MP2I 2021–2022

Cours, TD.

M. Vienney
Lycée Champollion
vienney@mp2i-champo.fr

Table des matières

1 Rappels et compléments calculatoires

Ce chapitre contient essentiellement des rappels sur des notions rencontrées au lycée, même si elles n'ont pas nécessairement été formalisées de la sorte.
Il s'agit principalement de techniques de calcul afin de clarifier ce qu'on a le droit de faire et ce qu'on n'a pas le droit de faire, par exemple lors de la résolution d'une équation ou d'une inéquation.
La plupart des règles énoncées ici doivent vous paraître évidentes, et si elles ne le sont pas maintenant, il faudra qu'elles le deviennent rapidement.
Que vous soyez capables de me réciter ces règles par cœur **ne m'intéresse pas**, ce qu'il faut, c'est que vous soyez capables de les utiliser à bon escient quand vous en aurez besoin[1].

[1] Et accessoirement que les calculs que je ferai en cours vous semblent naturels et que vous ne passiez pas 5 minutes à vous demander comment j'ai fait à chaque ligne de calcul.

Plusieurs résultats restent admis pour le moment, mais seront démontrés plus tard dans l'année.

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Ensembles usuels

La construction des ensembles de nombres usuels n'est pas au programme de sup, et donc à aucun moment nous ne définirons proprement ce qu'on appelle un entier naturel ou un réel. Vous avez déjà, sans n'avoir jamais eu le besoin de la formaliser, une excellente intuition de ce que sont ces ensembles et des règles de calcul qui y sont valables. Nous nous contentons donc de rappeler les notations en vigueur pour ces ensembles de nombres :

- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers. naturels[2] : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbf{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire ceux qui s'écrivent sous forme de fraction dont le numérateur et le dénominateur sont entiers.

[2] C'est-à-dire positifs.

On a donc des inclusions $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

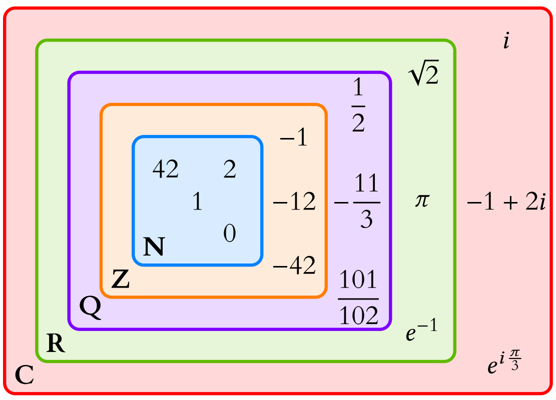


Figure 1.1 – Les inclusions entre les ensembles usuels. Notons que toutes ces inclusions sont strictes : il n'y a pas égalité entre deux de ces ensembles.

Il est souvent délicat de prouver qu'un nombre est irrationnel[3], mais que vous connaissez déjà de tels nombres, par exemple $\sqrt{2}, \pi, e$. Les preuves de leur irrationalité seront données

[3] C'est-à-dire qu'il n'est pas rationnel, donc pas le quotient de deux entiers.

plus tard.
On note également $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls, et de même on note $\mathbf{R}^*, \mathbf{Q}^*$ et $\mathbf{N}^*$.
On note $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ l'ensemble des réels positifs et $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$ l'ensemble des réels négatifs. De même $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$ et $\mathbf{R}_-^* =]-\infty, 0[$.

Et C ?
On ne parle pas du signe d'un complexe, donc les notations $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$, etc n'ont aucun sens.

1.1.2 Intervalles de R, parties majorées, minorées, bornées

Définition 1.1 – Un ensemble $I \subset \mathbf{R}$ est appelé un **intervalle de R** si quels que soient x et y dans I vérifiant $x \leqslant y$, si z est un réel tel que $x \leqslant z \leqslant y$, alors $z \in I$.

Intuitivement
Cela signifie qu'il n'y a pas de «trous» dans I : dès que deux nombres sont dans I, tous les nombres compris entre ces deux nombres sont aussi dans I.

Exemples 1.2

- $\mathbf{R}_+$ est un intervalle car si $x < y$ sont deux nombres positifs, et si $x \leqslant z \leqslant y$, alors $z \geqslant x \geqslant 0$, donc $z \in \mathbf{R}_+$.
- $I = [-2, 1[$ est un intervalle. En effet, si $x \leqslant y$ sont dans I et si $x \leqslant z \leqslant y$, alors

$$-2 \leqslant x \leqslant z \leqslant y < -1 \Rightarrow -2 \leqslant z < -1 \Rightarrow z \in I.$$

- $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle, car $-1 \in \mathbf{R}^*$, $1 \in \mathbf{R}^*$, $-1 \leqslant 0 \leqslant 1$, et pourtant $0 \notin \mathbf{R}^*$.

Il est facile de classifier les intervalles de $\mathbf{R}$, c'est l'objet de la proposition suivante, qui sera démontrée plus tard.

Proposition 1.3 : *Si I est un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, alors I est de l'une[4] des formes suivantes :*

- *intervalles ouverts :*
  - $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$
  - $]-\infty, a[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, *avec* $a \in \mathbf{R}$
  - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, *avec* $a \in \mathbf{R}$
  - $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, *où a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$.*
- *intervalles fermés :*
  - $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, *avec $a \leqslant b$. Un tel[5] intervalle est appelé un* ***segment.***
  - $]-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$, *où* $a \in \mathbf{R}$
  - $[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$, *où* $a \in \mathbf{R}$
- *intervalles semi-ouverts :*
  - $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ *(semi-ouvert à gauche)*
  - $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ *(semi-ouvert à droite)*

[4] Et une seule !

[5] Fermé et sans borne infinie.

Remarques. On vous expliquera l'an prochain que $\mathbf{R}$ est aussi un intervalle fermé, mais cela n'a aucune importance pour l'instant.
Notons que les singletons, c'est-à-dire les ensembles ne contenant qu'un seul nombre sont aussi des intervalles. En effet, $\{a\} = [a, a]$.

Enfin, on utilisera souvent la notation avec des doubles crochets pour désigner des intervalles d'entiers : si a et b sont deux entiers relatifs avec $a \leqslant b$, alors on note

$$[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbf{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = \{a, a+1, \cdots, b-1, b\}.$$

Par exemple, $[\![2, 6]\!] = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque
On n'utilisera les doubles crochets que pour écrire des intervalles fermés.
Par exemple on évitera d'écrire $]\!]3, 8]\!]$. De toutes façons l'ensemble qu'on aurait envie d'écrire ainsi n'est autre que $[\![4, 8]\!]$.

Définition 1.4 – Soit A une partie[6] de $\mathbf{R}$.

1. on dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.
   Un tel M, s'il existe, est alors appelé un **majorant** de A.
2. on dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x$.
   Un tel m, s'il existe, est alors appelé un **minorant** de A.
3. on dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. C'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$.

[6] C'est-à-dire un ensemble formé de nombres réels.

Remarques. ► Dans la définition de partie majorée, M ne peut pas dépendre du x choisi dans A, il faut que ce soit le même pour tous les $x \in A$.
Par exemple, il est hors de question de dire que $\mathbf{R}$ est majorée au prétexte que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si on pose $M = x + 1$, alors $x \leqslant M$, car alors M dépend de x.
► Une partie A de $\mathbf{R}$ est majorée si et seulement si il existe un majorant de A.
► Si A est une partie majorée de $\mathbf{R}$, alors elle possède une infinité de majorants[7].
En effet, si M est un majorant de A, alors pour tout réel $M' \geqslant M$, et pour tout $x \in A$, $x \leqslant M \leqslant M'$. Et donc tous les éléments de $[M, \infty[$ sont encore des majorants de A.

[7] Et donc on prendra soin de parler d'**un** majorant de A et non **du** majorant de A.

Exemples 1.5

► $\mathbf{R}_+^*$ n'est pas majoré. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ majorant A. Puisque $1 \in \mathbf{R}_+^*$, on a donc $1 \leqslant M$
Mais $M < \underbrace{M+1}_{\in \mathbf{R}_+^*}$, contredisant la définition de majorant.
► Les seuls intervalles bornés de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de la forme $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$, avec $a < b$.
De même, les seuls intervalles majorés sont ceux dont la borne de droite est un réel, c'est-à-dire ceux qui sont bornés ou ceux de la forme $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$.

1.2 Rappels calculatoires

1.2.1 Puissances, racines carrées

Définition 1.6 – Si $x \geqslant 0$, alors on note $\sqrt{x}$, et on appelle **racine carrée de** x l'unique nombre positif dont le carré vaut x.

⚠ Si on a toujours[8], pour a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$, on n'a pas $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$, mais

$$x^2 = a \Leftrightarrow (x = \sqrt{a} \textbf{ ou } x = -\sqrt{a}).$$

En revanche, pour $x \geqslant 0$, on a bien $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$.

[8] C'est la définition de la racine carrée.

Proposition 1.7 : *Pour x, y positifs, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et si $y \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.*

Danger !
En revanche, on n'a généralement pas

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ni $\sqrt{x-y} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$.

Démonstration. Le réel $\sqrt{x}\sqrt{y}$ est positif, et son carré est

$$\left(\sqrt{x}\sqrt{y}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{y}\right)^2 = xy$$

donc nécessairement[9], $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
On raisonne de même pour le quotient. □

[9] Car il existe un **unique** réel positif de carré égal à xy.

Vous connaissez déjà bien entendu $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2, \dots, \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{100} = 10$.
Si vous ne les connaissez pas déjà, il est conseillé d'apprendre $\sqrt{121} = 11 \Leftrightarrow 11^2 = 121$, $\sqrt{144} = 12 \Leftrightarrow 12^2 = 144$ et $\sqrt{169} = 13 \Leftrightarrow 13^2 = 169$.

Un moyen souvent pratique de simplifier une expression contenant une somme ou une différence de racines est de faire apparaître la quantité conjuguée, où la quantité conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et vice-versa.

Autrement dit

La quantité conjuguée est obtenue en changeant le signe entre les deux racines.

Exemple 1.8

On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-8\sqrt{5} &= \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}-8\sqrt{5}\\ &= \frac{5-2\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1^2}-8\sqrt{5}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-8\sqrt{5} = \frac{3}{2}-\frac{17\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, quelques rappels sur les puissances :

Définition 1.9 – Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on note

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Si x est non nul, et si n est un entier strictement négatif, alors on note

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}}}.$$

En particulier

0^n est toujours nul, sauf si $n = 0$: par définition, $0^0 = 1$.

Proposition 1.10 : *Pour $x, y \in \mathbf{R}$ et m, n dans $\mathbf{N}$, on a*

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n,\ x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m \text{ et } (xy)^n = x^n y^n.$$

Si de plus x et y sont non nuls, alors ces formules restent valables pour m, n dans $\mathbf{Z}$.

Danger !

La puissance $n^{\text{ème}}$ d'une somme n'est pas la somme des puissances $n^{\text{èmes}}$: en général

$$(x+y)^n \neq x^n + y^n.$$

Exemple 1.11

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{3\cdot 16^{n+1}+(-4)^{2n+1}+(-2)^{4n}}{8^n-(-2)^{3n+2}} &= \frac{3\cdot 16\cdot 16^n - 4\cdot\left(4^2\right)^n+\left(2^4\right)^n}{8^n-4\cdot\left((-1)^3\right)^n\cdot\left(2^3\right)^n}\\ &= \frac{16^n\,(3\cdot 16-4+1)}{8^n\left(1+(-1)^{n+1}\cdot 4\right)}\\ &= \frac{16^n}{8^n}\,\frac{3\cdot 15}{1+4\cdot(-1)^{n+1}}\\ &= \left(\frac{16}{8}\right)^n\frac{45}{1+4\cdot(-1)^{n+1}} = \begin{cases}-15\cdot 2^n & \text{si } n \text{ est pair}\\ 9\cdot 2^n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{aligned}$$

1.2.2 Équations et égalités

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble (généralement noté $\mathscr{S}$) des valeurs de l'inconnue x satisfaisant l'équation. Autrement dit, on veut avoir l'équivalence : «x satisfait l'équation» $\Leftrightarrow x \in \mathscr{S}$.

Nous formaliserons un peu plus tard la notion d'équivalence logique, mais cela signifie que $\mathscr{S}$ doit contenir **toutes** les solutions de l'équation, **et rien d'autre**.

Exemples 1.12

Par exemple, si on s'intéresse à l'équation $x^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$, alors 2 est clairement solution. Mais on n'en conclut pas que $\mathscr{S} = \{2\}$, car on oublierait alors l'autre solution réelle qui est -2.
Autrement dit, on a $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, mais pas $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$.
Ce qui est correct, c'est que

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \textbf{ ou } x = -2) \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}.$$

Donc l'ensemble des solutions de $x^2 = 4$ est $\mathscr{S} = \{-2, 2\}$.

En français
Si $x = 2$, alors x est solution.
En revanche, **si** x est solution, **alors** x n'est pas nécessairement égal à 2.

De même, si on s'intéresse à l'équation $x - 2 = \sqrt{x + 10}$, alors on peut remarquer que si x est solution, puisque[10] $\sqrt{x+10} \geqslant 0$, alors $x - 2 \geqslant 0$, et donc $x \geqslant 2$.
Ceci ne prouve surtout pas que $\mathscr{S} = [2, +\infty[$. En effet, nous avons prouvé que les solutions éventuelles de l'équation sont dans $[2, +\infty[$. Mais pas que tous les réels de $[2, +\infty[$ sont des solutions de l'équation.
Autrement dit, $x - 2 = \sqrt{x+10} \Rightarrow x \geqslant 2$, l'implication réciproque étant fausse[11].
Donc $\mathscr{S} \subset [2, +\infty[$, mais cette inclusion n'est pas une égalité.
En revanche, le raisonnement suivant est correct :

$$x-2 = \sqrt{x+10} \Leftrightarrow \left[x - 2 \geqslant 0 \textbf{ et } (x-2)^2 = x + 10\right] \Leftrightarrow \left[x \geqslant 2 \textbf{ et } x^2 - 5x - 6 = 0\right].$$

Une résolution de l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$, de discriminant 49 nous donne alors deux solutions qui sont 6 et -1.
Et donc $x - 2 = \sqrt{x+10} \Leftrightarrow [x \geqslant 2 \textbf{ et } (x = 6 \textbf{ ou } x = -1) \Leftrightarrow x = 6]$.
Et par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{6\}$.

Le recours aux équivalences, bien que pratique[12] n'est pas obligatoire.
On peut aussi raisonner de la manière suivante :

$$x - 2 = \sqrt{x+10} \Rightarrow (x-2)^2 = x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow [x = 6 \textbf{ ou } x = -1].$$

Notons que la première flèche étant seulement une implication, et pas une équivalence, même si les autres sont des équivalences, nous avons «seulement» prouvé

$$x - 2 = \sqrt{x+10} \Rightarrow (x = -1 \textbf{ ou } x = 6).$$

Donc les solutions de l'équation[13] ne peuvent valoir que -1 et 6.
Reste à vérifier si -1 et 6 sont des solutions.
Pour $x = 6$, on a $x - 2 = 4$ et $\sqrt{x+10} = \sqrt{16} = 4 = x - 2$, donc 6 est solution.
Pour $x = -1$, on a $x - 2 = -3$ et $\sqrt{x+10} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$, donc -1 n'est pas solution.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{6\}$.

Généralement, le contexte[14] nous dit dans quel ensemble se trouve l'inconnue x, notamment si on cherche des solutions réelles, complexes, ou entières.

[10] Une racine carrée est toujours positive par définition.

[11] Par exemple $x = 3$ n'est pas solution, bien qu'étant supérieur à 2.

[12] À condition d'être à l'aise avec les équivalences...

[13] S'il en existe !

[14] L'énoncé dans le cadre d'un exercice.

Exemple 1.13

Prenons l'exemple de l'équation $x^4 = 4$. On a

$$\begin{aligned} x^4 = 4 &\Leftrightarrow (x^2)^2 - 2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \textbf{ ou } x^2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \textbf{ ou } x^2 = -2. \end{aligned}$$

Si on cherche les solutions réelles, alors $x^2 = -2$ n'a pas de solution, et les deux solutions de $x^2 = 2$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
En revanche, si on cherche les solutions complexes, alors les solutions de $x^2 = 2$ sont toujours $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais $x^2 = -2$ possède deux solutions qui sont $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.
Donc l'ensemble des solutions complexes de $x^4 = 4$ est $\left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$.

On commencera toujours la résolution d'une équation (ou d'une inéquation) par la recherche du domaine de validité de l'équation, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens (à bien distinguer des valeurs pour lesquelles elle est vraie, qui sont les solutions).
Par exemple, une équation avec un logarithme n'a de sens que si la quantité située dans le logarithme est strictement positive. De même s'il y a des racines.

Exemple 1.14

Considérons l'équation $2\ln(x) + \ln(2x+5) = \ln(2-x)$.
Elle n'est valable que si on a à la fois $x > 0, 2x+5 > 0$ et $2-x > 0$, soit si et seulement si $x \in]0,2[$.
Pour $x \in]0,2[$, on a alors :

$$\begin{aligned} 2\ln(x) + \ln(2x+5) = \ln(2-x) &\Leftrightarrow \ln\left(x^2(2x+5)\right) = \ln(2-x) \\ &\Leftrightarrow x^2(2x+5) = 2-x \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Notons que -1 étant solution de cette équation, le membre de gauche se factorise par $x+1$: $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = (x+1)\left(2x^2+3x-2\right)$.
Et alors, un calcul de discriminant nous donne $2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ **ou** $x = \dfrac{1}{2}$.
Donc bien que l'équation $(x+1)(2x^2+3x-2) = 0$ possède trois solutions, une seule d'entre elles est dans $]0,2[$, et donc notre équation de départ possède $\dfrac{1}{2}$ comme **unique** solution.

Détails
On a bien une équivalence car la fonction ln est strictement croissante, et donc ne prend pas deux fois la même valeur.

Rappelons rapidement ce qu'on «a le droit de faire» lorsqu'on manipule des égalités[15].

[15] Et donc a fortiori lorsqu'on manipule des équations.

Proposition 1.15 : *Soient a, b, c des réels. Alors*

- *Si $c \neq 0$, alors $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.*
- *$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. Si de plus a et b sont de même signe, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.*
- *$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0$ **ou** $b = 0)$ a.k.a. «un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul».*
- *Si $b \geqslant 0$, alors $a = \sqrt{b} \Leftrightarrow (a^2 = b$ **et** $a \geqslant 0)$.*
- *Si f est une fonction, et que a et b sont dans le domaine de définition de f, alors $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$.*
  Si de plus f ne prend jamais deux fois la même valeur, et en particulier si f est strictement monotone (ce qui est notamment le cas des fonctions logarithme, exponentielle, cube et racine carrée, mais pas de la fonction carré), alors $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Danger !
L'équivalence ne tient plus si a et b sont de signes opposés, par exemple $1^2 = (-1)^2$ mais $1 \neq -1$.

⚠ La réciproque du dernier point est généralement fausse : on ne peut pas en toute généralité affirmer que $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Pensez par exemple à la fonction carré, la fonction cos, ou pire, à une fonction constante.

Ajoutons enfin une dernière propriété, plutôt intuitive, et que nous utiliserons régulièrement :

Proposition 1.16 : *Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels **positifs**. Alors*

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Autrement dit, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

Démonstration. Il est évident que si les x_i sont tous nuls, alors leur somme est nulle.
Inversement, supposons que l'un des x_i soit non nul. Quitte à les renuméroter, on peut supposer qu'il s'agit de x_1. Alors $x_1 > 0$ et $x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$.
Donc $x_1 + \cdots + x_n \geqslant x_1 + 0 + \cdots + 0 \geqslant x_1 > 0$.
Ainsi, si l'un des x_i est non nul, leur somme est non nulle, ce qui signifie donc que si la somme est nulle, alors tous les x_i sont nuls. □

Remarque. La proposition reste valable si les x_i sont tous négatifs[16], mais pas s'ils ne sont pas tous de même signe, comme le montre l'exemple $3 + (-1) + (-2) = 0$...

[16] Appliquer la proposition aux $-x_i$.

Exemple 1.17

Cherchons les couples de réels (x, y) solutions de $5x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$.
On a $y^2 - 2xy + x^2 = (y-x)^2$ et $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$, donc l'équation de départ s'écrit encore $(y-x)^2 + (2x-1)^2 = 0$.
Puisqu'un carré est un nombre positif, il vient donc

$$(y-x)^2 + (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2 = 0 \\ (2x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Et ainsi l'équation possède une unique solution, qui est le couple $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1.2.3 Inégalités et inéquations

Les inéquations ne diffèrent pas vraiment des équations, si ce n'est que la manipulation des inégalités demande un peu plus de précaution que celle des égalités.
Rappelons rapidement les principales règles de manipulation des inégalités.

Proposition 1.18 : *Soient a, b, c, d des réels. Alors*

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$. (On peut ajouter des inégalités).*
  De même, si $a \leqslant b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$. Et par conséquent, si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
- *Si $c > 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \leqslant bc$.*
  Si $c < 0$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow ac \geqslant bc$. (Donc multiplier une inégalité par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité).
- *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$. (On peut multiplier des inégalités **formées de nombres positifs**).*
- *Si f est une fonction croissante[17], alors $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.*
  Si f est strictement croissante, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ et $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.
  En particulier, la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, si a et b sont positifs, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
- *Si f est une fonction décroissante, alors $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.*
  Si f est strictement décroissante, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$ et $a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.
  Ceci vaut en particulier pour la fonction inverse, qui est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbf{R}^*$.

  *Donc si a et b sont **de même signe**, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$.*

En résumé

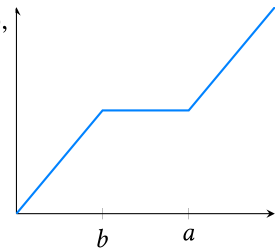
La somme membre à membre de deux inégalités larges est une inégalité large.
En revanche, dès qu'au moins l'une des inégalités est stricte, alors la somme est une inégalité stricte.

[17] Et que a et b sont dans le domaine de définition de f.

Remarque

Il s'agit juste de la définition de fonction décroissante : une fonction décroissante est une fonction qui change le sens des inégalités.

Comme nous l'avons vu, il existe des règles pour ajouter ou multiplier des inégalités, nous n'en énoncerons pas concernant la soustraction ou le quotient d'inégalités, opérations qui demandent un peu de vigilance (en tous cas on ne peut surtout pas soustraire ou diviser membre à membre des inégalités).
Nous avons mentionné que si f est croissante, on a seulement une implication $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$, et non une équivalence (alors que c'est le cas pour une fonction strictement croissante).
Autrement dit, on n'a pas $f(a) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant b$.
Par exemple, pour la fonction croissante dessinée ci-contre, on a $f(a) \leqslant f(b)$ bien que $a > b$.



Exemple 1.19

Supposons qu'on ait $2 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 3$.
Pour encadrer $a - b$, on procède de la manière suivante :

1. on commence par encadrer $-b$: $-3 \leqslant -b \leqslant -1$
2. puis on ajoute les encadrements de a et de $-b$:

$$2 - 3 \leqslant a - b \leqslant 5 - 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant a - b \leqslant 4.$$

Détails
La multiplication par -1 change le sens de l'inégalité.

De même, pour encadrer le quotient $\frac{a}{b}$, on commence par encadrer $\frac{1}{b}$: $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{1}$
puis on multiplie les inégalités : $\frac{2}{3} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 5$.

Rappelons également que les tableaux de signe sont un très bon moyen d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, mais qu'ils ne sont utiles que dans ces cas là, et qu'**on n'utilisera jamais de tableau de signe pour étudier le signe d'une somme** (ou d'une différence).
Pour prouver une inégalité, il est parfois efficace de se ramener à l'étude du signe d'une fonction, qui peut alors s'obtenir en étudiant les variations de cette fonction

Exemple 1.20

Prouvons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
On a $e^x \geqslant 1 + x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geqslant 0$.
Nous allons donc prouver cette seconde inégalité, et pour cela, définissons une fonction f sur $\mathbf{R}$ en posant $f(x) = e^x - 1 - x$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et $f'(x) = e^x - 1$. On a donc

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbf{R}_+$ et décroissante sur $\mathbf{R}_-$.
Son tableau de variations est alors donné par :

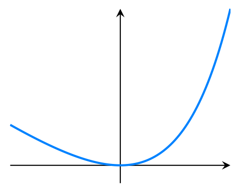


FIGURE 1.2– La fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi le minimum de f est égal à 0, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 + x.$$

Remarquons au passage que cette inégalité possède une interprétation géométrique très simple : la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de l'exponentielle en 0 est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$.
Et donc $e^x \geqslant 1 + x$ signifie que $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$, ce qui n'est finalement pas une surprise puisque la fonction exponentielle est convexe.

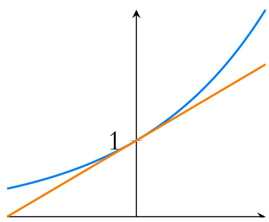


FIGURE 1.3– L'exponentielle et sa tangente en 0.

Établir des encadrements, des majorations ou des minorations est un art subtil, qui demande de faire des compromis entre d'une part la précision des inégalités («est-ce que je commets une grande erreur en majorant A par B ?» ou encore «est-ce que A peut être très proche de B ou non ?») et d'autre part la rapidité et la facilité des calculs.

Exemple 1.21

Essayons d'encadrer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1+\cos(x)}{x^2-x+2}$ sur le segment $[1,2]$.

▸ **Première méthode** : pour $x \in [1,2]$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $1 \leqslant x+1+\cos(x) \leqslant 4$.
De même, $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$ et $-2 \leqslant -x \leqslant -1$, donc $1 \leqslant x^2-x+2 \leqslant 5$.
Par passage à l'inverse, on en déduit que $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x^2-x+2} \leqslant 1$.
Et donc pour $x \in [1,2]$, $\dfrac{1}{5} \leqslant f(x) \leqslant 4$.

▸ **Seconde méthode** : essayons d'encadrer plus subtilement le numérateur : soit $g : x \mapsto x+1+\cos(x)$. Alors sa dérivée est $g' : x \mapsto 1-\sin(x) \geqslant 0$.
Donc g est croissante sur $[1,2]$, et donc pour $x \in [1,2]$, $g(1) \leqslant g(x) \leqslant g(2)$. En notant que $\cos(1) \geqslant 0$ et $\cos(2) \leqslant 0$, on arrive par exemple à $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.
De même, la fonction $x \mapsto x^2-x+2$ est croissante sur $[1,2]$, et donc pour $x \in [1,2]$, on a $2 \leqslant 1^2-1+2 \leqslant x^2-x+2 \leqslant 2^2-2+2 \leqslant 4$.
Donc au final, pour $x \in [1,2]$, $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3}{2}$.

> **Remarque**
> Notons que cet encadrement est plus fin que le précédent, mais qu'il a demandé un peu plus de travail.

▸ **Troisième méthode** : le moyen d'obtenir un encadrement optimal, est de dresser le tableau de variations de f, afin d'en déterminer le maximum et le minimum. Mais ici le calcul de f' nous fait rapidement comprendre qu'étudier son signe ne sera pas chose facile…
Pour l'avoir vérifié informatiquement, je sais qu'on trouverait alors que f est décroissante sur $[1,2]$, et donc que pour tout $x \in [1,2]$, $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, avec $f(1) \simeq 1.27$ et $f(2) \simeq 0.65$.

1.2.4 Quelques compléments sur les polynômes

Définition 1.22 – Une **fonction polynomiale** est une fonction f de la forme $f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ où $n \in \mathbf{N}$, et $a_0, \dots, a_n$ sont des réels , qui sont appelés les **coefficients de** f de degré 0, de degré 1, …, de degré n.
Si $a_n \neq 0$, on dit que f est de **degré** n.
On appelle alors **racine de** f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$.

> **Terminologie**
> Par abus de langage, on dit souvent «polynôme» au lieu de **fonction polynomiale**. Il existe une différence (subtile) entre les deux, que nous expliquerons plus tard dans l'année, et il m'arrivera souvent de dire polynôme au lieu de fonction polynomiale.

Exemple 1.23

La fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + 2$ est une fonction polynomiale de degré 3.

Vous savez très bien étudier les fonctions polynomiales de degré 1, qui sont les fonctions affines, mais également les fonctions polynomiales de degré 2 auxquelles vous avez consacré beaucoup[18] de temps en première. Vous savez notamment en dresser le tableau de variations, le tableau de signe, et en trouver les racines.
La recherche des racines des fonctions polynomiales de degré 3 ou 4 est bien plus fastidieuse (et nous ne verrons pas de formules générales), et celle des polynômes de degré 5 ou plus est très difficile.

[18] Trop ?

> **Pour la culture**
> On sait même qu'il n'existe pas de formule générale (comme on connaît $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ pour le degré 2) permettant de déterminer les racines d'un polynôme de degré 5 ou plus (théorème d'Abel).

En revanche, un principe général, que nous justifierons bientôt, mais qu'il faudrait maîtriser rapidement est le suivant : si f est une fonction polynomiale dont α est une racine, alors $f(x)$ se factorise par $(x-\alpha)$.
Plus précisément, si f est de degré n, alors f est le produit de $x-\alpha$ par un polynôme de degré $n-1$.

Exemple 1.24

Soit $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 18x + 6$.
Alors on constate que $f(1) = 0$, et donc 1 est une racine de f. Par conséquent, $f(x)$ se factorise par $x-1$, sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.
Pour trouver a, b, c et d, il faut développer cette expression et procéder par identification. Par exemple, lorsqu'on développe, le terme en x^4 est ax^4, donc nécessairement $a = 2$.
Puis le terme en x^3 est $-ax^3 + bx^3 = (b-a)x^3$. Ce terme doit valoir $-10x^3$, et puisque $a = 2$, alors $b = -8$.
En continuant ainsi, il vient $f(x) = (x-1)(2x^3 - 8x^2 + 12x - 6)$.
Mais on constate alors que 1 est encore racine de $2x^3 - 8x^2 + 12x - 6$, qui se factorise encore par $x - 1$. Et alors $f(x) = (x-1)(x-1)(2x^2 - 6x + 6)$.
Un calcul de discriminant prouve alors que $2x^2 - 6x + 6 = 0$ n'a pas de solution réelle, et donc que la seule solution réelle de $f(x) = 0$ est $x = 1$.
La factorisation obtenue de f nous permet également de dresser facilement son tableau de signe[19].

Méthode

De manière générale, pour étudier un polynôme de degré 3 ou plus, commencer par chercher une racine «évidente», généralement parmi $-2, -1, 0, 1, 2$.
Si vous en trouvez une, vous pourrez alors factoriser pour faire apparaître un polynôme de degré moins élevé.

[19] C'est d'ailleurs un bon exercice.

Notons également que, quitte à faire un changement de variable, nombre d'équations se ramènent à une équation polynomiale.

Exemple 1.25

Résolvons l'équation $e^{3x} - 2e^{2x} + 1 = 0$.
Posons $X = e^x$, de sorte que l'équation s'écrit encore $X^3 - 2X^2 + 1 = 0$.
Puisque 1 est clairement racine du polynôme $X^3 - 2X^2 + 1$, celui-ci se factorise par $X - 1$: $X^3 - 2X^2 + 1 = (X-1)(X^2 - X - 1)$.
Et donc $X^3 - 2X^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ **ou** $X^2 - X - 1 = 0$.
Les racines de $X^2 - X - 1$ sont $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Il ne faut alors pas oublier de revenir à la variable de départ[20] : on a donc

$$e^{3x} - 2e^{2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x \in \left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Une exponentielle étant toujours positive, on ne peut avoir $e^x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Et on a $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{0, \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

[20] Ici x.

1.2.5 Prouver des identités

La maîtrise du calcul n'est pas seulement nécessaire pour résoudre des équations ou des inéquations, et on vous demandera souvent de prouver des égalités/inégalités valables dans un contexte plus ou moins général.

Cela demande souvent un peu d'intuition pour partir dans la bonne direction.
Il existe tout de même une méthode qui fonctionne assez souvent, et peut constituer un bon point de départ lorsqu'on n'a pas d'idée : utiliser des équivalences.
En effet, dans un raisonnement par équivalences, la proposition[21] de départ est vraie si et seulement si la proposition d'arrivée est vraie.
Et donc une option est de transformer l'identité de départ par équivalences jusqu'à arriver à une identité que l'on sait prouver, ou qui est trivialement vraie.

[21] Égalité ou inégalité.

Exemple 1.26

Prouvons que pour tous réels a, b, c, on a $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$.
On a

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-2ab\right)+\left(a^2+c^2-2ac\right)+\left(b^2+c^2-2bc\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est trivialement vraie, puisqu'un carré est toujours positif, donc l'inégalité de départ est vraie.

Enfin, touchons deux mots du principe de substitution : si vous savez qu'une identité est vraie[22] pour tout x, alors vous pouvez donner à x la valeur de votre choix, même si cette valeur dépend d'autres variables.

[22] Je pense notamment aux identités remarquables que vous connaissez déjà.

Exemple 1.27

Si x et y sont deux réels, alors $(x-y)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2xy \leqslant x^2+y^2$.
En particulier, si a et b sont deux réels strictement positifs, alors en substituant a à x et b^2 à y, on a

$$a^2+b^4 = a^2+\left(b^2\right)^2 \geqslant 2ab^2.$$

De même, on a $a^4+b^2 = \left(a^2\right)^2+b^2 \geqslant 2a^2b$.
En passant à l'inverse, on en déduit que $\dfrac{1}{a^2+b^4} \leqslant \dfrac{1}{2ab^2}$ et $\dfrac{1}{a^4+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2a^2b}$. Et donc

$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4} \leqslant \frac{a}{2a^2b}+\frac{b}{2ab^2} \leqslant \frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Nous venons donc de prouver que pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

Astuce — Cette inégalité est très classique et à savoir redémontrer si besoin.

1.3 Valeur absolue, partie entière

1.3.1 Valeur absolue

Définition 1.28 – Soit $x \in \mathbf{R}$. On appelle **valeur absolue de** x et on note $|x|$ le réel positif défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Intuition — Passer à la valeur absolue, c'est «juste» enlever un éventuel signe moins.

Exemple 1.29

On a $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, $|3| = 3$ et pour $n \in \mathbf{N}$, $|(-1)^n| = 1$.

Remarques. ► Une valeur absolue est toujours un nombre positif.
► $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$. Autrement dit, $|x| = \max(x, -x)$.

Proposition 1.30 : *Soient a et b deux réels. Alors*

i) $a \leqslant |a|$

ii) $|a|^2 = a^2$ *et donc* $|a| = \sqrt{a^2}$

iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

iv) *si* $b \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

v) $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b$ **ou** $a = -b)$

vi) *Si* $b \geqslant 0$, *alors* $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$ *et* $|a| \geqslant b \Leftrightarrow (a \geqslant b$ **ou** $a \leqslant -b)$.
Ces inégalités restent valables si l'on remplace les inégalités larges ($\leqslant$) *par des inégalités strictes* ($<$).

Démonstration. *i)* Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$, et donc $a \leqslant |a|$.
Et si $a \leqslant 0$, alors $a \leqslant 0 \leqslant |a|$.
ii) Si $a \geqslant 0$, alors $|a|^2 = a^2$ et si $a \leqslant 0$, alors $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$.
Par conséquent, $|a|$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut a^2 : c'est $\sqrt{a^2}$.

iii) Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$, et donc $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \leqslant 0$, et donc $|ab| = -ab = a \times (-b) = |a| \cdot |b|$.
On traite de même les deux cas restants.

iv) Si $b > 0$, alors $\dfrac{1}{b} > 0$, et donc $\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{b}$.
Si $b < 0$, alors $\dfrac{1}{b} < 0$ et donc $\left|\dfrac{1}{b}\right| = -\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{-b} = \dfrac{1}{|b|}$.
Donc dans tous les cas $\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|}$ et par conséquent[23]

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = |a|\frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

[23] En utilisant le point iii) pour la valeur absolue du produit.

v) Puisque $|a|$ et $|b|$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned} |a| = |b| &\Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \textbf{ ou } a + b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \textbf{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

vi) On a $|a| \leqslant b \Leftrightarrow |a|^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$.
Et alors il est bien connu que ceci équivaut à $-b \leqslant a \leqslant b$. □

Arnaque ?
Si vous tenez absolument à redémontrer ceci : utilisez

$a^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) \leqslant 0$

et un tableau de signe vous aidera à conclure.

⚠ En particulier, on prendra garde au fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas croissante, c'est-à-dire qu'on n'a pas $a \leqslant b \Rightarrow |a| \leqslant |b|$.
Par exemple $-2 \leqslant 1$ mais on n'en déduira pas que $|-2| \leqslant |1|$.

Définition 1.31 – Si x et y sont deux réels, le nombre (positif) $|x - y|$ est appelé **distance entre x et y.**

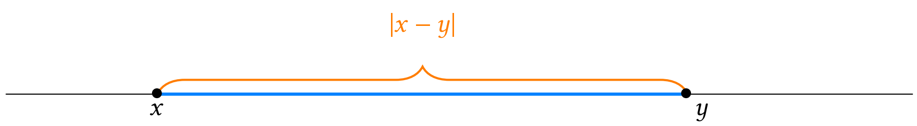
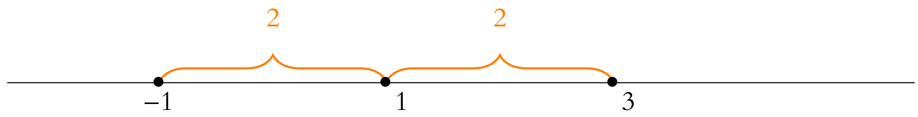


FIGURE 1.4 – $|x - y|$ est la longueur du segment joignant x à y.

Exemple 1.32

On a $|x-1| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x-1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3$.
Autrement dit, si et seulement si la distance entre x et 1 est inférieure ou égale à 2.



Théorème 1.33 (Inégalité triangulaire) : *Soient a et b deux réels. Alors*

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

De plus on a $|a+b| = |a|+|b|$ si et seulement si a et b sont de même signe.

Démonstration.

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = |a|^2+|b|^2+2ab.$$

Mais[24] $ab \leqslant |ab| \leqslant |a| \cdot |b|$.
Et donc $|a+b|^2 \leqslant |a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b| = (|a|+|b|)^2$.
Par stricte croissance de la fonction racine, on a donc

$$|a+b| \leqslant \big||a|+|b|\big| = |a|+|b|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si l'inégalité $ab \leqslant |ab|$ est une égalité, c'est-à-dire si et seulement si $ab \geqslant 0$, soit si et seulement si a et b sont de même signe. □

[24] Il est évident que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant |x|$ (distinguer deux cas suivant le signe de x).

⚠ Cette inégalité reste bien entendu valable si on remplace b par $-b$, mais elle devient alors

$$|a-b| \leqslant |a|+|-b| = |a|+|b|.$$

Une grosse erreur serait d'écrire $|a-b| \leqslant |a|-|b|$.
Par exemple, pour $a=2$ et $b=3$, cela nous mènerait à

$$|2-3| \leqslant |2|-|3| \Leftrightarrow 1 \leqslant -1$$

ce qui est évidemment faux, une valeur absolue étant toujours positive.

Corollaire 1.34 (Inégalité triangulaire renversée) – *Soient a et b deux réels. Alors*

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|.$$

Démonstration. On a $|a| = |(a+b)-b| \leqslant |a+b|+|b|$.
Et donc $|a|-|b| \leqslant |a+b|$.
Sur le même principe, on a $|b|-|a| \leqslant |a+b|$. Et donc

$$-|a+b| \leqslant |a|-|b| \leqslant |a+b| \Leftrightarrow \big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|.$$

□

Astuce

Un moyen condensé de retenir les inégalités triangulaires en minimisant les risques d'erreur sur les signes est le suivant :

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

Corollaire 1.35 (Inégalité triangulaire généralisée) – *Si $x_1, \dots, x_n$ sont n réels, avec $n \geqslant 2$, alors*

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

On a alors l'égalité $|x_1+\cdots+x_n| = |x_1|+\cdots+|x_n|$ si et seulement si tous les x_i sont de même signe.

Démonstration. Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$, en notant $\mathscr{P}(n)$ la propriété « pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$ avec égalité si et seulement si les x_i sont de même signe».
La récurrence a été initialisée, l'inégalité triangulaire n'étant rien d'autre que $\mathscr{P}(2)$.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des réels. Alors

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}| &= |(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| \\ &\leqslant |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\leqslant |x_1| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}| \end{aligned}$$

Détails
C'est l'inégalité triangulaire appliquée aux **deux** réels $x_1 + \cdots + x_n$ et x_{n+1}.

C'est l'hypothèse de récurrence.

De plus, on a égalité si et seulement si[25] à chaque étape du raisonnement précédent on avait une égalité, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} |x_1 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| = |x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}| \\ |x_1 + \cdots + x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + \cdots + x_n) \text{ et } x_{n+1} \text{ de même signe} \\ x_1, \dots, x_n \text{ sont de même signe}^{26} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \text{ sont de même signe.}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

[25] Si l'une de nos inégalités était stricte, l'inégalité finale serait une inégalité stricte.

[26] C'est dans l'hypothèse de récurrence.

