ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

La première partie est indépendante des trois autres.

⋆⋆⋆

Première partie

1. On considère une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 < +\infty$.

Vérifier que la fonction $x \mapsto D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(a_n - x)^2$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

2. On considère une fonction continue réelle de carré intégrable f sur l'intervalle $]0,1[$. Vérifier que la fonction $x \mapsto D_f(x) = \int_0^1 \big(f(t) - x\big)^2 \mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne une fonction réelle f sur l'intervalle $I =]0,1[$, continue par morceaux et intégrable.

3. Vérifier que la fonction $x \mapsto \Delta(x) = \int_0^1 |f(t) - x| \mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

4.a) Montrer que la fonction Δ est continue et convexe.

b) Déterminer les limites de $\Delta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

5. Montrer que Δ admet un minimum, que l'on notera V, et que l'ensemble M des points où Δ atteint ce minimum est un intervalle.

6. *Exemples.* Déterminer Δ, V et M dans les deux cas suivants :

a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{si} t \leqslant 1/2 \\ 0 \text{si} t > 1/2 \end{cases}$.

b) $f(t) = t$.

Troisième partie

On se donne à nouveau une fonction f ayant les propriétés indiquées dans la **deuxième partie** ; on suppose en outre que f est monotone par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe des nombres

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

tels que f soit monotone sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. Pour tout intervalle J de $\mathbf{R}$, éventuellement réduit à un point, on définit une fonction χ_J sur I par

$$\chi_J(t) = \begin{cases} 1 \text{si} f(t) \in J \\ 0 \text{sinon} \end{cases} .$$

7. Vérifier que la fonction χ_J est continue par morceaux et intégrable sur I. On note $\lambda(J)$ son intégrale.

8. Établir les propriétés suivantes de l'application λ :

a) Étant donnés des intervalles $J_1, \ldots, J_n$ deux à deux disjoints dont la réunion est encore un intervalle, on a

$$\lambda(J_1 \cup \ldots \cup J_n) = \lambda(J_1) + \ldots + \lambda(J_n) ;$$

b) Étant donnée une suite croissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n\Big) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) .$$

c) Étant donnée une suite décroissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\Big(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} J_n\Big) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) .$$

9. Soit x un réel et ε un réel > 0 ; on pose

$$J_1 =]-\infty, x] \ , \ J_2 =]x, x+\varepsilon[\ , \ J_3 = [x+\varepsilon, +\infty[\ .$$

a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon}\big(\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)\big)-\lambda(J_1)+\lambda(J_3)=\lambda(J_2)+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^1 \chi_{J_2}(t)\big(x-f(t)\big)\mathrm{d}t\ ,$$

où Δ est la fonction définie à la question **3.**

b) Montrer que Δ admet en tout point x une dérivée à droite que l'on déterminera.

c) Même question pour la dérivée à gauche.

d) Comparer ces deux dérivées et dire pour quelles valeurs de x elles sont égales.

10. On pose

$$\phi(x)=\lambda(]-\infty,x]) \tag{1}$$

$$\phi(x+0)=\lim_{n\to+\infty}\phi\left(x+\frac{1}{n}\right) \qquad \phi(x-0)=\lim_{n\to+\infty}\phi\left(x-\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

a) Exprimer $\phi(x+0)$ et $\phi(x-0)$ en fonction de $\phi(x)$ et de $\lambda(\{x\})$.

b) Montrer que l'ensemble N des réels x vérifiant $\phi(x-0)\leqslant 1/2\leqslant\phi(x)$, s'il n'est pas vide, est un intervalle fermé borné.

c) Comparer les ensembles M (défini à la question **5.**) et N et préciser le comportement de ϕ sur l'intérieur de N lorsque N n'est pas réduit à un point.

