes les copies. Elle n'était pas toujours bien rédigée, et certains candidats, dès le début du problème, ont ressenti la nécessité de longues explications pour ce qui aurait du s'exprimer en quelques lignes. La démonstration repose sur le fait que tout nombre réel est la différence de deux nombres positifs. En général, il suffit de prendre pour système générateur du cône à faces que définit le sous-espace vectoriel, la réunion des vecteurs d'une base de ce sous-espace vectoriel et de leurs opposés. Il était plus économique d'adjoindre à une base l'opposé du vecteur somme des vecteurs de cette base : penser au motif élémentaire du diamant, avec l'atome central comme origine et les quatre autres atomes comme vecteurs, les combinaisons linéaires positives de ceux-ci engendrent l'espace à trois dimensions.

2) Trop de candidats n'ont pas lu l'énoncé très attentivement. Il y était prescrit de *décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C et C^+ et donner sous chaque figure (...).* Beaucoup ont donné des démonstrations tout en omettant les figures. Certaines d'entre elles étaient illisibles ou d'une si grande confusion qu'on ne pouvait y distinguer les ensembles demandés. Bien que la question posée relève de la géométrie plane, certains candidats ont produit des figures en perspective de l'espace à trois dimensions ; souvent, les règles élémentaires de sa représentation n'étaient pas respectées, et les angles aigus ne pouvaient être distingués des angles obtus. Une bonne moitié des candidats a su représenter correctement dans le plan les ensembles C et C^+, et dans certaines copies ils ont été dessinés soigneusement. Par contre, le décompte des faces n'a été donné que par une petite minorité. La plupart omettent le cône lui-même dans la liste des faces alors que la lecture complète du problème aurait du éviter cette erreur. L'ensemble $\{0\}$ pouvait être une face, mais, en général, cette face a été omise. Peu de copies donnent une réponse claire.

3) Là aussi, une figure était la bienvenue. La représentation en perspective donne parfois des figures inattendues. Une bonne figure fait ressortir la bonne réponse. Malheureusement, les figures n'étaient que rarement compréhensibles. Dans beaucoup de copies, on trouve « quart d'espace » pour « huitième d'espace », ainsi qu'une description très imprécise des ensembles C et C^+. Quelques candidats n'ayant pas lu attentivement l'énoncé dans lequel (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale ont discuté longuement suivant le rang de ce système. L'objet d'une figure est de remplacer l'expression écrite, mais rares ont été les figures lisibles. On trouve même des copies où les vecteurs ne passent plus par l'origine !

Deuxième Partie

4.a) La plupart des candidats utilisent une suite $(\lambda_n x_n)_n$ qui converge vers un point adhérent à l'ensemble donné dans la question. Ils savent bien que de la suite $(x_n)_n$ d'éléments de K s'extrait une suite $(x_{\alpha(n)})_n$ convergente vers $x \in K$. Peu de copies montrent clairement comment faire intervenir la condition sur K de ne pas contenir 0. On pouvait, par exemple, considérer la suite $(||\lambda_{\alpha(n)} x_{\alpha(n)})_n||$ et diviser le terme général par $||x_{\alpha(n)}||$. Il vaut mieux proscrire l'écriture d'expressions avec des vecteurs au dénominateur.

4.b) Il ne s'agissait pas de s'apercevoir que la démonstration donnée au **a** restait valide avec des hypothèses plus faibles, mais de comprendre si la conclusion restait vraie. Une bonne voie est d'examiner pas à pas les étapes, et de construire un contre-exemple lorsque se présente un écueil. Il faut alors mettre en évidence le point décisif, et produire un exemple simple. Aussi, seules les copies donnant un exemple concret et ne nécessitant aucune étude supplémentaire ont été prises en considération. Ce fut le cas par exemple d'un demi-plan fermé ne contenant pas l'origine, et d'un disque la contenant sur son bord.

5.a) En général, les candidats ont été capables de relier l'ensemble K au cône C. Pour en déduire la compacité de K, la plupart se sont assignés à montrer qu'il s'agissait d'une partie fermée et bornée. Ce n'était pas la méthode la plus directe. Que K soit borné fut souvent correctement démontré, mais les démonstrations de l'assertion « K est fermé » furent quelque peu embrouillées. Beaucoup de candidats connaissent des règles comme « l'image continue d'un compact est ... » , ou bien « l'image réciproque d'un fermé est ... », mais ils ne les appliquent pas avec discernement. La définition même de K aurait dû inciter à voir K comme image d'une partie compacte de R^n par une application linéaire. Environ le quart des copies n'a pas su déduire que l'ensemble K ne contient pas l'origine. Il fallait utiliser le fait que le cône C ne contenait aucune droite vectorielle.

5.b) Que l'ensemble $P(C)$ est un cône à faces engendré par les $(p(c_i))_{i=1,..,n}$ est assez simple, en raison de la linéarité de l'application bien que de nombreuses copies comportent de très longues démonstrations.. Cependant, trop nombreux sont ceux qui expriment P à l'aide d'une base orthonormale et se perdent dans de sombres calculs qui n'aboutissent pas. L'inclusion de $P(C)$ dans l'ensemble C était plus difficile à montrer : on pouvait utiliser le sous-espace vectoriel V contenu dans C. Tout vecteur de V a son opposé dans le cône C ; comme $c_i - P(c_i)$ est dans V, on déduit que $P(c_i) = (P(c_i) - c_i) + c_i$ est dans C lorsque c_i est dans C. Il est inutile de reproduire sur la copie une page de considérations infructueuses pour résoudre cette question.