Proposition 1.36 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors A est* ***bornée*** *si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant K$.*

Démonstration. Supposons que A soit bornée, et soient donc m et M respectivement un minorant et un majorant de A, de sorte que pour tout $x \in A$, $m \leqslant x \leqslant M$.
Posons alors $K = \max(|m|, |M|)$. Alors pour $x \in A$, on a $-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant x \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K$, si bien que $|x| \leqslant K$.

Et inversement, si K est tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant K$, alors pour tout $x \in A$, $-K \leqslant x \leqslant K$, donc A est majorée (par K) et minorée (par $-K$), donc bornée. □

1.3.2 Partie entière

Définition 1.37 – Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous admettons[27] qu'il existe un unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Cet entier est alors noté $\lfloor x \rfloor$ et appelé **partie entière de x.**

[27] Ceci sera justifié plus tard.

Autrement dit
La partie entière de x est l'entier immédiatement inférieur à x.

Remarques. ► Si x est positif, alors $\lfloor x \rfloor$ est obtenu en enlevant les chiffres après la virgule du développement décimal de x.
Par exemple $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$ et $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
En revanche, ce n'est plus vrai si $x < 0$, puisque $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$.
► Si n est la partie entière de x, alors n est inférieur à x, et donc tous les entiers inférieurs à n sont aussi inférieurs à x, et puisque $n + 1$ est strictement supérieur à x, tous les entiers supérieurs strictement à n, qui sont supérieurs ou égaux à $n + 1$, sont supérieurs stricts à x.
Donc $\lfloor x \rfloor$ est **le plus grand entier inférieur ou égal à x.**
► Un réel x est égal à sa partie entière si et seulement si il appartient à $\mathbf{Z}$.
► La double inégalité $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ qui définit $\lfloor x \rfloor$ peut également s'écrire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Exemple 1.38

Résolvons l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \right\rfloor = 2$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Par définition de la partie entière, on a

$$\begin{aligned}\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3\\ &\Leftrightarrow 4 \leqslant x^2+1 < 9\\ &\Leftrightarrow 3 \leqslant x^2 < 8\\ &\Leftrightarrow x \in \left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[.\end{aligned}$$

Le passage au carré est bien une équivalence puisque nous sommes en présence de nombres positifs.

Notons qu'il y a toujours **un et un seul** entier n vérifiant $n \leqslant x < n+1$. Donc si on trouve un tel entier, celui-ci est nécessairement $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 1.39

Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{2}{3}$.
Il vient donc $\lfloor x \rfloor + \frac{2}{3} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Donc en multipliant par 3, on a $3\lfloor x \rfloor + 2 \leqslant 3x < 3\lfloor x \rfloor + 3$.
Mais $3\lfloor x \rfloor + 2$ est un entier[28] : c'est donc le seul entier n tel que $n \leqslant 3x < n+1$, et donc c'est la partie entière de $3x$: $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 2$.

[28] Car $\lfloor x \rfloor$ est entier.

⚠ Aucune règle générale n'existe pour la partie entière d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, on n'a pas systématiquement

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor, \lfloor ab \rfloor = \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor \text{ ou } \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \frac{\lfloor a \rfloor}{\lfloor b \rfloor}.$$

En revanche, on a la proposition suivante :

Proposition 1.40 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*

Démonstration. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + n}_{\in \mathbf{Z}} \leqslant x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$$

donc $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. □

1.3.3 Factorielles

Introduisons une dernière notation, qui nous servira souvent :

Définition 1.41 – Si $n \in \mathbf{N}$, on note $n!$, et on appelle **factorielle de** n l'entier défini par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Exemples 1.42

Les premières factorielles sont donc : $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ et $6! = 720$.

Notons qu'on a toujours $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
De plus, si $k \leqslant n$ sont deux entiers, alors $\frac{n!}{k!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times k} = (k+1) \cdot (k+2) \cdots (n-1)n$.

EXERCICES DU CHAPITRE 1

▶ Précisions sur le fonctionnement des TD

Tout au long de l'année, les exercices de TD seront accompagnés d'une lettre indiquant leur niveau de difficulté :

F Facile **PD** Peu difficile **AD** Assez difficile **D** Difficile **TD** Très difficile.

Une étoile (⋆) indique une question plus difficile que le reste de l'exercice, et qui peut être laissée de côté dans un premier temps. N'oubliez pas **de lire les questions en entier**, et notamment les éventuelles indications qu'elles peuvent contenir.

▶ Quelques révisions

EXERCICE 1.1 Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbf{N}$. **F**

1. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$
2. $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3}$
3. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5$
4. $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}$
5. $\dfrac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}}$

EXERCICE 1.2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: **PD**

1. $2x = \sqrt{x^2+1}$
2. $2\sqrt{x}+1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $e^{2x}+2e^{1+x} = \dfrac{3}{e^{-2}}$
4. $\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \dfrac{8}{\ln(x)}$

EXERCICE 1.3 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: **PD**

1) $\dfrac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 5$
2) $\dfrac{x-2}{2x+1} \leqslant -1.$
3) $2x^4-9x^2+4 < 0$
4) $e^{2x}-e^x \leqslant 2$
5) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$

EXERCICE 1.4 Soient a, b, c, d des nombres réels vérifiant $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. **PD**
Montrer que si $a+c = b+d$, alors nécessairement $a = b$ et $c = d$.

EXERCICE 1.5 Prouver que : 1) pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leqslant 4$ **AD**

2) pour tout $x > 0$, $\dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2-\ln(x)+1} \leqslant \dfrac{16e^{-2}}{3}$

3) (⋆) pour tous x, y dans $[1,2]$, $\dfrac{2}{5} \leqslant \dfrac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leqslant 6$

EXERCICE 1.6 **PD**

1) Montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.
2) En déduire que pour a et b strictement positifs, $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$.
3) Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\dfrac{xy}{x+y}+\dfrac{xz}{x+z}+\dfrac{yz}{y+z} \leqslant \dfrac{x+y+z}{2}$.

EXERCICE 1.7 Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2} \geqslant \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}$. **D**
À quelle(s) condition(s) cet inégalité est-elle une égalité ?

▶ Valeur absolue

EXERCICE 1.8 Résoudre les équations suivantes : **PD**

1) $x+|x| = \dfrac{4}{x}$.
2) $x|x| = 3x+2$.
3) $|x^2-3x-7| = 3$

EXERCICE 1.9 Résoudre l'équation $\ln|x|+\ln|x+1| = 0$. **PD**

EXERCICE 1.10 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: **PD**

1) $|x+2| < |x^2-4|$ 2) $|x+5| \geqslant |x^2-25|$ 3) $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| > 2$ 4) $x^2-4|x|+3>0$

EXERCICE 1.11 Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)^3+(-1)^{n-1}n^3\right| \leqslant n^4$. F

EXERCICE 1.12 Soient a, b deux nombres réels. Montrer que $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$. AD

EXERCICE 1.13 Montrer qu'une partie de $\mathbf{R}$ est bornée si et seulement si elle est incluse dans un segment. PD

EXERCICE 1.14 Montrer que si A et B sont deux parties bornées de $\mathbf{R}$, alors les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont encore bornées : D

1) $A \cup B$ 2) $A+B=\{a+b, a\in A, b\in B\}$ 3) $A\cdot B=\{ab, a\in A, b\in B\}$

► Partie entière

EXERCICE 1.15 Soit $n \in \mathbf{Z}$. Prouver que $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. PD

EXERCICE 1.16 Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$. AD

EXERCICE 1.17 Résoudre l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2-x+2} \right\rfloor = 2$ et l'inéquation $\left|\lfloor x^2-4x-3\rfloor+1\right| \leqslant 2$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$. PD

EXERCICE 1.18 Soient x et y deux nombres réels. PD

1) Montrer que si $x \leqslant y$, alors $\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor y\rfloor$. Est-ce qu'inversement, si $\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor y\rfloor$ alors nécessairement $x \leqslant y$?
2) A-t-on toujours $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$? Montrer que $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

EXERCICE 1.19 **Vrai ou Faux ?** PD
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier votre réponse (a, b et x sont trois réels).

1) si $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor$, alors $|a-b|<1$.
2) si $|a-b|<1$ alors $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor$.
3) si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.
4) $|a| \leqslant |a+b|$.
5) $a+|a|=0 \Leftrightarrow a \leqslant 0$
6) $|a+b|=|a| \Rightarrow b=0$.
7) $|\lfloor x\rfloor| = \lfloor |x| \rfloor$.
8) $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2}$

EXERCICE 1.20 Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer les relations suivantes : AD

1) $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\dfrac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$. *On pourra distinguer deux cas, suivant que $x-\lfloor x\rfloor < \dfrac{1}{2}$ ou non.*
2) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

EXERCICE 1.21 Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $n = \lfloor x\rfloor$. D

1) Exprimer $\lfloor x-4\rfloor$ et $\lfloor 2x-1\rfloor$ en fonction de n. *On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.*
2) Résoudre l'équation $\lfloor x-4\rfloor = \lfloor 2x-1\rfloor$.

EXERCICE 1.22 D

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n vérifiant $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n+b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2-1$.
2) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

EXERCICE 1.23 **(Oral Polytechnique)** TD
On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = 2,\ u_4 = u_5 = u_6 = 3,\ u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4,\ \ldots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k. En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n.

► Inégalités diverses

EXERCICE 1.24 Montrer que pour tout réel x, $x^2 - \dfrac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2$. PD

EXERCICE 1.25 AD

1) Déterminer le maximum de la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
2) Soient a, b, c trois réels de $[0,1]$. Montrer que l'un au moins des nombres $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.

EXERCICE 1.26 Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 - nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nt}$. AD

EXERCICE 1.27 D

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

On pourra procéder par récurrence sur n.

3) À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

Correction des exercices du chapitre 1

Solution de l'exercice 1.1

1. $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18.$
2. $\dfrac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3} = \dfrac{x^3y^6}{y^3}(-x)^2 = x^3x^2\dfrac{y^6}{y^3} = x^5y^3.$
3. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{9}\right)^5 = \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^{12}\left(\dfrac{2}{3^2}\right)^5 = \dfrac{3^12}{2^{24}}\dfrac{2^5}{3^{10}} = \dfrac{3^2}{2^{19}}.$
4. $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n} = \dfrac{2^5\times 8^n \times 8^{-1}}{4^{n+1}-4^n} = \dfrac{2^2\times 8^n}{4^n(4-1)} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{8}{4}\right)^n = \dfrac{2^{n+2}}{3}.$
5. Notons que $75 = 5\times 15 = 5^2\times 3$ et $27 = 3^2\times 3$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}} &= \frac{5\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+6}\\ &= \frac{1}{3}\frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{3}\frac{(5\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}\\ &= \frac{1}{3}\frac{17-11\sqrt{3}}{3-4} = \frac{11}{3}\sqrt{3}-\frac{17}{3}.\end{aligned}$$

Astuce
On fait apparaître la quantité conjugée (au dénominateur, et donc également au numérateur).

Solution de l'exercice 1.2

1. Notons que x^2+1 est toujours positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est toujours bien défini.
Une racine étant toujours positive, toute solution doit vérifier $2x \geqslant 0$ et donc être positive.
Et alors pour $x \geqslant 0$,

$$2x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2+1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc l'équation possède une unique solution qui est $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarque
La dernière équivalence n'en est une que parce que x est supposé positif.

2. L'équation n'a de sens que pour $x > 0$.
Et alors, pour $x > 0$, on a, après multiplication par $\sqrt{x}$

$$2\sqrt{x}+1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{x} - 1 = 0.$$

En posant $X = \sqrt{x}$, on a donc $2X^2 + X - 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc les racines en sont
$X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{4} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Puisque $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution, l'unique solution est $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

Dénominateur
$\sqrt{x}$ est défini pour $x \geqslant 0$, mais si $x = 0$, alors il y a une division par 0, ce qui n'est pas possible !

3. Puisque $e^{1+x} = e^1e^x$ et $e^{2x} = (e^x)^2$, en posant $X = e^x$, l'équation s'écrit encore

$$X^2 + 2eX - \frac{3}{e^{-2}} = 0.$$

Le discriminant est alors $\Delta = 4e^2 + \dfrac{12}{e^{-2}} = 4e^2 + 12e^2 = 16e^2 > 0$.
Donc les racines sont $X_1 = \dfrac{-2e+4e}{2} = e$ et $X_2 = -3e$.
Puisque $e^x = -3e$ n'a pas de solution[1] et que $e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1$, la seule solution de l'équation est 1.

[1] Une exponentielle est toujours positive.

4. Notons que l'équation de départ n'a de sens que si $\ln(x)$ est défini et non nul, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$.
On a alors, en multipliant par $\ln(x)$,

$$\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \frac{8}{\ln(x)} \Leftrightarrow (\ln x)^3 - \ln(x)^2 - 10\ln(x) - 8 = 0.$$

Donc en posant $X = \ln(x)$, il vient $X^3 - X^2 - 10X - 8 = 0$.
Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 3, cherchons une racine «évidente».
On constate que -2 convient car $(-2)^3 - (-2)^2 - 10 \times (-2) - 8 = -8 - 4 + 20 - 8 = 0$.
Donc le polynôme se factorise par $X - (-2)$:

$$X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X+2)(X^2 - 3X - 4).$$

Les racines de $X^2 - 3X - 4$ sont -1 et 4.
Or on a $X = \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, $\ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{e^{-2}, e^{-1}, e^4\}$.

> **Méthode**
> Une racine dite «évidente» est une racine «petite», généralement dans $[\![-2, 2]\!]$.

Solution de l'exercice 1.3

1. Puisque $x^2 + 1$ est toujours positif, on peut sans précautions multiplier les deux membres de l'inégalité par $x^2 + 1$, le sens de l'inégalité ne s'en trouvera pas changé.
On a donc
$$\frac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 5 \Leftrightarrow 3x + 4 \geqslant 5x^2 + 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 1 \leqslant 0.$$
Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$.
Donc il ne possède pas de racines, et par conséquent est de signe constant, strictement positif car son coefficient en x^2 est positif.
Donc l'inéquation ne possède pas de solutions.

2. Commençons par remarquer que l'inéquation n'a de sens que si $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.
On ne peut alors pas procéder comme à la question précédente, en multipliant par $2x+1$, car celui-ci n'est pas de signe constant...
En revanche, on a

$$\frac{x-2}{2x+1} \leqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+1} + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x+1} \leqslant 0.$$

Et alors, un tableau de signe permet de conclure facilement

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x-1}{2x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$.

3. Posons $X = x^2$ et commençons par résoudre $2X^2 - 9X + 4 < 0$.
Les racines du polynôme $2X^2 - 9X + 4$ sont $\frac{1}{2}$ et 4, et donc $2X^2 - 9X + 4 < 0$ si et seulement si $X \in \left]\frac{1}{2}, 4\right[$.
Il ne reste donc plus qu'à résoudre $\frac{1}{2} < x^2 < 4$.
En prenant la racine carrée, qui préserve les inégalités car elle est croissante sur $\mathbf{R}_+$, et même les inégalités strictes car elle est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 2$.
Et donc
$$2x^4 - 9x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right[.$$

> **Intervalle ouvert**
> On a exclu les racines de cet intervalle, puisqu'on souhaite avoir une inégalité stricte. Or en les racines, le polynôme est **égal** à 0.

4. On a $e^{2x} - e^x \leqslant 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 \leqslant 0$, donc en posant $X = e^x$, on en arrive à $X^2 - X - 2 \leqslant 0$.
Le discriminant du polynôme $X^2 - X - 2$ est $\Delta = 9$, donc les deux racines sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -1$.
Ainsi, x est solution de l'inéquation si et seulement si $e^x \in [-1, 2]$.
Une exponentielle étant toujours positive, $e^x \geqslant -1$ est toujours réalisé, et $e^x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(2)$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, \ln(2)]$.

> **Croissance**
> On a bien une équivalence car la fonction ln est **strictement** croissante.
> Si elle n'était que croissance, on devrait se contenter d'une implication ($\Rightarrow$).

5. Notons que l'inéquation n'a de sens que pour $x \neq \pm 1$.
Pour un tel x, on a $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x^2-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+6-x^2}{x^2-1} \geqslant 0$.
Pour étudier le signe du trinôme $-x^2+x+6$, calculons son discriminant, qui vaut $\Delta = 1 - 4 \times 6 \times (-1) = 25$.
Ses racines sont donc $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{-2} = 3$ et $x_2 = -2$.
Donc $-x^2+x+6 \geqslant 0$ si et seulement si $-2 \leqslant x \leqslant 3$.
D'autre part, on a $x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.

Rappel
Un polynôme de degré 2 est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+6}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-2,-1[\cup]1,3]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.4

Si l'une des deux inégalités $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ était une inégalité stricte[2], alors la somme des deux inégalités serait une inégalité stricte (quand bien même l'autre inégalité serait une égalité !).
Autrement dit, on aurait $a+c < b+d$, ce qui n'est pas le cas.
On en déduit que $a = b$ et $c = d$.

[2] C'est-à-dire si on avait $a \neq b$ ou $c \neq d$.

Classique
Le raisonnement que nous venons de tenir s'appelle un raisonnement par l'absurde : on suppose que la conclusion est fausse, et on en déduit une contradiction (ici que $a+c \neq b+d$). Nécessairement, cela impose que la conclusion est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.5

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
Et donc $0 \leqslant 2x \leqslant 2x + 1 + \cos(2x) \leqslant 2x + 2 \leqslant 4$.
D'autre part, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 2 - x^2 \leqslant 2$.
En passant à l'inverse, on a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2-x^2} \leqslant 1$.
Et donc en multipliant les deux inégalités[3] ainsi obtenues,

$$0 \leqslant \frac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leqslant 4.$$

[3] Toutes formées de nombres positifs.

2. Notons φ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $\varphi(t) = t^2 e^{-t}$, de sorte que $xe^{-\sqrt{x}} = \varphi(\sqrt{x})$.
Alors φ est dérivable, de dérivée $\varphi' : t \mapsto t(2-t)e^{-t}$.
Il est alors aisé d'en dresser le tableau de variations, et de constater que φ possède un maximum en $t = 2$, égal à $\varphi(2) = 4e^{-2}$.
Donc déjà, pour $x > 0$, $xe^{-\sqrt{x}} \leqslant 4e^{-2}$.

De même, soit $\psi : t \mapsto t^2 - t + 1$. Il s'agit alors d'une fonction polynomiale de degré 2, dont on sait que le minimum est atteint[4] en $\frac{1}{2}$, et vaut $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.
Et donc pour tout $x > 0$, $\ln(x)^2 - \ln(x) + 1 = \psi(\ln(x)) \geqslant \frac{3}{4}$.
En passant à l'inverse, on a donc $\dfrac{1}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leqslant \dfrac{4}{3}$.
Il ne reste alors qu'à multiplier les inégalités pour conclure : pour $x > 0$, $\dfrac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leqslant \dfrac{16e^{-2}}{3}$.

[4] Inutile de dériver : vous connaissez une formule donnant l'abscisse du sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$: c'est $-\frac{b}{2a}$.

3. Essayons d'adopter une approche similaire à celle employée à la question précédente : $1 \leqslant y^2 \leqslant 4$ et donc $3 \leqslant 2x + y^2 \leqslant 6$.
De même, $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$, $2 \leqslant 2y \leqslant 4$ et $-4 \leqslant -y^2 \leqslant -1$.
On en déduit que $-1 \leqslant x^2 + 2y - y^2 \leqslant 7$.
On réalise alors que notre minoration est trop «brutale», puisqu'on souhaiterait n'avoir que des nombres positifs à la fin.
Essayons d'être plus subtils en étudiant la fonction f définie sur $[1,2]$ par $f(y) = 2y - y^2$.
Sa dérivée est $f'(y) = 2 - 2y = 2(1-y) \leqslant 0$. Donc f est décroissante sur $[1,2]$ et admet donc un maximum en 1, qui vaut $f(1) = 1$ et un minimum en 2 qui vaut $f(2) = 0$.

Donc pour tout $y \in [1,2]$, $0 \leqslant 2y - y^2 \leqslant 1$.
On en déduit que $1 \leqslant x^2 + 2y - y^2 \leqslant 5$ et donc $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x^2+2y-y^2} \leqslant 1$.
Enfin, en multipliant par l'encadrement du numérateur précédemment obtenu,

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leqslant 6.$$

Remarque
Cet encadrement est à comparer avec celui obtenu précédemment :

$$-2 \leqslant 2y - y^2 \leqslant 3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.6

1. On a

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Puisque cette dernière inégalité est trivialement vérifiée[5], on a bien $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

[5] Un carré est toujours positif.

2. Puisque $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, alors

$$\frac{(a+b)(a+b)}{4} \geqslant ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{4} \geqslant \frac{ab}{a+b}.$$

Signe
Notons que le sens des inégalités n'est pas changé car $a+b > 0$.

3. En appliquant trois fois le résultat de la question précédente,

$$\frac{xy}{x+y} \leqslant \frac{x+y}{4}, \quad \frac{xz}{x+z} \leqslant \frac{x+z}{4}, \quad \frac{yz}{y+z} \leqslant \frac{y+z}{4}.$$

En sommant ces trois inégalités, il vient

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leqslant \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{y+z}{4} \leqslant \frac{2x+2y+2z}{4} \leqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.7

Soit x, y et z trois réels strictement positifs.
Remarquons que $\dfrac{x}{z} = \dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z}$ et donc $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{z}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2} - 2\dfrac{x}{z} + \dfrac{y^2}{z^2}$.
Et de même en permutant les rôles de x, y et z. Il vient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}\\
\Leftrightarrow & 2\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + 2\frac{z^2}{x^2} \geqslant 2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{x} + 2\frac{z}{y}\\
\Leftrightarrow & \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}\right) + \left(\frac{y^2}{z^2} - 2\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est triviale[6].
De plus, il y a égalité dans l'inégalité de départ si et seulement si

[6] Une somme de carrés est toujours positive.

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0.$$

Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc si et seulement si

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, \frac{y}{z} = \frac{z}{x}, \frac{z}{x} = \frac{x}{y}.$$

Soit encore si et seulement si $x^2 = yz$, $y^2 = xz$ et $z^2 = xy$.
Il vient alors $z = \dfrac{x^2}{y}$, donc en substituant dans $y^2 = xz$, il vient $y^2 = \dfrac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3 = y^3$. Et donc $x = y$.
On prouve de même que $y = z$, et donc $x = y = z$.
Inversement, il est clair que si $x = y = z$, alors l'inégalité de départ est une égalité.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.8

1. Notons que le membre de droite de l'équation n'est défini que si $x \neq 0$, on résout donc l'équation sur $\mathbf{R}^*$.
Si $x > 0$, alors $|x| = x$, de sorte que l'équation s'écrit encore $2x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.
Et si $x < 0$, alors $|x| = -x$, de sorte que $x + |x| = x + (-x) = 0$, et donc l'équation ne possède pas de solution dans $\mathbf{R}_-^*$.
Ainsi, l'équation $x + |x| = \dfrac{4}{x}$ possède $\sqrt{2}$ comme unique solution.

> **Signe**
> L'équation $x^2 = 2$ possède également $x = -\sqrt{2}$ comme solution, mais puisque nous travaillons avec $x > 0$, cette solution n'est pas pertinente ici.

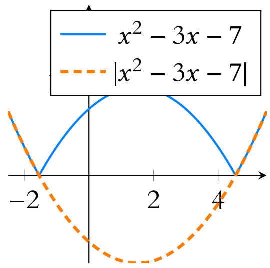
2. Distinguons les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$, et donc $x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.
Le polynôme $x^2 - 3x - 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4(-2) = 17$, et a donc pour racines $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0$.
Donc la seule solution dans $\mathbf{R}_+$ de $x|x| = 3x + 2$ est $\dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$.
Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et donc

$$x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow -x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Or le polynôme $x^2 + 3x + 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$, de sorte qu'il possède pour racines $x_3 = \dfrac{-3 - 1}{2} = -2$ et $x_4 = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1$.
Ces deux solutions sont bien des nombres négatifs.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-2, -1, \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

> **Méthode**
> Afin de manipuler les valeurs absolues, le plus simple est souvent (mais pas toujours) de revenir à la définition :
> $$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. On a $|x^2 - 3x - 7| = 3$ si et seulement si $x^2 - 3x - 7$ vaut soit 3 soit -3.
Or $x^2 - 3x - 7 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$, dont les solutions sont -2 et 5.
De même, $x^2 - 3x - 7 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$, équation dont les solutions sont -1 et 4.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\{-2, -1, 4, 5\}$.



Bien que ce ne soit pas nécessaire pour répondre à la question, je laisse ces deux graphiques ici et vous laisse comprendre en quoi ils se ressemblent et pourquoi.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.9

Commençons par noter que tous les termes de cette équation sont bien définis si et seulement si $\begin{cases} |x| \neq 0 \\ |x + 1| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$
On a alors, pour $x \notin \{0, -1\}$,

$$\ln|x| + \ln|x + 1| = 0 \Leftrightarrow \ln|x(x + 1)| = 0 \Leftrightarrow |x(x + 1)| = 1.$$

Soit encore $x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ **ou** $x(x + 1) = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$.
La première équation possède un discriminant égal à 5 et possède $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ comme solutions.
La seconde équation possède un discriminant strictement négatif, et donc n'a pas de solutions.
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.10

1. Notons que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, et donc $|x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2|$.
Et donc il vient

$$|x + 2| < |x^2 - 4| \Leftrightarrow |x + 2| < |x + 2| \cdot |x - 2| \Leftrightarrow 0 < |x + 2| \left(|x - 2| - 1\right).$$

Il est clair que $x = -2$ n'est pas solution car alors $|x + 2| = 0$.
Et pour $x \neq -2$, $|x + 2| > 0$, de sorte que

$$0 < |x + 2| \left(|x - 2| - 1\right) \Leftrightarrow |x - 2| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x - 2| > 1.$$

Or, $|x - 2| > 1 \Leftrightarrow x - 2 > 1$ **ou** $x - 2 < -1$.
Soit encore $x > 3$ **ou** $x < 1$.
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]3, +\infty[$.

2. Notons que $x^2-25=(x+5)(x-5)$ et donc $|x^2-25|=|x+5|\cdot|x-5|$.
Et donc l'inéquation s'écrit encore $|x+5|\geqslant|x+5|\cdot|x-5|$.
Pour $x\neq-5$ l'inéquation est donc équivalente à $|x-5|\leqslant 1$
Soit encore $-1\leqslant x-5\leqslant 1 \Leftrightarrow 4\leqslant x\leqslant 6$.
Enfin, -5 est solution de l'inéquation, donc l'ensemble des solutions est $\{-5\}\cup[4,6]$.

Attention ! Si on souhaite diviser par $|x+5|$, il faut d'abord s'assurer que celui-ci n'est pas nul !

3. Notons que pour $x=-1$, l'inéquation n'a pas de sens[7].
Voici deux méthodes de résolution qui, si elles conduisent au même résultat[8] ne nécessitent pas la même quantité de calcul. Avant de se lancer, mieux vaut donc réfléchir aux outils dont on dispose et choisir ceux qui nous semblent le plus pertinents.

[7] Division par zéro.
[8] Encore heureux !

► **1ère méthode :** pour $x\neq-1$, on a $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|>2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}>2$ **ou** $\dfrac{1}{x+1}<-2$.
Or, $\dfrac{1}{x+1}>2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+1}-2>0\Leftrightarrow\dfrac{-1-2x}{x+1}>0$.
Un tableau de signe nous permet alors de conclure :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-1-2x}{x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et de même, on a $\dfrac{1}{x+1}<-2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+1}+2<0\Leftrightarrow\dfrac{2x+3}{x+1}<0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+3}{x+1}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\dfrac{3}{2},-1\right[\cup\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[$.

► **2ème méthode :** pour $x\neq-1$, $|x+1|>0$ et donc

$$\left|\frac{1}{x+1}\right|>2\Leftrightarrow\frac{1}{2}>|x+1|\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}.$$

Puisque -1 avait été d'office exclu de l'ensemble des solutions, on trouve donc comme ensemble de solutions $\left]-\dfrac{3}{2},-1\right[\cup\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right[$.

4. Il serait possible de distinguer les cas $x\geqslant 0$ et $x<0$, et de résoudre dans les deux cas une inéquation du second degré.
Mais notons plutôt que $x^2=|x|^2$, et donc en posant $X=|x|$, l'inéquation de départ s'écrit $X^2-4X+3>0$.
Mais le polynôme X^2-4X+3 possède un discriminant égal à 4 et possède donc pour racines 1 et 3. Ainsi $X^2-4X+3>0\Leftrightarrow X\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.
Puisque d'autre part, $|x|\geqslant 0$, on a donc

$$x^2-4|x|+3>0\Leftrightarrow|x|\in[0,1[\cup]3,+\infty[\Leftrightarrow x\in]-\infty,-3[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[.$$

Rappel Un polynôme du second degré possédant deux racines est du signe du coefficient de degré 2 à l'extérieur des racines et du signe opposé en dehors des racines.

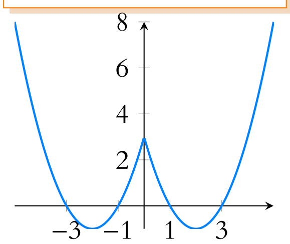


FIGURE 1.1– La fonction $x\mapsto x^2-4|x|+3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.11

Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Alors, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant k^3\leqslant n^3$. Et donc en particulier, $|k^3|=k^3\leqslant n^3$.
Et donc par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned}\left|1^2-2^3+3^3+\cdots+(-1)^{n-1}n^3\right| &\leqslant |1^3|+|-2^3|+\cdots+|(-1)^{n-1}n^3|\\ &\leqslant 1^3+\cdots+n^3\\ &\leqslant n^3+\cdots+n^3=n\times n^3=n^4.\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.12

Première méthode : brutale. Commençons par noter que

$$\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}=\frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}.$$

Et donc il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}\\
\Leftrightarrow\ &|a+b|\,(1+|a|+|b|+|ab|)\leqslant(1+|a+b|)\,(|a|+|b|+2|ab|)\\
\Leftrightarrow\ &|a+b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+|ab|\cdot|a+b|\leqslant|a|+|b|+2|ab|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+2|ab|\cdot|a+b|\\
\Leftrightarrow\ &|a+b|\leqslant|a|+|b|+|ab|\cdot|a+b|+2|ab|.
\end{aligned}$$

Signes !
Notons que ce que nous venons de faire est bien licite car nous avons muliplié par des nombres **positifs**, ce qui préserve le sens de l'inégalité.

Mais par l'inégalité triangulaire, $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, de sorte que la dernière inégalité ci-dessus est vérifiée.
Et donc[9] l'inégalité de départ est vraie : $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

[9] Car on a raisonné par équivalences !

Seconde méthode : plus astucieuse, mais plus douce
La fonction $g : t\mapsto\dfrac{t}{1+t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, de dérivée égale à $g' : t\mapsto\dfrac{1}{(1+t)^2}$, et donc est croissante.
Mais puisque $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, on a donc

$$g(|a+b|)\leqslant g(|a|+|b|)\Leftrightarrow\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.$$

On en déduit donc que

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.13

Soit A une partie bornée de $\mathbf{R}$.
Alors nous savons qu'il existe $M\in\mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x\in A$, $|x|\leqslant M$. Soit encore $-M\leqslant x\leqslant M\Leftrightarrow x\in[-M,M]$.
Et donc ceci prouve que A est inclus dans le segment $[-M,M]$.

Inversement, soit A une partie de $\mathbf{R}$ incluse dans un segment $[a,b]$ (avec $a\leqslant b$ deux réels).
Alors, pour tout $x\in A$, $a\leqslant x\leqslant b$, si bien que a est un minorant de A, et b est un majorant de A.
Autrement dit, A est une partie de $\mathbf{R}$ qui est à la fois majorée et minorée, donc bornée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.14

Soient $M_1,M_2\in\mathbf{R}_+$ tels que pour tout $x\in A$, $|x|\leqslant M_1$ et pour tout $x\in B$, $|x|\leqslant M_2$.

1. Notons alors $M=M_1+M_2$, si bien que $M\geqslant M_1$ et $M\geqslant M_2$.
Soit alors $x\in A\cup B$. Il y a alors deux cas de figure :
1.a. soit $x\in A$, et donc $|x|\leqslant M_1\leqslant M$.
1.b. soit $x\in B$, et donc $|x|\leqslant M_2\leqslant M$.
Dans tous les cas, quel que soit $x\in A\cup B$, $|x|\leqslant M$, donc $A\cup B$ est bornée.
2. Soit $x\in A+B$. Alors il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $x=a+b$.
Et donc par l'inégalité triangulaire, $|x|=|a+b|\leqslant|a|+|b|\leqslant M_1+M_2$.
Donc $A+B$ est bornée.
3. Sur le même principe, si $x\in A\cdot B$, alors il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $x=ab$, et donc $|x|=|ab|\leqslant M_1M_2$.
Et donc $A\cdot$ est également bornée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.15

Si n est est pair, alors $\frac{n}{2}$ est un entier, donc nécessairement égal à sa propre partie entière.

En revanche, si n est impair, alors $n-1$ est pair, et donc $\frac{n-1}{2}$ est un entier.
On a alors $\frac{n-1}{2} \leqslant \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1$.
Et donc nécessairement, par définition de la partie entière de $\frac{n}{2}$, on a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.16

Il s'agit donc de prouver que $4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2$.
Soit encore

$$4n+1 \leqslant n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1 < 4n+2 \Leftrightarrow 2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1.$$

Puisque $n \leqslant n+1$, alors $n^2 \leqslant n(n+1)$ et donc $n \leqslant \sqrt{n(n+1)}$, de sorte qu'on a bien $2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)}$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 &\Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4n^2+4n < 4n^2+4n+1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant trivialement vérifiée, on a donc bien $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$, et donc

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.17

Commençons par noter que le discriminant de x^2-x+2 est $-7<0$, de sorte que x^2-x+2 est de signe constant, positif.
Ceci nous garantit que l'équation a bien un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On a alors

$$\begin{aligned} \left\lfloor \sqrt{x^2-x+2} \right\rfloor = 2 &\Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{x^2-x+2} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leqslant x^2-x+2 < 9 \end{aligned}$$

On alors $4 \leqslant x^2-x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2 \geqslant 0$.
Un calcul de discriminant nous informe alors que cette inéquation est vérifiée si et seulement si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$.

De même, on a $x^2-x+2 < 9 \Leftrightarrow x^2-x-7 < 0$, ce qui est le cas si et seulement si $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$.
Puisque $\sqrt{29} > 3$, $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < -1$, et de même $\frac{1+\sqrt{29}}{2} > 2$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left]\frac{1-\sqrt{29}}{2}, -1\right] \cup \left[2, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right[$.

Pour l'inéquation proposée, notons qu'on a

$$\begin{aligned} \left|\lfloor x^2-4x-3\rfloor + 1\right| \leqslant 2 &\Leftrightarrow -2 \leqslant \lfloor x^2-4x-3\rfloor + 1 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant \lfloor x^2-4x-3\rfloor \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leqslant x^2-4x-3 < 2. \end{aligned}$$

Or on a $x^2-4x-3 < 2 \Leftrightarrow x^2-4x-5 < 0$.
Le polynôme x^2-4x-5 possède un discriminant égal à $\Delta_1 = 16+20 = 36$. Ses racines sont donc $x_1 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{36}}{2} = -1$.
Et donc $x^2-4x-5 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,5[$.
De même, on a $x^2-4x-3 \geqslant -3 \Leftrightarrow x^2-4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0] \cup [4,+\infty[$.

Ainsi, les deux conditions $-3 \leqslant x^2-4x-3 < 2$ sont vérifiées simultanément si et seulement si $x \in]-1,0] \cup [4,5[$. Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-1,0] \cup [4,5[$.

Signe
Un polynôme de degré 2 qui ne possède pas de racine (réelle) ne peut changer de signe, et donc est de signe constant.
C'est le signe du coefficient en x^2 qui détermine ce signe.

Danger !
Si pour $n \in \mathbf{Z}$, on a clairement

$$\lfloor x \rfloor \geqslant n \Leftrightarrow x \geqslant n,$$

il faut se méfier davantage des inégalités dans l'autre sens :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant n \Leftrightarrow x < n+1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.18

1. Si $x \leqslant y$, alors on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$, et donc $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à y, il est donc inférieur[10] à $\lfloor y \rfloor$ (qui par définition est le plus grand entier inférieur à y).
En revanche, la réciproque est fausse : $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \leqslant \lfloor 0 \rfloor$, mais on n'a pas $\frac{1}{2} \leqslant 0$.
Notons que si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, alors on a
$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \Rightarrow x < y.$$
2. La réponse est non, puisque $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 \neq 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
En revanche, on a toujours
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$
Donc soit $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, auquel cas $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, et donc $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Soit $x + y \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, et alors
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$
si bien que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
Dans tous les cas, on a bien
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

[10] Ou égal !

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.19

1. **Vrai.** En effet, si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = n$, alors $n \leqslant a < n + 1$ et $n \leqslant b < n + 1$.
Donc $-1 - n < -b \leqslant -n$ et alors en sommant les inégalités,
$$-1 < a - b < 1 \Rightarrow |a - b| < 1.$$
2. **Faux.** Par exemple si $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$, alors $|a - b| = \frac{1}{2}$ mais $\lfloor a \rfloor = 0$ et $\lfloor b \rfloor = 1$.
3. **Faux.** On a $-2 \leqslant 1$ et $(-2)^2 > 1^2$.
4. **Faux.** Si $a = 2$ et $b = -1$, alors $|a| = 2$ et $|a + b| = 1$.
5. **Vrai.** Si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$, de sorte que $a + |a| = 0$.
En revanche, si $a > 0$, alors $|a| = a$ de sorte que $a + |a| = 2a \neq 0$.
Et donc on a bien[11] $a + |a| = 0 \Leftrightarrow a \leqslant 0$.
6. **Faux.** Si $a \neq 0$ et $b = -2a$, alors $|a + | = | - a| = |a|$ alors que $b \neq 0$.
7. **Faux.** Si $x = -\frac{1}{2}$, alors $|\lfloor x \rfloor| = | - 1| = 1$, alors que $\lfloor |x| \rfloor = 0$.
On notera en revanche que la formule est vraie si $x \geqslant 0$, mais aussi si x est un entier naturel[12]
8. **Faux.** Par exemple si $x = 1$, $\lfloor x \rfloor = 1$, donc $\frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{1}{2}$, qui ne peut pas être une partie entière puisque ce n'est pas un entier.

[11] Car on a traité tous les cas : a est soit négatif ou nul, soit strictement positif.

[12] Positif ou négatif.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.20

1. ▶ Commençons par traiter le cas où $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le cas où la partie «après la virgule[13]» de x est inférieure à $0,5$.
Alors on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et donc $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Par conséquent, $\lfloor x \rfloor \leqslant x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.
Et $\lfloor x \rfloor$ étant entier, c'est donc[14] la partie entière de $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.
Or, $2\lfloor x \rfloor \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$, de sorte que $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
On a donc bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

[13] Appelée partie fractionnaire.

[14] C'est la définition de la partie entière !

Remarque

Cette relation $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ n'est pas valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, elle ne vaut que si la partie fractionnaire de x est inférieure strictement à 0.5. Par exemple elle est fausse pour $x = 0.5$ ou $x = 0.75$.