Quatrième partie

11. On se donne une fonction f sur I, réelle, continue, intégrable et monotone par morceaux ; on note M_f et V_f ce qui était noté M et V.

a) Démontrer l'inclusion $M_f\subset f(I)$.

b) Montrer que M_f est réduit à un point, que l'on notera m_f.

c) Comparer V_f et $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$, puis m_f et $2\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

12. On considère une suite (g_n) de fonctions sur I, réelles, continues, intégrables et monotones par morceaux ; on suppose que cette suite converge en moyenne vers une fonction g continue par morceaux, intégrable et monotone par morceaux. On pose $m_n=m_{g_n}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (m_n) est non vide et inclus dans l'ensemble M_g des points où la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^1|g(t)-x|\mathrm{d}t$ atteint son minimum.

* *
*

Rapport de MM. Bertrand MONTHUBERT et Claude WAGSCHAL, correcteurs.

Le sujet, cette année, proposait l'étude de la distance d'une fonction appartenant à un espace du type L^1 ou L^2 au sous-espace vectoriel des fonctions constantes.

Ce problème nécessitait une certaine maîtrise des fonctions d'une variable réelle et de bonnes connaissances en intégration. Les dernières questions demandaient un peu de réflexion.

Compte tenu du barème adopté la moyenne des notes des 1412 candidats français est de 9,20 avec un écart type de 4,38 ; la répartition est la suivante :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	10%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	31%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	31%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	19%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	9%

La **première partie** était élémentaire. On se plaçait dans un espace l^2, donc dans un cadre hilbertien, et les résultats à établir étaient évidemment conformes au théorème de projection. Cette partie a été généralement correctement traitée, mais il faut souligner que bon nombre de candidats omettent de répondre à certaines questions, par exemple calcul du minimum. En outre, de nombreux candidats n'ont pas réalisé que les fonctions D_a et D_f étaient simplement des polynômes de second degré et ont donc perdu beaucoup de temps pour vérifier que ces fonctions admettaient un unique minimum alors que cela était immédiat.

Dans la suite du problème, le cadre fonctionnel était celui de l'espace $L^1(]0,1[)$. La fonction f était supposée continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Des candidats, assez nombreux, ont compris à tort qu'elle était continue par morceaux sur l'intervalle fermé $[0,1]$, donc bornée ; ceci permettait de faire des raisonnements beaucoup plus simples, mais sans valeur dans la situation envisagée.

La **deuxième partie** ne présentait aucune difficulté sérieuse. À la question **5.**, il était demandé de prouver que la fonction Δ admettait un minimum ; beaucoup trop de candidats se contentent de l'affirmer et, bien qu'il s'agisse d'un raisonnement élémentaire et classique, ceux qui n'ont pas jugé utile de donner la moindre explication ont été sanctionnés.

Dans la **troisième partie**, la question **7.** a été très mal traitée et a donné lieu la plupart du temps à des explications confuses. Bien peu de candidats ont compris que la seule propriété utile de f était sa monotonie par morceaux. Si la question **8.a** a été traitée par l'ensemble des candidats, il n'en est pas de même des questions **8.b** et **8.c**. On passe à la limite sans aucune justification, justification qui n'a été donnée que dans quelques copies : ceci est un manque de rigueur inacceptable. Quant à la question **9**, la formule donnant le quotient différentiel a généralement été établie correctement ; par contre, les dérivées à droite et à gauche sont très souvent erronées, les candidats ne faisant pas attention au fait que les intervalles en jeu peuvent être ouverts ou fermés. Bien entendu, la même inattention conduit à des erreurs pour la question **10.a**. Les questions **10.b** et **10.c** n'ont été correctement traitées que dans quelques copies : la plupart des candidats ignorent la caractérisation des minimums d'une fonction convexe en termes de dérivée à droite et à gauche.

La **quatrième partie** n'a été abordée que par quelques candidats. Les questions **11.a** et **11.b** étaient sans doute assez délicates. Pour **11.a**, le raisonnement en général proposé n'est valable que dans le cas où l'intervalle $f(I)$ est fermé. Pour la question **11.c**, il s'agissait de simples majorations à établir, la question **12**. ne présentait pas, quant à elle, de difficulté particulière.