5.c) L'inclusion de V dans C implique que l'image réciproque par la projection orthogonale P d'un sous-espace vectoriel contenu dans $P(C)$ est encore un sous-espace vectoriel contenu dans C. Des assertions comme : « $V \cup P(C)$ est un sous-espace vectoriel », qu'on peut espérer être des lapsus, ou bien « C est la somme directe $F + P(C)$ », au lieu de dire que tout vecteur de C s'écrit uniquement comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $P(C)$, signalent aussi une pratique assez réduite de l'algèbre linéaire.

5.d) La plupart des candidats ont abordé cette question. Certains ont parlé de « sous-espace de dimension maximale » sans préciser sous quelle condition. Il a été souvent remarqué que le cône C est fermé comme image réciproque de l'ensemble fermé $P(C)$ par l'application continue P.

Troisième Partie

Il s'agissait de démontrer $C = C^{++}$. Ceci entraîne que si un vecteur y n'est pas dans C, alors il y a un $w \in C^+$ pour lequel le produit scalaire $(w|y)$ est strictement négatif. C'est-à-dire que C est dans un demi-espace fermé ne contenant pas y.

6.a) Ce n'est pas parce qu'une fonction continue est minorée qu'elle atteint sa borne inférieure : penser à l'ordonnée sur la branche d'hyperbole $xy = 1, x > 0$. Ici, il ne suffit pas d'affirmer que la fonction $c \mapsto ||c - a||$ est positive pour répondre à la question. On pouvait démontrer l'existence de $p(a)$ soit à partir de l'identité du parallèlogramme, soit en restreignant la fonction $c \to p(c)$ à une boule fermée convenablement choisie et utiliser la compacité de cette boule. L'unicité de $p(a)$ était plus délicate, mais se passait en dimension 2, et utilisait la convexité du cône C.

6.b) Certains candidats ont utilisé les fonctions $t \mapsto ||p(a) + tc - a||^2$ sur $T \geq 0$, et

$t \mapsto ||tp(a) - a||^2$. Moins de la moitié des candidats a donné une démonstration rigoureuse de la positivité de $(p(a) - a|c)$ et de l'annulation du produit scalaire $(p(a) - a|p(a))$.

6.c) L'inclusion du cône C dans l'ensemble C^{++} était facile. L'égalité des deux ensembles pouvait s'obtenir avec le résultat de la question précédente : on montre qu'un élément a appartenant à E et vérifiant $(p(a) - a|c) \geq 0$ satisfaisait $||a - p(a)| \leq 0$. Il est donc égal à $p(a)$. A peu près un quart des candidats y est arrivé.

Quatrième Partie

7) Les bonnes copies ont donné une démonstration complète de cette question. Il est bienvenu de faire des remarques intuitives à partir de considérations géométriques, mais cela est toujours insuffisant et des démonstrations complètes sont exigées. L'implication $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ fut plus souvent traitée que sa réciproque. Voici une façon de procéder. Si la partie C est génératrice, elle contient une base, et elle contient donc les combinaisons linéaires strictement positives des éléments de cette base, qui forment un ouvert non vide de E, contenu dans C. Ainsi, l'intérieur de C n'est pas vide. Inversement, si l'intérieur de C n'est pas vide, il contient une boule ouverte non vide, et comme une telle boule contient une base affine de E, le sous-espace vectoriel qu'engendre C est l'espace E tout entier.

8.a) L'implication $(\beta') \Rightarrow (\alpha')$ est démontrée dans quelques copies. Soit x appartenant à $C \cap w^{\perp}$, un élément d'une face de C autre que C. Alors $w \neq 0$. On montre que les vecteurs $x - \frac{1}{n}w$, n entier > 0, n'appartiennent pas à C et tendent vers x quand n augmente indéfiniment. L'implication $(\alpha') \Rightarrow (\beta')$ n'a été résolue que par quelques candidats. Soit $x \in C$ un point frontière. On peut supposer $x \neq 0$ et alors supposer x unitaire. Il y a alors une suite $(y_n)_n$ de vecteurs unitaires hors de C convergeant vers x, et par la partie précédente, une suite $(w_n)_n$ de vecteurs unitaires de C^+ vérifiant $(w_n|x_n) < 0$. On peut supposer la suite $(w_n)_n$ convergente. Si w est sa limite, alors on observe que le produit scalaire $(w|x)$ est nul, ce qui montre que x est sur la face $C \cap w^{\perp}$ qui n'est pas C tout entier.

8.b) L'intuition géométrique permettait de démontrer que seule l'implication $(\beta') \Rightarrow (\alpha')$ restait vraie.

8.c) Trop peu de candidats ont été à même de justifier l'indication de l'énoncé. On peut montrer que l'intersection $C \cap [x, x_o]$ est un segement $[c, x_o]$, et que c est sur la frontière de C. La question précédente fournit une face F distincte de C et contenant c. On vérifie alors que cette face F satisfait aux propriétés demandées.

9) Les démonstrations de la question **9)** sont en général confuses et n'ont été tentées que par une minorité de candidats. Elles reposent sur le fait que les faces d'un cône à faces engendré par les générateurs $c_i, i \in I$ sont à prendre parmi les parties de l'espace E de la forme $\Sigma_J R_+ c_i$ pour $J \subset I$.

10) La réponse résulte facilement de la question précédente.

Pour le soin apporté à la rédaction, on fera les remarques suivantes :

a) Au cours du problème, il y avait de nombreux indices, et trop fréquemment, ceux-ci ne figurent pas au-dessous la ligne.

b) Il faut rappeler que, lors d'un raisonnement par récurrence, il faut préciser les objets en jeu et énoncer complètement l'hypothèse de récurrence.

c) Souvent, le mot preuve est incorrectement utilisé au sens de démonstration.

d) Le participe passé du verbe *inclure* est *inclus, incluse*.