▶ Traitons à présent le cas où $x - \lfloor x \rfloor \geqslant \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire où $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Alors $\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \dfrac{3}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$.
Puisque $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier, c'est donc la partie entière de $x + \dfrac{1}{2}$.
Et donc $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
D'autre part, on a $2\lfloor x \rfloor + 1 \leqslant 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.
Ceci prouve qu'on a bien la relation annoncée : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

2. On a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Et donc après multiplication par $n > 0$,

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Par conséquent, $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n$. En divisant par n, il reste

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par définition d'une partie entière, on a donc $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Détails
La première inégalité vient du fait que $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à nx. Or $n\lfloor x \rfloor$ est un tel entier, donc est inférieur à $\lfloor nx \rfloor$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.21

1. Puisque $-4 \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 = n - 4$.
De même, on a $2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2(n+1) - 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2n + 1$.
▶ Si $x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2}\right[$, alors $2n \leqslant 2x < 2n + 1$ et donc $2n - 1 \leqslant 2x - 1 < 2n$, de sorte que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n - 1$.
▶ En revanche, si $x \in \left[n + \dfrac{1}{2}, n + 1\right[$, alors

$$2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2 \Leftrightarrow 2n \leqslant 2x - 1 < 2n + 1 \Rightarrow \lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n.$$

2. Supposons que x soit une solution de l'équation, et soit donc $n = \lfloor x \rfloor$.
▶ **Si** $x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2}\right[$, alors d'après ce qui précède, on a

$$\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \Leftrightarrow n - 4 = 2n - 1 \Leftrightarrow n = -3.$$

Donc les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ et qui sont solutions de l'équation sont ceux tels que $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = -3 \\ x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x < -2 \\ x < -3 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leqslant x < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-3, -\dfrac{5}{2}\right[$. ▶ **Si** $x \in \left[n + \dfrac{1}{2}, n + 1\right[$, alors

$$\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \Leftrightarrow n - 4 = 2n \Leftrightarrow n = -4.$$

Comme précédemment, ceci prouve que les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor \geqslant \frac{1}{2}$ et qui sont solutions de l'équation sont ceux tels que

$$\begin{cases} -4 \leqslant x < -3 \\ x \geqslant -4 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leqslant x < -3 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, -3\right[.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ est $\left[-\frac{7}{2}, -3\right[\cup \left[-3, -\dfrac{5}{2}\right[= \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.22

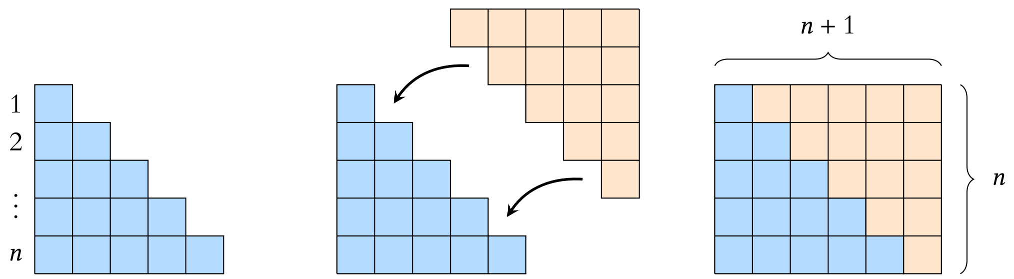
1. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: «il existe deux entiers naturels a_n et b_n vérifiant $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$».
Pour $n = 1$, il suffit de prendre $a_n = 2$ et $b_n = 1$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient a_n et b_n deux entiers naturels tels que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$. Alors
$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right) = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &= 2a_n + 3b_n + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}.\end{aligned}$$
Donc si on pose $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$, nous avons là évidemment deux entiers naturels, tels que $\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$.
Et de plus, on a alors
$$3b_{n+1}^2 = 3(a_n+2b_n)^2 = 3a_n^2 + 12a_nb_n + 12b_n^2 = 3a_n^2 + 12a_nb_n + 4(a_n^2-1) = 7a_n^2 + 12a_nb_n - 4$$
et $a_{n+1}^2 - 1 = (2a_n+3b_n)^2 - 1 = 4a_n^2 + 12a_nb_n + 9b_n^2 - 1 = 4a_n^2 + 12a_nb_n + 3(a_n^2-1) - 1 = 7a_n^2 + 12a_nb_n - 4$ et donc $3b_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - 1$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2. Puisque $3b_n^2 = a_n^2 - 1$, on a donc $\sqrt{3}b_n = \sqrt{a_n^2 - 1}$.
En particulier, $\sqrt{3}b_n < a_n$.
Par ailleurs, $(a_n - 1)^2 = a_n^2 + 1 - 2a_n \leqslant a_n^2 - 1$
Et donc $3b_n^2 \geqslant (a_n-1)^2$ et donc $\sqrt{3}b_n \geqslant a_n - 1$.
Nous venons donc de prouver que $a_n - 1 \leqslant \sqrt{3}b_n < a_n$, et donc que $\left\lfloor \sqrt{3}b_n \right\rfloor = a_n - 1$. Et donc $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = \left\lfloor a_n + \sqrt{3}b_n \right\rfloor = a_n + \left\lfloor \sqrt{3}b_n \right\rfloor = a_n + a_n - 1 = 2a_n - 1$, qui est donc un entier impair.

Détails
La seconde inégalité vient du fait que $a_n \geqslant 1$, ce qui se prouve aisément par récurrence en notant que $a_1 = 2$ et que pour tout p, $a_{p+1} = 2a_p + 3b_p$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.23

Si $u_n = k$ cela signifie que $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ ont pris au moins toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, les derniers termes avant u_n pouvant éventuellement être égaux à k.
Or, pour prendre toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, il a fallu au moins $1 + 2 + \cdots + (k-1)$ termes, de sorte que $n \geqslant 1 + 2 + \cdots + k - 1$.
Souvenons-nous alors d'une formule rencontrée en première : pour k entier naturel, $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
La preuve que vous en avez sûrement donnée au lycée est assez simple : si on note S cette somme, alors on a à la fois $S = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$ et $S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$.
En sommant ces deux relations, il vient
$$2S = \underbrace{1+n}_{=n+1} + \underbrace{2+(n-1)}_{=n+1} + \cdots + \underbrace{n-1+2}_{=n+1} + \underbrace{n+1}_{=n+1} = n(n+1).$$
Et donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Encore plus simple est la preuve[15] géométrique suivante :



Cette formule nous donne donc en particulier $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \dfrac{(k-1)k}{2}$.
Ceci signifie que le premier terme de la suite qui porte le numéro k est le terme d'indice $\dfrac{(k-1)k}{2} + 1$ et que le dernier portant le numéro k est le terme d'indice

[15] Un dessin n'est pas une preuve !
Mais ce dessin suffit à lui tout seul à expliquer pourquoi on a envie de faire les calculs ci-dessus, ce dont je vous laisse vous convaincre.

$1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.
Ainsi, on a $u_n = k \Leftrightarrow \dfrac{(k-1)k}{2}+1 \leqslant n < \dfrac{k(k+1)}{2}+1$.
Or, $\dfrac{k(k+1)}{2}+1 > n \Leftrightarrow k(k+1)+2 > 2n \Leftrightarrow k^2+k+2-2n > 0$.
À n fixé, il s'agit ici d'une expression polynomiale en k, dont le discriminant est $8n-7$, et dont les racines sont $k_1 = \dfrac{-1-\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k_2 = \dfrac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

Remarque
Nous avons délibérément ignoré k_1 car il est négatif, et nous ne intéressons ici qu'aux k positifs.

Et donc $k^2+k+2-2n > 0$ si et seulement si $k > \dfrac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
De même, on a $\dfrac{k(k-1)}{2}+1 \leqslant n \Leftrightarrow k^2-k+2-2n \leqslant 0$ si et seulement si $k \leqslant \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Or, $\dfrac{-1+\sqrt{8n-7}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} - 1$.
Et donc $u_n = k$ si et seulement si $k \leqslant \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ et $k+1 > \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.
Puisque k est entier, nous reconnaissons là la définition d'une partie entière :

$$u_n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

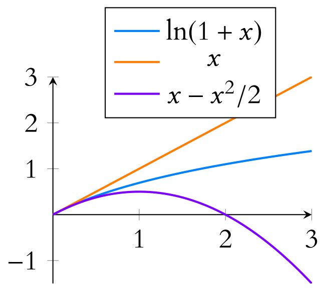
SOLUTION DE L'EXERCICE 1.24

Puisque toutes les quantités qui interviennent dans l'énoncé dépendent toutes de x^2, nous allons plutôt prouver que pour tout $X \in \mathbf{R}_+$, $X - \dfrac{X^2}{2} \leqslant \ln(1+X) \leqslant X$.
En effet, une fois ces inégalités prouvées, pour $x \in \mathbf{R}$, en posant $X = x^2 \geqslant 0$, il viendra alors

$$X - \frac{X^2}{2} \leqslant \ln(1+X) \leqslant X \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2.$$

Prouvons donc séparément les deux inégalités $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$ et $\ln(1+x) \leqslant x$.
Pour la première définissons une fonction f sur $\mathbf{R}_+$ en posant $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$.
Alors f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} = \dfrac{x^2}{1+x}$.
Et donc pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, de sorte que f est croissante sur $[0,+\infty[$.
Puisque de plus, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$



Pour prouver l'autre inégalité, définissons une fonction g sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.
Alors g est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$.
On en déduit que g est décroissante sur $\mathbf{R}_+$, et puisque $g(0) = 0$, il vient donc, pour tout $x \geqslant 0$,

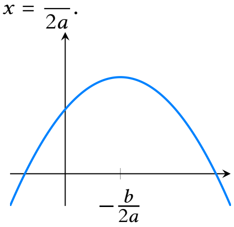
$$g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x.$$

En résumé, on a bien, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
Alternative : si on n'avait pas vu que tout dépend de x^2, on peut aussi tout simplement étudier les fonctions $x \mapsto \ln(1+x^2) - x^2$ et $x \mapsto \ln(1+x^2) - x + \dfrac{x^2}{2}$ sur $\mathbf{R}$ tout entier. Les calculs de dérivées et études de variations ne coûtent guère plus cher, et on constate que ces fonctions admettent respectivement un maximum et un minimum en 0, et que ces deux extrema sont nuls, ce qui conduit comme ci-dessus aux inégalités désirées.

Rappel
Une fonction de la forme

$$ax^2+bx+c,\quad a<0$$

admet un maximum en $x = \dfrac{-b}{2a}$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 1.25

1. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2, de coefficient en x^2 négatif : elle admet donc un maximum en $x = \dfrac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

2. Commençons par noter que puisque $a \geqslant 0$ et $1-c \geqslant 0$, alors $a(1-c) \geqslant 0$. Et de même pour $b(1-a)$ et $c(1-b)$.
On a alors
$$a(1-c) \times b(1-a) \times c(1-b) = a(1-a)b(1-b)c(1-c).$$
Or d'après la question précédente, les trois nombres $a(1-a)$, $b(1-b)$ et $c(1-c)$ sont inférieurs à $\frac{1}{4}$.
Et donc, puisqu'ils sont positifs, leur produit est inférieur à $\frac{1}{4^3}$.

Supposons par l'absurde que les trois nombres $a(1-c)$, $b(1-a)$ et $c(1-b)$ soient supérieurs strictement à $\frac{1}{4}$.
Alors leur produit $a(1-a)b(1-b)c(1-c)$ est supérieur strictement à $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, ce qui est absurde.

Donc nécessairement, l'un **au moins**[16] des trois réels $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.

[16] Il se peut tout à fait que deux d'entre eux, voire les trois soient inférieurs à $\frac{1}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.26

Comme indiqué, procédons par récurrence sur n.
Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété «$\forall t \in [0,1],\ 1-nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \frac{1}{1+nt}$».

Initialisation. Soit $t \in [0,1]$. On a évidemment $1-t \leqslant (1-t)^1$ et
$$1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow (1-t)(1+t) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1-t^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow t^2 \geqslant 0$$
ce qui est évidemment vrai.
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Supposons à présent que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soit $t \in [0,1]$.
On a donc $(1-t)^n \geqslant 1-nt$, ce qui après multiplication par $1-t$ donne $(1-t)^{n+1} \geqslant (1-t)(1-nt)$. Mais
$$(1-t)(1-nt) = 1-(n+1)t + \underbrace{nt^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1-(n+1)t.$$

Détails
Notons que puisque $t \in [0,1]$, on a bien $1-t \geqslant 0$, et donc le sens de l'inégalité ne change pas après multiplication par $1-t$.

Et donc $(1-t)^{n+1} \geqslant 1-(n+1)t$.
D'autre part, par hypothèse de récurrence, $(1-t)^n \leqslant \frac{1}{1+nt}$ et $1-t \leqslant \frac{1}{1+t}$.
Donc en multipliant ces deux inégalités[17],
$$(1-t)^{n+1} \leqslant \frac{1}{1+nt}\frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)t+t^2} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)t}.$$
La proposition est donc vérifiée au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$ et quel que soit $t \in [0,1]$,
$$1-nt \leqslant (1-t)^n \leqslant \frac{1}{1+nt}.$$

[17] Formées de nombres positifs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.27

1. La solution la plus simple est probablement une étude de fonction : la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ atteint son minimum en $x = 1$.
Une autre solution est la suivante : pour $x > 0$,
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0.$$

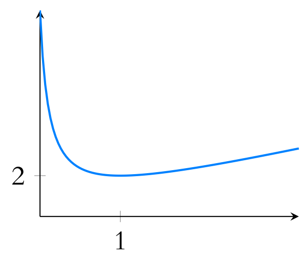


FIGURE 1.3– $x \mapsto x + \frac{1}{x}$

2. Comme indiqué, procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, en notant $\mathscr{P}(n)$ la propriété : «pour tous réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$».

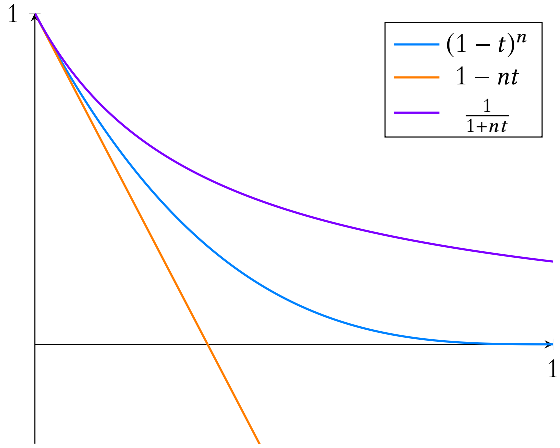


FIGURE 1.2 – Ici, $n = 3$.

Pour $n = 1$, si $a_1 \in \mathbf{R}_+^*$, alors $a_1 \times \dfrac{1}{a_1} = 1 = 1^2$.
Supposons donc la propriété vraie au rang n, et soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels strictement positifs.
Alors

$$\begin{aligned}
(a_1 + \cdots + a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}}\right) &= (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) + (a_1 + \cdots + a_n)\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1}\frac{1}{a_{n+1}} \\
&\geqslant n^2 + 1 + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{n+1}}}_{\geqslant 2} + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{n+1}}}_{\geqslant 2} + \cdots + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}}_{\geqslant 2} \\
&\geqslant n^2 + 1 + 2n \\
&\geqslant (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Dans la première question, il est aisé de constater[18] que $x + \dfrac{1}{x} = 2$ si et seulement si $x = 1$.
Prouvons alors que pour tout n, quels que soient les réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$, on a $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) = n^2$ si et seulement si tous les a_i sont égaux.
Si tous les a_i sont égaux, alors $a_1 + \cdots + a_n = na_1$ et $\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n}{a_1}$, si bien que

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = n^2.$$

Inversement, supposons que $a_1, \dots, a_n$ soient des réels strictement positifs tels que $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) = n^2$.
En reprenant les calculs de la question précédente, aucune des inégalité $\dfrac{a_i}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_i}$ ne peut être stricte, faute de quoi on aurait à la fin une inégalité stricte $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) < n^2$.
Donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{a_i}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_i} = 2$, si bien que $\dfrac{a_i}{a_n} = 1 \Leftrightarrow a_i = a_n$.
Et donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Au final, on a donc $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right) = n^2$ si et seulement si tous les a_i sont égaux.

[18] Quelle que soit la méthode employée parmi les deux proposées.

Rappels et compléments sur les fonctions numériques

2

Dans ce chapitre, contenant beaucoup de rappels du lycée, parfois agrémentés de preuves non données au lycée, on ne considère que des fonction numériques, c'est-à-dire qui à un réel associent un autre réel.

2.1 Un peu de vocabulaire

2.1.1 Domaine de définition

Si $\mathscr{D}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, une fonction f définie sur $\mathscr{D}$ permet d'associer à chaque réel x de $\mathscr{D}$ un unique réel, noté $f(x)$.

L'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a bien un sens est appelé **domaine de définition de** f.

Nom des variables
La variable x est une variable dite **muette**, et on peut changer son nom à loisir : les notations $x \mapsto x^2$, $t \mapsto t^2$ et $\alpha \mapsto \alpha^2$ désignent la même fonction.

Exemple 2.1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$.
Alors $f(x)$ n'a de sens que si $(x-1)(x+2) \geqslant 0$. Un tableau de signe[1] nous informe que c'est le cas si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
Donc le domaine de définition de f est $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

[1] Ou un résultat bien connu sur le signe des polynômes de degré 2.

Si f est définie sur $\mathscr{D}$, on note alors

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

⚠ On notera bien la différence subtile entre les deux flèches : la première, sans barre verticale, signifie que f est définie sur $\mathscr{D}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Autrement dit, qu'à tout élément de $\mathscr{D}$, elle associe un élément de $\mathbf{R}$.
La seconde flèche, avec une barre verticale, signifie que f associe le réel $f(x)$ au réel x.

Exemple 2.2

Des quatre notations suivantes, une seule[2] a un sens, laquelle ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longmapsto & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longmapsto & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

[2] C'est la seconde.

On veillera également à ne pas confondre la **fonction** f et le **nombre** $f(x)$. Par exemple si f est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \mapsto x^2$, alors on peut dire «f est dérivable» mais pas «$f(x)$ est dérivable», la notion de dérivabilité n'ayant de sens que pour les fonctions, pas pour les nombres.

Définition 2.3 – Si f est une fonction définie sur $\mathscr{D}$, et si $A \subset \mathscr{D}$ est une partie[3] de $\mathscr{D}$, on appelle **restriction de f à A** et on note $f_{|A}$ la fonction dont l'ensemble de définition est A et définie par $f_{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
Autrement dit, $f_{|A}$ prend les mêmes valeurs que f, mais n'est définie que sur A.

[3] Pour le dire avec les mains : «un ensemble plus petit que $\mathscr{D}$». La définition rigoureuse sera donnée au prochain chapitre.

Exemple 2.4

La fonction cos n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbf{R}$.
En revanche, la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ est décroissante, car sa dérivée, qui est $-\sin_{|[0,\pi]} : \underbrace{x}_{\in[0,\pi]} \mapsto -\sin(x)$ est négative sur $[0,\pi]$.

Comme dans l'exemple ci-dessus, le vocabulaire de restriction permet de reformuler des propriétés qu'il est aussi possible de décrire sans parler de restriction.
Et donc au lieu de dire f est *#jenesaisquoi* <u>sur A</u>, on peut dire que $f_{|A}$ est *#jenesaisquoi*, où *#jenesaisquoi* peut être «continue», «décroissante», «dérivable», etc.

2.1.2 Opérations sur les fonctions

On dit que deux fonctions f et g sont égales, et on note $f = g$ si :

1. elles ont le même domaine de définition
2. elles prennent la même valeur en tout point de leur domaine de définition

Par exemple, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (\sqrt{x})^2 \end{array} \right.$ coïncident bien sur $\mathbf{R}_+$, mais n'ont pas le même ensemble de définition, donc ne sont pas égales.
On a tout de même $f_{|\mathbf{R}_+} = g$.
En revanche, si $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array} \right.$, alors $f = h$.

Si f est définie sur $\mathscr{D}$, alors pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on note λf la fonction définie sur le même ensemble $\mathscr{D}$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
Si f ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$, alors $\frac{1}{f}$ désigne la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Enfin, pour $n \in \mathbf{N}$, on note f^n la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $(f^n)(x) = f(x)^n$.

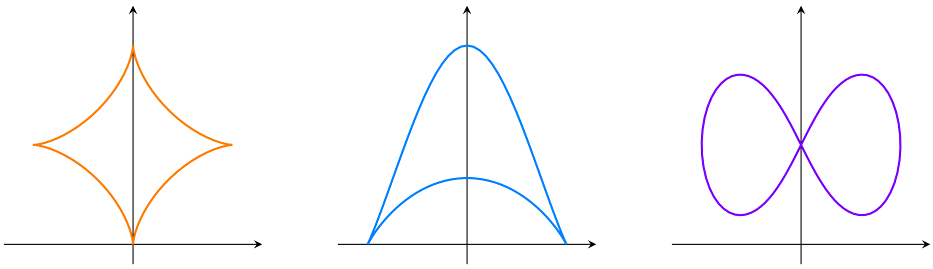
Si f et g sont deux fonctions définies sur le **même** ensemble $\mathscr{D}$, alors on note :

- $f + g$ la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- fg la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- si g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$, $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

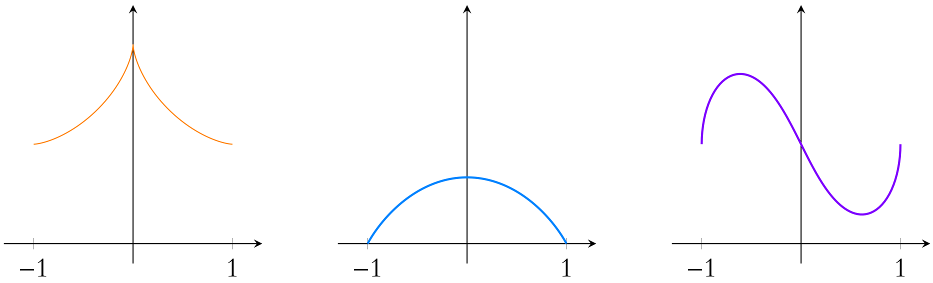
2.1.3 Graphe d'une fonction, image, antécédent

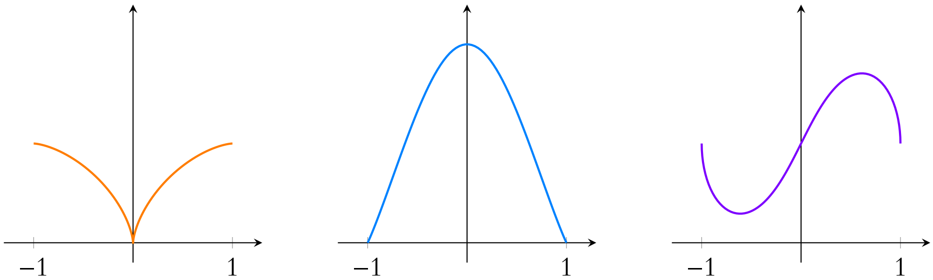
Définition 2.5 – Si f est une fonction définie sur $\mathscr{D}$, le **graphe de f** ou **courbe représentative de f** est l'ensemble $\mathscr{C}_f$ des points du plan de coordonnées (x,y) où $x \in \mathscr{D}$ et $y = f(x)$.

À $x \in \mathscr{D}$ fixé, il y a un et un seul point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x : c'est le point de coordonnées $(x, f(x))$.
Ceci impose notamment que toute courbe ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction : seules les courbes qui rencontrent une et une seule fois chaque droite verticale (d'abscisse dans $\mathscr{D}$) peuvent représenter une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
Par exemple, les courbes suivantes ne sont pas des courbes représentatives de fonctions :



En revanche, les courbes suivantes représentent bien des fonctions fonctions définies sur $[-1, 1]$:





Définition 2.6 – Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}$.
Si $x \in \mathbf{R}$, on dit que $f(x)$ est **l'image de x par f**.
Si $x \in \mathcal{D}$ et $y \in \mathbf{R}$ sont tels que $y = f(x)$, on dit que x **est un antécédent de y par f.**

Attention !
Un élément de $\mathcal{D}$ possède toujours une et une seule image par f, mais en revanche un réel peut avoir plusieurs antécédents par f. Ou aucun.
Par exemple si $f : x \mapsto x^2$, alors 2 possède une seule image par f, qui vaut $2^2 = 4$. Mais 4 possède deux antécédents par f, qui sont -2 et 2.
Et -3 ne possède aucun antécédent par f : il n'existe pas de réel x tel que $x^2 = -3$.

Notons que y est l'image de x par f si et seulement si x est **un** antécédent de y par f.

Exemple 2.7

Si f désigne la fonction cosinus, alors $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, de sorte que $\frac{1}{2}$ est l'image de $\frac{\pi}{3}$ par f.
Et donc $\frac{\pi}{3}$ est un antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction f.
Mais puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$ est également un antécédent de $\frac{1}{2}$ par f.

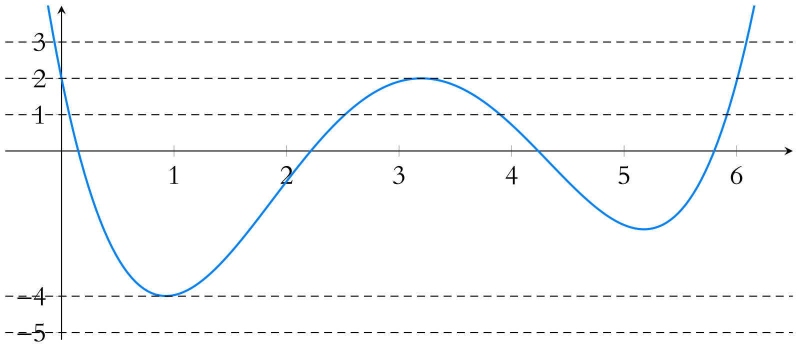
La lecture graphique d'image et d'antécédent doit déjà vous être familière, mais rappelons tout de même rapidement comment procéder :

- l'image de a par f est l'ordonnée de l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite[4] d'équation $x = a$
- les antécédents de b par f, s'il en existe, sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite[5] d'équation $y = b$.

Sur la figure ci-dessous, 3 possède deux antécédents par f, 2 possède trois antécédents (dont 0 et 6), 1 possède quatre antécédents, -4 possède un unique antécédent qui est -1 et -5 ne possède aucun antécédent.
De plus, 2 est l'image de 0 et de 6, -4 est l'image de -1.

[4] Verticale.

[5] Horizontale.



Définition 2.8 – Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$. On appelle **image de** f l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in \mathscr{D}\}.$$

Autrement dit, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des valeurs prises par la fonction f, ou encore l'ensemble des réels qui possèdent un antécédent par f.

2.1.4 Composée de deux fonctions

Définition 2.9 – Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. On dit que f est **à valeurs dans un ensemble** A si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \in A$.

On peut alors noter $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ au lieu de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$

Autrement dit
De manière équivalente, f est à valeurs dans A si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset A$.

Exemple 2.10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.
Son dénominateur est de discriminant négatif, donc ne s'annule jamais, de sorte que f est définie sur $\mathbf{R}$, et dérivable car quotient de deux fonctions dérivables.
Sa dérivée est alors donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Il est alors facile de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

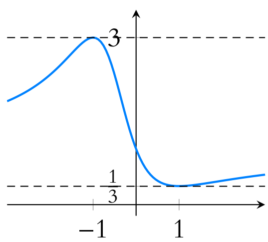


FIGURE 2.1– Le graphe de f.

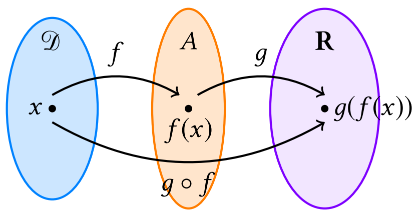
Ainsi, f est à valeurs dans $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 3$.
Notons qu'il est également vrai que f est à valeurs dans $[0, 4]$ ou dans n'importe quel autre ensemble contenant $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Définition 2.11 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans A, et soit g une fonction définie sur A.
On appelle alors **composée de g et f** la fonction notée $g \circ f$, définie sur $\mathscr{D}$ par

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

On a donc pour $x \in \mathscr{D}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Notons qu'il est indispensable que f prenne ses valeurs dans l'ensemble de définition de g, afin que $g(f(x))$ soit bien défini.



Exemples 2.12

▸ Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. Alors $g \circ f$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1}$.

▸ Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$.
Alors les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux définies sur $\mathbf{R}$, et on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = e^{x^2} \text{ et } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}.$$

▸ Il est également possible de composer plus de deux fonctions. Par exemple si

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right. \text{ et } g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a $(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(x+1) = f\left((x+1)^2\right) = (x+1)^2 + 1$ et $(g \circ f \circ f)(x) = g(f(x+1)) = g(x+2) = (x+2)^2$.

☠ Danger !
Nous avons ici un exemple où $f \circ g \neq g \circ f$, on veillera donc bien à l'ordre dans lequel sont écrites les fonctions dans une composée (on dit que la composition n'est pas commutative).
La fonction la plus à droite est celle que l'on applique en premier à la variable.

Proposition 2.13 (Associativité de la composition) : *Si $f : \mathscr{D} \to A$, $g : A \to B$, $h : B \to \mathbf{R}$ sont trois fonctions, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Notation
Les parenthèses étant inutiles, on note alors $h \circ g \circ f$ la composée des trois fonctions.

Démonstration. Les deux fonctions $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même ensemble de départ $\mathscr{D}$. Et pour $x \in \mathscr{D}$,

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

Donc $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

2.1.5 Fonctions monotones

Définition 2.14 (Fonction monotone) – Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. On dit que f est :
▸ **croissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.

- **strictement croissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.
- **décroissante** sur $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
- **strictement décroissante** sur $\mathscr{D}$ si pour tous x, y dans $\mathscr{D}$, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.
- **monotone** sur $\mathscr{D}$ si elle est soit croissante, soit décroissante.
- **strictement monotone** sur $\mathscr{D}$ si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Autrement dit
Une fonction décroissante est une fonction qui inverse le sens des inégalités.

Remarques. ▸ Une fonction peut n'être ni croissante ni décroissante. Par exemple, la fonction cosinus n'est ni croissante ni décroissante sur **R**. Mais elle est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$.
▸ Une fonction peut être à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I, mais c'est le cas si et seulement si elle est constante.
En revanche, une fonction ne peut pas[6] être à la fois strictement décroissante et strictement croissante.
▸ La fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$, elle est décroissante sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$, car $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.
Notons que c'est ceci qui justifie qu'on change le sens des inégalités lorsqu'on passe à l'inverse dans une inégalité dont les deux membres sont de même signe, mais pas pour des membres de signes opposés.

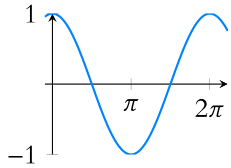


FIGURE 2.2– La fonction cos.

[6] Sauf si son ensemble de définition ne contient qu'un seul nombre.

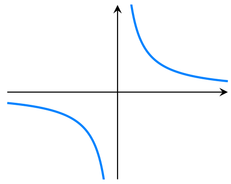


FIGURE 2.3– La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Il est assez facile de se convaincre que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante), et que si l'une d'entre elles est strictement croissante, alors la somme est strictement croissante.
Le produit de deux fonctions monotones nécessite un peu plus de précautions, car on ne peut multiplier terme à terme que des inégalités dont tous les termes sont positifs. Par conséquent, nous n'énoncerons pas de règle pour la monotonie d'un produit, et il faudra réfléchir au cas par cas.

Proposition 2.15 : *Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow A$ et $g : A \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions monotones sur leurs ensembles de définition. Alors $g \circ f$ est aussi monotone, et elle est :*

- *croissante si f et g ont même sens de variation*
- *décroissante si f et g ont des sens de variation opposés.*

Si de plus f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est également strictement monotone.

Déjà vu
Si vous n'avez pas encore remarqué l'analogie avec la règle des signes, je vous laisse méditer sur le tableau ci-dessous.

f \ g	↗	↘
↗	↗	↘
↘	↘	↗

Démonstration. ▸ Si f et g sont croissantes, alors pour $x \leqslant y$ deux éléments de $\mathscr{D}$, on a, par croissance de f, $f(x) \leqslant f(y)$, et donc par croissance de g,

$$g(f(x)) \leqslant g(f(y)) \Leftrightarrow (g \circ g)(x) \leqslant (g \circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est croissante.
▸ Si f est croissante et g décroissante, alors pour $x \leqslant y$ deux éléments de $\mathscr{D}$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ et donc $g(f(x)) \geqslant g(f(y)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \geqslant (g \circ f)(y)$. Et donc $g \circ f$ est décroissante.
▸ Les deux autres cas se traitent de la même manière.
▸ Enfin, si f et g sont strictement monotones, alors toutes les inégalités larges ci-dessus peuvent être remplacées par des inégalités strictes. □

Exemple 2.16

Le résultat ci-dessus peut souvent épargner un calcul de dérivée si son seul but est de déterminer un sens de variation.
Par exemple, soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \end{array} \right.$

Notons alors $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^3+1 \end{array} \right.$, $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ et

$$f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$, de sorte que $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Puisque f_1 et f_2 sont croissantes et que f_3 est décroissante, f est décroissante[7] sur $]-1, +\infty[$.

[7] Et même strictement décroissante puisque f_1, f_2, f_3 sont strictement monotones.

L'inverse d'une fonction croissante f n'est pas toujours décroissante !

C'est le cas seulement si f est de signe constant, car alors $\dfrac{1}{f}$ est la composée de la fonction inverse (décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$) et de f.

Revenons sur une propriété énoncée au chapitre 1, mais qui n'avait pas été démontrée :

Proposition 2.17 : *Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante (resp. décroissante). Alors quels que soient les éléments a et b dans $\mathscr{D}$, on a $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$ (resp. $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$).*

Démonstration. Nous donnons la preuve pour une fonction strictement croissante.
Le sens $a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$ découle directement de la définition de la croissance.
Pour l'implication réciproque, remarquons que si $a > b$, alors $f(a) > f(b)$ par stricte croissance de f.
Et donc si $f(a) \leqslant f(b)$, nécessairement, $a \leqslant b$, d'où l'équivalence annoncée. □

2.1.6 Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 2.18 – Un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}$ est **symétrique** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, son opposé $-x$ appartient encore à $\mathscr{D}$.

Exemples 2.19

- $\mathbf{R} =]-\infty, +\infty[$, $[-2, 2]$ et $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ sont symétriques.
- En revanche, $\mathbf{R}_+$ ne l'est pas car $1 \in \mathbf{R}_+$ mais $-1 \notin \mathbf{R}_+$.

Définition 2.20 – Soit f une fonction définie sur un ensemble symétrique $\mathscr{D}$. On dit que f est

- **paire** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$
- **impaire** si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Remarque. Si f est impaire, et si $0 \in \mathscr{D}$, alors on a

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Cela signifie notamment que $\mathscr{C}_f$ contient toujours le point $(0, 0)$.

Astuce
Une trivialité qu'il est parfois utile d'avoir à l'esprit : le seul nombre égal à son propre opposé est 0.

Exemples 2.21

- La fonction $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbf{R}$ car $(-x)^2 = x^2$.
- La fonction $t \mapsto t^3$ est impaire sur $\mathbf{R}$ car $(-t)^3 = -t^3$.
- Plus généralement, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $(-x)^n = (-1)^n x^n$, de sorte que $x \mapsto x^n$ est paire si n est un entier pair et impaire si n est un entier impair.
- La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.
- La fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^4+1}}}$ est paire.

La raison en est que $f : x \mapsto x^2$ est paire, et que $h = g \circ f$, où $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t + \frac{1}{t^2+1}}}$.

Alors il vient $h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x)$.

Plus généralement
Si f est une fonction paire, alors $g \circ f$ est toujours paire, quelle que soit g.
Ceci ne vaut plus pour les fonctions impaires (je vous laisse vous en convaincre).

⚠ Contrairement aux entiers naturels, une fonction n'est pas soit paire, soit impaire, elle peut tout à fait n'être ni l'une ni l'autre. C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$, pour laquelle $f(1) = 0 \neq \pm f(-1)$.
Pour prouver qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, mieux vaut exhiber un x pour lequel on a $f(-x) \neq \pm f(x)$.
Le fait de ne pas voir que deux quantités sont égales, parce qu'elles sont écrites sous deux formes différentes, ne donne pas le droit d'affirmer qu'elles ne sont pas égales !

Exemple
Les deux nombres
$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} \text{ et } \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
sont égaux, mais ça ne saute pas aux yeux !

Par exemple, considérons la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array} \right.$.

On a alors $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, qui ne peut pas être égal à $-f(x)$ pour des raisons de signe, et n'a pas l'air d'être égal à $f(x)$. Donc f ne doit être ni paire, ni impaire.
Mais ce «n'a pas l'air d'être égal» est bien flou, et en réalité

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x(1+e^{-x}))^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$$

de sorte que, contrairement aux apparences, f est une fonction paire.

Définition 2.22 – Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ et soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.
On dit que f est **périodique de période** T, ou T**-périodique**, si

1. pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + T$ et $x - T$ sont encore dans $\mathcal{D}$
2. pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x+T) = f(x)$.

On dit alors que T est **une** période de f.

⚠ Il n'y a pas du tout unicité d'une période de f, et c'est bien pour cela que l'on dit **une** période de f et non **la** période de f.
Si T est une période de f, alors $2T, 3T$, et plus généralement tous les kT, $k \in \mathbf{N}$ sont encore des périodes de f, puisque pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x),\ f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f(x),\ \text{etc}$$

Exemples 2.23

- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
- Une fonction constante est T-périodique, pour tout $T > 0$.
- La fonction $f : x \mapsto \sin(2x-3)$ est π-périodique puisque
$$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)-3) = \sin(2x-3+2\pi) = \sin(2x-3) = f(x).$$
- La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. En effet, pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ et donc
$$f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-(\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x).$$

Terminologie
Le réel $x - \lfloor x \rfloor$ est appelé partie fractionnaire de x.
C'est la partie «après la virgule» de x.

Proposition 2.24 : *Si $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ est T-périodique, alors pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$.*

Démonstration. Par récurrence sur n pour les $n \in \mathbf{N}$.
Et si $n < 0$, il suffit de remarquer que puisque $-n \in \mathbf{N}$, on a
$$f(x+nT) = f(x+nT+(-n)T) = f(x).$$

□

Définition 2.25 – Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite **périodique** s'il existe un[8] réel T tel que f soit T-périodique.

[8] Comme mentionné précédemment, s'il existe un tel réel $T > 0$, il en existe une infinité : $2T, 3T, \ldots$

Exemple 2.26

Il n'est pas vrai qu'une fonction périodique possède une période plus petite que toutes les autres.

Considérons par exemple la fonction $\mathbb{1}_\mathbf{Q} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$

Prouvons que $\mathbb{1}_\mathbf{Q}$ est r-périodique, quel que soit le rationnel strictement positif r.
Soit donc $r \in \mathbf{Q}_+^*$, et soit $x \in \mathbf{R}$.
Si $x \in \mathbf{Q}$, alors $x + r \in \mathbf{Q}$, de sorte que $\mathbb{1}_\mathbf{Q}(x+r) = 1 = \mathbb{1}_\mathbf{Q}(x)$.
Et si $x \notin \mathbf{Q}$, prouvons que $x + r$ est lui aussi irrationnel.
Supposons par l'absurde que $x + r \in \mathbf{Q}$. Alors $x = \underbrace{(x+r)}_{\in\mathbf{Q}} - \underbrace{r}_{\in\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Donc $x + r \notin \mathbf{Q}$ et par conséquent, $\mathbb{1}_\mathbf{Q}(x+r) = 0 = \mathbb{1}_\mathbf{Q}(x)$.
Ceci prouve donc bien que $\mathbb{1}_\mathbf{Q}$ est r-périodique, pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$.

Détails
La somme de deux rationnels est encore un rationnel (vous savez mettre deux fractions au même dénominateur !)

⚠ Attention !
La somme de deux rationnels est rationnelle, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle, mais il n'existe pas de règle générale pour la somme de deux irrationnels : elle est parfois rationnelle, parfois irrationnelle.

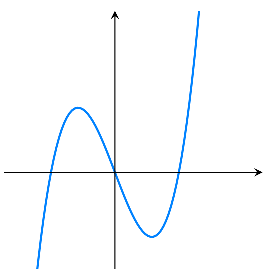
2.1.7 Majorant, minorant, extremum

Définition 2.27 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On dit que f est :

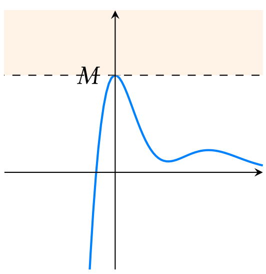
- **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant M$. Un tel M est alors appelé un **majorant de** f.
- **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant m$. Un tel m est alors appelé un **minorant de** f.
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Graphiquement, une fonction est majorée (respectivement minorée) si et seulement si son graphe est entièrement situé en dessous (resp. au dessus) d'une droite horizontale.
Elle est bornée si et seulement si son graphe est intégralement compris dans une «bande» délimitée par deux droites horizontales.

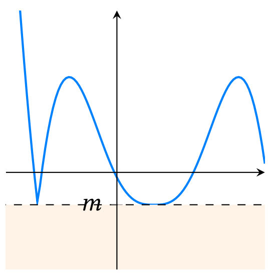
f non majorée non minorée



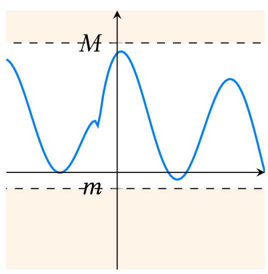
f majorée non minorée



f minorée non majorée



f bornée



Notons que si une fonction est majorée, alors elle possède une infinité de majorants. En effet, si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant M$, alors pour tout $x \in \mathscr{D}$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, $f(x) \leqslant M + \varepsilon$, de sorte que $M + \varepsilon$ est encore un majorant de f. Idem pour les minorants.

Autrement dit
Si M est un majorant de f, alors tout réel supérieur ou égal à M est également un majorant de M.

Exemples 2.28

▸ La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée (par 0) mais n'est pas majorée car elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (et donc prend des valeurs aussi grandes que l'on veut).
▸ Plus généralement, pour $k \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^k$ n'est jamais majorée, et elle est minorée

(par 0) si et seulement si k est pair.
▶ La fonction $x \mapsto 2\cos(3x) + 1$ est bornée car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$-1 \leqslant 2\cos(3x) + 1 \leqslant 3.$$

Proposition 2.29 : *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$. Alors f est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si $\operatorname{Im} f$ est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Prouvons-le pour une fonction majorée, la preuve est la même pour une fonction minorée.
Supposons donc f majorée, et soit M un majorant de f.
Alors pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant M$.
Soit alors $y \in \operatorname{Im} f$. Par définition, il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $y = f(x)$, et donc $y \leqslant M$.
Ainsi, pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, $y \leqslant M$, donc $\operatorname{Im} f$ est majorée, et M en est un majorant.

