ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2007

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Régularisation de fonctions

Ce problème présente un procédé d'approximation de fonctions par des fonctions plus régulières.

Pour tout entier $k \geqslant 0$ on désigne par C^k_{per} l'espace des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes, 2π-périodiques et de classe C^k ; on note de même $C^{\text{pm}}_{\text{per}}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux. Pour toute fonction f de $C^{\text{pm}}_{\text{per}}$ on définit ses coefficients de Fourier par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \quad , \quad n \in \mathbf{Z} .$$

Étant donné une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n$ est convergente si les séries $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_{-n}$ le sont, et on pose alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n + \sum_{n\geqslant 1} \alpha_{-n} .$$

Première partie

1. Dire pour quelles valeurs du couple $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$ est convergente.

On suppose maintenant $t > 0$ et on note $P(t,x)$ ou $P_t(x)$ le nombre $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$.

2.Vérifier que $P(t,x)$ est réel. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} P(t,x) dx$.

3.a) Montrer que la fonction P, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, est indéfiniment différentiable, et écrire ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^{p+q}}{\partial t^p\, \partial x^q} P(t,x)$ sous forme de sommes de séries.

3.b) Calculer $\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}$.

4. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction P_t.

5. Dire pour quelles valeurs du couple $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a $1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} = 0$.

On suppose maintenant $t > 0$.

6. Démontrer l'égalité

$$P(t, x) = \frac{1 - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}}$$

et préciser le signe de cette expression.

7. Démontrer les assertions suivantes. On suppose $x \in [-\pi, \pi]$ et on fait tendre t vers 0 par valeurs supérieures ; alors $P_t(x)$ tend vers 0 si $x \neq 0$, vers $+\infty$ si $x = 0$, et la convergence est uniforme sur tout ensemble de la forme $[-\pi, -a] \cup [a, \pi]$ où $a \in]0, \pi[$.

Deuxième partie

Dans cette seconde partie on se donne une fonction f de $C^{\text{pm}}_{\text{per}}$; on suppose toujours $t > 0$.

8. Vérifier que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{-|n|t}\, e^{inx}$ est convergente.

Sa somme sera notée $\Phi_f(t, x)$ ou $\Phi_{f,t}(x)$.

9. Montrer que la fonction Φ_f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, est indéfiniment différentiable, et écrire ses dérivées partielles sous forme de sommes de séries.

10. Calculer $\displaystyle \Phi_{f,t}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x - y)\, f(y)\, dy$.

11. On suppose $f \in C^k_{\text{per}}$, $k \geqslant 0$. Montrer que, lorsque $t \to 0$, $\Phi^{(p)}_{f,t}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$ pour tout $p \leqslant k$.

Troisième partie

12. Étant donné un nombre réel $\alpha \geqslant 1$, montrer qu'il existe un réel μ_α tel que l'on ait $(1 + u)^\alpha \leqslant \mu_\alpha (1 + u^\alpha)$ pour tout $u \geqslant 0$.

Pour tout $\alpha \geqslant 0$ on note E_α l'ensemble des fonctions f de $C^{\text{pm}}_{\text{per}}$ satisfaisant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\, (1 + n^2)^\alpha < +\infty\ .$$

On pourra admettre que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $C_{\text{per}}^{\text{pm}}$.

13.a) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $C_{\text{per}}^k \subset E_k$.

13.b) A-t-on $C_{\text{per}}^k = E_k$?

13.c) Montrer que $E_\alpha \subset C_{\text{per}}^k$ si $k \geqslant 0$ et $\alpha > k + 1/2$.

[On pourra traiter d'abord le cas où $k = 0$].

Dans la suite du problème, on se donne un nombre réel $r \geqslant 0$; pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $\varphi_t(x) = x^r\, e^{-tx}$.

14. Exprimer le nombre $C = t^{r+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_t(x) dx$ à l'aide de la fonction Γ et vérifier qu'il est indépendant de t.

15. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^r\, e^{-tn}$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0$.

16. Étant donné un réel $\tau > 0$, déterminer un réel C' tel que l'on ait

$$\sum_{n \geqslant 1} n^r\, e^{-tn} \leqslant C' t^{-r-1} \quad \text{pour tout} \quad t \in]0, \tau] \ .$$

On se donne maintenant une fonction $f \in E_\alpha$ pour un certain $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$; on désigne encore par τ un réel > 0.

17.a) Déterminer un réel C'' tel que l'on ait

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_f(t, x) \right| \leqslant C'' t^{\alpha - 3/2} \quad \text{pour} \quad (t, x) \in]0, \tau] \times \mathbb{R} \ .$$

17.b) Déterminer un réel C''' tel que l'on ait $\|\Phi_{f,t} - f\|_\infty \leqslant C''' t^{\alpha - 1/2}$ pour tout $t \in]0, \tau]$, où l'on a posé, pour toute fonction g bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \ .$$

* *
*