ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Étude des solutions d'une équation fonctionnelle

Ce problème a pour but l'étude des solutions de l'équation

$$f'(x) = f(\gamma x) \qquad (C_\gamma)$$

où l'inconnue f est une fonction réelle dérivable d'une variable réelle et où γ est un nombre réel fixé non nul. On considérera aussi le système

$$f'(x) = f(\gamma x) \quad , \quad f(0) = \alpha \qquad (C_{\gamma,\alpha})$$

où α est un nombre réel fixé.

Première partie

Dans cette première partie, la variable x varie dans $\mathbf{R}$ et on suppose $|\gamma| \leqslant 1$.

1. Résoudre le système $(C_{\gamma,\alpha})$ dans le cas où $\gamma = 1$.

2. Même question dans le cas où $\gamma = -1$.

3.a) Vérifier que la série entière $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout réel x et que sa somme est solution du système $(C_{\gamma,\alpha})$.

3.b) En serait-il de même si l'on supposait $|\gamma| > 1$?

4. Étant donné un nombre réel $A > 0$, on désigne par E_A l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[-A, A]$ et on le munit de la norme $\| \quad \|$ définie par $\|g\| = \sup_{|x| \leqslant A} |g(x)|$. On note T_A l'application de E_A dans lui-même définie par

$$(T_A\, g)(x) = \alpha + \int_0^x g(\gamma t) \mathrm{d}t \ .$$

4.a) Vérifier que l'application T_A est continue.

4.b) Vérifier qu'une fonction dérivable f sur $\mathbf{R}$ est solution de $(C_{\gamma,\alpha})$ si et seulement si, pour tout $A > 0$, la restriction de f à $[-A, A]$ est un point fixe de T_A.

4.c) Vérifier que, pour tout entier $n > 0$, tout réel $A > 0$, tout $x \in [-A, A]$ et tous $g, h \in E_A$,

$$|(T_A^n\, g)(x) - (T_A^n\, h)(x)| \leqslant |\gamma|^{n(n-1)/2} \frac{|x|^n}{n!} \|g - h\| \, .$$

4.d) Déterminer un entier $n(A) > 0$ tel que l'on ait, pour tous $g, h \in E_A$,

$$\|T_A^{n(A)}\, g - T_A^{n(A)}\, h\| \leqslant k \|g - h\|$$

avec une constante $k < 1$.

4.e) Démontrer l'unicité de la solution du système $(C_{\gamma,\alpha})$.

5. On pose, pour tout x réel,

$$f_\gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} \, .$$

5.a) Déterminer la limite de $f_\gamma(x)$ lorsque γ tend vers 0.

5.b) Montrer que la fonction $(\gamma, x) \mapsto F(\gamma, x) = f_\gamma(x)$, définie maintenant sur l'ensemble $[-1, 1] \times \mathbf{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5.c) On suppose ici $\gamma \geqslant 0$ et on s'intéresse à la fonction f_γ restreinte à l'intervalle $[-1, +\infty[$. Déterminer son signe, son sens de variation et sa limite lorsque $x \to +\infty$.

Deuxième partie

Notations. Étant donné une suite de nombres réels u_n, où n parcourt l'ensemble $\mathbf{Z}$, on dira que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n$ est *absolument convergente* si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n>0} u_{-n}$ le sont ; dans ce cas on posera

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\geqslant 0} u_n + \sum_{n>0} u_{-n} \, .$$

Dans cette partie, on suppose $\gamma > 1$ et on s'intéresse au système $(C_{\gamma,\alpha})$ où x parcourt l'intervalle $]-\infty, 0]$.

6. Étant donné un nombre réel c_0, trouver des nombres réels c_n, $n \in \mathbf{Z}$, possédant les propriétés suivantes :

(i) $\sum_{n\geqslant 0} |c_n| \gamma^n < +\infty \quad , \quad \sum_{n\geqslant 0} |c_{-n}| \gamma^n < +\infty,$

(ii) la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\, e^{\gamma^n x}$ est absolument convergente pour tout $x \in]-\infty, 0]$, et sa somme $\varphi(x)$ est solution de (C_γ).

N.B. On ne demande pas de prouver l'unicité des c_n.

7. Déduire de la question **6** une solution de $(C_{\gamma,\alpha})$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

8. Que se passe-t-il si l'on suppose $x \in [0, +\infty[$ au lieu de $x \in]-\infty, 0]$, et si l'on remplace la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n\, e^{\gamma^n x}$ par la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n\, e^{-\gamma^n x}$, mais en conservant les conditions (i) ?

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose $\gamma > 1$ et on note G_γ l'espace vectoriel des solutions de (C_γ) définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, on pose $I_{(p)} = [\gamma^p, \gamma^{p+1}]$.

9. Vérifier que, si $f \in G_\gamma$, on a

$$f^{(n)}(x) = \gamma^{kn-k(k+1)/2} f^{(n-k)}(\gamma^k x)$$

pour tous entiers k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et tout $x \in]0, +\infty[$.

Pour toute fonction f définie sur $]0, +\infty[$, on note $f_{(p)}$ la restriction de f à $I_{(p)}$.

10. Vérifier que l'application $\Psi : G_\gamma \to \mathcal{C}^\infty(I_{(0)})$ définie par $\Psi(f) = f_{(0)}$ est injective.

11. Étant donné un élément g de $\mathcal{C}^\infty(I_{(0)})$, donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les dérivées de g aux points 1 et γ, pour que g appartienne au sous-espace image de Ψ.

12. On se donne un élément f de G_γ et on fait l'hypothèse que $f(\gamma^{-p})$ est nul pour tout entier $p \geqslant 0$. On se propose de démontrer que f est nulle.

12.a) Vérifier que, pour tout $p > 0$, on a

$$f_{(-p)}^{(p)}(x) = \gamma^{p(p-1)/2} f_{(0)}(\gamma^p x) \quad , \quad x \in I_{(-p)}$$

et

$$f_{(-p)}^{(k)}(\gamma^{-p}) = 0 \quad , \quad \text{pour tout } k < p\,.$$

12.b) Déterminer pour tout $p > 0$ un nombre réel q_p tel que l'on ait, pour tout $x \in I_{(-p)}$:

$$f_{(-p)}(x) = q_p \int_{\gamma^{-p}}^{x} (x-t)^{p-1} f_{(0)}(\gamma^p t)\,\mathrm{d}t\,.$$

[On pourra utiliser la formule de Taylor.]

12.c) Montrer que l'on a $\int_1^\gamma (\gamma - t)^{p-1} f_{(0)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $p > 0$.

12.d) Conclure.

* *
*