Inversement, si $\operatorname{Im} f$ est majorée par M, alors pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et donc $f(x) \leqslant M$.
Donc f est majorée par M. □

Corollaire 2.30 – *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ est bornée si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| \leqslant K$.*

Autrement dit
f est bornée, si et seulement si la fonction $|f|$ est majorée.

Démonstration. Si un tel K existe, alors pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-K \leqslant f(x) \leqslant K$, donc f est minorée (par $-K$) et majorée (par K), donc bornée.

Inversement, supposons que f soit bornée, soit m un minorant de f et M un majorant de f.
Soit $K = \max(|m|, |M|)$. On a alors, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$-K \leqslant -|m| \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M \leqslant |M| \leqslant K.$$

Rappel
Pour tout réel x,
$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Et donc en particulier, $|f(x)| \leqslant K$, de sorte que f est bien bornée. □

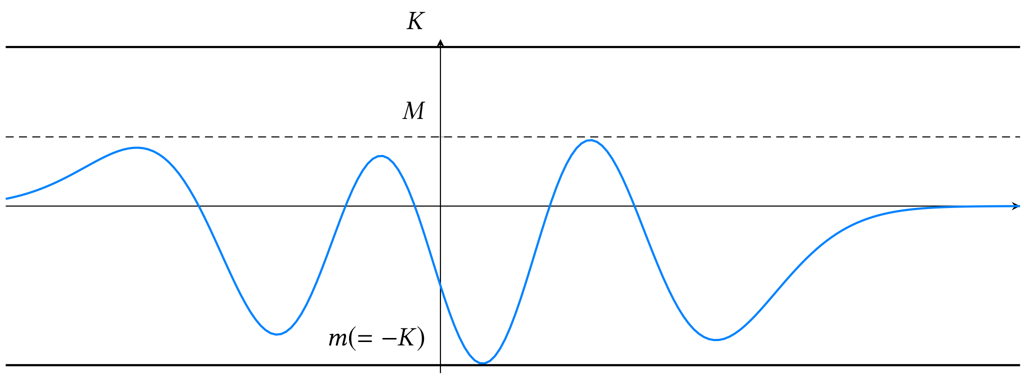


FIGURE 2.4 – Si f est comprise entre m et M, alors elle est comprise entre $-K$ et K. Ici $K = |m|$.

Définition 2.31 – Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ et soit $a \in \mathscr{D}$. On dit que f possède :

- un **maximum en** a si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f et on note alors $f(a) = \max_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ ou $f(a) = \max_{\mathscr{D}} f$.
- un **minimum en** a si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant f(a)$.
  Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f et on note alors $f(a) = \min_{x \in \mathscr{D}} f(x)$ ou $f(a) = \min_{\mathscr{D}} f$.
- un extremum en a si f possède soit un maximum, soit un minimum en a.

Remarques. ▶ Attention à la terminologie : on ne confondra pas le maximum (= la plus grande valeur prise par f) avec le point où ce maximum est atteint.
Par exemple, la fonction sin possède un maximum qui vaut 1, atteint en $\frac{\pi}{2}$. Mais ce maximum est aussi atteint en $\frac{5\pi}{2}$ et en $\frac{9\pi}{2}$.
De manière générale, un maximum ou un minimum, s'il existe, est unique[9], mais peut être atteint en plusieurs points.
▶ Si f possède un maximum, alors elle est majorée, et $f(a)$ est un majorant de f.
▶ Une fonction majorée/minorée n'admet pas forcément de maximum/minimum.
Par exemple $f : x \mapsto e^x$ est minorée par 0 (car pour tout x, $e^x \geqslant 0$), mais elle n'admet pas de minimum.
En effet, elle est strictement croissante, et donc si elle admettait un minimum en a, alors on aurait, pour tout $x < a$, $f(x) < f(a)$ contredisant la définition d'un minimum.

[9] Il y a une seule valeur plus grande que les autres.

2.2 Tracé du graphe d'une fonction

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
Autrement dit, un point de coordonnées (x, y) est dans $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $x \in \mathscr{D}$ et $y = f(x)$.
Pour ne pas trop alourdir la rédaction, nous identifions dans la suite un point avec le couple de ses coordonnées.

Rappel
Un repère orthogonal est un repère tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient de directions perpendiculaires, mais pas nécessairement de même norme (si c'est le cas, on parle de repère orthonormé).

2.2.1 Transformations d'une fonction et effet sur le graphe

On s'intéresse alors à l'effet de certaines transformations appliquées à f sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

Proposition 2.32 : *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors*

1. *la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{j}$.*
2. *la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.*

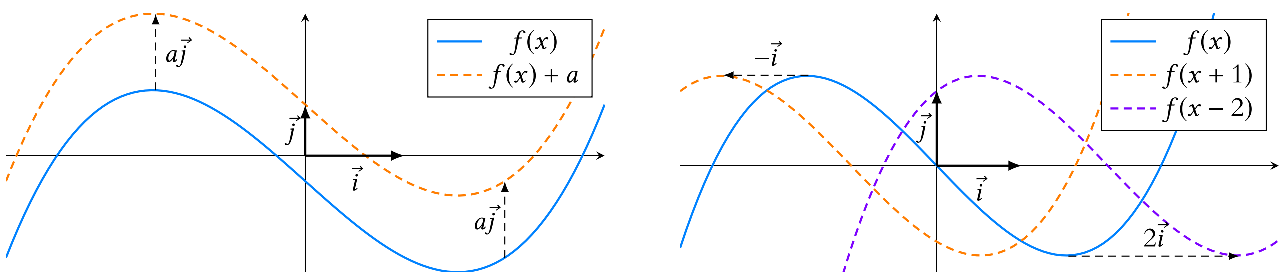


FIGURE 2.5 – Les graphes de $x \mapsto f(x) + a$ et $x \mapsto f(x + a)$ s'obtiennent en translatant $\mathscr{C}_f$.

Démonstration. 1. Notons $g : x \mapsto f(x) + a$. Alors le point de coordonnées (x, y) est dans $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$y = f(x) \Leftrightarrow y + a = f(x) + a = g(x) \Leftrightarrow (x, y + a) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(x, y + a)$ est le translaté par $a\vec{j}$ de (x, y).

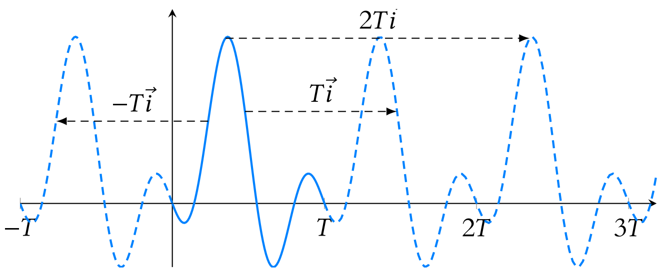
2. Notons $g : x \mapsto f(x + a)$. Alors

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x - a + a) = g(x - a) \Leftrightarrow (x - a, y) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(x - a, y)$ est le translaté par $-a\vec{i}$ de (x, y)

□

Corollaire 2.33 – *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est T-périodique, alors il suffit de connaître son graphe sur un ensemble de longueur T (par exemple $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$), puis de réaliser des translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$.*



Proposition 2.34 : *Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Alors*

1. *le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une dilatation suivant le vecteur $\vec{j}$ et de rapport a.*
2. *le graphe de $x \mapsto f(ax)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une dilatation de vecteur $\vec{i}$ et de rapport $\frac{1}{a}$.*

Dilater $\mathscr{C}_f$ suivant le vecteur $\vec{j}$ d'un rapport a signifie que pour chaque point de $\mathscr{C}_f$, on laisse sa première coordonnée inchangée, et on multiplie la seconde par a.

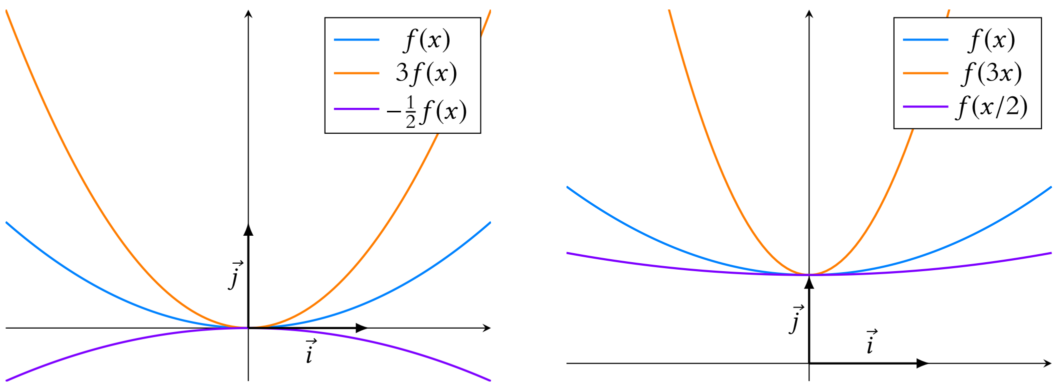


FIGURE 2.6 – Le graphe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par dilatation verticale.

Démonstration. Le premier point est évident.

Pour le second point, notons $g : x \mapsto f(ax)$. Alors on a

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f\left(a\frac{x}{a}\right) = g\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}, y\right) \in \mathscr{C}_g.$$

Or $\left(\frac{x}{a}, y\right)$ est le dilaté de (x, y) suivant le vecteur $\vec{\imath}$ et de rapport $\frac{1}{a}$. □

En particulier, le graphe de $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses[10], et le graphe de $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

[10] Cette symétrie étant la dilatation de vecteur $\vec{\imath}$ et de rapport -1.

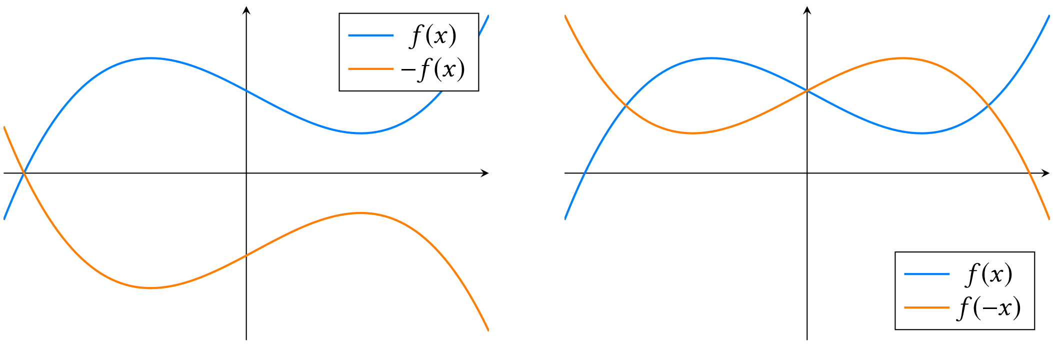


Figure 2.7 – Les graphes de $x \mapsto -f(x)$ et $x \mapsto f(-x)$ s'obtiennent à partir de $\mathscr{C}_f$ par des symétries axiales.

Enfin, le graphe de $x \mapsto -f(-x)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par une symétrie centrale de centre O (l'origine du repère). En effet, si on note $g : x \mapsto -f(-x)$, alors

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow -y = -f(-(-x)) = g(-x) \Leftrightarrow (-x, -y) \in \mathscr{C}_g.$$

Mais $(-x, -y)$ est le symétrique de (x, y) par rapport à O.

Remarque Cette symétrie centrale est d'ailleurs la composée de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses et de la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Corollaire 2.35 – *Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique. Alors*

1. *si f est paire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$*
2. *si f est impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.*

Démonstration. Si f est paire, alors f et $x \mapsto f(-x)$ sont égales, donc ont le même graphe. Or le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
On raisonne de même dans le cas où f est impaire en notant que f et $x \mapsto -f(-x)$ sont égales. □

Par conséquent, pour une fonction paire ou impaire, il suffit de tracer son graphe sur $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$, le reste de la courbe s'en déduit par symétrie.

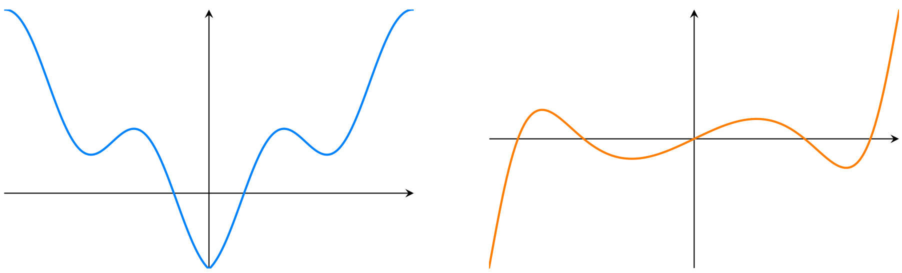


Figure 2.8 – Une fonction paire et une fonction impaire.

2.2.2 Réduction du domaine d'étude

Lorsqu'on souhaite étudier une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbf{R}$, en particulier lorsqu'on cherche à tracer son graphe, on commence par réduire autant que faire se peut le domaine sur lequel on l'étudie.
Autrement dit, plutôt que de l'étudier sur $\mathscr{D}$, on essaie[11] de se ramener à un intervalle plus petit en utilisant les éventuelles symétries que peut présenter $\mathscr{C}_f$.

[11] Rien ne dit que ce soit toujours possible !

1. Si f est périodique de période T, alors on se contente de l'étudier sur un intervalle de longueur T. Cela peut être $[0, T]$, mais on préfère généralement $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, qui a l'avantage d'être symétrique.
   Nous savons alors qu'une fois le graphe de f tracé sur cet intervalle, il nous suffira de le translater pour obtenir $\mathscr{C}_f$.
2. Si f est paire ou impaire, on restreint l'étude à $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$, il nous suffira alors d'effectuer une symétrie (axiale ou centrale).

Méthode
Pour déterminer si une fonction f est paire ou impaire, il faut calculer $f(-x)$, et voir si c'est égal (ou non) à $\pm f(x)$.

Exemple 2.36

Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4\sin(x)}{2-\cos(2x)}$.
Alors il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur un intervalle de longueur 2π, puis de translater le graphe ainsi obtenu. Par exemple, on peut se contenter d'étudier f sur $[-\pi, \pi]$.
Mais f est impaire[12], et donc il suffit de tracer le graphe sur $[0, \pi]$, et d'effectuer une symétrie par rapport à O.
La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$, et on a pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = 4\frac{\cos(x)(2-\cos(2x)) - \sin(x)2\sin(2x)}{(2-\cos(2x)^2)}.$$

Profitons-en pour rappeler quelques formules de trigonométrie :

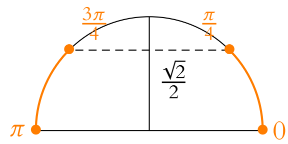
$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x) \text{ et } \cos(2x) = \cos(x+x) = 1 - 2\sin^2(x).$$

Et donc il vient

$$\begin{aligned}\cos(x)(2-\cos(2x)) - \sin(x)2\sin(2x) &= \cos(x)(2-\cos(2x)) - 4\sin(x)^2\cos(x)\\ &= \cos(x)\left(2-(1-2\sin^2(x)) - 4\sin^2(x)\right)\\ &= \cos(x)\left(1-2\sin^2(x)\right).\end{aligned}$$

Et donc, pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$1 - 2\sin^2(x) > 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) < \frac{1}{2}.$$



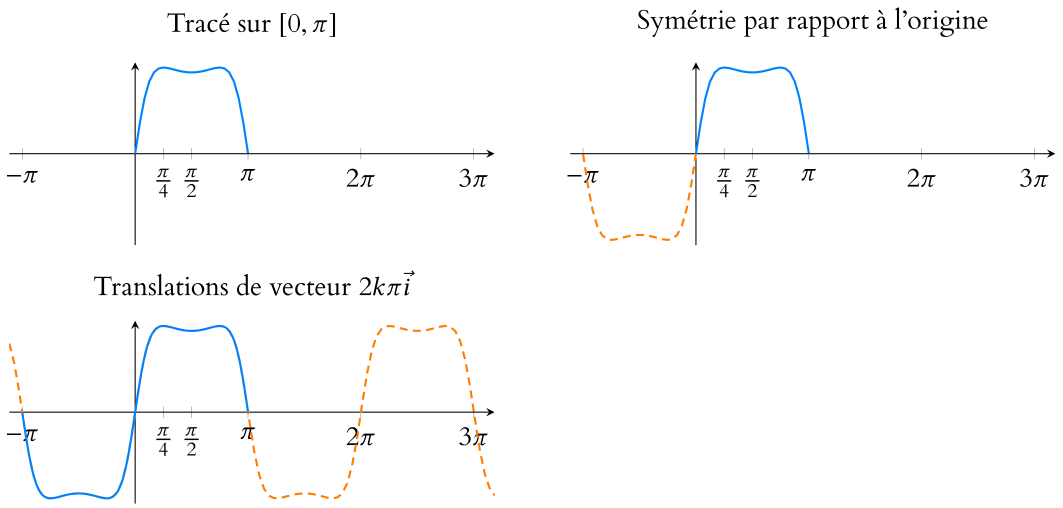
Mais sur $[0, \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ et donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

Donc le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est donné par :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-2\sin^2(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Voici donc le résumé des étapes de la construction du graphe de f :

[12] Car le numérateur est impair et le dénominateur est pair.



2.2.3 Asymptotes

Une asymptote à $\mathscr{C}_f$ est une droite qui «ressemble au voisinage de l'infini» à $\mathscr{C}_f$.

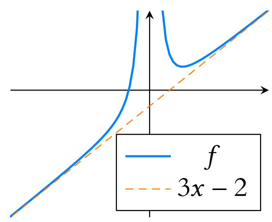
Définition 2.37 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp $-] - \infty, A]$).
La droite D d'équation $y = ax + b$ est appelée une **asymptote** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (resp . $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.
Si $a = 0$, on dit que D est une **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$, sinon on parlera **d'asymptote oblique.**

Exemple 2.38

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 3x - 2 + \dfrac{2}{x^2} \end{array} \right.$.
Alors la droite d'équation $y = 3x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x + 2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Cette même droite est également asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, par le même calcul.



Et f possède la droite horizontale d'équation $y = b$ comme asymptote si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.
En revanche, si f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} ax + b = \pm\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) + (ax + b) = \pm\infty$.

Autrement dit
Il n'y a d'asymptote horizontale que si f possède une limite finie.

Proposition 2.39 : *La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$.

Démonstration. Si la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x}}_{=0} + \lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} = a.$$

Et bien entendu, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$.

Et inversement, si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. □

Remarque. Par unicité de la limite, les formules ci-dessus prouvent qu'une asymptote, si elle existe, est unique.

La proposition précédente nous fournit une méthode pour déterminer les asymptotes : on commence par déterminer l'éventuel coefficient directeur a en calculant la limite de $\frac{f(x)}{x}$, puis, le cas échéant, l'éventuelle ordonnée à l'origine est donnée par la limite[13] de $f(x) - ax$.

[13] Si elle existe et est finie.

Exemples 2.40

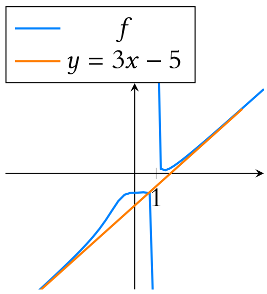
▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x^4 - 5x^3 + 3}{x^3 - 1} \end{array} \right.$. Alors pour $x \neq 1$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3x^4 - 5x^3 + 3}{x^4 - x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 3.$$

Donc une éventuelle asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ est de coefficient directeur 3. Et alors

$$f(x) - 3x = \frac{3x^4 - 5x^3 + 3 - 3x^4 + 3x}{x^3 - 1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -5.$$

Et donc $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote, aussi bien au voisinage de $-\infty$ qu'au voisinage de $+\infty$, la droite d'équation $y = 3x - 5$.



▸ Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2x + \ln(x) \end{array} \right.$.

Alors $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Mais $f(x) - 2x = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\mathscr{C}_f$ ne possède pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Autrement dit

$\mathscr{C}_f$ s'éloigne «à l'infini» de toute droite de coefficient directeur 2.

2.3 FONCTIONS CONTINUES, FONCTIONS DÉRIVABLES

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

Tous les résultats qui suivent sont admis pour l'instant (et pour la plupart ont déjà été rencontrés au lycée), mais seront démontrés proprement plus tard dans l'année.

2.3.1 Continuité

La redéfinition précise des limites et de la continuité fera l'objet d'un chapitre ultérieur, nous nous contentons donc de l'intuition de limite, et des propriétés déjà connues.

Définition 2.41 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $a \in I$. On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si f est continue en tout point $a \in I$, on dit que f **est continue sur** I.

L'intuition d'une fonction continue est que son graphe se trace «sans lever la main», l'exemple type de fonction non continue étant la partie entière.

Le point suivant, relativement intuitif, sera prouvé[14] dans un chapitre ultérieur, mais nous l'utiliserons dès à présent :

[14] Ainsi que sa réciproque.

Proposition 2.42 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Comme en terminale, nous admettons qu'une fonction dérivable sur I est continue sur I, si bien que toutes les fonctions habituelles[15] sont continues sur leur ensemble de définition.

[15] Les polynômes, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions sin et cos.

Définition 2.43 – Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,b]$ ou $]a,b[$ ou $]a,+\infty[$.
On dit que f est **prolongeable par continuité en** a si f admet une limite **finie** en a.
On appelle alors prolongement par continuité de f en a la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $[a,b]$ (ou $[a,b[$, ou $[a,+\infty[$) par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to a^+} f(t) & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction ainsi prolongée est alors nécessairement continue en a.

En pratique
On note souvent encore f (au lieu de $\widetilde{f}$) la fonction prolongée.

⚠ On ne parlera de prolongement par continuité qu'en un réel, pas en $\pm\infty$. En effet, $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des réels, il n'est donc pas question d'écrire $f(+\infty)$ ou $f(-\infty)$.

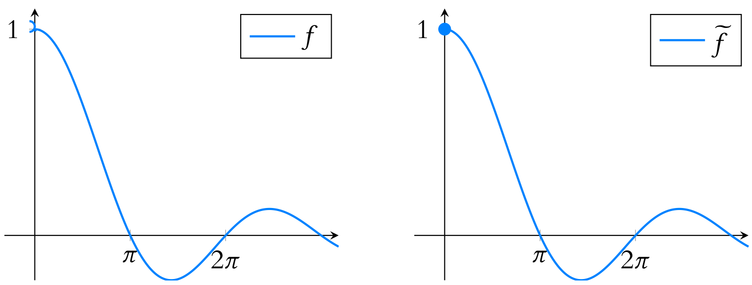
Exemple 2.44

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array} \right.$.

On a alors $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$, définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$



2.3.2 Rappels sur la dérivée

Définition 2.45 – Soit $a \in I$. On appelle **taux d'accroissement de** f **en** a la fonction

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. .$$

Si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$ existe et est finie[16], on dit que f est **dérivable** en a, et on note

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \tau_a(x).$$

Si f est dérivable en a, quel que soit $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle fonction dérivée de f la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

[16] C'est-à-dire ne vaut pas $\pm\infty$.

Exemple 2.46

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{|h|-|0|}{h-0} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$

Et donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|-|0|}{h-0}$ n'existe pas car $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|-|0|}{h} = -1$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|-|0|}{h} = 1$.

Intuition

Le graphe de la valeur absolue présente en 0 un point anguleux, et donc n'y admet pas de tangente.

Remarques. ▸ La limite définissant la dérivée peut aussi s'écrire, avec le changement de variable $x = a + h$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

▸ Notons que $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite qui relie les deux points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses a et x.
Et donc sa limite, si elle existe, doit être le coefficient directeur de ce que l'on a envie d'appeler la tangente, c'est-à-dire la droite qui «ressemble le plus à $\mathscr{C}_f$ autour de a».

Terminologie

Une droite reliant deux points de $\mathscr{C}_f$ est appelée une corde.

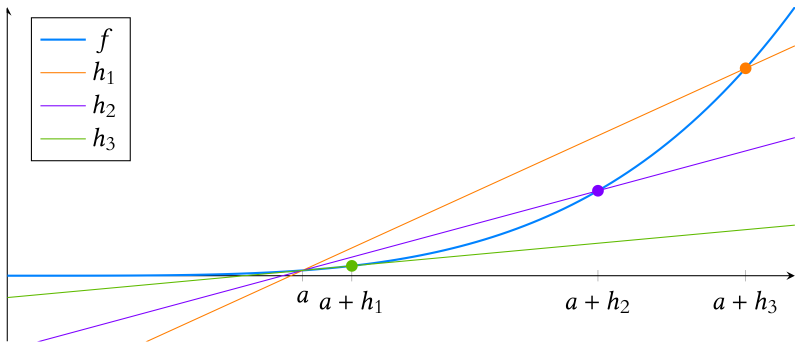


FIGURE 2.9 – Trois cordes, avec $h_1 > h_2 > h_3$. Assurément, c'est la dernière qui ressemble le plus à ce qu'on a envie d'appeler la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.

Définition 2.47 – Si f est dérivable en a, on appelle **tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse** a la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et qui passe par $(a, f(a))$.

Si f est une fonction dérivable en a, alors la tangente en $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exercice

Savez-vous retrouver cette formule à partir de la définition de la tangente ?

2.3.3 Dérivée et monotonie

Proposition 2.48 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

⚠ Il est **indispensable** que I soit un intervalle.
Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
Pourtant, nous avons déjà mentionné précédemment que f n'est pas décroissante sur $\mathbf{R}^*$.
Le problème vient évidemment du fait que $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle[17].
En revanche, $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ sont des intervalles, sur lesquels f est décroissante puisque sa dérivée y est négative.

[17] Il a un «trou» en 0.

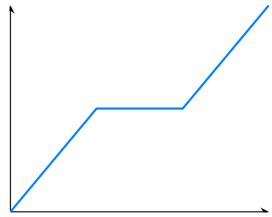
Le résultat ci-dessus peut même être précisé :

Proposition 2.49 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive (respectivement négative) sur I et ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.*

Remarque
Ceci inclus évidemment le cas où f' est strictement positive ou strictement négative.

Démonstration. Lui aussi admis pour l'instant. □

⚠ Si on enlève l'hypothèse de finitude du nombre de points d'annulation de la dérivée, alors ce résultat est faux. Je vous laisse vous en convaincre sur le dessin ci-contre.



Corollaire 2.50 – *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Il est évident que si f est constante, alors sa dérivée est nulle.
Réciproquement, si f' est nulle, alors en particulier, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante sur I.
De même, f est décroissante sur I.
Ceci signifie donc que pour tout $x, y \in I$, si $x \leqslant y$, alors on a à la fois $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(x) \geqslant f(y)$. C'est donc que $f(x) = f(y)$, et donc f est constante. □

Corollaire 2.51 – *Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I, alors elles diffèrent d'une constante. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + \lambda$.*

Autrement dit
Deux fonctions de même dérivée ne sont pas nécessairement égales, mais elles diffèrent d'une constante.

Démonstration. Soit $g : x \mapsto F_2(x) - F_1(x)$. Alors g est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Et donc g est constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$g(x) = \lambda \Leftrightarrow F_2(x) = F_1(x) + \lambda.$$

□

Exemples 2.52

▸ Soit $f : x \mapsto x^3$. Alors f est dérivable et $f' : x \mapsto 3x^2$.
Donc f' est positive, et ne s'annule qu'en 0.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
▸ Soit $g : x \mapsto x + \cos(x)$.
Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = 1 - \sin(x) \geqslant 0$.
Donc déjà g est croissante sur $\mathbf{R}$. De plus, on a

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Donc g' s'annule une infinité de fois sur $\mathbf{R}$: le résultat précédent ne s'applique pas. Mais attention : nous n'avons pas dit que sa réciproque était vraie, il n'est pas question d'en déduire que g n'est pas strictement croissante !
De fait, si $a < b$ sont deux réels, alors, sur le segment $[a, b]$, g' ne s'annule qu'un nombre fini[18] de fois.
Et donc g est strictement croissante sur $[a, b]$.
On en déduit donc que $g(a) < g(b)$. Ceci étant vrai quels que soient les réels a et b vérifiant $a < b$, nous venons de prouver que g est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ tout entier, quand bien même sa dérivée s'annule une infinité de fois.

[18] Éventuellement nul.

2.3.4 Dérivées et opérations

Toutes les formules qui suivent ont déjà été rencontrées au lycée, et seront bientôt démontrées.

Théorème 2.53 : *Soient u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u + v$ est dérivable et pour tout $x \in I$,*
$$(\lambda u + v)'(x) = \lambda u'(x) + v'(x).$$
2. *$u \times v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$(u \times v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
3. *si u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}.$$
4. *si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,*
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$

Exemples 2.54

► Soit $f : x \mapsto x\ln(x) - x$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \ln(x)$ le sont, et que $f = uv - u$.
On a alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

> **À connaître**
> Nous venons donc de trouver une primitive de la fonction ln, que nous reverrons prochainement !

► $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$.
Si on pose $u : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ et $v : x \mapsto x^2 + 1$, alors u et v sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et v ne s'y annule pas.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ car quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x-4)(x^2+1) - (x^2 - 4x + 3)2x}{(x^2+1)^2} = 4\frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)^2}.$$
Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 1$. Or il s'agit d'un polynôme de degré 2, de discriminant égal à $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$, qui possède donc deux racines qui sont
$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$
Enfin, on a
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

> **Méthode**
> Pour étudier la limite d'un quotient de polynômes en $\pm\infty$, on factorise le numérateur et le dénominateur par leurs termes de plus haut degré.

On prouve de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
Et donc le tableau de variation de f est donné par

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	1

La formule qui suit a elle aussi été rencontrée au lycée et sera prouvée plus tard.

Théorème 2.55 (Dérivée d'une composée) : *Soient I et J deux parties de $\mathbf{R}$, et soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables.*
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple 2.56

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Alors f est définie sur $[-1, 1]$, puisqu'il s'agit de la composée de $u : x \mapsto x^2 - 1$ et de $v : x \mapsto \sqrt{x}$.
En revanche, v, bien que définie sur $\mathbf{R}_+$, n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc nous ne pouvons affirmer que f n'est dérivable que là où u ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$.
Et alors $f'(x) = u'(x)v'(u(x)) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

⚠ **Attention !** Ceci ne prouve pas que f n'est pas dérivable en -1 ou en 1, le théorème précédent ne dit rien au sujet de cette dérivabilité.

Notons en particulier que si f est une fonction dérivable, alors pour tous réels a et b, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur son ensemble de définition, avec $g' : x \mapsto af'(ax+b)$.
En effet, on a $g = f \circ h$, où h est la fonction affine[19] $x \mapsto ax+b$.

[19] Donc dérivable.

Corollaire 2.57 – *Soit u une fonction dérivable sur I. Alors*

1. *pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction u^n est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(u^n)'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}$*
2. *plus généralement, pour $n \in \mathbf{Z}$, si u^n est définie[20] sur I, alors elle y est dérivable et $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.*
3. *la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$*
4. *si u ne s'annule pas sur I, $\ln(|u|)$ est dérivable, et pour tout $x \in I$, $(\ln|u|)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.*

[20] Le seul cas éventuellement problématique est celui où $n < 0$, auquel cas il faut que u ne s'annule pas sur I.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la formule $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x))$ où v est successivement la fonction $t \mapsto t^n$, $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \ln t$.
Détaillons tout de même le dernier point.
Puisque u est dérivable sur I, elle y est continue. Et elle est donc de signe constant. En effet, si elle changeait de signe sur I, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait en au moins un point, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.
Donc soit f est strictement positive sur I, et alors $\ln(|u|) = \ln(u)$, ce qui permet d'appliquer la formule pour la dérivée d'une composée.
Soit elle est strictement négative sur I, et alors $\ln(|u|) = \ln(-u)$.
Mais alors $\ln(-u)$ est dérivable par composition de fonctions dérivables, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(\ln|u|)'(x) = (\ln(-u))'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

□

Exemple 2.58

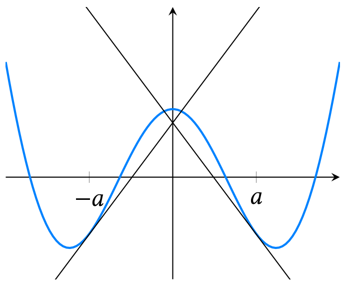
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\ln(x^2+1))^4}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
En effet, si on pose $u : x \mapsto x^2+1$, alors u est dérivable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $f = (\ln(u))^{-4}$.
Notons alors $g = \ln(u)$ qui est dérivable sur $\mathbf{R}$, avec $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Et donc $f = g^{-4}$ est dérivable avec

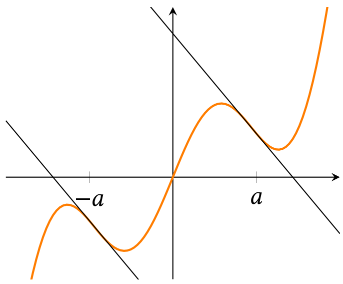
$$f'(x) = -4g'(x)g(x)^{-5} = \frac{-8x}{x^2+1}(\ln(x^2+1))^{-5} = \frac{-8x}{(x^2+1)(\ln(x^2+1))^5}.$$

Rédaction Même quand vous dérivez une fonction compliquée, inutile de faire figurer tous les calculs intermédiaires sur votre copie, seul le résultat compte (et il a donc intérêt à être bon).
Donc ici il ne serait pas utile de nommer u ou g.

Corollaire 2.59 – *Si f est une fonction paire (respectivement impaire) dérivable, alors sa dérivée est impaire (resp. paire).*

Démonstration. Supposons f paire. Alors pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = f(-x)$. En dérivant cette relation, il vient $f'(x) = -f'(-x)$.
Et donc en particulier, $f'(-x) = -f'(x)$, de sorte que f' est impaire.
On raisonne de même si f est impaire.
Je vous laisse réfléchir à la manière dont se voit le résultat sur les figures ci-dessous, où sont représentées des tangentes de fonctions paires/impaires.





□

Proposition 2.60 : *Si $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$ est dérivable et T-périodique, alors f' est également T-périodique.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x+T) = f(x)$, donc par dérivation, $f'(x+T) = f'(x)$, si bien que f' est T-périodique. □

2.3.5 Dérivées d'ordre supérieur

Il arrive fréquemment qu'une fonction f dérivable possède une dérivée qui est elle-même dérivable.
La dérivée de f' est alors appelée la **dérivée seconde** de f, et on la note f''.
Mais cette dérivée seconde peut elle aussi être dérivable, et ainsi de suite.

Définition 2.61 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note alors $f^{(0)} = f$.
Ensuite, pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $f^{(k)}$ est bien définie, et qu'elle est dérivable, alors on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est n **fois dérivable**, et la fonction $f^{(n)}$ est appelée **dérivée** $n^{\text{ème}}$ de f, ou dérivée d'ordre n de f.

Remarques. ► f est dérivable si et seulement si elle est une fois dérivable.
► Si f est n fois dérivable, alors elle est $n-1$ fois dérivable, et donc $n-2$ fois dérivable, etc, deux fois dérivable, dérivable.
Au contraire, si $f^{(n)}$ n'existe pas, alors aucune des dérivées d'ordre supérieur à n n'existe.
► On note toujours f' au lieu de $f^{(1)}$, et on note généralement f'' au lieu de $f^{(2)}$.

Exemples 2.62

► La fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$, donc ne possède de dérivée $n^{\text{ème}}$ pour aucun $n \geqslant 1$.
► Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x) = 2ax + b$, qui est encore dérivable.
Donc f est deux fois dérivable, et $f''(x) = 2a$. Étant constante, f'' est encore dérivable, et donc $f^{(3)}(x) = 0$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $n \geqslant 3$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est la fonction nulle.
► Si f désigne la fonction exponentielle, alors il est bien connu que $f' = f$. Et donc f' est dérivable, et $f'' = f' = f$.
Donc f'' est dérivable et $f^{(3)} = f' = f$, etc : pour tout $n \in \mathbf{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)} = f$.

2.4 Introduction à la notion de bijection

2.4.1 Définition, premières propriétés

Définition 2.63 – Soient I et J deux parties de $\mathbf{R}$, et soit $f : I \longrightarrow J$. On dit que f réalise une **bijection de I sur J** si tout élément de J admet un unique antécédent par f.
Autrement dit si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
On note alors f^{-1} la fonction définie sur J et à valeurs dans I qui à $y \in J$ associe son unique antécédent par f.
Autrement dit, pour $x \in I$ et $y \in J$, $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.
La fonction f^{-1} est alors appelée **bijection réciproque** de f.

⚠ Attention !
L'ensemble de départ de f^{-1} est l'ensemble d'arrivée de f et vice-versa !

Graphiquement : f est une bijection de I sur J si et seulement si toute droite horizontale d'ordonnée dans J rencontre une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.

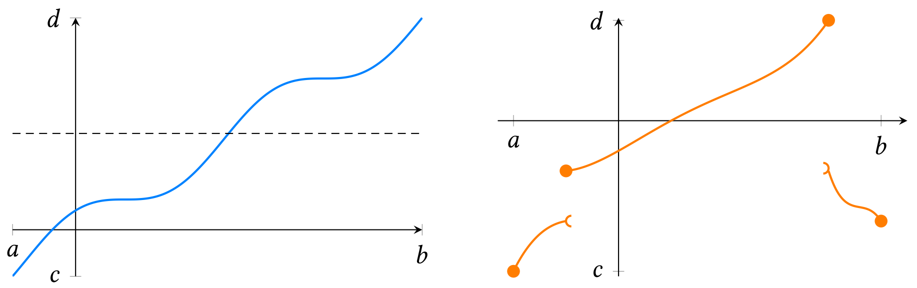


FIGURE 2.10 – Deux bijections de $[a, b]$ sur $[c, d]$: toute droite horizontale d'ordonnée dans $J = [c, d]$ rencontre une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.

Exemples 2.64

► Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors pour tout $y \in \mathbf{R}_+$, il existe un unique $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = f(x) = x^2$: c'est $y = \sqrt{x}$.
Autrement dit, f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$, et sa bijection réciproque f^{-1}

est la fonction $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.

▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$ une fonction affine avec $a \neq 0$.

Alors pour $y \in \mathbf{R}$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow y = ax+b \Leftrightarrow x = \dfrac{y-b}{a}$.
Puisque l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède une unique solution, c'est que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, et la bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y-b}{a}$. Notons que f^{-1} est elle-même affine.

▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \right.$.

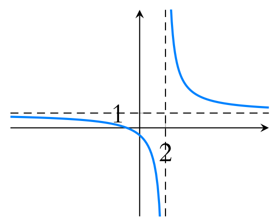
Il est assez facile de constater que f ne prend pas la valeur 1 car l'équation $\dfrac{x+1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-2$ n'a pas de solution. Alors pour $x \neq 2$ et $y \neq 1$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow x+1 = yx-2y \Leftrightarrow 1+2y = x(y-1) \Leftrightarrow x = \frac{1+2y}{y-1}.$$

Et donc à $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ fixé, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution dans $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \setminus \{2\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1+2y}{y-1} \end{array} \right.$.

Méthode

Pour déterminer la bijection réciproque de f, si elle existe, on détermine, à y fixé, l'unique solution de l'équation $y = f(x)$, d'inconnue x.
Autrement dit, on cherche l'unique antécédent de y par f.



Définition 2.65 – Soit I une partie de $\mathbf{R}$. On appelle **fonction identité sur** I et on note id_I la fonction définie sur I par

$$\mathrm{id}_I : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. .$$

Autrement dit, pour tout $x \in I$, $\mathrm{id}_I(x) = x$.

Proposition 2.66 : *Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors :*
1. *pour tout $y \in J$, $(f \circ f^{-1})(y) = y = \mathrm{id}_J(y)$. Autrement dit, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$.*
2. *pour tout $x \in I$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_I(x)$. Autrement dit, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_I$.*
3. *f^{-1} est une bijection de J sur I et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Démonstration.
1. Soit $y \in J$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f, donc $f(f^{-1}(y)) = y$.
2. Soit $x \in I$. Alors $f^{-1}(f(x))$ est l'unique[21] antécédent par f de $f(x)$. Soit encore l'unique $a \in I$ tel que $f(a) = f(x)$.
Puisque $a = x$ convient, c'est que $f^{-1}(f(x)) = x$.
3. Prouvons que si $x \in I$ est fixé, alors l'équation $x = f^{-1}(y)$, d'inconnue $y \in J$ admet une unique solution, qui est $y = f(x)$.
Si y est une solution, alors $x = f^{-1}(y)$, et donc en appliquant f aux deux membres, alors $y = f(x)$.
Ceci ne prouve pas que $f(x)$ est solution[22], mais plutôt qu'une telle solution est unique : si une solution existe, c'est $f(x)$ et rien d'autre.
Reste alors à vérifier que $f(x)$ est solution, ce qui est assez évident puisque $f^{-1}(f(x)) = x$ par le point 2).

Donc pour tout $x \in I$, $x = f^{-1}(y)$ possède une unique solution. Donc f^{-1} réalise une bijection de J sur I.

[21] Cette unicité est garantie par le fait que f est une bijection.

[22] Autrement dit, on ne prouve pas l'existence d'une solution de l'équation.

Et puisque de plus cette unique solution est $f(x)$, la bijection réciproque de f^{-1} est

$$(f^{-1})^{-1}:\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}\right. = f.$$

□

Proposition 2.67 : *Soit $f : I \to J$ une bijection. Si f est monotone, alors f^{-1} est également monotone, de même monotonie que f.*

Démonstration. Supposons f croissante.
Soient $y_1, y_2 \in J$, avec $y_1 < y_2$. Notons alors $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
On ne peut alors pas avoir $x_1 > x_2$, car par croissance de f, on aurait alors $f(x_1) \geqslant f(x_2) \Leftrightarrow y_1 \geqslant y_2$.
Donc $f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2)$, donc f^{-1} est croissante.
La preuve est la même en renversant le sens des inégalités si f est décroissante. □

Proposition 2.68 : *Soit $f : I \to J$ une bijection. Alors f ne prend pas deux fois la même valeur. Autrement dit, si x et x' sont deux éléments de I, avec $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.*

Terminologie
Nous dirons bientôt que f est injective.

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de I avec $f(x) = f(x')$. Alors en appliquant f^{-1} aux deux membres de l'égalité, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x')) \Leftrightarrow x = x'$. □

Remarque. Nous venons donc de prouver que si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
Comme par ailleurs la réciproque est toujours vraie, bijection ou non, on a donc prouvé que pour $a, b \in I$, $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. .

Remarque
Nous savions déjà cette équivalence vraie dans le cas des fonctions strictement monotones, nous sommes en train de dire qu'elle est aussi pour les bijections.
Ce qui ne garantit en rien que les bijection soient toutes strictement monotones (ce qui est faux, voir la figure ??)

Corollaire 2.69 – *Une bijection monotone est strictement monotone.*

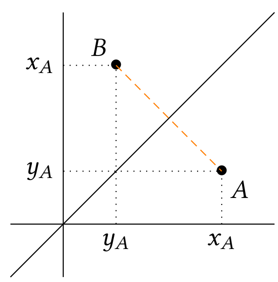
Démonstration. Une fonction monotone qui ne prend pas deux fois la même valeur est strictement monotone. □

2.4.2 Graphe de la bijection réciproque

Proposition 2.70 : *Si f est une bijection de I sur J, alors le graphe de f^{-1} est obtenu à partir du graphe de f via la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ (cette droite est généralement appelée la **première bissectrice**).*

Démonstration. Pour $x \in I$ et $y \in J$, on a

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$



Or, si $A = (x_A, y_A)$ est un point du plan, son symétrique $B = (x_B, y_B)$ par rapport à la première bissectrice $(\mathscr{D})$ est l'unique point tel que $(\mathscr{D})$ soit la médiatrice de $[AB]$.
C'est le cas si et seulement si $(\mathscr{D})$ passe par le milieu de $[AB]$ et que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{u} = (1, 1)$, qui est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$.
Soit si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{y_A+y_B}{2} \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = y_A + y_B \\ (x_A - x_B) + (y_A - y_B) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = y_A + y_B - x_A \\ x_A = y_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = y_A \\ y_B = x_A\end{cases}$$

Et donc, le symétrique de (x, y) par rapport à $(\mathscr{D})$ est (y, x), ce qui achève la preuve. □

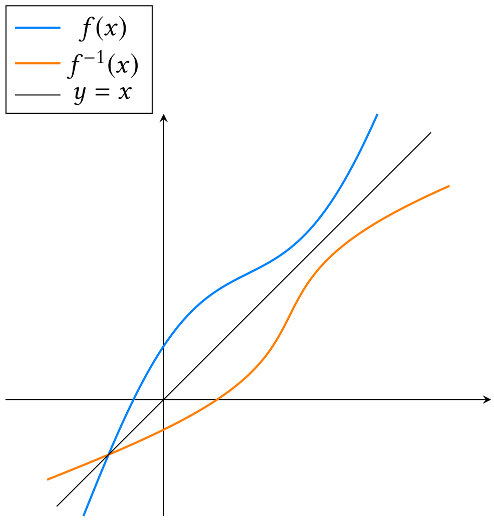


FIGURE 2.11 – Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

2.4.3 Le théorème de la bijection, alias le TVI strictement monotone

Nous rappelons[23] ici un théorème rencontré en terminale, qui sera prouvé rigoureusement plus tard dans l'année, mais nous sera bien utile d'ici là.

[23] Moyennant une légère reformulation.

Théorème 2.71 : *Soient $a < b$ deux réels.*

1. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement croissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
2. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement décroissante, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*
3. *Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est continue sur $]a, b[$ et strictement croissante, alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$.*

Dans les trois cas, la fonction f^{-1} est continue sur son ensemble de définition.

Remarque

Notons que ces limites peuvent être égales à $+\pm\infty$.

Remarques. ► Le dernier point reste encore valable si $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$, et également dans le cas où f est strictement décroissante, il suffira alors dans ce cas d'intervertir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

► Le théorème des valeurs intermédiaires, qui nécessite la continuité, justifie que f prend au moins une fois chaque valeur dans l'intervalle $[(a), f(b)]$. C'est la stricte monotonie qui garantit que f prend au maximum une fois chaque valeur.

Corollaire 2.72 – *Soient $a < b$ deux réels.*

1. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement croissante, alors pour tout $c \in [f(a), f(b)]$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*
2. *Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est continue sur $[a, b]$ et strictement décroissante, alors pour tout $c \in [f(b), f(a)]$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*
3. *Si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est continue sur $]a, b[$ et strictement croissante, alors pour tout $c \in \left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = c$ possède une unique solution.*

Démonstration. C'est une simple reformulation de la définition de bijection : $f(x) = c$ possède une unique solution si et seulement si c possède un unique antécédent par f. □

Le théorème de la bijection et/ou son corollaire permettent souvent de justifier l'existence et l'unicité de la solution à une équation, mais n'aident pas à déterminer la valeur de cette solution !

Exemple 2.73

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 e^{-x^2} \end{array} \right.$. Alors f est dérivable, et donc continue, car produit de deux fonctions dérivables, et $f'(x) = -2x^3 e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}\left(1 - x^2\right)$.
Donc $f'(x)$ est strictement positive sur $[0, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1}$.
Par le théorème de la bijection, pour tout $\alpha \in]0, e^{-1}[$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède une unique solution dans $[0, 1]$.
De même, f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = e^{-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Donc par le théorème de la bijection, pour $\alpha \in]0, e^{-1}[$, l'équation $f(x) = \alpha$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$.
Autrement dit, nous venons de montrer que tout réel dans $]0, e^{-1}[$ possède exactement deux antécédents dans f.
Tout ceci n'a rien de surprenant quand on regarde le tableau de variations, mais il faut vraiment faire appel au théorème de la bijection pour le justifier.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

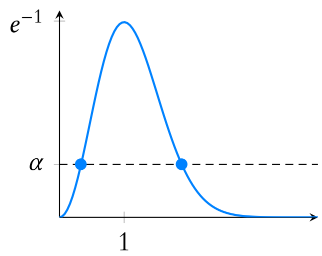


Figure 2.12– Le graphe de f.

Profitons-en pour donner une application classique du théorème de la bijection : la recherche de point fixe.

Définition 2.74 – Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbf{R}$. Un élément $x \in \mathscr{D}$ est appelé **point fixe de** f si $f(x) = x$.

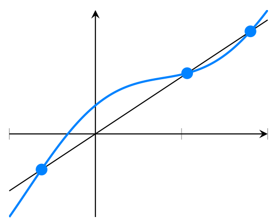


Figure 2.13– Une fonction avec trois points fixes.

Autrement dit, un point fixe est un point qui «ne bouge pas» sous l'action de f.
Notons que x est un point fixe de f si et seulement si $(x, x) \in \mathscr{C}_f$. Or (x, x) est un point de la droite d'équation $y = x$.
Donc les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la première bissectrice avec le graphe de f.

Le théorème de la bijection[24] ne peut s'appliquer tel quel pour prouver l'existence de points fixes, il ne sert qu'à prouver l'existence de solutions à des équations de la forme $f(x) = c$, avec c **fixé**. Et donc surtout pas à l'équation $f(x) = x$.
En revanche, il peut s'appliquer à la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

[24] Et surtout son corollaire.

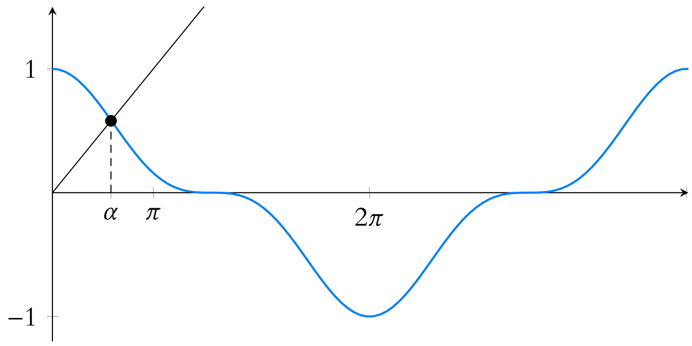
Exemple 2.75

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x)^3 \end{array} \right.$. Alors $x \in \mathbf{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$.
Posons alors $g : x \mapsto \cos(x)^3 - x$.
Puisque $\cos(x)^3 \leqslant 1$, pour $x > 1$, on a $g(x) < 1 - 1 < 0$, et donc g ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.
Donc f ne possède pas de point fixe dans cet intervalle.

Astuce

Trouver les points fixes de f, c'est trouver les points où g s'annule.

Sur $[0,1]$, g est dérivable, et $g'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) - 1$.
Mais $[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sin est positive, et donc pour tout $x \in [0,1]$, $g'(x) < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $g(0) = \cos(0)^3 = 1$ et $g(1) = \cos(1)^3 - 1 < 0$.
Par le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [0,1]$.
Et donc α est l'unique point fixe de f.



2.4.4 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 2.76 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, réalisant une bijection de I sur un intervalle J.*
Alors f^{-1}, la bijection réciproque de f, est dérivable en tout point $x \in J$ tel que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$, et pour un tel x, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Remarque. Le résultat est admis à ce stade, mais il est facile à retrouver si l'on se souvient que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_I$, et que donc, en dérivant une composée, pour tout $x \in J$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) f'\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Ce résultat s'interprète très bien graphiquement : si D est une droite de coefficient directeur $a \neq 0$, alors le coefficient directeur du symétrique de D par rapport à la première bissectrice est $\frac{1}{a}$ (voir par exemple ce qui a été dit quant à la bijection réciproque d'une fonction affine).
Mais le symétrique de la tangente à f^{-1} au point d'abscisse x est la tangente à f en $f^{-1}(x)$.
Cela «justifie[25]» que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
En revanche, si $\mathscr{C}_f$ possède en $(x, f(x))$ une tangente horizontale, alors le symétrique de cette tangente est une droite verticale.

Signe

Pour les fonctions dérivables, on retrouve ainsi le fait que f^{-1} et f aient même sens de variation.

⚠ Attention !

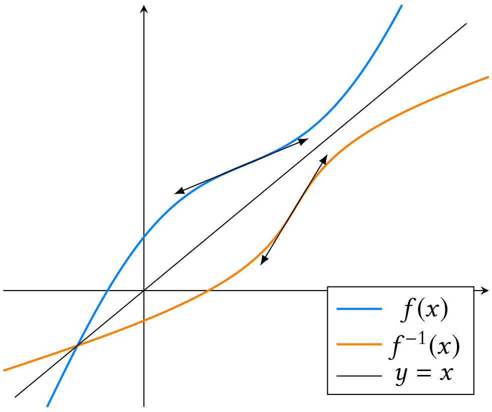
Dériver $f \circ f^{-1}$ nécessite de savoir que f et f^{-1} sont dérivables, donc ceci ne peut en rien prouver la dérivabilité de f^{-1}, mais sert seulement à retrouver la valeur de $(f^{-1})'(x)$ si on admet sa dérivabilité.

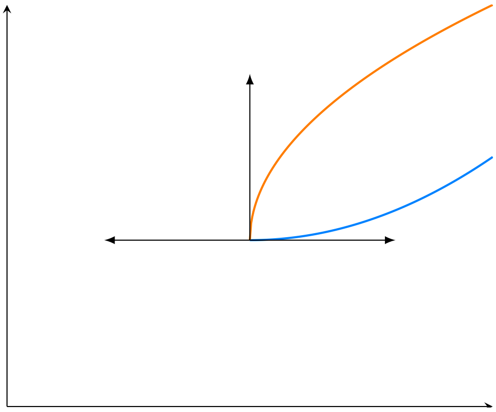
[25] Ce n'est en rien une preuve, mais une bonne intuition de ce que signifie cette formule !

2.5 FONCTIONS USUELLES

⚠ Le but de cette partie est de définir une fois pour toutes un certain nombre de fonctions usuelles, notamment le logarithme et l'exponentielle, et de prouver leurs propriétés. Pour aborder sereinement cette partie, faites comme si vous n'aviez jamais entendu parler de ces fonctions, et faites semblant de les découvrir. Sans cela vous aller avoir l'impression de tourner en rond, et qu'on ne fait que redire des choses bien connues.

Les définitions de ces fonctions données ici sont définitives et n'ont pas vocation à être revues plus tard dans l'année.





En revanche, nous allons utiliser à plusieurs reprises le théorème de la bijection ainsi qu'un théorème de limites nommé théorème de la limite monotone[26], dont nous repoussons la preuve à plus tard.

[26] Dont vous connaissez déjà l'analogue pour les limites de suites.

2.5.1 Fonction logarithme

On admet[27] que toute fonction continue sur un intervalle I y admet des primitives.

[27] Une fois de plus temporairement...

Proposition 2.77 : *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une unique primitive qui s'annule en $x = 1$. On appelle **logarithme népérien** cette primitive, et on la note* $\ln$.

Démonstration. Commençons par prouver l'unicité d'une telle fonction : supposons que F_1 et F_2 soient deux primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $F_1(1) = F_2(1) = 0$.
Alors nous savons qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $F_1(x) = F_2(x) + \lambda$. Et donc $F_1(1) = F_2(1) + \lambda \Leftrightarrow 0 = 0 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$.
Donc $F_1 = F_2$. Ceci prouve donc qu'il existe **au plus**[28] une fonction satisfaisant aux conditions requises.
Passons à présent à l'existence. Grâce au résultat admis ci-dessus, il existe une primitive F de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $x \mapsto F(x) + \lambda$ est encore une primitive de f.
En particulier, c'est le cas[29] de $G : x \mapsto F(x) - F(1)$, qui vérifie alors $G(1) = F(1) - F(1) = 0$.
Et donc il existe bien une primitive de f qui s'annule en $x = 1$. □

[28] Si on en a deux, ce sont les mêmes !

[29] Autrement dit, on a choisi de prendre $\lambda = F(1)$.

Remarque. Notons que ceci nous dit bien évidemment que $\ln' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, et cette formule n'a sûrement pas besoin d'être prouvée : c'est la définition du logarithme.

Théorème 2.78 : *Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors*

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. *pour tout $n \in \mathbf{Z}$,* $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstration. 1. Fixons y, et soit $f_y : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array} \right.$.

Alors f_y est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée vérifie $f_y'(x) = y\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x}$.

C'est donc une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_y(x) = \ln(x) + \lambda$.
En particulier, pour $x = 1$, on trouve $f_y(1) = \ln(y) = \lambda$.
Et donc $\ln(xy) = f_y(x) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. D'après le point 1), on a $0 = \ln(1) = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Et donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
3. On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, la preuve se fait par récurrence sur n : $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et
   $$\ln\left(x^{n+1}\right) = \ln\left(x^n x\right) = \ln\left(x^n\right) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x).$$
   Et si $n < 0$, alors $-n \in \mathbf{N}$, de sorte que
   $$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln\left(x^{-n}\right) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x).$$

□

Proposition 2.79 : *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}_+^*$, *et elle vérifie* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, *et* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Plus tard
Le résultat que nous utilisons ici, relativement intuitif, se nomme le théorème de la limite monotone et sera prouvé dans quelques temps.

Démonstration. La stricte croissance vient évidemment du fait que la dérivée de ln est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Puisque ln est croissante, elle possède en $+\infty$ une limite, finie, ou égale à $+\infty$.
Or, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Mais par stricte croissance de ln, $\ln(2) > \ln(1) \Leftrightarrow \ln(2) > 0$.
Et donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = +\infty$. Donc la limite de ln en $+\infty$ ne peut être une limite finie : $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty.$$

□

Notons que puisque $\ln(1) = 0$ et que ln est strictement croissante, $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Corollaire 2.80 – *La fonction* $\ln$ *réalise une bijection de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Puisque ln est dérivable, donc continue, et strictement croissante[30], le théorème de la bijection s'applique : ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to 0^+} \ln(x), \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\right[=]-\infty,+\infty[$. □

[30] Sa dérivée est strictement positive.

Terminons enfin avec une inégalité classique qu'il faut connaître et savoir utiliser à bon escient :

Proposition 2.81 : *Pour tout* $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration. Cette inégalité découle immédiatement de la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est décroissante).
Elle signifie donc que sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes. Or en particulier, la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation
$$y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln(1+0) \Leftrightarrow y = x.$$

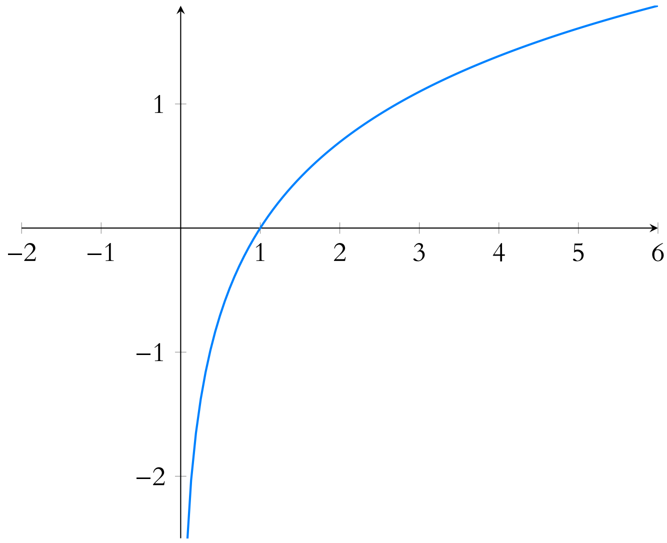
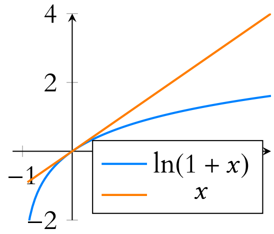


Figure 2.14 – Le graphe de la fonction ln.



Donc pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Toutefois, ceci repose sur des résultats admis pour l'instant, donc donnons-en une seconde preuve.
Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. Alors g est dérivable sur $]-1,+\infty[$, avec pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
Donc g est croissante sur $]-1,0[$ et décroissante sur $[0,+\infty[$, si bien qu'elle atteint un maximum en $x = 0$, égal à $g(0) = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leqslant x$. □

2.5.2 Fonction exponentielle

Définition 2.82 – Nous avons déjà dit que la fonction ln réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$. On appelle **exponentielle**, et on note exp sa bijection réciproque, qui réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
On note généralement e^x au lieu de $\exp(x)$.

Remarque. Notons qu'en particulier, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.

Valeur approchée
Un calcul numérique nous donne
$$e \simeq 2.718\ldots$$

Définition 2.83 – On note $e = \exp(1)$. C'est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut 1.

Théorème 2.84 : *Pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a*

1. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
2. $e^{x+y} = e^x e^y$
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Démonstration.
1. On a $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = -\ln(e^x) = -x$. Donc en appliquant la fonction exponentielle aux deux membres de cette égalité, il vient donc
$$e^{-x} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)\right) = \frac{1}{e^x}.$$
2. Puisque $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, on a $\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$.
Et donc en composant par l'exponentielle, $e^x e^y = e^{x+y}$.

3. Il suffit de noter que $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

□

Proposition 2.85 : *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et est égale à sa propre dérivée.*
De plus, on a $e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration. Puisque ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa dérivée ne s'y annule pas, sa bijection réciproque exp est dérivable sur $\mathbf{R}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(\exp)'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Et puisque $\ln(1) = 0$, on a donc[31] $e^0 = 1$.
Puisque exp est strictement croissante, elle possède une limite en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$.

Si elle avait une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$, alors par croissance, on aurait, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \leqslant \ell$.
Mais ceci contredit le fait que exp réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et que par exemple $\ell + 1$ possède un antécédent par exp.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Et alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. □

[31] Par définition d'une bijection réciproque.

Remarque
C'est encore une fois le théorème de la limite monotone mentionné plus haut, et provisoirement admis.

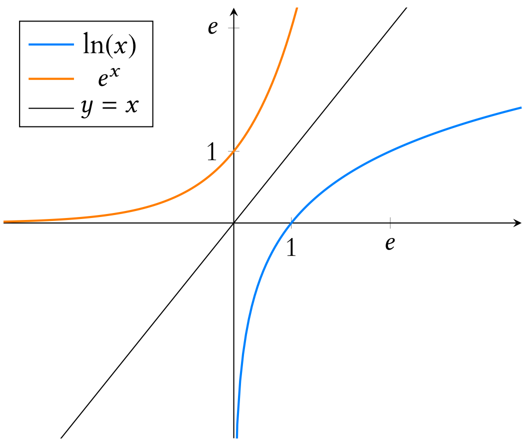
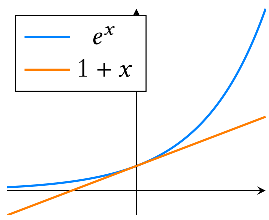


FIGURE 2.15 – Les graphes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Terminons enfin par une inégalité classique :

Proposition 2.86 : *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.



Démonstration. Nous pourrions là aussi évoquer la convexité de l'exponentielle, et noter que $y = x + 1$ est une équation de la tangente au graphe de exp en 0.
Mais plus simplement, pour $x \leqslant -1$, $x + 1 \leqslant 0 \leqslant e^x$.
Et pour $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x \Leftrightarrow 1 + x \leqslant e^x$. □

2.5.3 Fonctions exponentielle et logarithme de base a.

Définition 2.87 – Si $a > 0$ est différent de 1, alors on appelle **logarithme de base** a la fonction $\log_a$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarque. Vous avez déjà rencontré la fonction $\log_{10}$, (plus souvent notée log) en chimie en terminale.
Notons que la fonction $\log_e$ n'est autre que la fonction ln.
Il est alors facile de prouver que la fonction $\log_a$ a les mêmes propriétés que la fonction ln :

Proposition 2.88 : *Soit $a > 0$, $a \neq 1$. Alors :*

- $\log_a$ *réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, vérifiant $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\log_a$ est strictement décroissante, avec $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$.*
  - *si $a > 1$, alors $\log_a$ est strictement croissante, avec $\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$.*
- *pour tous réels strictement positifs x et y, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.*
- *pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.*

Limites
Notons qu'une fois qu'on sait qu'il s'agit d'une bijection dont on connaît l'intervalle image, et qu'on possède le sens de variation, les limites sont immédiates.

Définition 2.89 – Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on appelle **exponentielle de base a** la bijection réciproque de $\log_a$.

Notons provisoirement cette fonction $\exp_a$, le temps d'étudier ses propriétés.
Remarquons que si $x \in \mathbf{R}$, alors $\exp_a(x)$ est tel que

$$\log_a(\exp_a(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\exp_a(x)) = x\ln(a) \Leftrightarrow \exp_a(x) = e^{x\ln(a)}.$$

Les propriétés suivantes sont alors faciles à prouver :

Proposition 2.90 : *Soit $a > 0$,*

- *la fonction $\exp_a$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $\exp_a(0) = 1$ et $\exp_a(1) = a$. De plus :*
  - *si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante avec $\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = 0$*
  - *si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante avec $\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = +\infty$*
- *pour tous réels x et y, $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$ et $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$*
- *pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n$.*

On notera désormais a^x au lieu de $\exp_a(x)$. Ceci est cohérent avec le fait que pour $n \in \mathbf{Z}$, $\exp_a(n) = (\exp_a(1))^n = a^n$, et que $\ln(a^x) = \ln(\exp_a(x)) = \ln(\exp(x\ln(a)) = x\ln(a)$.
Et alors, grâce aux propriétés de l'exponentielle, toutes les formules déjà connues sur les puissances entières (comme $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n$) restent valables pour les puissances non entières de a.
Par exemple, pour $x, y \in \mathbf{R}$, on a

$$(a^x)^y = \exp(y\ln(a^x)) = \exp(y\ln(\exp(x\ln(a)))) = \exp(yx\ln(a)) = a^{xy}.$$

Remarque
Nous avons prouvé au passage que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Enfin, remarquons que la dérivée de $x \mapsto a^x$ est $x \mapsto \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x$.

2.5.4 Fonctions puissances et racines $n^{\text{èmes}}$

Bien entendu, nous avons déjà rencontré les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$, ou sur $\mathbf{R}^*$ lorsque n est un entier négatif.
Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre à des puissances entières :

Définition 2.91 – Soit $a \in \mathbf{R}$. On appelle fonction **puissance** a la fonction, que l'on notera par la suite f_a, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$.

Comme mentionné plus haut, pour $a \in \mathbf{N}$, on retrouve la fonction puissance a usuelle : $f_a(x) = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{a \text{ fois}}$.
Et de même pour a un entier négatif.

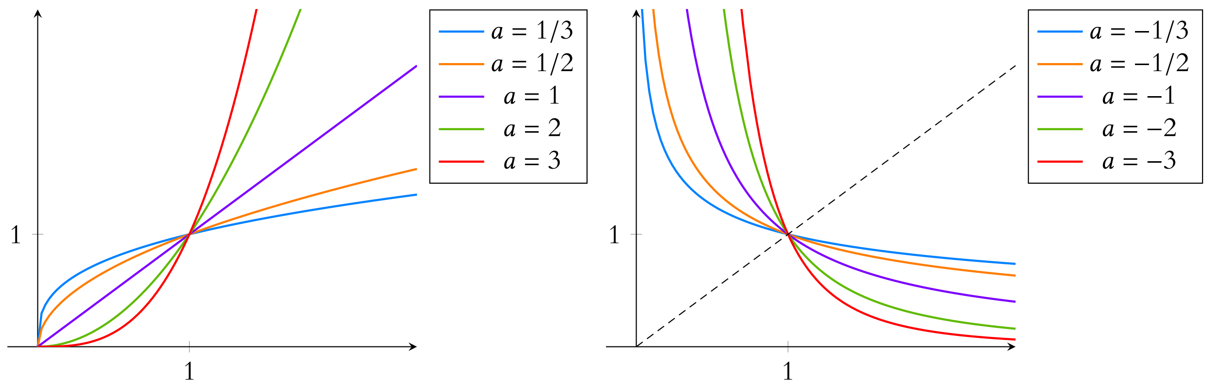


FIGURE 2.16 – Quelques fonctions puissances.

Proposition 2.92 : *Si a et b sont deux réels et si x et y sont deux réels strictement positifs, alors*

$$x^1 = x,\ x^0 = 1,\ x^{a+b} = x^a x^b,\ (xy)^a = x^a y^a.$$

Démonstration. Conséquences directes des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. □

Proposition 2.93 : *Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors :*

1. *f_a est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_a'(x) = ax^{a-1}$.*
2. *si $a \neq 0$, alors f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante sinon.*
   De plus, $f_a^{-1} = f_{1/a}$.

Démonstration.

1. Pour la dérivabilité, il suffit noter que l'exponentielle et le logarithme sont dérivables (respectivement sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{R}_+^*$) et donc que par composition, la fonction f_a est également dérivable.

   Et donc en dérivant, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$: $f_a'(x) = a\frac{1}{x}e^{a\ln(x)} = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}$.

2. La dérivée de f_a est du signe de a, donc f_a est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.
   De plus, pour $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = +\infty$.
   Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
   De même, si $a < 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{a\ln(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = 0$.
   Donc par le théorème de la bijection, f_a réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même.
   Enfin, on a, pour $x > 0$,

   $$f_a(f_{1/a}(x)) = \left(x^{1/a}\right)^a = \exp\left(a\ln\left(x^{1/a}\right)\right) = \exp\left(a\frac{1}{a}\ln(x)\right) = x.$$

   Donc $f_{1/a}(x)$ est l'unique antécédent de x par f_a : $(f_a)^{-1}(x) = f_{1/a}(x)$.

□

Variable !
On dérive ici par rapport à x (la base) et pas comme nous l'avons fait plus haut par rapport à la puissance !

La fonction f_a est a priori définie uniquement sur $\mathbf{R}_+^*$, mais si $a > 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} f_a(x) = 0$, si bien que f_a se prolonge par continuité en 0 en posant $f_a(0) = 0$.
La question se pose alors de savoir si ce prolongement par continuité est dérivable en 0.
Mais pour $x > 0$, on a

$$\frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1} \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 1 \\ +\infty & \text{si } a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \end{cases}$$

Donc f_a est dérivable en 0 si et seulement si $a \geqslant 1$, et dans ce cas, $f_a'(0) = 0$. Pour $a > 1$, on a donc $f_a'(0) = a0^{a-1}$, si bien que la formule obtenue ci-dessus pour la dérivée de f_a sur $\mathbf{R}_+^*$ reste valable en 0.

Notons en particulier que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ restreinte à $\mathbf{R}_+$.
Et notamment, $x^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée de x.
Plus généralement, $x^{\frac{1}{n}}$ est appelé **racine** $n^{\text{ème}}$ de x, et on peut indifféremment le noter $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Remarque
On a donc

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{1}{n}\ln(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $n \in \mathbf{N}$ est un entier **impair**, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même (ce qui n'est pas le cas si n est pair).
Dans ce cas, elle possède une bijection réciproque sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Cette fonction est encore notée $\sqrt[n]{\cdot}$, et donc pour $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel dont la puissance $n^{\text{ème}}$ vaut x.
Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ puisque $(-2)^3 = -2^3 = -8$.
Mais attention, si $x < 0$, on n'a pas $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.
On a alors toujours $\sqrt[n]{-1} = -1$ et pour $x < 0$, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$.
Et bien entendu, on retrouve, pour tous réels x et y, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

Remarque
En revanche, par imparité de $\sqrt[n]{\cdot}$, on a alors

$$\sqrt[n]{x} = -e^{\frac{1}{n}\ln(-x)}.$$

2.5.5 Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique

Définition 2.94 – On appelle :

1. **cosinus hyperbolique** la fonction ch définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
2. **sinus hyperbolique** la fonction sh définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
3. **tangente hyperbolique** la fonction th définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Analogie
Les formules définissant ch et sh ressemblent fortement aux formules d'Euler pour cos et sin.

Proposition 2.95 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.*

Remarque
Cette formule est analogue à une formule bien connue de trigonométrie :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\right) = 1.$$

□

Proposition 2.96 :

1. *La fonction* ch *est paire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
   De plus, on a $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
2. *La fonction* sh *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
   De plus, on a $\mathrm{sh}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
3. *La fonction* th *est impaire, dérivable sur* $\mathbf{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbf{R}$,
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$
   De plus, on a $\mathrm{th}(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

Démonstration. 1. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$, donc ch est paire.
Elle est dérivable car somme de deux fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.
Il est clair que $\mathrm{ch}(0) = \dfrac{e^0+e^0}{2} = 1$ et lorsque $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.
De même, lorsque $x \to -\infty$, $e^x \to 0$, $e^{-x} \to +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$.

2. On a $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$, donc sh est impaire. Par conséquent, $\mathrm{sh}(0) = 0$.
Puisque sh est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$.
Les limites ne posent pas de problèmes.
3. Puisque th est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire, elle est impaire, et donc $\mathrm{th}(0) = 0$.
Elle est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$
Mais d'autre part, ceci s'écrit encore
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$
Enfin, pour les limites[32]
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1.$$
Et par imparité,
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to-\infty} -\mathrm{th}(-x) = -1.$$
□

[32] Qui a priori sont des formes indéterminées.

Il est facile de constater que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante. Puisqu'elle s'annule en 0, elle est strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ est du signe de x, si bien que ch est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Enfin, $\mathrm{th}' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ reste positive, donc th est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Autrement dit
$\mathrm{sh}(x)$ est du signe de x.

Rappelons que nous pouvons rien dire d'une somme d'exponentielles, et qu'on n'a surtout pas $e^a + e^b = e^{a+b}$.

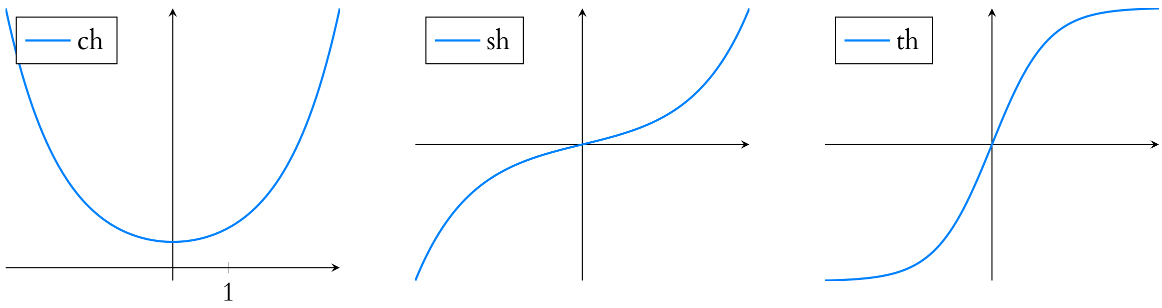


Figure 2.17 – Les fonction ch, sh et th.

Une astuce souvent utile pour manipuler des quantités de la forme $e^a \pm e^b$ est de factoriser par $e^{\frac{a+b}{2}}$, ce qui permet alors de faire apparaître des ch ou des sh.

Exemple 2.97

On a

$$\begin{aligned}\frac{e^a - e^b}{1+e^b} &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{a-\frac{a+b}{2}} - e^{b-\frac{a+b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{-b/2}+e^{b-b/2}\right)} = \frac{e^{\frac{a+b}{2}}\left(e^{\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{a-b}{2}}\right)}{e^{b/2}\left(e^{b/2}+e^{-b/2}\right)}\\ &= \frac{e^{\frac{a+b}{2}}}{e^{b/2}}\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\,\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)} = e^{a/2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{b}{2}\right)}.\end{aligned}$$

2.5.6 Fonctions valeur absolue et partie entière

Proposition 2.98 : *La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et sa dérivée est donnée par*

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

Démonstration. Pour la dérivabilité sur $\mathbf{R}^*$, il s'agit de remarquer que sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = x$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, $f(x) = -x$.
En particulier, ceci prouve la continuité de f sur $\mathbf{R}^*$. Ne reste donc que la continuité en 0 à prouver.
Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$, de sorte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Et donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$. □

Proposition 2.99 : *La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle.*

Démonstration. Sur l'intervalle $]n, n+1[$, la fonction f est constante égale à n, et donc y est dérivable, de dérivée nulle. □

Remarque. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et sa dérivée y est nulle, mais on n'en déduit pas pour autant qu'elle y est constante, car $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ n'est pas un intervalle !

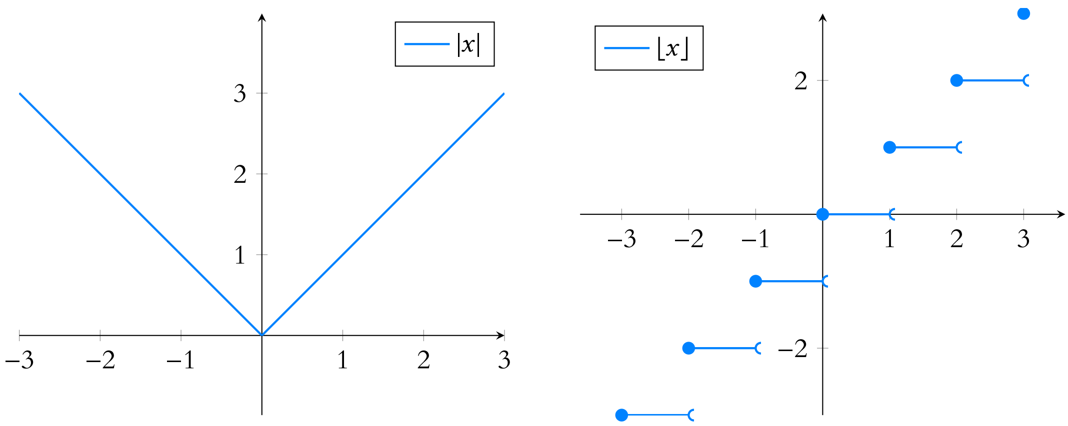


Figure 2.18 – Les fonctions valeur absolue et partie entière.

Exercices du chapitre 2

► Généralités sur les fonctions, dérivées

Exercice 2.1 Étudier la parité de la fonction $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. F

Exercice 2.2 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation. PD

1) la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2) la somme de deux fonctions monotones est monotone.
3) le produit de deux fonctions monotones est monotone.
4) le produit de deux fonctions croissantes et positives est croissant.
5) si f est T-périodique, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $g : x \mapsto f(\alpha x)$ est périodique.
6) si f est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
7) si g est périodique, alors $g \circ f$ est périodique.
8) si $g \circ f$ est bornée, alors g est bornée.
9) f est paire si et seulement si $-f$ est impaire.
10) le produit de deux fonctions majorées est majoré.
11) le produit de deux fonctions bornées est borné.
12) si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 2.3 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ AD

1) Déterminer les points fixes de f.
2) Montrer que $f \circ f$ est bien définie et que $f \circ f = f$.

Exercice 2.4 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante. PD

Exercice 2.5 **Fonctions périodiques** PD

1) Montrer que pour $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x}{k} \right\rfloor - \dfrac{\lfloor x \rfloor}{k}$ est k-périodique.
2) Que dire d'une fonction périodique et croissante ?

Exercice 2.6 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction, qu'on ne suppose pas nécessairement dérivable, telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x)e^{f(x)} = x$. PD
Étudier la monotonie de f.

Exercice 2.7 **Courbes présentant un axe de symétrie** AD
Dans tout l'exercice, on se place dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit $a \in \mathbf{R}$. Justifier que la symétrie par rapport à la droite (verticale) d'équation $x = \frac{a}{2}$ envoie un point de coordonnées (x,y) sur le point de coordonnées $(a-x, y)$.
2) Soit $f : [0,a] \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in [0,a]$, $f(x) = f(a-x)$.
Justifier alors que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin(x)\left|2\cos^2(x) - 1\right|$.
   a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.
   b) ($\star$) Tracer le graphe de f sur $[-\pi, 2\pi]$.

Exercice 2.8 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \left(2x+1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$. AD

1) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
2) Déterminer les asymptotes au graphe de f.

Exercice 2.9 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée. F

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln\sqrt{3e^x - 1}}{4 - x^2}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{2^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$.

Exercice 2.10 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée $n^{\text{ème}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ (on admettra que ces dérivées $n^{\text{èmes}}$ existent). *Indication : on pourra commencer par conjecturer une formule, et la prouver par récurrence sur n.* AD

1) $f : x \mapsto \ln(x)$
2) $g : x \mapsto \dfrac{2}{1+3x}$
3) $h : x \mapsto e^{ax+b}$, $a \neq 0$
4) sin
5) (★) $p : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
6) $k : x \mapsto 3^x$.

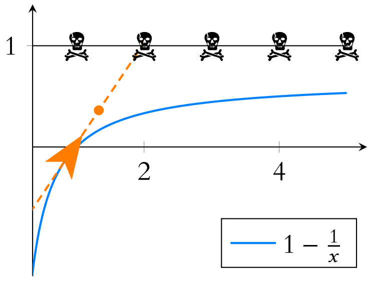
Pour la fonction p, on commencera par déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $p(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

EXERCICE 2.11 Dérivées successives d'une fonction polynomiale — AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit f une fonction de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$.

EXERCICE 2.12 — PD

Dans un (vieux) jeu vidéo, un vaisseau spatial se déplace sur la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.
Lorsqu'il tire un missile, celui-ci part en ligne droite suivant la tangente à $\mathscr{C}$.
Quelle doit être la position du vaisseau au moment où il tire son $k^{\text{ème}}$ missile pour atteindre le $k^{\text{ème}}$ ennemi, situé au point de coordonnées $(k, 1)$?



EXERCICE 2.13 — D

Soit $a > 0$, et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x+a) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$. Prouver que f est périodique.

EXERCICE 2.14 Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) — TD

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ qui tendent vers 0 en $+\infty$ et telles que pour tous réels strictement positifs x et y : $f(xf(y)) = yf(x) \quad (\mathscr{R})$.

1) Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution du problème posé.
2) Prouver que si f est une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, alors le seul éventuel point fixe de f est 1.
3) En déduire que g est la seule solution au problème posé.

► Fonctions usuelles

EXERCICE 2.15 — PD

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto a^x$.
2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 2.16 — PD

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

1) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2) $3^{x^2} = 11^{x^5}$
3) (★) $\pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x)$

EXERCICE 2.17 — F

Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Montrer que

1) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$
2) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$
3) $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}}$
4) (★) $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

EXERCICE 2.18 — PD

Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2.19 Nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier — PD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

EXERCICE 2.20 — D

Soient a, b, c trois réels strictement positifs.
Discuter, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de l'équation $a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) = c$, et déterminer ces solutions.

▶ Bijections

Exercice 2.21 Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-3} \end{array} \right.$ réalise une bijection de $\mathbf{R}\setminus\{3\}$ sur un ensemble à préciser. Déterminer alors f^{-1}. PD

Exercice 2.22 PD

1) Montrer que l'équation $x^2\ln(x) = 1$ possède une unique solution.
2) (★) Déterminer le nombre de points fixes de $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $x \mapsto \cos^k(x)$ possède un unique point fixe.

Exercice 2.23 Déterminer le nombre de racines (réelles) des fonctions polynomiales suivantes, où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$: PD

1. $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 1$
2. $g : x \mapsto 3x^5 + 10x^3 - 45x + \lambda$
3. $h : x \mapsto x^{n+2} - (n+2)x^2 + 1$

Exercice 2.24 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, il existe un unique $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{\cos(y)}$. AD
Vérifier qu'alors $\mathrm{sh}(x) = \tan(y)$.

Exercice 2.25 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $y \in \mathbf{R}$ pour que l'équation $xe^x = y$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$ possède exactement une solution. Même question mais pour deux solutions. PD

Exercice 2.26 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$. AD

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J\setminus\{1\}$ et que pour tout $x \in J\setminus\{1\}$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 2.27 Soif $f :]-a, a[\to I$ une fonction bijective et impaire. AD
Montrer que f^{-1} est encore impaire. Que dire si f est paire ?

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 2

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.1

Commençons par nous intéresser au domaine de définition de f, puisque la notion de parité n'aura de sens que si celui-ci est symétrique.
On a $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$.
Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2+1>x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2} \geqslant |x| \geqslant -x$.
Donc f est définie sur $\mathbf{R}$.

Astuce
$|x|$ est toujours à la fois supérieur à x et à $-x$, puisque c'est le plus grand des deux.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.
Il est clair que pour $x \neq 0$, ceci n'est pas égal à $f(x)$, donc f n'est pas paire.
Nous serions tentés de dire que ce n'est pas égal à $-f(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, mais ce n'est pas parce qu'on ne voit pas que c'est égal que ça ne l'est pas...
En effet, on a

$$-f(x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right).$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1}-x.$$

Et donc en composant par ln, $f(-x) = -f(x)$, de sorte que f est impaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.2

1. **Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes. Alors si $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$, donc $f(x)+g(x) \leqslant f(y)+g(y)$: $f+g$ est croissante.
2. **Faux.** Soit $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x^3$. Alors f est croissante et g est décroissante sur $\mathbf{R}$.
En revanche, on a $(f+g)'(x) = 1-2x^2$, qui n'est pas de signe constant sur $\mathbf{R}$. Donc $f+g$ n'est pas monotone.
3. **Faux.** La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbf{R}$, pourtant $f \times f$ est la fonction carré, qui n'est pas monotone sur $\mathbf{R}$.
4. **Vrai.** Soient f et g deux fonctions croissantes et positives.
Alors pour $x \leqslant y$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $0 \leqslant g(x) \leqslant g(y)$, donc en multipliant ces inégalités, $0 \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$: la fonction fg est croissante.

Danger !
Sans l'hypothèse de positivité, on ne peut plus multiplier les inégalités (cf question précédente).

5. **Vrai.** Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on a $g\left(x+\frac{T}{\alpha}\right) = f(\alpha x+T) = f(\alpha x) = g(x)$.
Donc g est $\frac{T}{\alpha}$-périodique.
6. **Vrai.** Si T est une période de f, alors pour $x \in \mathcal{D}_f$, $(g \circ f)(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
Donc $g \circ f$ est T-périodique.
7. **Faux.** Soit $g : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, qui est 1-périodique, et soit $f : x \mapsto e^{-|x|}$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $T_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x+T_0) = (g \circ f)(x)$.
Alors en particulier, $(g \circ f)(T_0) = (g \circ f)(0) = e^0 - \lfloor e^0 \rfloor = 1 - \lfloor 1 \rfloor = 0$.
Mais $(g \circ f)(T_0) = g(e^{-T_0})$.
Or, $0 < e^{-T_0} < 1$, si bien que $g(e^{-T_0}) = e^{-T_0} - 0 = e^{-T_0} \neq 0$.
Donc $g \circ f$ n'est pas T_0-périodique, et ce pour tout T_0.
8. **Faux.** Si g est la fonction $x \mapsto x^2$ et f est la fonction cosinus, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \cos^2(x) \in [-1,1]$. Donc $g \circ f$ est bornée, pourtant la fonction g n'est pas majorée (donc pas bornée).
9. **Faux.** Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-f(-x) = -f(x) = (-f)(x)$.
Donc $-f$ est encore paire, et n'est donc pas impaire... sauf si f est constante[1].
10. **Faux.** Prenons $f : x \mapsto -e^x$ et $g = f$.
Alors f et g sont tous les deux majorées[2] par 0 et pourtant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)g(x) = e^{2x}$, si bien que fg n'est pas majorée.

[1] Mais il existe des fonctions paires non constantes, comme la fonction carré.

[2] Elles ne prennent que des valeurs négatives.

En effet, supposons qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)g(x) \leqslant M$.
Alors pour $x = \dfrac{\ln(M)}{2} + 1$, il vient

$$f(x)g(x) \leqslant M \Leftrightarrow e^{\ln(M)+1} \leqslant M \Leftrightarrow eM \leqslant M$$

ce qui est absurde.

Détails
Quitte à remplacer M par un nombre plus grand, on peut supposer qu'un majorant est strictement positif.

11. **Vrai.** Soient K_1, K_2 deux réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant K_1$ et $|g(x)| \leqslant K_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leqslant K_1K_2$.
Donc fg est bornée.
12. **Vrai.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x)$$

et donc $g \circ f$ est impaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.3

1. Il est clair que 0 n'est pas un point fixe de f, et pour $x \in]0,1]$, alors x est un point fixe de f si et seulement si

$$f(x) = x \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leqslant 1.$$

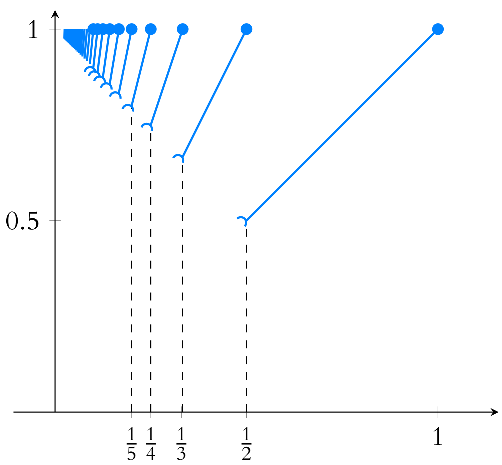


FIGURE 2.1 – Le graphe de f. Les points fixes y sont bien visibles : pour $x > \frac{1}{2}$, le graphe de f coïncide avec la première bissectrice.

Et donc l'ensemble des points fixes de f est $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

2. Pour prouver que $f \circ f$ est bien définie, il s'agit de prouver que f est à valeurs dans $[0,1]$.
Si $x = 0$, alors $f(x) = 1 \in [0,1]$.
Et si $x \in]0,1]$, alors, par définition de la partie entière,

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} \Rightarrow \underbrace{1-x}_{\geqslant 0} < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1.$$

Et donc $f(x) \in [0,1]$. Ainsi, $f \circ f$ est bien définie.

Soit $x \in [0,1]$.
Alors, prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(f(x)) = f(x)$ revient à prouver que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)$ est un point fixe de f.
Soit encore, d'après la question 1, que $f(x) \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Méthode
Pour prouver que deux fonctions f et g sont égales, il faut prouver :
▸ qu'elles ont le même ensemble de définition $\mathcal{D}$ (si ce n'est pas évident)
▸ qu'en tout $x \in \mathcal{D}$ elles prennent la même valeur, *i.e.* que $f(x) = g(x)$.

Soit donc $x \in [0,1]$.
▸ Si $x = 0$, on a $f(x) = 1$ qui est un point fixe de f.

▶ Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $f(x) = x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

▶ Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, alors nous avons déjà prouvé à la question 1 que $1 - x < f(x) \leqslant 1$.
Or, $x \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $1 - x \geqslant \frac{1}{2}$, de sorte que $1 - x < f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x)$.
Et donc $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, et donc $f(f(x)) = f(x)$.

On en déduit que $f \circ f = f$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.4

Procédons à un raisonnement par l'absurde en supposant que f ne soit pas strictement décroissante.
Cela signifie qu'il existe donc deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$.
Mais alors, en appliquant $f \circ f$ à cette inégalité, il vient

$$(f \circ f)(f(x)) \leqslant (f \circ f)(f(y)) \Leftrightarrow (f \circ f \circ f)(x) \leqslant (f \circ f \circ f)(y).$$

Mais ceci contredit la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$. En effet, puisque $x < y$, nécessairement $(f \circ f \circ f)(x) > (f \circ f \circ f)(y)$.

C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse, et donc f est strictement décroissante.

> **⚠ Attention !**
> La négation de f est strictement décroissante n'est ni «f est strictement croissante», ni «f est croissante» !

> **Inégalités**
> Le sens de l'inégalité ne change pas en appliquant $f \circ f$, car il s'agit d'une fonction croissante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.5

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(x+k) = \left\lfloor \frac{x+k}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x+k \rfloor}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor - \frac{\lfloor x+k \rfloor}{k}.$$

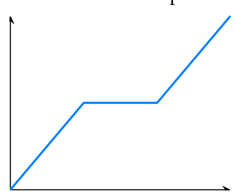
Or nous savons que pour tout réel x et tout entier n, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
Donc en particulier, $\left\lfloor \frac{x}{k} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1$ et $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
On en déduit que $f(x+k) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor + 1 - \frac{\lfloor x \rfloor + k}{k} = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{k} = f(x)$.
Et donc f est bien k-périodique.

2. Une fonction périodique et croissante ne peut qu'être constante.
Supposons qu'il existe une fonction f, T-périodique et croissante qui ne soit pas constante.
Alors il existe deux réels x et y vérifiant $x < y$ et $f(x) < f(y)$.
Or, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $x + kT > y$.
Et donc $f(x + kT) = f(x) < f(y)$.
Mais ceci contredit alors la croissance de f, d'où une contradiction.

Ainsi, toute fonction périodique et croissante est constante.

> **Intuition**
> Essayez de tracer une fonction à la fois périodique et croissante, vous vous en convaincrez vite !

> **⚠ Attention !**
> Une fonction croissante qui n'est pas constante n'est pas nécessairement strictement croissante. Par exemple :



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.6

Notons que si jamais f était dérivable, on aurait, par dérivation terme à terme, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x)e^{f(x)} + f'(x)f(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + f(x)} > 0.$$

Donc f serait strictement croissante.

Prouvons donc que f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soient donc $x < y$ deux réels strictement positifs.
Supposons par l'absurde que $f(x) \geqslant f(x)$.
Alors $e^{f(x)} \geqslant e^{f(y)}$ et donc par produit d'inégalités à termes positifs,

$$f(x)e^{f(x)} \geqslant f(y)e^{f(y)} \Leftrightarrow x \geqslant y,$$

ce qui est absurde.
Donc nécessairement $f(x) < f(y)$, si bien que f est strictement croissante.

> **Alternative**
> On pourrait aussi tout simplement utiliser la croissance de $x \mapsto xe^x$, produit de deux fonctions croissantes et positives.

Solution de l'exercice 2.7

1. Notons donc M le point de coordonnées (x, y), et soit N son symétrique par rapport à la droite D d'équation $y = \frac{x}{2}$, de cordonnées (x_N, y_N).
Alors D est la médiatrice de $[MN]$, si bien que le milieu de $[MN]$ est sur D, et par ailleurs, $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\vec{j}$, qui est un vecteur directeur de D.
Donc $\begin{cases} \dfrac{x + x_N}{2} = \dfrac{a}{2} \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = a - x \\ y_N - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_N, y_N) = (a - x, y).$
Donc les coordonnées du symétrique de M par rapport à D sont bien celles annoncées dans l'énoncé.

2. Soit $g : x \mapsto f(a - x)$.
Alors un point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y = f(x) \Leftrightarrow y = g(a - x) \Leftrightarrow (a - x, y) \in \mathscr{C}_g$.
Ainsi, la courbe de g est symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.
Et en particulier, si $f = g$, alors f et g ont même courbes représentatives, donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à D.

3.a. La fonction f est clairement 2π-périodique car sin et cos le sont. Donc il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.
Puisque de plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = -f(x)$, f est impaire, et donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.

3.b. Pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x)\left|2\cos^2(\pi - x) - 1\right| = \sin(x)\left|2(-\cos(x))^2 - 1\right| = f(x).$$

Et donc par la question précédente, il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis de réaliser la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $f(x) = \sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right| = \sin(x)|\cos(2x)|$.
Et donc en particulier, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$ et pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = -\sin(x)\cos(2x)$.
Donc f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, avec pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$, $f'(x) = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x) = \cos(x)\left[2\cos^2(x) - 1 - 4\sin^2(x)\right] = \cos(x)\left[6\cos^2(x) - 5\right]$.
Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$, et $6\cos^2(x) - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \sqrt{\frac{5}{6}}$.
Mais cos réalise une bijection[3] strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, et $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{5}{6}} \leqslant 1$, donc il existe un unique $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{5}{6}}$.
Et donc au final, pour $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) \geqslant 0$, et pour $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$.
Donc f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{4}\right]$.

[3] Car continue.

De même, pour $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable et pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) = -\cos(x)\left[6\cos^2(x) - 5\right] \geqslant 0.$$

Donc f est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Détails
On a cette fois $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \leqslant \sqrt{\frac{5}{6}}$ et donc $f'(x) \geqslant 0$.

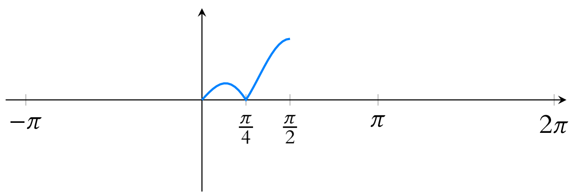
Donc le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est le suivant :

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

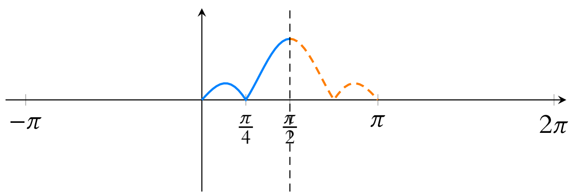
Nous sommes donc en mesure de tracer le graphe de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Puis on réalise la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$, puis une symétrie par

rapport à l'origine (par imparité), et enfin une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ (en se limitant aux $x \leqslant 2\pi$).
Voici donc le résumé des étapes de la construction du graphe de f :

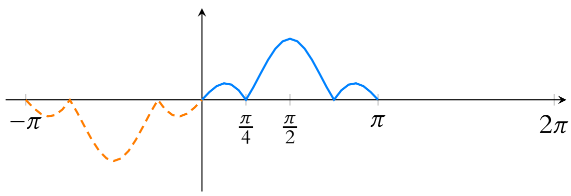
Tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



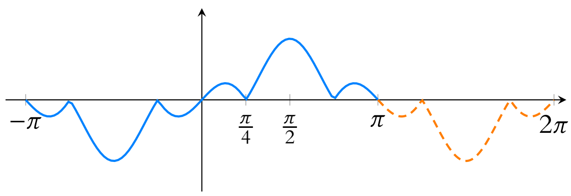
Symétrie par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$



Symétrie par rapport à l'origine



Translation (partielle)



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.8

1. Il s'agit de prouver que f possède une limite finie en 0.
On a $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} = 0$.
En revanche, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminée.
Mais le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ nous donne $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$.
Il est alors connu[4] que cette limite est nulle et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a alors, pour $x > 0$,

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Comme précédemment, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x} = 0$, de sorte que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, et $\widetilde{f}'(0) = 0$.

2. On a $\frac{f(x)}{x} = \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Donc si $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$, elle a 2 pour coefficient directeur.
Et alors

$$f(x) - 2x = 2x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

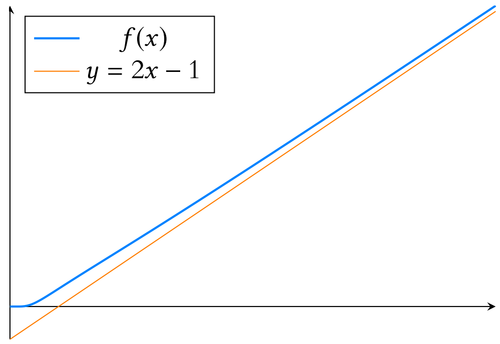
Il est facile[5] de constater que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 1$.
Pour l'autre partie, procédons au changement de variable $X = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{X\to 0^+} 2\frac{e^{-X} - e^{-0}}{X}.$$

Nous reconnaissons là le taux d'accroissement en 0 de $x \mapsto e^{-x}$, dont la dérivée en 0 vaut -1.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = -1$, de sorte que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

[4] Et ce sera reprouvé plus tard.

[5] Il n'y a pas de forme indéterminée.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.9

1. On a $3e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\ln(3)$.
Or, la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et de même, ln est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Donc en notant $f_1 : x \mapsto 3e^x - 1$, $f_2 : t \mapsto \sqrt{t}$ et $f_3 : y \mapsto \ln(y)$, $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ est définie et dérivable[6] sur $]-\ln(3), +\infty[$.
Pour calculer sa dérivée, notons que $\ln\sqrt{3e^x - 1} = \frac{1}{2}\ln(3e^x - 1)$. Et alors la dérivée de $x \mapsto \ln\sqrt{3e^x - 1} = \frac{1}{2}\ln(f_1)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{1}{2}\frac{3e^x}{3e^x - 1}.$$

[6] Car composée de fonctions dérivables.

De plus, $4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{-2, 2\}$.
Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{4 - x^2}$ est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.
Par produit, on en déduit que f est dérivable sur $]-\ln(3), 2[\cup]2, +\infty[$ et que pour x dans cet ensemble,

$$f'(x) = \frac{\frac{3e^x}{6e^x - 2}(4 - x^2) + 2x\ln(\sqrt{3e^x - 1})}{(4 - x^2)^2}.$$

2. Puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$ (bien qu'elle soit définie sur $\mathbf{R}_+$), il nous faut déterminer à quelle condition $\frac{1 + x}{1 - x} > 0$.
Un tableau de signe nous permet de répondre facilement :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc g est dérivable sur $]-1, 1[$.
Notons alors $g_1 : x \mapsto \frac{1 + x}{1 - x}$ et $h(x) = \sqrt{x}$. Alors $g_1'(x) = \frac{1 - x + (1 + x)}{(x - 1)^2} = \frac{2}{(x - 1)^2}$.
D'autre part, $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Et donc par dérivation d'une composée,

$$g'(x) = (g_2 \circ g_1)(x) = g_1'(x)g_2'(g_1(x)) = \frac{2}{(x - 1)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1 - x)^{3/2}\sqrt{x + 1}}.$$

3. Notons que $2^{x - \frac{1}{x}} = \exp\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)\ln(2)\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et que sa dérivée est

$$x \mapsto \ln(2)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)2^{x - \frac{1}{x}}.$$

D'autre part, x^2-1 est non nul si et seulement si $x \neq \pm 1$, donc h est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1+\infty[$ et sa dérivée est

$$h' : x \mapsto \frac{\ln(2)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)2^{x-\frac{1}{x}}(x^2+1)-2x2^{x-\frac{1}{x}}}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{x^2(x^2-1)^2}2^{x-\frac{1}{x}}\left(\ln(2)(x^4-1)-2x^3\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.10

1. On a $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$, $f^{(5)}(x)=\frac{24}{x^5}$.
Il est donc raisonnable de conjecturer que pour $n\in\mathbf{N}^*$, on a $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.
Prouvons le par récurrence. Plus précisément, pour $n\in\mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « f est n fois dérivable et quel que soit $x\in\mathbf{R}_+^*$, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.
Pour $n=1$, la propriété est vraie.
Supposons que $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.
Alors $f^{(n)}$ est dérivable puisque la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^n}$ l'est, et on a

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{-n}{x^{n+1}}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}=(-1)^{n+1-1}\frac{(n+1-1)!}{x^{n+1}}.$$

Donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, et tout $x>0$, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

2. Commençons par noter que l'ensemble de définition de g est $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}=\left]-\infty,-\frac{1}{3}\right[\cup\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[$.
On a alors, pour $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$,

$$g'(x)=-\frac{2\times 3}{(1+3x)^2},\ g''(x)=\frac{2\times 2\times 3^2}{(1+3x)^3},\ g^{(3)}(x)=-\frac{2\times 2\times 3\times 3^3}{(1+3)^4},\ \text{etc}$$

Prouvons donc par récurrence sur $n\in\mathbf{N}^*$ que $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\times 3^n\times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.
Pour $n=1$, on a $g'(x)=-\frac{6}{(1+3x)^2}=\frac{(-1)^1 2\times 3^1\times 1!}{(1+3x)^{1+1}}$.
Donc la récurrence est initialisée.
Supposons que $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\times 3^n\times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.
Alors $g^{(n)}$ est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables, et

$$g^{(n+1)}(x)=(-1)^n 2\times 3^n\times n!\frac{-3(n+1)}{(1+3x)^{n+2}}=(-1)^{n+1}2\times 3^{n+1}\times(n+1)!\frac{1}{(1+3x)^{n+2}}.$$

Et donc la propriété est encore vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbf{N}$ et pour tout $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\times 3^n\times n!}{(1+3x)^{n+1}}$.

3. On a, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $h'(x)=ae^{ax+b}=ah(x)$.
Donc $h''(x)=ah'(x)=a^2h(x)$, puis $h^{(3)}(x)=a^2h'(x)=a^3h(x)$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $x\in\mathbf{R}$,

$$h^{(n)}(x)=a^n h(x)=a^n e^{ax+b}.$$

4. Les premières dérivées de sin sont cos, − sin, − cos, sin. Puis les suivantes sur cos, − sin, − cos, sin etc.
Et donc une certaine périodicité revient dans les dérivées : dès que l'on dérive 4 fois, on retombe sur sin.
Nous pouvons donc distinguer 4 cas :
• **Si n est de la forme $4k$, $k\in\mathbf{N}$ (autrement dit si n est divisible par 4)** : alors $\sin^{(n)}=\sin$.

Dérivabilité
Notons que, contrairement à ce que demandait l'énoncé, nous avons ici prouvé l'existence des dérivées $n^{\text{èmes}}$.
Les preuves sont similaires pour les autres fonctions, et nous les omettons (nous aurons bientôt des outils plus puissant pour prouver sans efforts l'existence de ces dérivées).

Méthode
Pour conjecturer la bonne formule, mieux vaut essayer de comprendre ce qui se passe à chaque fois qu'on dérive (ici c'est le numérateur qui pose problème).
Lorsqu'on dérive $g^{(n-1)}$, il y a un 3 qui apparaît au numérateur (qui est la dérivée de $1+3x$), mais également un $-n$ (qui vient de la dérivée de la puissance n au dénominateur). Et comme il y avait également un 2 au numérateur au départ, on le garde.

- **Si** n **est de la forme** $4k+1$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = \cos$.
- **Si** n **est de la forme** $4k+2$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = -\sin$.
- **Si** n **est de la forme** $4k+3$, $k \in \mathbf{N}$: alors $\sin^{(n)} = -\cos$.

Autrement dit
Ce cas correspond à n pair mais non divisible par 4.

Notons que si l'on voulait être totalement convaincant, on pourrait faire une récurrence rapide pour prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sin^{(4k)} = \sin$.
Et alors $\sin^{(4k+1)} = \left(\sin^{(4k)}\right)' = \sin' = \cos$, puis $\sin^{(4k+2)} = \left(\sin^{(4k+1)}\right)' = -\sin$, etc.
Alternative *: il existe un moyen plus simple de décrire les dérivées successives de* $\cos$*, et qui consiste à remarquer que* $-\sin(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Donc $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Donc $\cos''(x) = \cos'\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x+\pi)$.
On prouve alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$ *et tout* $x \in \mathbf{R}$, $\cos(k)(x) = \cos\left(x+k\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Une formule analogue existe pour le sinus.

En physique
Un physicien vous dira que dériver, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, un signal sinusoïdal et sa dérivée sont en quadrature de phase.

5. Notons que p est définie sur $\mathbf{R}$ privé de -1 et 1.
Suivons l'indication donnée, et commençons par chercher deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, $p(x) = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$.
Pour a et b réels, et $x \neq \pm 1$, on a

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}.$$

Donc en particulier, cette quantité vaut $p(x)$ si pour tout $x \neq \pm 1$, $(a+b)x+(b-a) = 1$.
Or deux polynôme sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, ce qui est le cas si et seulement si $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$
Donc $p(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.
Il nous faut donc calculer les dérivées successives de $p_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.
Ces deux cas se traitant de la même manière, calculons directement les dérivées successives de $f_c : x \mapsto \dfrac{1}{x+c}$.
On a alors $f_c'(x) = -\dfrac{1}{(x+c)^2}$, $f_c''(x) = \dfrac{2}{(x+c)^3}$, $f_c^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{(x+c)^4}$.
Et alors une récurrence rapide, similaire à celle de la question 2 prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_c^{(n)}(x) = (-1)^n\dfrac{n!}{(x+c)^{n+1}}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \neq \pm 1$,

$$p^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$

6. Rappelons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $3^x = e^{x\ln 3}$.
Et donc $k'(x) = (\ln 3)e^{x\ln(3)}$, $k''(x) = (\ln 3)^2 e^{x\ln(3)}$, etc, et donc une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$k^{(n)}(x) = (\ln 3)^n e^{x\ln(3)} = (\ln 3)^n 3^x.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.11

Pour $k=0$, on a $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$.
Pour $k=1$, $f'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$ et donc $f^{(1)}(0) = f'(0) = a_1$.
Pour $k=2$, on a $f''(x) = 2a_2+3\times 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$ et donc $f^{(2)}(0) = 2a_2$.
En dérivant encore une fois, $f^{(3)}(x) = 3\times 2a_3+4\times 3\times 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$ et donc $f^{(3)}(0) = 6a_3$.
Prouvons par récurrence sur $k \leqslant n$ que

$$f^{(k)}(x) = k(k-1)\cdots 1a_k+(k+1)k\cdots 2a_{k+1}x+\cdots+n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}$$

$$= k!a_k + (k+1)!a_{k+1}x + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}.$$

La récurrence a été largement initialisée ci-dessus.
Supposons donc la propriété vraie pour k, et supposons que $k+1 \leqslant n$.
Alors en dérivant $f^{(k)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (k+1)!a_{k+1} + \frac{(k+2)!}{(k+2-k)!}2a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)a_nx^{n-k-1} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-k-1)!}a_nx^{n-(k+1)} \\ &= (k+1)!a_{k+1} + (k+2)!a_{k+2}x + \cdots + \frac{n!}{(n-(k+1))!}a_nx^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.
En particulier, pour $k \leqslant n$, on a $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

Remarque
L'hypothèse de récurrence semble plus forte que le résultat que l'on souhaite au final.
C'est pourtant indispensable, car la connaissance de la valeur de $f^{(k)}(0)$ ne peut pas suffire à déterminer la valeur de $f^{(k+1)}(0)$: la valeur d'une fonction en un point ne suffit pas à déterminer la valeur de sa dérivée en ce même point. Penser par exemple aux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, qui valent toutes deux 0 en 0, mais n'ont pas le même nombre dérivé en 0.

Enfin, puisque $f^{(n)}$ est constante (égale à $n!a_n$), $f^{(n+1)}$ est nulle, de même que toutes les dérivées suivantes.
Et donc pour $k > n$, $f^{(k)}(0) = 0$.

Solution de l'exercice 2.12

La fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.
Donc au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, la tangente à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{1}{a^2}(x-a) + 1 - \frac{1}{a}$.
Et donc le point $(k, 1)$ appartient à cette tangente si et seulement si

$$1 = \frac{1}{a^2}(k-a) + 1 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow a = \frac{k}{2}.$$

Par conséquent le joueur doit tirer son $k^{\text{ème}}$ missile lorsque son vaisseau se trouve au point de coordonnée $\left(\frac{k}{2}, \frac{k-2}{k}\right)$.

Solution de l'exercice 2.13

Notons que l'équation implique que nécessairement $f(x)$ est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 (car $f(x) - f(x)^2 \geqslant 0$ si et seulement si $f(x) \in [0,1]$).
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cancel{\sqrt{f(x)-f(x)^2}} - \frac{1}{4} - \cancel{\sqrt{f(x)-f(x)^2}} - f(x) + f(x)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)^2 - f(x) + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$f(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0.$

Et donc ceci prouve que f est $2a$-périodique.

Solution de l'exercice 2.14

1. Il est bien connu que g tend bien vers 0 en $+\infty$.
De plus, pour deux réels strictement positifs x et y, on a

$$g(xg(y)) = \frac{1}{xg(y)} = \frac{1}{x\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} \text{ et } yg(x) = \frac{y}{x}.$$

Donc g est bien solution du problème posé.

2. Si f est une solution, et si α est un point fixe de f, alors $f(\alpha) = \alpha$.
Alors[7], pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x\alpha) = \alpha f(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f\left(x\alpha^2\right) = f\left((x\alpha)\alpha\right) = \alpha f(x\alpha) = \alpha^2 f(x)$.
Puis de même, $f\left(x\alpha^3\right) = \alpha f\left(x\alpha^2\right) = \alpha^3 f(x)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$.
Notons que si $\alpha = 1$, cette relation ne nous apprend pas grand chose : $f(x) = f(x)$...
▸ En revanche, supposons que $\alpha > 1$. Alors $x\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc par hypothèse, $f\left(x\alpha^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$. Or, f étant supposée à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, $f(x)$ est non nul, et donc $\alpha^n f(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une contradiction.
Donc déjà, on ne peut pas avoir $\alpha > 1$.

▸ Supposons à présent $\alpha < 1$. On a toujours $f\left(x\alpha^n\right) = \alpha^n f(x)$, mais cette fois, $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui ne nous avance pas beaucoup...
On a alors $\alpha = f(\alpha) = f(1\times\alpha) = f(1 f(\alpha)) = \alpha f(1)$.
Et donc en divisant par α, $f(1) = 1$.
Et alors $1 = f(1) = f\left(\dfrac{1}{\alpha}\alpha\right) = \alpha f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ de sorte que $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{1}{\alpha}$.
Et donc $\dfrac{1}{\alpha}$ est également un point fixe de f.
Or, $\dfrac{1}{\alpha} > 1$, et nous avons déjà dit qu'il ne pouvait y avoir de points fixes supérieurs strictement à 1.
Donc il n'y a pas non plus de points fixes de f dans $]0,1[$, de sorte que le seul point fixe éventuel de f est 1.

3. Nous n'avons pas encore dit qu'une fonction f solution au problème posé possède un point fixe ! Mais notons que si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors en prenant $y = x$ dans la relation $(\mathscr{R})$, on a $f(xf(x)) = xf(x)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f, qui possède donc au moins un point fixe.
Et d'après la question précédente, ce point fixe ne peut être que 1.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} = g(x)$.
Et donc g est la seule fonction qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

[7] En prenant $y = \alpha$ dans la relation $(\mathscr{R})$.

Détails
Nous avons utilisé deux fois la relation $(\mathscr{R})$: une fois avec $x = \frac{1}{\alpha}$ et $y = \alpha$ et une autre fois avec $x = \alpha$ et $y = \frac{1}{\alpha}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.15

1. Notons $f_a : x \mapsto a^x$. Alors f_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$f_a'(x) = \ln(a)e^{x\ln a} = \ln(a)a^x.$$

En particulier, f_a' est du signe de $\ln(a)$.
Donc si $a = 1$, f_a est constante, si $a > 1$, f_a est strictement croissante et si $a < 1$, alors f_a est strictement décroissante.

2. Il est évident que $x = 1$ est une solution de l'équation.
La fonction $f : x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante car somme de deux fonctions strictement croissantes.
Et donc si $x > 1$, $f(x) > f(1) = 5$, et donc x n'est pas solution de l'équation de départ.
De même, si $x < 1$, alors $f(x) < 5$, et donc x n'est pas solution.
On en déduit que l'équation $2^x + 3^x = 5$ possède une unique solution, qui vaut 1.

Alternative
Une fonction strictement monotone ne peut prendre deux fois la même valeur. Or f prend la valeur 5 en 1, elle ne peut donc la prendre nulle part ailleurs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.16

1. Notons que l'équation n'a de sens que pour $x \geqslant 0$, et que 0 et 1 sont clairement solutions.
Pour $x \neq 0$, et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln\left(x^{1/2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow 4x = x^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Donc 0, 1 et 4 sont les seules solutions de l'équation.

Rappel
$0^0 = 1$.

⚠ Attention !
Bien que l'équation ait un sens pour $x = 0$, l'expression avec des ln n'est valable que pour $x > 0$.

2. L'équation s'écrit encore $e^{x^2\ln(3)} = e^{x^5\ln(11)} \Leftrightarrow x^2\ln(3) = x^5\ \ln(11)$.
Il est clair que 0 est solution, et pour $x \neq 0$, cette équation équivaut à

$$x^3 = \frac{\ln(3)}{\ln(11)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{0, \sqrt[3]{\frac{\ln(3)}{\ln(11)}}\right\}$.

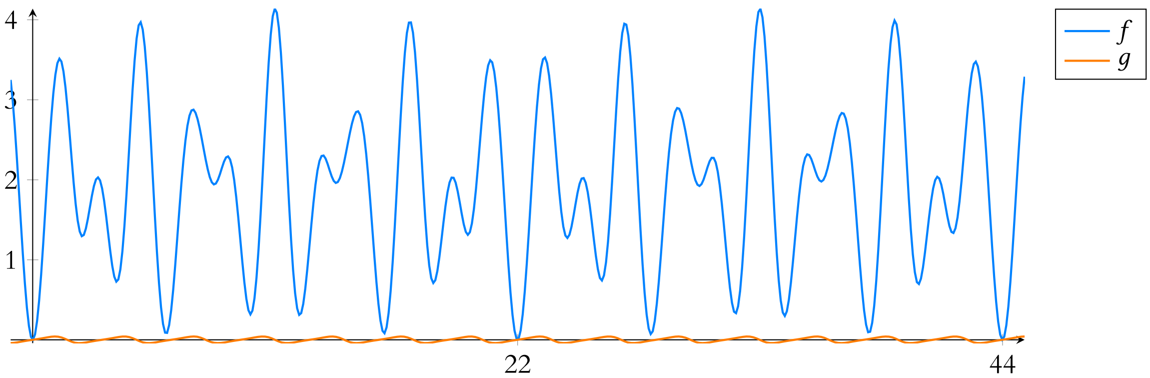
3. On a $\pi^{\sin^2(x)} = e^{\sin^2(x)\ln(\pi)} \geqslant e^0 = 1$.
D'autre part, $\cos(\pi x) \leqslant 1$.

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\begin{cases}\cos(\pi x) = 1 \\ \pi^{\sin^2(x)} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(\pi x) = 1 \\ \sin^2(x) = 0\end{cases}$

Or $\cos(\pi x) = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\pi x = 2k\pi \Leftrightarrow x = 2k$.
Mais d'autre part, $\sin(x) = 0$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{Z}$ tel que $x = \ell\pi$.
Il est clair que 0 est solution, et si $x \neq 0$ est une solution, avec $x = 2k = \ell\pi$, alors $\pi = \frac{2k}{\ell} \in \mathbf{Q}$.
Puisque π est irrationnel , ceci est impossible, et donc 0 est l'unique solution de l'équation.
J'en profite pour signaler un fait amusant, pour lequel je n'ai pas d'explication : en observant le graphique de $f : x \mapsto \pi^{\sin^2(x)} - \cos(\pi x)$, on a de prime abord l'impression qu'il s'agit d'une fonction 22-périodique.
Et de fait, si l'on essaie de superposer le graphique de f à celui de $x \mapsto f(x + 22)$, ils ont l'air de se superposer... jusqu'à ce qu'on zoome un peu.
Nous avons tracé ci-dessous le graphique de la fonction[8] $g : x \mapsto f(x + 22) - f(x)$, et s'il est clair que celle-ci n'est pas nulle (et donc que f n'est pas 22-périodique), il est quand même troublant de constater que son amplitude ne dépasse pas le centième de celle de f.

> **Irrationnel**
> L'irrationalité de π a été mentionnée pour l'instant, mais n'a pas été prouvée (ce qui sera peut-être fait en devoir en cours d'année). Une «bonne» raison pour que π soit irrationnel est tout simplement que si π était égal à une fraction, on vous aurait déjà fait apprendre cette fraction !

[8] Qui elle-même a presque l'air d'être 3-périodique...



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.17

1. Partons plutôt du membre de droite :

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) & \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}\right) \\ &= \operatorname{ch}(x+y).\end{aligned}$$

2. De même, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) & \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}\right) \\ &= \operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2} &= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left((e^x)^2+(e^{-x})^2+2e^xe^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}\right)^2 = \mathrm{ch}^2(x).\end{aligned}$$

Et donc puisque $\mathrm{ch}(x) \geqslant 0$, il vient $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}}$.

> **Signe !**
> Il faut bien s'assurer de la positivité avant de passer à la racine carrée, sans cela nous pourrions juste affirmer que
> $$|\mathrm{ch}(x)| = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}}.$$

4. On a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\mathrm{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\frac{\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &= \frac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &= \frac{2\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\\ &= 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \mathrm{sh}\left(2\frac{x}{2}\right) = \mathrm{sh}(x).\end{aligned}$$

C'est la formule de la question 2, dans le cas particulier où $x = y$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.18

L'inégalité proposée est équivalente, en appliquant le logarithme des deux côtés, à

$$x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2).$$

Notons donc f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car somme de produit de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - (1-x)\frac{1}{1-x} - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

On a donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1-x \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

> **Signes**
> La seconde équivalence n'en est une que parce que $1-x > 0$.

Par conséquent, le tableau de variations de f est donné par :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0

Donc la fonction f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$, et ce minimum vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.
Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a bien $x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2)$ et donc

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $x = \dfrac{1}{2}$, car le minimum de f n'est atteint qu'en $x = \dfrac{1}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.19

Notons k le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10. Alors

$$10^{k-1} \leqslant n < 10^k.$$

Et donc en passant au logarithme[9],

$$(k-1)\ln(10) \leqslant \ln n < k\ln(10) \Leftrightarrow k-1 \leqslant \log_{10}(n) < k.$$

Et donc $\lfloor \log_{10}(n) \rfloor = k-1 \Leftrightarrow k = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

[9] Ce qui préserve le sens des inégalités puisque le ln est strictement croissant.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.20

On a

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) = c &\Leftrightarrow a\left(e^x + e^{-x}\right) + b\left(e^x - e^{-x}\right) = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^x + (a-b)e^{-x} = 2c \\ &\Leftrightarrow (a+b)e^{2x} - 2ce^x + (a-b) = 0. \end{aligned}$$

Détails
On a multiplié l'égalité par $e^x \neq 0$.

Posons donc $X = e^x$, de sorte que $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$.
Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en X, dont le discriminant est $\Delta = 4c^2 - 4(a+b)(a-b) = 4\left(c^2 - (a^2-b^2)\right)$.

▸ **Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 - b^2$**, alors l'équation ne possède pas de solution.

▸ **Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2$**, alors le polynôme possède une unique racine $X = \dfrac{c}{a+b}$.
Or, $X = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow e^x = \dfrac{c}{a+b} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.
Donc l'équation de départ possède $\ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$ comme unique solution.

▸ **Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow c^2 > a^2 - b^2$.**
Alors le polynôme possède deux racines, qui sont

$$X_1 = \frac{2c + \sqrt{\Delta}}{2(a+b)} = \frac{c + \sqrt{c^2 - (a^2-b^2)}}{a+b} \text{ et } X_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - (a^2-b^2)}}{a+b}.$$

Il est évident que X_1 est strictement positif, et que $e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1)$.
En revanche le signe de X_2 est moins évident.
Plus précisément, X_2 est du signe de $c - \sqrt{c^2 - (a^2-b^2)}$. Mais

$$\begin{aligned} c - \sqrt{c^2 - (a^2-b^2)} > 0 &\Leftrightarrow c > \sqrt{c^2 - (a^2-b^2)} \\ &\Leftrightarrow c^2 > c^2 - (a^2-b^2) \\ &\Leftrightarrow a^2 > a^2 \Leftrightarrow a > b. \end{aligned}$$

Le passage au carré est bien une équivalence puisque c est positif.

Donc si $a > b$, l'équation de départ possède deux solutions qui sont $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$, et si $a \leqslant b$ (tout en gardant $\Delta > 0$), alors l'équation ne possède qu'une solution, qui est $\ln(X_1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.21

La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables.
On a alors, pour $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = -\frac{7}{(x-3)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3[$ et sur $]3, +\infty[$.

Danger !
On n'en déduit pas directement que f est décroissante sur son domaine de définition, car celui-ci n'est pas un intervalle !

On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2.$$

Et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.
D'autre part, lorsque x tend vers 3 par valeurs inférieures, alors $2x+1 \to 7$ et $x-3 \to 0$, en restant négatif, de sorte que $\displaystyle\lim_{x\to3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$.
Au contraire, lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures, alors $x-3 \to 0$ en restant positif et donc $\displaystyle\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$.
En appliquant le théorème de la bijection sur $]-\infty, 3[$, où f est continue[10] et strictement décroissante, f réalise une bijection de $]-\infty, 3[$ sur $]-\infty, 2[$.

[10] Car quotient de deux fonctions continues.

De même, en appliquant le théorème de la bijection sur $]3, +\infty[$, on montre que f réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$.
Autrement dit, un réel strictement inférieur à 2 possède un unique antécédent par f dans $]-\infty, 3[$ et aucun dans $]3, +\infty[$.
Inversement, tout réel strictement supérieur à 2 possède un unique antécédent dans $]3, +\infty[$ et aucun dans $]-\infty, 3[$.
Donc tout réel différent de 2 possède un unique antécédent par f dans $\mathbf{R} \setminus \{3\}$.
Ainsi, f réalise une bijection de $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.
Pour déterminer sa bijection réciproque, considérons un réel $y \neq 2$, et résolvons l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x.
On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} = y \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = y(x-3) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = -3y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+3y}{y-2}. \end{aligned}$$

Et donc la bijection réciproque de f est $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \setminus \{3\} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1+3y}{y-2} \end{array} \right.$.

Remarque *: montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution suffit à prouver que f est bijective... mais pour cela il faut déjà savoir sur quel ensemble elle est bijective (ce pour quoi nous avons utilisé le théorème de la bijection).*
Cela dit, en essayant de résoudre $f(x) = y$, on réalise rapidement qu'il y a une et une seule solution si $y \neq 2$, et aucune si $y = 2$, donc on retrouve ainsi le fait que l'ensemble image soit $\mathbf{R} \setminus \{2\}$.

> **Monotonie**
> Nous avons là un exemple de bijection qui n'est pas monotone.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.22

1. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \ln(x) \end{array} \right.$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = 2x\ln(x) + \frac{x^2}{x} = x\left(2\ln(x) + 1\right).$$

Et donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1/2}$.
Enfin, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Le tableau de variations de f est donc donné par

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\frac{e^{-1}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

> **Limite**
> Notons que la limite de f en 0 fait apparaître une forme indéterminée $0 \times -\infty$, et nous ne pouvons conclure qu'à l'aide des résultats de croissances comparées du cours.

Il est donc clair[11] que f prend des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}]$, et donc cet intervalle ne saurait contenir de solution à l'équation $f(x) = 1$.
En revanche, sur $]e^{-1/2}, +\infty[$, f est dérivable, elle y est strictement croissante, et donc par le théorème de la bijection, réalise une bijection de $]e^{-1/2}, +\infty[$ sur $\left]-\dfrac{e^{-1}}{2}, +\infty\right[$.

Et par conséquent, il existe un unique $x \in \left]-\dfrac{e^{-1}}{2}, +\infty\right[$ vérifiant $f(x) = 1$.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $g(x) = f(x) - x$, de sorte que x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.
Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}$ car somme et produit de fonctions qui le sont, et on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-x} - 1 = -xe^{-x} - 1.$$

[11] Bien entendu, un tableau de variations n'est pas une preuve, mais a-t-on vraiment besoin de tout écrire ? Ici, l'argument clé est que f est décroissante sur $]0, e^{-1/2}]$, et puisque f tend vers 0 en 0, elle prend donc des valeurs négatives sur $]0, e^{-1/2}]$. Mais tout le monde doit pouvoir le comprendre sur le tableau de variation.

Le signe de g' n'est pas évident, donc dérivons une fois de plus : g' est dérivable et pour $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = (x-1)e^{-x}$.
Donc le tableau de variations de g' est donné par

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	-1

En appliquant le théorème de la bijection à g', sur $]-\infty, 1]$, on prouve qu'il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.
On peut même, bien que ce ne soit pas utile ici, être plus précis : $g'(-1) = e - 1 > 0$, donc $\alpha > -1$.
De même, $g'(0) = -1$, donc $\alpha \in]-1, 0[$.
Nous pouvons donc désormais dresser le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Notons que la valeur exacte de $g(\alpha)$ n'est pas connue, mais puisque $g(0) = 1$, $g(\alpha) \geqslant g(0) > 0$.
Et donc g est dérivable et strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$: elle réalise une bijection de $]-\infty, \alpha[$ sur $]-\infty, g(\alpha)]$.
En particulier, il existe[12] un unique $x_0 \in]-\infty, \alpha]$ tel que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.
De même, g réalise une bijection de $]\alpha, +\infty[$ sur $]-\infty, g(\alpha)[$, et donc il existe un unique $x_2 \in]\alpha, +\infty[$ tel que $g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = x_2$.
Au final, f possède deux points fixes, qui sont x_1 et x_2.

[12] Car 0 est dans l'intervalle image.

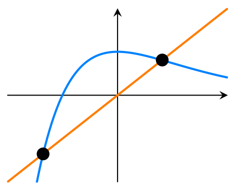
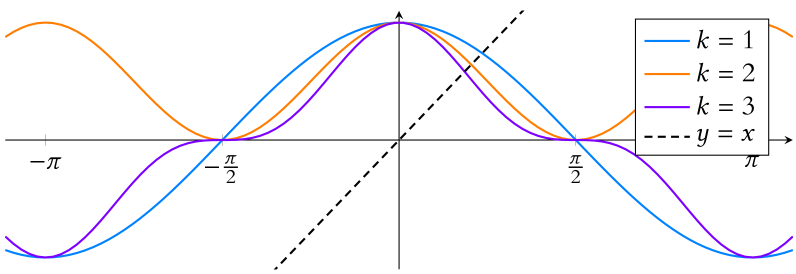


FIGURE 2.2– Les deux points fixes de f.

3. Il s'agit de prouver qu'il existe un unique $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos^k(x) = x$.
Notons dès à présent que $-1 \leqslant \cos^k(x) \leqslant 1$, et donc que l'équation $\cos^k(x) = x$ ne possède pas de solution en dehors de $[-1, 1]$.
De plus, puisque $[-1,1] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour $x \in [-1, 1]$, $\cos^k(x) \geqslant 0$. Et donc $\cos^k(x) = x$ n'a pas de solution dans $[-1, 0[$. Pour $x \in [0,1]$, posons alors $f(x) = \cos^k(x) - x$. Un réel $x \in [0, 1]$ est alors un point fixe de $\cos^k$ si et seulement si $f(x) = 0$.
Or, f est dérivable sur $[0,1]$, avec $f'(x) = -k\sin(x)\cos^{k-1}(x) - 1$.
Toujours car $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, pour $x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geqslant 0$.
Et donc $f'(x) < 0$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
Or f est continue sur cet intervalle, et $f(0) = 1$ et $f(1) = \cos^k(1) - 1 < 0$.
Par le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$, et donc $\cos^k$ possède un unique point fixe.

Détails
Puisque 1 n'est pas un multiple de π, $\cos^k(1) \neq 1$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.23

1. La fonction f est dérivable[13], et sa dérivée est $f' : x \mapsto 5x^4 - 3x^2 = 5x^2\left(x^2 - \dfrac{3}{5}\right)$.
Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - \dfrac{3}{5}$.
Et donc le tableau de variations de f est donné par

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\searrow$		$\searrow$	$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mais $f\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) = -\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5/2} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/2} + 1$.

Mais puisque $0 < \dfrac{3}{5} < 1$, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5/2} < \left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/2}$, et donc $f\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) > 1$.

D'autre part, $f\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{5/2} - \underbrace{\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3/2}}_{<1} + 1 \geqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^{5/2} > 0$.

Sur l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right[$, f est strictement croissante, et réalise donc une bijection de $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right[$ sur $\left]-\infty, f\left(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)\right[$. Puisque 0 appartient à cet intervalle, il existe donc une unique racine de f dans $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right[$.

Puisque d'autre part le minimum de f sur $\left]-\sqrt{\dfrac{3}{5}}, +\infty\right[$ est strictement positif, f ne possède pas de racine sur cet intervalle. Et donc f possède une unique racine.

[13] Comme toute fonction polynomiale.

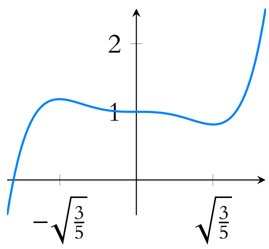


FIGURE 2.3– La fonction f.

2. La fonction g est dérivable, avec $g' : x \mapsto 15x^4 + 30x^2 - 45 = 15(x^4 + 2x^2 - 3)$.
Pour étudier son signe, posons $X = x^2$, de sorte que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation polynomiale de degré 2 en X, dont les racines sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -3$.
Et donc on a

$$g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Le tableau de variations de g est donc donné par

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Mais $g(-1) = -3 - 10 + 45 + \lambda = 32 + \lambda$ et $g(1) = 3 + 10 - 45 + \lambda = \lambda - 32$.
Et donc $g(-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant -32$ et de même, $g(1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant 32$.
Distinguons alors plusieurs cas :
► <u>**Si $\lambda < -32$.**</u> Alors sur $]-\infty, 1]$, g possède un maximum atteint en -1, et qui vaut $g(-1) < 0$.
Et donc pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $g(x) < 0$, de sorte que g ne possède pas de racine sur $]-\infty, 1]$.
Sur $]1, +\infty[$, g est strictement croissante, et étant dérivable, par le théorème de la bijection,

elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]g(1),+\infty[$.
Mais $g(1) < 0$, et donc ce dernier intervalle contient 0 : il existe un unique $\alpha \in]1,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Et donc g possède une unique racine.
▸ Si $-32 < \lambda < 32$. Alors g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, et donc réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur $]-\infty, g(-1)]$. Puisque $g(-1) \geqslant 0$, 0 appartient bien à $]-\infty, g(-1)]$ et donc possède un unique antécédent par g dans l'intervalle $]-\infty,-1]$.
Il existe donc un unique $\alpha_1 \in]-\infty,-1]$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Sur le même principe, on montre qu'il existe une unique racine α_2 de g dans l'intervalle $]-1,1]$ et une unique racine α_3 dans l'intervalle $]1,+\infty[$.
Et donc g possède trois racines.
▸ Si $\lambda > 32$ Alors $g(-1) > 0$ et $g(1) > 0$, et on montre comme précédemment, que g possède une unique racine, qui se trouve dans l'intervalle $]-\infty,-1]$.
▸ Si $\lambda = 32$: alors $g(-1) > 0$ et $g(1) = 32$.
Donc il existe une unique racine sur $]-\infty,-1[$, et 1 est l'unique racine sur $[-1,+\infty[$, de sorte que g possède deux racines.
▸ Si $\lambda = -32$: alors $g(-1) = 0$ et $g(1) < 0$, donc g possède une unique racine dans $]1,+\infty[$, et -1 est l'unique racine dans $]-\infty,1]$, donc g possède deux racines.

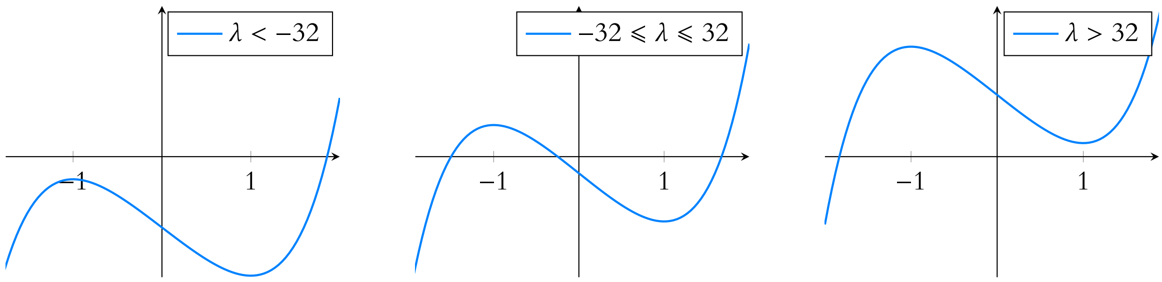


Figure 2.4 – Les trois cas possibles.

3. La fonction h est dérivable, avec $h'(x) = (n+2)x^{n+1} - 2(n+2)x = (n+2)x(x^n - 2)$.
▸ **Si n est pair**, notons que h est paire[14] de sorte qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbf{R}_+$, intervalle sur lequel h' est du signe de $x^n - 2$.
Alors $x^n - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt[n]{2} \leqslant x \leqslant \sqrt[n]{2}$.
Le tableau de variations de h est donc donné par

x	0		$\sqrt[n]{2}$		$+\infty$
$h'(x)$	$+$	z	$-$	z	$+$
$h(x)$	1	↘	$h(\sqrt[n]{2})$	↗	$+\infty$

Or, $h\left(\sqrt[n]{2}\right) = 2^{\frac{n+2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 2 \cdot 2^{\frac{2}{n}} - (n+2)2^{\frac{2}{n}} + 1 = 1 - n2^{\frac{n}{2}} < 0$.
Donc deux applications du théorème de la bijection[15] sur $[0, \sqrt[n]{2}]$ (où h est strictement décroissante) et sur $[\sqrt[n]{2}, +\infty[$ (où h est strictement croissante) prouvent que h possède une et une seule racine sur chacun de ces intervalles.
Par parité, elle en a donc une et une seule sur $]-\infty, -\sqrt[n]{2}[$ et une et une seule sur $[-\sqrt[n]{2}, 0]$, et donc possède en tout 4 racines.
▸ **Si n est impair**
Alors cette fois, on a $x^n - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt[n]{2}$. Et donc le tableau de variations de h est donné par :

[14] Les fonctions $x \mapsto x^k$ ont même parité que k.

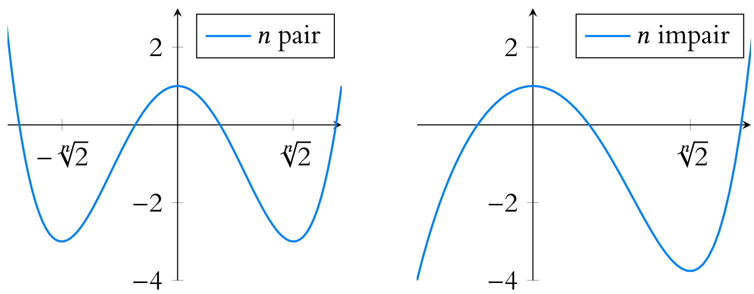
[15] Qui s'applique puisque h est continue.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[n]{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
x^n-2		$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(\sqrt[n]{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme précédemment, on a $h\left(\sqrt[n]{2}\right) < 0$.
Quelques précisions tout de même sur les limites en $\pm\infty$: on a

$$h(x) = x^{n+2}\left(1 \underbrace{-(n+2)\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0}\right)$$

et donc h a même limite en $\pm\infty$ que x^{n+2}.
Donc en $+\infty$, cette limite est $+\infty$ et en $-\infty$, c'est soit $+\infty$, soit $-\infty$, suivant que n soit pair ou impair.
Comme précédemment, des applications du théorème de la bijection sur $]-\infty, 0]$, $]0, \sqrt[n]{2}[$ et $]\sqrt[n]{2}, +\infty[$, sur lesquels h est strictement monotone et continue, prouvent que h possède une racine sur chacun de ces intervalles.
Et donc qu'elle possède en tout 3 racines réelles.



SOLUTION DE L'EXERCICE 2.24

Puisque $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$, on a $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1}{\cos(y)} \Leftrightarrow \cos(y) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

> **Rédaction**
> La lettre x désigne déjà un réel fixé, on évite donc de la prendre comme variable de la fonction f.

La fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, avec $f'(t) = -\sin(t) \leqslant 0$.

Puisque cette dérivée ne s'annule que pour $t = 0$, f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Par le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x), f(0)\right] =]0, 1]$.

Mais $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$, de sorte que $0 < \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \leqslant 1$.

Et donc il existe un unique $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(y) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

Puisque $x \geqslant 0$, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$. Mais nous savons que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x) - 1$.
Et donc[16]

$$\mathrm{sh}(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2(x) - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(y)} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)}} = \sqrt{\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}.$$

Mais puisque $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(y) > 0$ et $\sin(y) \geqslant 0$, de sorte que

$$\cos(y) = \sqrt{\cos^2(y)} \text{ et } \sin(y) = \sqrt{\sin^2(y)}$$

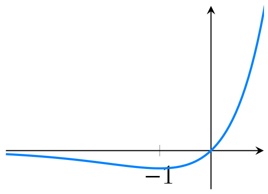
[16] Et c'est là qu'il est indispensable d'avoir vérifié la positivité de $\mathrm{sh}(x)$.

et donc
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\sin y}{\cos y} = \tan(y).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.25

Il s'agit donc de trouver quelles sont les valeurs que peut prendre la fonction $f : x \mapsto xe^x$, et combien de fois elle prend chaque valeur.
La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.
Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ est du signe de $x+1$, et donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Et lorsque $x \to -\infty$, en posant $X = -x$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \to -\infty$, il vient
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$$
Donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$



Par le théorème de la bijection, (qui s'applique car f est continue comme produit de deux fonctions continues) f réalise une bijection strictement décroissante, de $]-\infty, -1]$ sur $]-e^{-1}, 0[$ et une bijection strictement croissante de $]-1, +\infty[$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.
Donc si $y < -e^{-1}$, y ne possède aucun antécédent par f, et donc $xe^x = y$ ne possède pas de solution.
Si $y = -e^{-1}$, alors y possède -1 comme unique antécédent par f.
Si $y \in]-e^{-1}, 0[$, alors y possède deux[17] antécédents par f : un dans $]-\infty, -1]$ et un dans $]-1, +\infty[$.
Donc l'équation $xe^x = y$ possède deux solutions.
Enfin, si $y \geqslant 0$, alors y ne possède aucun antécédent par f dans $]-\infty, -1]$, et un seul dans $]-1, +\infty[$ (qui se trouve dans $[0, +\infty[$). Et donc $xe^x = y$ possède une et une seule solution.
En résumé, l'équation $xe^x = y$ possède :

- aucune solution si $y < -e^{-1}$
- une unique solution si $y = -e^{-1}$ ou $y \geqslant 0$
- deux solutions si $-e^{-1} < y < 0$.

[17] Et exactement deux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.26

1. Notons que f est bien définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puisque cos ne s'y annule pas.
De plus, cos y est dérivable, donc il en est de même de f, qui par conséquent est continue.
Puisque cos est strictement décroissante et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, son inverse f y est strictement croissante.
On a $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, de sorte que par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $J = [1, +\infty[$.

Signe
La positivité est importante pour conclure quant à la monotonie de l'inverse ! Par exemple $x \mapsto x$ est croissante, mais pas de signe constant, et son inverse n'est pas décroissante sur son ensemble de définition ($\mathbf{R}^*$).

2. Nous savons que f^{-1} est dérivable en tous les points x de J tels que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$.
Or, la dérivée de f est $f' : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ qui, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, s'annule uniquement en 0.
Puisque $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$, f^{-1} est dérivable sur J, sauf en 1.
Sa dérivée est alors donnée par
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}.$$
Nous savons[18], que $f\left(f^{-1}(x)\right)(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x \Leftrightarrow \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x}$.
Et donc[19],
$$\cos^2\left(f^{-1}(x)\right) + \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

[18] Par définition d'une bijection réciproque.

[19] $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Puisque $f^{-1}(x)$ est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, son sinus est positif, et donc $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$.
On en déduit donc que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

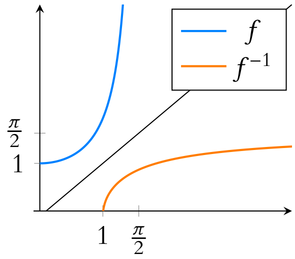


Figure 2.5– Les graphes de f et f^{-1}. On y voit notamment que f^{-1} n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).

Solution de l'exercice 2.27

Avant toute chose, remarquons que I doit être symétrique pour que la notion d'imparité possède bien un sens.
Soit donc $x \in I$. Alors $f\left(-f^{-1}(x)\right) = -f\left(f^{-1}(x)\right) = -x$.
Puisque $f^{-1}(x) \in]-a, a[$, alors $-f^{-1}(x) \in]-a, a[$, et donc $-x$ est bien l'image d'un élément de $]-a, a[$, donc il est dans I.
Ceci prouve donc que I est nécessairement symétrique.

Mieux : nous venons de prouver que $-f^{-1}(x)$ est un antécédent de $-x$ par f. Mais f étant bijective, un tel antécédent est unique, et c'est $f^{-1}(-x)$.
Et donc $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$: la fonction f^{-1} est impaire.

Si f est paire, alors elle n'est pas bijective, puisque $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$, et donc ce nombre possède deux antécédents distincts par f.
Et par conséquent, f^{-1} n'existe pas.

Rudiments de logique. Ensembles

3

3.1 Propositions logiques

Une **proposition logique** (ou **assertion**) P est une phrase dont on peut dire qu'elle est soit vraie soit fausse[1].
Par exemple, la proposition «2 est positif» est vraie, et la proposition «$-1 > 2$» est fausse.
La **valeur de vérité** d'une proposition est donc soit «vrai» (noté généralement V), soit «faux» (noté F).

[1] Mais pas les deux à la fois !

Une phrase en français n'est pas forcément une proposition logique :

- «S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas» est bien vraie, donc est une assertion logique.
- «Federer est le meilleur tennisman de tous les temps» ne fait pas l'unanimité, donc ne peut être considérée comme une proposition logique.

Remarquons qu'une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres, comme par exemple la proposition «$\lfloor x^2 \rfloor \geqslant 9$» qui dépend d'un réel x, ou encore «n est divisible par 6», qui dépend d'un entier n.
On fera alors attention à nommer correctement ces propositions, en faisant apparaître la ou les variables dans le nom. Par exemple $P(x)$ et $Q(n)$ et pas seulement P ou Q.
Ceci évite les confusions car par exemple, $Q(2)$ est fausse alors que $Q(6)$ est vraie. Si on l'avait nommée uniquement Q, quelle valeur de vérité donner à Q ?

Remarque
Cette notation ne doit pas vous surprendre, c'est celle que vous avez utilisé pour les récurrences en terminale !

À partir de plusieurs propositions logiques, il est possible d'en créer d'autres, par exemple la proposition «2 est positif **et** $-1 > 2$». Cette dernière proposition est fausse, puisque -1 n'est toujours pas supérieur à 2.
On peut aussi par exemple considérer la proposition «si il neige, alors il fait froid».

La **table de vérité** d'une formule R construite à base d'autres propositions[2] est un tableau donnant la valeur de vérité de R en fonction des valeurs de vérité des propositions utilisées pour la construire.

[2] Qu'on appellera des variables propositionnelles.

Par exemple, la table de vérité de la proposition «P et Q» est la suivante :

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Autrement dit, la proposition «P **et** Q» est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
Deux formules qui ont la même table de vérité sont dites **équivalentes**. Autrement dit, quelle que soit la valeur de vérité des variables propositionnelles qui la composent, elles ont la même valeur de vérité.
Si deux propositions P et Q sont équivalentes, on note alors $P \equiv Q$.

Nous présentons dans la suite les principaux connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes.

3.1.1 Négation

Définition 3.1 – Si P est une proposition logique, alors sa **négation** notée $\neg P$ (ou **non** P) est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse.

Elle a donc la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Exemples 3.2

La négation de $P : x < 4$ est $\neg P : x \geqslant 4$.
La négation de «il fait chaud tous les jours» est «certains jours, il ne fait pas chaud».
Et sûrement pas «tous les jours, il ne fait pas chaud» !
La négation de $P : x^2 = 3$ et $\neg P : x^2 \neq 3$.
La négation de $P : -1 < x \leqslant 2$ est $\neg P : x \leqslant -1$ **ou** $x > 2$.

Proposition 3.3 (Loi de la double négation) : *Si P est une proposition logique, alors $\neg(\neg P) \equiv P$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que P et $\neg(\neg P)$ ont la même table de vérité :

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
V	F	V
F	V	F

□

3.1.2 Conjonction («et») et disjonction («ou»)

Définition 3.4 – Soient P et Q deux propositions logiques.

1. La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ (ou «P **et** Q») est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies, et qui est fausse sinon.
2. La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ (ou «P **ou** Q») est la proposition qui est fausse si et seulement si P et Q sont simultanément fausses, et qui est vraie sinon.

Autrement dit, les tables de vérité de ces deux propositions sont données par

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Autrement dit
P **ou** Q est vraie dès que l'une (ou les deux !) des deux propositions P et Q est vraie.

Ordre ?
L'ordre n'a bien évidemment aucune importance : $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ sont équivalentes, de même que $P \vee Q$ et $Q \vee P$.

Exemple 3.5

Si n est un entier naturel, alors si $P(n)$ est la proposition «n est pair», si $Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 3», alors $P(n) \wedge Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 6».
En revanche, $P(n) \vee Q(n)$ est la proposition «n est divisible par 2 ou par 3», qui est vraie pour tous les entiers qui ne sont pas de la forme $6k+1$ ou $6k+5$, $k \in \mathbf{N}$.

⚠ En français, le **ou** est souvent (mais pas toujours) exclusif, comme dans «fromage **ou** dessert». Autrement dit, on considère qu'il est vraie si une et une seule des propositions qui

le composent est vraie.
En logique, le **ou** que l'on manipule, et dont on vient de donner la table de vérité est inclusif : (P **ou** Q) est vraie dès que l'une des deux propositions P ou Q est vraie, y compris si les deux sont vraies.

Proposition 3.6 : *Pour toute proposition P, on a :*

1. $P \wedge (\neg P)$ *est fausse*
2. $P \vee (\neg P)$ *est vraie (principe du tiers-exclus).*

Remarque

Ces deux propositions traduisent le fait que P est toujours soit vraie soit fausse (il n'y a pas de troisième option), et ne peut être les deux à la fois.

Démonstration. Dresser les tables de vérité de $P \wedge (\neg P)$ et $P \vee (\neg P)$. □

Proposition 3.7 (Négation d'une conjonction/disjonction) : *Soient P et Q deux propositions logiques. On a alors*

1. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **et** Q) $\equiv$ (**non** P) **ou** (**non** Q).
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   Autrement dit **non**(P **ou** Q) $\equiv$ (**non** P) **et** (**non** Q).

Démonstration. Une fois encore, dressons des tables de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$
V	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	F	V	V

Nous constatons donc que les tables de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et $(\neg P) \vee (\neg Q)$ (resp. $\neg(P \vee Q)$ et $(\neg P) \wedge (\neg Q)$) sont les mêmes. □

Exemple 3.8

Si P est la proposition : «je fais du ski» et Q la proposition «je fais de l'escalade», alors $P \wedge Q$ est la proposition «je fais du ski et de l'escalade».
Sa négation est $(\neg P) \vee (\neg Q)$: «je ne fais pas de ski ou ne fais pas d'escalade».
Et pas : «je ne fais ni ski ni escalade» !
En effet, si vous ne pratiquez que l'un des deux sports, alors $P \wedge Q$ est fausse, donc $\neg(P \wedge Q)$ est vraie, alors que $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ est fausse.
En revanche, la négation de $P \vee Q$ («je fais du ski ou de l'escalade) est bien $(\neg P) \wedge (\neg Q)$: «je ne pratique pas le ski et ne pratique pas l'escalade» (ou encore «je ne pratique ni le ski ni l'escalade»).

Le résultat qui suit est plutôt intuitif, mais il est bon de le mentionner :

Proposition 3.9 (Associativité de $\wedge$ et $\vee$) : *Soient P, Q, R trois assertions logiques. Alors*

1. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
2. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

Démonstration. Dresser des tables de vérité. □

La proposition précédente signifie que lorsqu'on utilise plusieurs fois de suite le même symbole $\vee$ ou $\wedge$, il n'est pas utile de mettre des parenthèses. Attention, ceci n'est plus vrai si l'on mélange conjonction ($\wedge$) et disjonction ($\vee$).
Mais on dispose alors du résultat suivant :

Proposition 3.10 (Distributivités) : *Soient P, Q, R trois propositions logiques. Alors*

1. $(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
   Soit encore $(P$ **ou** $Q)$ **et** $R \equiv (P$ **et** $R)$ **ou** $(Q$ **et** $R)$.
2. $(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
   Soit encore $(P$ **et** $Q)$ **ou** $R \equiv (P$ **ou** $R)$ **et** $(Q$ **ou** $R)$.

Démonstration. Prouvons uniquement le premier point, comme toujours à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge R$	$(P \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

□

3.1.3 Implication, équivalence

Définition 3.11 (Implication) – Si P et Q sont deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$, et on lit «P implique Q» la proposition dont la table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque

$P \Rightarrow Q$ est fausse si et seulement si P est vraie et que Q est fausse.

Dire que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie signifie que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi. Par exemple, si x est un nombre réel, alors «$x \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 0$» est vraie, puisqu'un réel plus grand que 4 est positif. En revanche, si x n'est pas plus grand que 4 (donc si $x \geqslant 4$ est fausse), alors $x \geqslant 0$ peut être vraie (par exemple si $x = 1$) ou fausse (si $x = -1$).

Proposition 3.12 : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.*

Démonstration.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Remarques. ▶ La table de vérité nous donne une méthode pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$: il faut prouver que quand P est vraie, alors Q l'est aussi. Autrement dit, supposer P pour montrer Q.
En revanche, il n'y a absolument pas besoin de se préoccuper du cas où P n'est pas vraie.
▶ La proposition précédente nous permet aussi de donner la négation de $P \Rightarrow Q$:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv P \wedge (\neg Q).$$

Remarque

Le résultat n'est pas très surprenant : l'implication sera fausse si P peut-être vraie sans que Q ne le soit.

Définition 3.13 (Contraposée) – On appelle **contraposée** de la proposition $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Proposition 3.14 : *La proposition $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.*

Démonstration. Nous pourrions le prouver à l'aide d'une table de vérité[3], mais notons plutôt que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\textbf{non}\, P)$ **ou** Q.
Et donc $(\textbf{non}\, Q) \Rightarrow (\textbf{non}\, P)$ est équivalente à $(\textbf{non}(\textbf{non}\, Q))$ **ou** $(\textbf{non}\, P)$, soit encore à Q **ou** $(\textbf{non}\, P)$. □

[3] Encore une...

Cette proposition d'apparence anodine est en réalité très importante : pour montrer qu'une implication est vraie, on peut en fait montrer que sa contraposée est vraie
Par exemple, si n est un entier, prouvons la proposition «si n^2 est pair, alors n est pair». Soit encore «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair».
Sa contraposée est alors «n impair $\Rightarrow n^2$ impair».
Or, si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair.
Ainsi, «n impair $\Rightarrow n^2$ impair» est vraie, et donc sa contraposée «n^2 pair $\Rightarrow n$ pair» est également vraie.

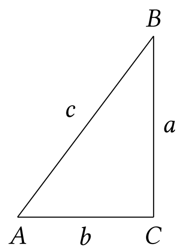
Terminologie
On parle alors de raisonnement par contraposition.

Définition 3.15 – Soient P et Q deux assertions.

1. Si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors on dit que
   — P est une **condition suffisante** de Q, ce qui traduit que dès que P est vraie, alors Q l'est aussi.
   — Q est une **condition nécessaire** de P, ce qui traduit que P ne peut pas être vraie si Q n'est pas vraie.
2. La proposition $Q \Rightarrow P$ est appelée **réciproque** de la proposition $P \Rightarrow Q$.

Autrement dit
Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P le soit.
Pour que P soit vraie, il est nécessaire que Q le soit aussi.

Il ne faut pas confondre réciproque et contraposée.
Comme dit précédemment, une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité. En revanche, il n'y a pas de lien entre une implication et sa réciproque, l'une peut être vraie et pas l'autre, les deux peuvent être vraies, etc.



Par exemple, si ABC est un triangle de côtés a, b, c, alors vous savez depuis toujours que (ABC est rectangle en C) $\Rightarrow (a^2+b^2=c^2)$, et que la réciproque est également vraie.
En revanche, si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors la proposition

$$f \text{ est dérivable et sa dérivée est positive} \Rightarrow f \text{ est croissante}$$

est vraie, mais sa réciproque ne l'est pas. En effet, la fonction partie entière est une[4] fonction croissante sur $\mathbf{R}$ qui n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}$.

[4] Parmi bien d'autres !

Définition 3.16 (Équivalence) – Si P et Q sont deux propositions logiques, on note $P \Leftrightarrow Q$ la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si j'écris $P \Longleftrightarrow Q$, je ne me prononce ni sur la valeur de P, ni sur celle de Q.
Par exemple,si x est un réel, alors $x+2=x \Leftrightarrow 2=0$.
L'équivalence ainsi écrite est vraie, mais ne signifie pas que l'une ou l'autre des deux assertions qui la composent le soient.
Les mêmes remarques valent évidemment pour l'implication.

<u>**Rédaction**</u> : Dans une copie, on ne cherchera donc pas à remplacer tous les «donc» ou «on a» par des implications ou des équivalences.
Ces mots sont importants :

1. afin que votre copie ne se limite pas à une succession de symboles mathématiques

2. pour bien marquer ce que l'on sait être vrai.

Proposition 3.17 (Équivalence et double implication) : *Si P et Q sont deux propositions logiques, alors les propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes.*

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Remarque. Ceci justifie le raisonnement par double implication : pour prouver une équivalence, il est possible de prouver séparément les deux implications.

3.2 QUANTIFICATEURS

3.2.1 Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Nous avons vu plus haut des exemples de propositions dépendant d'un ou plusieurs paramètres, qui peuvent être vraies pour certaines valeurs du paramètre et fausses pour d'autres.

Définition 3.18 (Quantificateur universel) – On note $\forall x \in E, P(x)$, et on lit «pour tout x appartenant à E, $P(x)$», la proposition qui est vraie si quel que soit l'élément x de E, la proposition $P(x)$ est vraie.
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Exemples 3.19

- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 \geqslant 0$ est vraie, puisqu'un carré est toujours positif.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 2x \geqslant 0$ est fausse, puisque pour $x = -1$, on a $x^2 + 2x = -1 < 0$.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{Z},\ n^2 \in \mathbf{N}$ est vraie puisque le carré d'un entier relatif est **toujours** un entier naturel.
- La proposition $\forall n \in \mathbf{N},\ n - 1 \in \mathbf{N}$ est fausse puisque pour $n = 0$, on a $n - 1 = -1 \notin \mathbf{N}$.
- La proposition $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse. En effet, pour $x = 2$, on a $x \geqslant 2$ qui est vraie, et $x \geqslant 3$ qui est fausse, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 3$ est fausse.
- En revanche, $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
  En effet, si x est un réel, deux cas de figure sont possibles :
  — soit $x \geqslant 2$, et alors on a bien $x > 0$, de sorte que $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie ;
  — soit $x < 2$, auquel cas $x \geqslant 2$ est fausse et donc $x \geqslant 2 \Rightarrow x > 0$ est vraie.
- Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors la proposition «f est la fonction nulle» est équivalente à $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$.
  Cela signifie que f prend toujours la valeur nulle.

> **Remarque**
> Notons que $n = 0$ est le seul entier de $\mathbf{N}$ pour lequel $n - 1 \notin \mathbf{N}$. Par conséquent, la proposition
> $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ n - 1 \in \mathbf{N}$$
> est vraie.

<u>Rédaction</u> : pour prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$, on commencera systématiquement par «Soit $x \in E$», pour arriver à la conclusion que $P(x)$ est vraie.
Ceci signifie que l'on prend un x dont on sait qu'il est dans E, mais qui peut être n'importe quel élément de E (autrement dit, x est un élément quelconque de E).
Si on arrive alors à prouver $P(x)$, en n'utilisant que les propriétés communes à tous les éléments de E, alors on a bien prouvé $\forall x \in E, P(x)$.
Si on part de «Soit $n \in \mathbf{N}$» et que pour prouver $\mathscr{P}(n)$ on utilise que n est pair, alors il y a un problème : certains élément de $\mathbf{N}$ sont bien pairs, mais ce n'est pas un point commun à tous les entiers. Donc nous sommes en train de prouver $\forall n \in \{2k,\ k \in \mathbf{N}\}, P(n)$ et non $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$.

> **Détails**
> L'ensemble noté
> $$\{2k,\ k \in \mathbf{N}\}$$
> est l'ensemble des multiples de 2, donc l'ensemble des entiers pairs.

Définition 3.20 (Quantificateur existentiel) – On note $\exists x \in E, P(x)$, et on lit «il existe x appartenant à E tel que $P(x)$», la proposition qui est vraie si il existe au moins un[5] élément x_0 de E pour lequel $P(x_0)$ soit vraie.
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

[5] Il peut y en avoir plusieurs !

Exemples 3.21

- La proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant 0$ est vraie, puisqu'il existe bien un réel positif, par exemple $x = 4$.
- La proposition $\exists z \in \mathbf{C},\ z^2 + 1 = 0$ est vraie, puisque $z = i$ convient[6].
- En revanche, la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 = 0$ est fausse. On prendra donc bien garde à l'ensemble auquel appartient la variable quantifiée.
- Si f est une fonction réelle, alors la proposition $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$ signifie que f s'annule au moins une fois.
Par exemple, elle est vraie si f est la fonction $x \mapsto x^2 - 1$, puisque $f(1) = 0$.

[6] Notons que $z = -i$ convient également.

Rédaction : Il est beaucoup plus difficile de prouver des propositions du type $\exists x \in E, P(x)$, et en général il faut avoir la bonne intuition pour savoir quel x vérifie P.
Mais une fois qu'on a trouvé un tel x, la rédaction est simplissime, il faut se contenter de «Posons $x = \dots$» (où l'on remplace $\dots$ par la valeur de x qu'on a «devinée»), et on prouve qu'alors $P(x)$ est vraie.

Il reste enfin une dernière notation, qui n'est qu'une variation du précédent : on note $\exists! x \in E, P(x)$ pour signifier qu'il existe un **unique** $x \in E$ vérifiant la propriété P.
Autrement dit, on note $\exists! x \in E, P(x)$ pour

$$\exists x \in E, P(x) \textbf{ et } (\forall y \in E, (P(y) \Rightarrow y = x))$$

qui signifie qu'il existe un $x \in E$ qui satisfait $P(x)$, et que tout autre $y \in E$ satisfaisant la propriété P doit être égal à y, ce qui est bien l'idée qu'on se fait de l'unicité.
On a donc notamment $(\exists! x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x))$.

Exemple 3.22

La proposition $\exists! x \in \mathbf{R},\ x^2 = 4$ est fausse, puisque $x = 2$ et $x = -2$ vérifient tous les deux $x^2 = 4$.
En revanche, $\exists! x \in \mathbf{R}_+,\ x^2 = 4$ est vraie, puisque $x = 2$ est l'unique réel **positif** dont le carré vaut 4.

3.2.2 Quelques exemples de définitions quantifiées

Nous redonnons, sans justification, les définitions quantifiées de certaines propositions déjà rencontrées précédemment :

Définition 3.23 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, avec I partie de $\mathbf{R}$. Alors f est strictement croissante si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2,\ (x < y) \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Définition 3.24 – Une partie I de $\mathbf{R}$ est un intervalle si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \forall z \in \mathbf{R}, ((x \leqslant z) \textbf{ et } (z \leqslant y)) \Rightarrow z \in I.$$

Définition 3.25 – Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors

1. un réel M est un majorant de A si $\forall t \in A,\ t \leqslant M$.
2. A est majorée si $\exists M \in \mathbf{R}, \forall t \in A,\ t \leqslant M$.

Définition 3.26 – Soit $f : I \to J$, où I et J sont deux parties de $\mathbf{R}$. Alors f réalise une bijection de I sur J si et seulement si

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, y = f(x).$$

Soit encore $\forall y \in J, \exists x \in E, (y = f(x) \textbf{ et } (\forall u \in I, \ (f(u) = y \Rightarrow u = x))$.

3.2.3 Négation des propositions quantifiées

Faute de définition formelle et rigoureuse des quantificateurs, nous ne pouvons qu'admettre les résultats suivants, qui sont très intuitifs.

Proposition 3.27 :

1. *La négation de* $\forall x \in E, \ P(x)$ *est* $\exists x \in E, \ \textbf{non}\, P(x)$.
2. *La négation de* $\exists x \in E, \ P(x)$ *est* $\forall x \in E, \ \textbf{non}\, P(x)$.

Danger !
La négation de

$$\forall x \in E, \ P(x)$$

n'est surtout pas

$$\forall x \in E, \ \textbf{non}\, P(x).$$

Exemples 3.28

► La négation de $\forall x \in \mathbf{R}, \ x^2 + 1 \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbf{R}, \ x^2 + 1 < 0$.
Puisque la proposition de départ est vraie, sa négation est fausse.
► La négation de $\exists n \in \mathbf{N}, \ \frac{n}{3} \in \mathbf{N}$ est $\forall n \in \mathbf{N}, \ \frac{n}{3} \notin \mathbf{N}$.
Puisque la proposition de départ est vraie (par exemple pour $n = 3$), sa négation est fausse.
► Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors la négation de «$f$ est la fonction nulle» est $\exists x \in \mathbf{R}, \ f(x) \neq 0$.
À ne pas confondre avec $\forall x \in \mathbf{R}, \ f(x) \neq 0$ qui signifie que la fonction f ne s'annule jamais !
► Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, alors la négation de «$f$ est croissante» est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \textbf{non}(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)).$$

Mais nous avons déjà mentionné que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et non** Q.
Donc la négation de «f est croissante» est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \ x \leqslant y \textbf{ et } f(x) > f(y).$$

Autrement dit
Il existe deux réels dont les images sont dans l'ordre inverse.
Ce qui est bien moins fort que la décroissance de f.

► L'assertion suivante signifie qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est constante :

$$\exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in I, \ f(x) = a.$$

Sa négation est

$$\forall a \in \mathbf{R}, \ \exists x \in I, \ f(x) \neq a.$$

► Soit $(u_n)_n$ une suite. La négation de

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

est

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, (n \geqslant N \textbf{ et } |u_n| > \varepsilon).$$

En effet, rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

Explication
Dans quelques temps, cette assertion sera la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2.4 Succession de quantificateurs

Une proposition logique peut contenir plusieurs quantificateurs successifs.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{Z}, \ \exists m \in \mathbf{Z}, \ n = m + 1$.
Déterminons la valeur de vérité de cette proposition, en la découpant en morceaux plus simples.
Notons $P(n)$ la proposition $\exists m \in \mathbf{Z}, \ n = m + 1$.

Alors $P(0)$ est vraie, puisque $m = -1$ convient, $P(1)$ est vraie puisque $m = 0$ convient, etc.
Plus généralement, si $n \in \mathbf{Z}$, alors $P(n)$ est vraie, puisqu'on peut prendre $m = n - 1$, qui est encore un élément de $\mathbf{Z}$.
Et donc notre proposition de départ, qui n'est autre que $(\forall n \in \mathbf{Z}, P(n))$ est vraie.

De même, la proposition $\forall n \in \mathbf{Z}, \exists m \in \mathbf{Z}, n = m + 1$ est vraie, puisque pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $m = n - 1$ est encore un élément de $\mathbf{Z}$, vérifiant $n = m + 1$.
Cet exemple prouve que, lorsqu'on a deux quantificateurs à la suite, et que le second est un quantificateur existentiel, alors la seconde variable (ici m) peut dépendre de la première (ici n) : pour tout n, il existe un m **dépendant du n choisi** tel que $n = m + 1$.

Dans une expression possédant plusieurs quantificateurs, changer l'ordre des quantificateurs peut changer la valeur de vérité de la proposition !
Par exemple, la proposition «pour toute MPSI, il y a un prof de maths» est vraie. Soit encore $\forall m$ MPSI, $\exists p$ prof de maths, p enseigne à m.
Mais si on change l'ordre des quantificateurs, alors on obtient la proposition

$$\exists p \text{ prof de maths}, \forall m \text{ MPSI}, p \text{ enseigne à } m$$

qui signifie qu'il existe un prof de maths qui enseigne à toutes les MPSI, ce qui est faux.

Par exemple, $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x < y$ est vraie.
En effet, si x est un réel fixé, alors $y = x + 1$ satisfait bien à $x < y$, de sorte que $\exists y \in \mathbf{R}, x < y$ est vraie.
Et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a bien $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x < y$.

En une phrase
Cette proposition signifie que pour tout x, il existe un réel inférieur strictement à x.

En revanche, si l'on permute l'ordre des quantificateurs, on obtient la proposition
$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x < y$ ... qui est fausse !
En effet, sa négation est $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
Cette négation est vraie, puisque $x = y - 1$ convient. Et donc la proposition de départ est fausse.
Plus généralement, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs universels, on peut permuter l'ordre de deux quantificateurs existentiels, mais on ne peut pas toujours permuter l'ordre de deux quantificateurs différents.

En une phrase
Cette proposition signifie qu'il existe un réel strictement supérieur à tous les réels, ce qui est bien évidemment faux.

Exemples 3.29

- Les propositions $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}_+, x^2 \geqslant -y$ et $\forall y \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geqslant -y$ sont équivalentes[7].
- De même, $\exists n \in \mathbf{N}, \exists p \in \mathbf{N}, n = 2p$ et $\exists p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, n = 2p$ signifient toutes deux qu'il existe un entier pair.

[7] Et elles sont les deux vraies.

3.3 Ensembles

3.3.1 Définition

Nous ne donnerons pas[8] de définition rigoureuse de ce qu'est un ensemble, et nous contenterons de l'«intuition» suivante : un **ensemble** E est une «collection» d'objets, qui sont appelés les **éléments de** E.
Si x est un élément de E, on note alors $x \in E$. Au contraire, si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

[8] Ni cette année ni l'an prochain.

Des ensembles peuvent être formés d'objets très divers : les plus fréquemment rencontrés sont des ensembles de nombres ($\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_+^*$, etc), mais on peut également considérer l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires, ou l'ensemble E des élèves de MP2I.
Il existe deux manières de définir un ensemble :

— en **extension**, en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ou $F = \left\{\pi, \sqrt{2}, -e\right\}$.
Notons qu'alors, l'ordre dans lequel on donne les éléments n'a aucune importance,

$\{0, 4, 3, 2, 1\}$ et $\{4, 3, 2, 1, 0\}$ désignent tous les deux l'ensemble noté E ci-dessus. On ne peut définir ainsi que des ensembles finis[9].

— en **compréhension**, en donnant une propriété P qui caractérise tous les éléments de l'ensemble E, c'est-à-dire une propriété que tous les éléments de E vérifient, et qu'ils sont les seuls à vérifier.
On note alors $\{x \mid P(x)\}$ l'ensemble des objets x qui vérifient la propriété P.
Par exemple, $\left\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2} = x\right\}$ désigne $\mathbf{R}_+$. En pratique, on note plutôt $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P.
Par exemple $\{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.
Cet ensemble peut également se noter $\{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$ ou encore $\{2p\}_{p\in\mathbf{N}}$.
Plus généralement, si $f : E \to F$ est une application[10] entre deux ensembles E et F, alors $\{f(x), x \in E\}$ désigne l'ensemble $\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

[9] Puisqu'il serait compliqué d'écrire **tous** les éléments d'un ensemble infini...

[10] La définition en sera donnée un peu plus loin, tenez-vous en à l'intuition d'une fonction qui à un élément de E associe un élément de F.

⚠ Pour un ensemble défini par exemple par $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p\}$, il faudra faire très attention au quantificateur existentiel lorsqu'on manipule plusieurs éléments de cet ensemble.
Ainsi, si n et m sont deux éléments de E, alors il existe un entier $p_1 \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p_1$ et il existe un entier $p_2 \in \mathbf{N}$ tel que $m = 2p_2$.
Mais p_1 et p_2 n'ont aucune raison d'être égaux, raison pour laquelle il est impératif de les noter différemment (et pas par exemple de les appeler bêtement p tous les deux).
Le même risque existe avec la notation $E = \{2p,\ p \in \mathbf{N}\}$.

Remarque
En réalité le risque est peut être même plus grand avec cette notation, car le quantificateur existentiel n'y apparaît pas directement (bien qu'il soit sous-entendu).

Un même ensemble peut être défini de différentes manières, et on a par exemple

$$\begin{aligned}\{-1, 1\} &= \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 = 1\right\} = \left\{z \in \mathbf{C} \mid z^2 = 1\right\} = \{(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}\}\\ &= \left\{n \in \mathbf{Z} \mid \forall m \in \mathbf{N}, (m \text{ divise } n) \Rightarrow (m = 1)\right\}.\end{aligned}$$

Définition 3.30 – ▸ On admet[11] qu'il existe un unique ensemble, appelé **ensemble vide**, et qui ne contient aucun élément, qu'on note $\emptyset$.
▸ Un ensemble de la forme $\{x\}$ qui ne contient qu'un élément x est appelé un **singleton**.

[11] Lorsqu'on veut développer une théorie axiomatique des ensembles, c'est en réalité un axiome qu'il faut ajouter : l'existence d'un ensemble ne contenant aucun élément.

Remarques. ▸ Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, une proposition du type $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours fausse.
Et donc une proposition de la forme $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ est toujours vraie. En effet, sa négation est $\exists x \in \emptyset,\ \neg P(x)$, qui est est fausse.
▸ On ne confondra pas $\{x\}$, qui est un ensemble, et x, qui est un élément de cet ensemble. On a toujours $x \in \{x\}$, et ce quel que soit x.

3.3.2 Inclusion, égalité, ensemble de parties

Définition 3.31 – Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E si $\forall x \in F,\ x \in E$. On note alors $F \subset E$.
On dit également que F est **une partie de** E, ou **un sous-ensemble de** E.

Autrement dit
F est inclus dans E si tout élément de F est également un élément de E.

Cette définition peut aussi se reformuler de la manière suivante : $F \subset E$ si et seulement si $\forall x,\ x \in F \Rightarrow x \in E$.

Rédaction : cela signifie notamment que pour prouver que $F \subset E$, une rédaction correcte commencera **toujours** par «Soit $x \in F$», pour terminer par «... donc $x \in E$».

Remarque. Notons qu'on a toujours $E \subset E$.
On a également $\emptyset \subset E$ car $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie.

Remarque
Ce point permet de prouver l'unicité de l'ensemble vide : s'il en existe deux alors ils sont inclus l'un dans l'autre, et sont égaux.

Exemples 3.32

▸ On a les inclusions classiques suivantes : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
▸ $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2+1\} \subset \mathbf{R}_+$. En effet, si x est un réel tel que $x = x^2+1$, puisque $x^2+1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et donc $x \in \mathbf{R}_+$.
▸ Pour tout ensemble E, la proposition $\forall x \in \emptyset,\ x \in E$ est vraie. Et donc $\emptyset \subset E$, quel que soit l'ensemble E.
Par exemple, l'ensemble de l'exemple précédent s'écrit encore $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}$. Or, cette équation ne possède pas de solutions réelles[12] et donc $\{x \in \mathbf{R} \mid x = x^2+1\} = \emptyset$, de sorte que l'inclusion précédente n'est autre que $\emptyset \subset \mathbf{R}_+$.

> **Remarque**
> Notons que nous n'avons pas eu besoin de déterminer explicitement les éléments de $\{x \in \mathbf{R}, \mid x = x^2+1\}$ pour prouver l'inclusion.

[12] Car son discriminant est $-3 < 0$.

⚠ Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance, les deux symboles $\in$ et $\subset$ ne s'utilisent pas dans le même contexte !
Si E est un ensemble, si F est une partie de E, alors un élément $x \in E$ **peut** appartenir (ou non) à F, mais pas être inclus dans F.
Par exemple, $-2 \in \mathbf{Z}$, mais il est hors de question d'écrire $\cancel{-2 \subset \mathbf{Z}}$.
De même, une autre partie G de E peut être **incluse** dans F, mais pas lui appartenir.
Ainsi, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, mais on ne peut pas écrire $\cancel{\mathbf{N} \in \mathbf{Z}}$.
En revanche, on a $\{-2\} \subset \mathbf{Z}$.

> **Insistons un peu !**
> Je ne suis pas en train de dire que $-2 \subset \mathbf{Z}$ est faux (et donc que $-2 \not\subset \mathbf{Z}$ est vrai), mais que ça n'a pas de sens !

Proposition 3.33 (Transitivité de l'inclusion) : *Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $x \in B$. Mais puisque $B \subset C$, alors $x \in C$.
Et donc nous venons de prouver que $\forall x \in A,\ x \in C$, donc $A \subset C$. □

Définition 3.34 (Égalité d'ensembles) – Deux ensembles A et B sont dits égaux si ils ont les mêmes éléments, c'est-à-dire si $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$. On note alors $A = B$.

Remarque. C'est cette définition de l'égalité qui justifie un principe bien connu : il ne sert à rien d'écrire plusieurs fois un élément x lorsqu'on définit un ensemble E. Soit x est dans E, soit il ne l'est pas, mais il ne peut pas l'être plusieurs fois.
Par exemple, $\{1,2\} = \{1,1,2\}$ puisque tout élément de $\{1,2\}$ est dans $\{1,1,2\}$ et tout élément de $\{1,1,2\}$ (qui vaut donc 1 ou 2) est dans $\{1,2\}$.
Puisqu'une inclusion $A \subset B$ correspond à une implication $x \in A \Rightarrow x \in B$, l'équivalence correspond aux deux implications $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$.
Et donc $A = B \Leftrightarrow (A \subset B)$ **et** $(B \subset A)$.
Ceci nous donne donc deux méthodes pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux :

1. soit procéder par double inclusion en prouvant $A \subset B$ et $B \subset A$
2. soit procéder directement par équivalences, en prouvant que $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Exemples 3.35

▸ Montrons par double inclusion que si $a < b$, alors

$$[a,b] = \underbrace{\{(1-t)a + bt,\ t \in [0,1]\}}_{=F}.$$

• Soit $t \in [0,1]$. Alors $(1-t)a + bt = a + t(b-a)$, qui est compris entre $(1-t)a + ta = a$ et $(1-t)b + tb = b$.
Donc tout élément de F est dans $[a,b]$: $F \subset [a,b]$.
• Inversement, si $x \in [a,b]$, il nous faut montrer que $x \in F$ et donc qu'il existe un réel $t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)a + bt$.
Or, $x = (1-t)a + bt \Leftrightarrow x - a = t(b-a) \Leftrightarrow t = \dfrac{x-a}{b-a}$.

Si $x \in [a,b]$, alors $0 \leqslant x-a \leqslant b-a \Rightarrow \dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$.
Et donc il existe $t \in [0,1]$ (qui vaut $\dfrac{x-a}{b-a}$) tel que $x = (1-t)a + bt \in F$.
Ainsi, $[a,b] \subset F$.
Par double inclusion, on en déduit que $[a,b] = F$.
► Montrons par équivalence que si A et B sont deux points distincts du plan, alors l'ensemble $E = \{M,\ MA = MB\}$ est la droite D orthogonale à $\overrightarrow{AB}$ et passant par le milieu I de $[AB]$.
Soit donc M un point du plan. Alors

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IA}} + \overrightarrow{MI} + \cancel{\overrightarrow{IB}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \\ &\Leftrightarrow M \in D. \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve directement que $D = E$.

Médiatrice
Vous aurez probablement reconnu deux caractérisations de la médiatrice de $[AB]$.

Remarque. Deux ensembles A et B sont différents si $\exists x \in A,\ x \notin B$ ou $\exists x \in B,\ x \notin A$.
Autrement dit s'il existe un élément qui est dans l'un des deux ensembles mais pas dans l'autre.

Définition 3.36 (Ensemble des parties de E) – Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire l'ensemble des ensembles inclus dans E.
Autrement dit, on a $F \in \mathcal{P}(E)$ si et seulement si $F \subset E$.

⚠ Attention !
$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles !

Exemples 3.37

- Puisque pour tout ensemble E, $\emptyset \subset E$, on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
- De même, on a toujours $E \in \mathcal{P}(E)$, et si $x \in E$, alors $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.
- Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}\}$.
- Si $E = \{a,b\}$ possède deux éléments, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.
- Si $E = \{1,2,3\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

- On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Donc $\mathcal{P}(\emptyset)$ est un singleton.
Et par suite, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Et donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

3.3.3 Opérations sur les ensembles

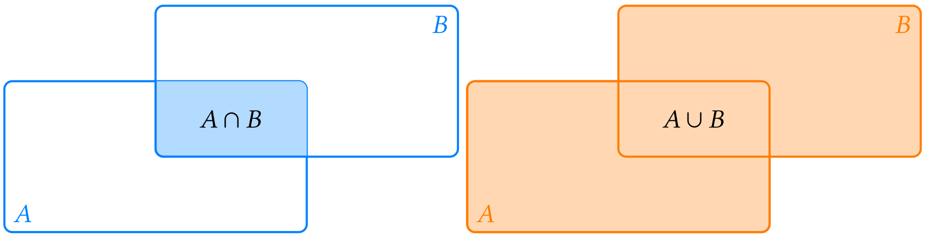
Définition 3.38 – Soient E et F deux ensembles. Alors on appelle

1. **union de** E **et** F, et on note $E \cup F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **ou** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ ou } (x \in F).$$

2. **intersection de** E **et** F, et on note $E \cap F$ l'ensemble des éléments qui sont dans E **et** dans F. Autrement dit

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E) \textbf{ et } (x \in F).$$



Exemples 3.39

- Si $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{2,3,4\}$, alors $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ et $A \cap B = \{2,3\}$.
- $\mathbf{R}_+^* \cup \mathbf{R}_- = \mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^* \cap \mathbf{R}_- = \emptyset$.
- On a toujours $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = A$.

Vocabulaire

Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

Remarque. Notons qu'on a toujours $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Proposition 3.40 : *Soient A, B et C trois ensembles. Alors*
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Terminologie

On dit que l'intersection est distributive par rapport à l'union (c'est le premier point) et que l'union est distributive par rapport à l'intersection (c'est le second point).

Démonstration. Prouvons le premier point, le second étant laissé en exercice. On a :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ ou } x \in B) \textbf{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \in C) \textbf{ ou } (x \in B \textbf{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \textbf{ ou } (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Et donc $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

Définition 3.41 – Soient E et I deux ensembles. On suppose que pour tout $i \in I$, on se donne A_i une partie de E. Alors on note

1. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins l'un** des A_i.
2. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les A_i.

Autrement dit

On a

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Remarque. Notons que pour $I = \emptyset$, on a $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = E$ et $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Remarque

Ceci est un tout petit peu perturbant, puisque pour une fois, on n'a pas

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Cela dit, il y a peu de chances qu'on s'intéresse vraiment au cas $I = \emptyset$.

Dans le cas où $I = [\![a, b]\!]$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{i=a}^{b} A_i$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{i \in [\![a,b]\!]} A_i$, et de même pour les unions.

De même, si $I = \mathbf{N}$, on note souvent $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

Exemple 3.42

Considérons un point du plan M fixé, et pour $n \in \mathbf{N}$, on note D_n le disque de centre M et de rayon $\frac{1}{n}$.

Alors $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n = \{M\}$.
Il est clair que M appartient à tous les D_n et donc à l'intersection des D_n.
Inversement, soit P un point du plan distinct de M, et soit r la longueur du segment MP (=la distance de M à P). Alors, pour $n > \dfrac{1}{r}$, on a $\dfrac{1}{n} < r$, et donc $P \notin D_n$. Par conséquent, $P \notin \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n$.

Par contraposée, on a donc $P \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n \Rightarrow P = M$, soit encore $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n \subset \{M\}$.

On en déduit que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} D_n = \{M\}$.

La proposition ci-dessous généralise la proposition 3.40.

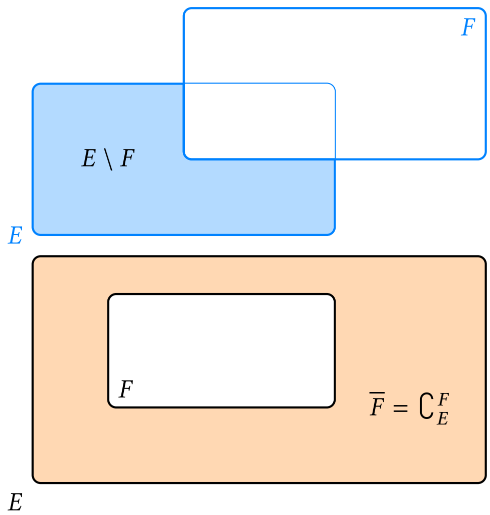
Proposition 3.43 : *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles et si B est un ensemble, on a*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)\,.$$

Définition 3.44 –

1. Soient E et F deux ensembles. La **différence ensembliste** de E et F est l'ensemble noté $E \setminus F$ (lire «E privé de F» ou «E moins F») formé des éléments qui appartiennent à E, mais n'appartiennent pas à F. Donc
$$x \in E \setminus F \Leftrightarrow (x \in E \textbf{ et } x \notin F).$$
2. Dans le cas particulier où $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé **complémentaire de** F **dans** E et noté $\complement_E^F$ (ou $\complement_E F$). Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur ce qu'est E, on abrège souvent en «complémentaire de F» et on note $\overline{F}$ au lieu de $\complement_E^F$.

Ambiguïté ?
Le «gros ensemble» E dans lequel on considère le complémentaire n'est pas toujours très clair et a donc parfois besoin d'être précisé.
Par exemple, sans précisions, dur de savoir si la notation $\overline{\mathbf{N}}$ désigne $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ ou encore $\mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$.



Remarques. Si A est une partie de E, on a toujours $E = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
Et de même $\complement_E^E = \emptyset$ et $\complement_E^\emptyset = E$.
De plus, si A et B sont des parties d'un même ensemble E, alors $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap \complement_E^B$.

Proposition 3.45 (Propriétés du complémentaire) : *Soit E un ensemble. Alors :*

1. *Pour toute partie A de E, $\overline{\overline{A}} = A$.*
2. *Pour toutes parties A et B de E, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.*

Démonstration. 1) Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \textbf{non}(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \textbf{non}(\textbf{non}(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$$

Donc $\overline{\overline{A}} = A$.
2) Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. Alors, $\forall x \in E, (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Par contraposition, $x \notin B \Rightarrow x \notin A$, soit encore $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$.
Donc $\overline{B} \subset \overline{A}$. On a donc prouvé que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall B \in \mathscr{P}(E), A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Et alors si $\overline{B} \subset \overline{A}$, en appliquant ce qui précède, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow A \subset B$. □

Proposition 3.46 (Lois de De Morgan) : *Soit E un ensemble.*

1. *Si A et B sont deux parties de E, alors*
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$
2. *Plus généralement, si les $A_i, i \in I$ sont des parties de E, alors*
$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

En français

Le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires, et le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires.

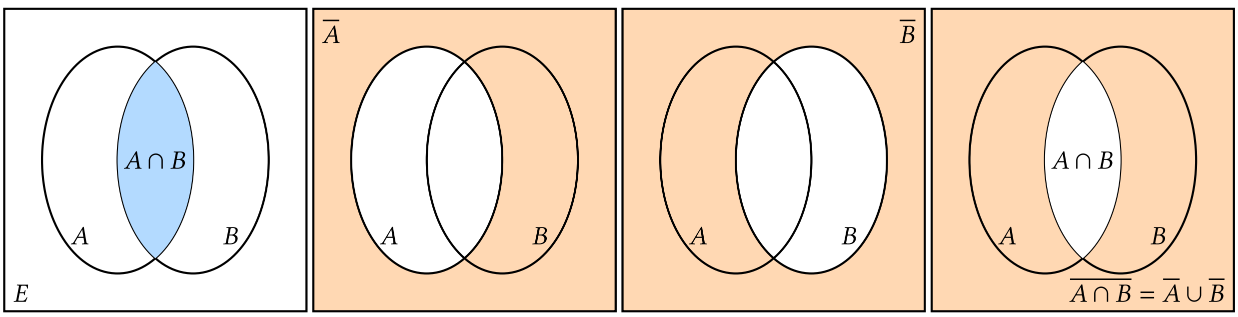
Démonstration. Prouvons directement le second point : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\exists i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} x \notin \bigcap_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow \textbf{non}(\forall i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists x \in I,\ x \in \overline{A_i} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

□



Définition 3.47 – Soit E un ensemble, et soit A un ensemble de parties de E (c'est-à-dire une partie de $\mathscr{P}(E)$). On dit que A est une **partition de** E si :

- $\forall X \in A, X \neq \emptyset$,
- $\bigcup_{X\in A} X = E$,
- les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow X = Y.$$

Notons que la contraposée de cette proposition est aussi

$$\forall X \in A, \forall Y \in A,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Remarque

Cette contraposée, bien que plus intuitive est souvent plus difficile à prouver car il est souvent difficile d'utiliser $X \neq Y$.

Exemples 3.48

► Si $A \in \mathscr{P}(E)$ est non vide, et n'est pas égale à E, alors $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E.
En effet, ni A ni $\overline{A}$ ne sont vides[13], $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
► L'ensemble des trinômes de colle constitue une partition de l'ensemble des élèves de MP2I.
En effet, aucun trinôme n'est vide, tous les élèves sont dans un trinôme (donc l'union des trinômes est toute la classe), et deux trinômes distincts n'ont pas d'élève en commun (puisque chaque élève est dans un seul trinôme).
► Pour $t \in [0,1[$, notons $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid x - \lfloor x \rfloor = t\}$.
Alors $\{A_t, t \in [0,1[\}$ est une partition de $\mathbf{R}$.
En effet, pour tout $t \in [0,1[$, $A_t \neq \emptyset$ puisque $t \in A_t$.
Si $x \in \mathbf{R}$, alors $t = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ et $x \in A_t$. Donc $\mathbf{R} \subset \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$, et l'inclusion réciproque étant évidente[14], on a bien l'égalité $\mathbf{R} = \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$. En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$. Et donc en notant $t = x - \lfloor x \rfloor$, $x \in A_t$.
Donc $x \in \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$. Ainsi, $\mathbf{R} \subset \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$.
L'inclusion réciproque étant triviale[15], on a donc $\mathbf{R} = \bigcup_{t\in[0,1[} A_t$.
Reste à prouver que les A_t sont deux à deux disjoints.De plus, soient t_1, t_2 deux éléments de $[0,1[$ tels que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset$. Alors il existe $x \in A_{t_1} \cap A_{t_2}$, et donc

$$t_1 = x - \lfloor x \rfloor = t_2.$$

Nous venons donc de prouver que $A_{t_1} \cap A_{t_2} \neq \emptyset \Rightarrow t_1 = t_2$.

[13] $\overline{A} \neq \emptyset$ car $A \neq E$.

Autrement dit

A_t est l'ensemble des réels dont la partie décimale est t.

[14] Une union de parties de $\mathbf{R}$ est dans $\mathbf{R}$.

[15] Car les A_t sont des parties de $\mathbf{R}$.

3.3.4 Lien entre logique et ensemble

Coté logique	Côté ensembles	En détails
Implication	Inclusion	$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Équivalence	Égalité	$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Conjonction (**et**)	Intersection	$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ **et** $x \in B)$
Disjonction (**ou**)	Union	$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ **ou** $x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ **non**$(x \in A)$

3.3.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 3.49 (Produit cartésien de deux ensembles) – Si E et F sont deux ensembles, on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. On dit que $E \times F$ est le **produit cartésien de** E **et** F.
Si $E = F$, on note alors E^2 au lieu de $E \times F$.

Exemples 3.50

Puisque $\emptyset$ ne contient aucun élément, $\emptyset \times \emptyset$ est encore l'ensemble vide.
L'ensemble $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de deux réels, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) avec $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$.
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ = \{(x, y), x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+\}$.
Si $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux segments de $\mathbf{R}$, alors $I \times J = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d\}$ est un pavé de $\mathbf{R}^2$.

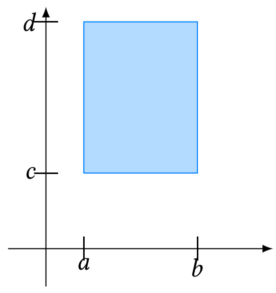


FIGURE 3.1– $[a, b] \times [c, d]$.

⚠ On ne confondra pas le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$, qui sont deux éléments de nature différente.
En particulier, l'ordre des éléments d'un couple est important ($(1, 2) \neq (2, 1)$), alors que dans un ensemble, l'ordre n'a aucune importance ($\{1, 2\} = \{2, 1\}$).
Autrement dit, on a $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ((a = c) \textbf{ et } (b = d))$.
On notera qu'il revient au même d'écrire $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ et $\forall (x, y) \in E \times F, P(x, y)$.
En revanche on n'écrira pas[16] $\forall x, y \in E, \ldots$ au lieu de $\forall (x, y) \in E^2, \ldots$. À **un** quantificateur correspond **une** variable !

[16] En théorie...

Définition 3.51 (Produit cartésien de n ensembles) – Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles non vides, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$ l'ensemble formé des **n-uplets** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n$, on note E^n au lieu de $E \times E \times \cdots \times E$.

Notons que deux éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont égaux si et seulement si

$$x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \text{ et } \ldots \text{ et } x_n = y_n.$$

Remarquons que si E, F, G sont trois ensembles, alors un élément de $(E \times F) \times G$ est un couple formé d'un élément de $E \times F$ (lui-même un couple) et d'un élément de G.
Autrement dit, il est de la forme $((x, y), z)$, avec $x \in E, y \in F$ et $z \in G$.
On l'identifiera alors au triplet $(x, y, z) \in E \times F \times G$, de sorte qu'on ne fera pas de différence entre $(E \times F) \times G$ et $E \times F \times G$.
Et de même pour des produits de plus de trois ensembles.

Identification
Cette identification est légitime puisqu'à chaque triplet (x, y, z) de $E \times F \times G$ correspond **un unique** élément $((x, y), z)$ de $(E \times F) \times G$.

Exemple 3.52

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, et soit $F = [a, b] \subset \mathbf{R}$.
Alors $E \times F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \textbf{ et } a \leqslant z \leqslant b\}$. C'est un cylindre de $\mathbf{R}^3$.

3.4 LES MODES DE RAISONNEMENTS

3.4.1 Par disjonction de cas

Il est possible de prouver une proposition du type $\forall x \in E, P(x)$ en écrivant E sous la forme $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, et en prouvant séparément que $P(x)$ est vraie si $x \in E_1$, si $x \in E_2$, etc.

Remarque
Les E_i peuvent être deux à deux disjoints (et donc former une partition de E), ou non.

Exemple 3.53

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.
Pour cela, notons que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$.
Distinguons alors trois cas, suivant la valeur du reste de la division de n par 3 :

- si n est de la forme $3k$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = (3k - 1)3k(3k + 1)$ est divisible par 3.
- si n est de la forme $3k + 1$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors $n^3 - n = 3k(3k + 1)(3k + 2)$ est divisible par 3.

- si n est de la forme $3k+2$, avec $k \in \mathbf{N}$. Alors
  $n^3 - n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$ est divisible par 3.

3.4.2 Par contraposition

Nous avons mentionné précédemment qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est toujours équivalente à sa contraposée $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.
Et donc pour prouver qu'une implication est vraie, on peut se contenter de prouver sa contraposée.

Intuition
L'idée qui se cache ici est assez simple : si P était vraie, puisque $P \Rightarrow Q$, alors Q serait vraie également.
Mais Q et sa négation ne peuvent être vraies en même temps !

Exemple 3.54

Prouvons que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Si on souhaite vraiment tout quantifier, cette proposition est

$$\forall n \in \mathbf{N}, (\forall k \in \mathbf{N},\ n^2 - 1 \neq 8k) \Rightarrow (\exists p \in \mathbf{N},\ n = 2p).$$

Cela dit, nous n'avons pas besoin de tout écrire avec des quantificateurs.
La contraposée est «n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8», et nous allons prouver que cette contraposée est vraie.
Soit donc n un entier impair. Il existe donc $p \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2p+1$, et alors

$$n^2 - 1 = (2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p = 4p(p+1).$$

Or, l'un des deux entiers p et $p+1$ est pair[17], donc $p(p+1)$ est pair, de sorte qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p(p+1) = 2k$.
Et donc $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$ est divisible par 8.
Ainsi, la contraposée de notre proposition initiale est vraie, et donc la proposition de départ l'est aussi.

[17] De deux entiers consécutifs, l'un (et un seul) est toujours pair.

3.4.3 Par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver que $\neg P \Rightarrow$ **Faux**, c'est-à-dire à supposer que P est fausse, pour arriver à **Faux**, c'est-à-dire à une contradiction (qui peut par exemple être le fait que P soit vraie : $P \wedge \neg P \equiv$ **Faux**).
Mais on a toujours $\neg P \Rightarrow$ **Faux** $\equiv P \vee$ **Faux** $\equiv P$.

Et donc si $\neg P \Rightarrow$ **Faux** est vrai, alors P est également vraie.

Détails
Puisque **Faux** est toujours faux, **Faux ou** P a même valeur de vérité que P.

Exemple 3.55 Irrationalité de $\sqrt{2}$

Prouvons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
À cet effet, supposons que $\sqrt{2}$ est un rationnel, et soit alors $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$.
Alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$.
Donc p^2 est pair, et donc p lui-même est pair.
Et donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p = 2k$, et donc $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Donc $2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$ est pair. Donc q est pair.
Mais p et q étant tous deux divisibles par 2, ceci vient contredire l'irréductibilité de la fraction $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse initiale est fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Détails
Le carré d'un nombre impair est impair, donc si p^2 est pair, c'est que p lui-même est pair.

Exemple 3.56 **Principe des tiroirs de Dirichlet**

Si vous rangez $n+1$ paires de chaussettes dans une commode à n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux paires de chaussettes.
En effet, supposons par l'absurde que chaque tiroir contienne au plus une seule paire de chaussettes.
Alors la commode contient au plus $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}}$ paires de chaussettes, ce qui est absurde.
Par conséquent, un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.
Ce résultat est loin d'être anodin et sert plus souvent qu'il n'y paraît[18].

⚠ **Attention !**
La négation de «au moins 2» est bien «au plus une», et pas «une seule».
Un tiroir peut tout à fait ne contenir aucune paire de chaussettes.

[18] Même si nous nous en servirons plutôt pour ranger des nombres dans des ensembles que des chaussettes dans des tiroirs...

3.4.4 Le raisonnement par analyse-synthèse

Expliquons le raisonnement par analyse-synthèse sur un exemple : prouvons que toute fonction définie sur $\mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Soit donc $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

▸ **Analyse** : supposons qu'il existe deux fonctions f_1 paire et f_2 impaire telles que $f = f_1 + f_2$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
En sommant ces deux égalités, il vient $f(x) + f(-x) = 2f_1(x) \Leftrightarrow f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
Et de même, $f(x) - f(-x) = 2f_2(x) \Leftrightarrow f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Donc si deux telles fonctions existent, ce sont nécessairement celles définies par : pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ et } f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

▸ **Synthèse** : nous cherchons désormais à prouver que deux telles fonctions f_1 et f_2 existent.
Or le raisonnement tenu dans la phase d'analyse nous dit ce que doivent être ces fonctions, il n'y a pas le choix.
Reste à vérifier que les formules obtenues précédemment pour f_1 et f_2 définissent bien une fonction paire et une fonction impaire dont la somme vaut f.
Posons donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(-x) = \dfrac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = f_1(x)$, de sorte que f_1 est paire.
D'autre part, $f_2(-x) = \dfrac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_2(x)$ donc f_2 est impaire.
Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f_1(x)+f_2(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.
Donc $f = f_1 + f_2$.
Donc nous venons de prouver qu'il existe bien deux telles fonctions f_1 et f_2.

Remarque
Nous venons donc de prouver l'unicité : seules les fonctions écrites ici sont susceptibles de convenir. Mais nous n'avons pas encore prouvé l'existence de deux telles fonctions (nous l'avions **supposée** dans le raisonnement que nous venons de tenir).
La synthèse a pour but de prouver l'existence.

▸ **Conclusion** : il existe un unique couple formé d'une fonction paire et d'une fonction impaire dont la somme vaut f.

⚠ Si on oublie la synthèse, on prouve seulement qu'il existe **au plus** un tel couple, mais pas qu'il en existe **au moins** un !

En résumé, la phase d'analyse revient à dire «s'il existe une solution au problème posé, alors la/les voilà». La synthèse n'est alors rien d'autre qu'une vérification.

3.5 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence, que vous avez déjà manipulé en terminale, connaît plusieurs variantes, dont le but est à chaque fois de montrer qu'une propriété $\mathscr{P}(n)$, dépendant de n, est valable pour tout n dans une certain partie de $\mathbf{N}$.

3.5.1 Récurrence simple

C'est la récurrence étudiée en terminale : on initialise la récurrence à $n_0 \in \mathbf{N}$, en on prouve que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Ceci prouve alors que $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

La preuve de ce principe ne sera pas donnée, elle fait partie des axiomes définissant $\mathbf{N}$, et donc nous ne pourrons que l'admettre.

Exemple 3.57

Montrons que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la propriété $2^n \leqslant n!$
Initialisation : $\mathscr{P}(4)$ est vérifiée car $2^4 = 16 \leqslant 24 = 4!$
Hérédité : supposons que $n \geqslant 4$ et que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! \leqslant (n+1)!$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 4$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3.5.2 Récurrence multiple à pas fixé

Commençons par la récurrence double : il s'agit d'une légère variation de la précédente, où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, vous n'avez pas seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie.

Le principe est donc le suivant : on initialise la récurrence en prouvant que pour un certain $n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont toutes deux vraies.
Puis on prouve que $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n)$.

Exemple 3.58

Soit $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Soit donc $\mathscr{P}(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbf{Z}$.
Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbf{Z}$.
$\mathscr{P}(1)$ est vraie car

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{4} = 3.$$

Hérédité : supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Alors

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$$

et donc

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \underbrace{\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n+1)} \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=3} - \underbrace{\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)}_{\in \mathbf{Z} \text{ car } \mathscr{P}(n)} \in \mathbf{Z}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence **double**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

⚠ Attention !
Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

Ce principe se généralise à des récurrences triples, quadruples, etc.
Énonçons directement un «principe de récurrence d'ordre k» (qui pour $k = 2$ correspond donc à ce que l'on vient de faire dans l'exemple) :

Proposition 3.59 : *Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbf{N}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que*

1. *$\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \cdots \mathscr{P}(n_0+k)$ soient vraies*
2. *que pour tout $n \geqslant n_0$, $(\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)$ **et** $\ldots$ **et** $\mathscr{P}(n+k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+k+1)$.*

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition $\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1) \wedge \cdots \wedge \mathscr{P}(n+k)$.
Par hypothèse, $\mathscr{Q}(n_0)$ est vraie.
Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ soit vraie.
Alors $\mathscr{P}(n), \ldots, \mathscr{P}(n+k)$ sont vraies.
Donc $\mathscr{P}(n+k+1)$ est vraie.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1), \mathscr{P}(n+2), \ldots, \mathscr{P}(n+k), \mathscr{P}(n+1+k)$ sont vraies.
Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence simple appliqué à la proposition $\mathscr{Q}(n)$, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie.
Et en particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

3.5.3 Récurrence forte

Cette fois, il s'agit d'une récurrence où pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, on a non seulement besoin de savoir que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, mais aussi que $\mathscr{P}(n-1), \mathscr{P}(n-2), \ldots, \mathscr{P}(0)$ sont vraies.

Exemple 3.60

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Notons donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n \leqslant 2^n u_0$.
Alors $\mathscr{P}(0)$ est trivialement vérifiée.
Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &\leqslant u_0 \left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n\right) \\ &\leqslant u_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &\leqslant u_0\left(2^{n+1}-1\right) \leqslant u_0 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Détails
On a utilisé à la fois $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

Par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant u_0 2^n$.

Proposition 3.61 : *Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n telle que*

1. *il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie.*
2. *pour tout $n \geqslant n_0$, $(\forall k \in [\![n_0, n]\!], \mathscr{P}(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.*

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Démonstration. Notons $\mathscr{Q}(n)$ la proposition «$\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie».
Alors $\mathscr{Q}(n_0)$ n'est rien d'autre que $\mathscr{P}(n_0)$, donc est vraie par hypothèse.
Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ soit vraie. Alors $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies.
Par hypothèse, cela implique que $\mathscr{P}(n+1)$ soit vraie.
Donc $\mathscr{P}(n_0), \ldots, \mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ sont vraies : $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence (simple), pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

3.5.4 Récurrence finie

Citons enfin une dernière variante du principe de récurrence : la récurrence finie, qui consiste non plus à supposer que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, mais

seulement pour $n \in [\![n_0, n_1 + 1]\!]$.
Alors dans ce cas, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

Exemple 3.62

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Prouvons que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \left(\frac{p}{n}\right)^2$.

Pour $p = 1$, on a $1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que pour $p \leqslant n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&< \left(1+\frac{p}{n}+\frac{p^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2}{n^2} + \frac{p}{n^2} + \frac{p}{n^2}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2+2p}{n^2}\\
&< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que $p \leqslant n$ et donc $\frac{p}{n} \leqslant 1$.

Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}.$$

En particulier, pour $p = n$, alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Or nous prouverons plus tard dans l'année que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$, et donc ceci prouve[19] que $e \leqslant 3$.

[19] Sans aucun calcul de valeur approchée.

3.5.5 La récurrence fausse !

Juste pour la culture, citons une petite curiosité.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, n crayons sont toujours de la même couleur.
On note donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : quels que soient les n crayons $C_1, \dots, C_n$, alors ils ont tous la même couleur.
$\mathscr{P}(1)$ est vrai si je n'ai qu'un crayon, alors tous mes crayons sont de la même couleur.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $C_1, \dots, C_{n+1}$, $n+1$ crayons.
Alors par hypothèse de récurrence, $C_1, \dots, C_n$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
De même, $C_2, \dots, C_{n+1}$ sont de même couleur, de la couleur de C_2.
Et donc $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ ont tous la couleur de C_2.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Pourtant j'ai dans ma trousse un crayon bleu et trois crayons rouges, qui ne sont clairement pas de la même couleur ! Où se cache le problème ?

3.6 INTRODUCTION À LA NOTION D'APPLICATION ENTRE ENSEMBLES

3.6.1 Définitions

Définition 3.63 – Une **application** est un triplet de la forme $f = (E, F, \Gamma)$, où E et F sont deux ensembles non vides et Γ est une partie de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

On dit que f est une application de E dans F, E est appelé ensemble de départ de f et F est appelé l'ensemble d'arrivée de F.
Si $(x, y) \in \Gamma$, on note $y = f(x)$.
L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$ est appelé **graphe de** f.

Explication
Cela revient à dire que **tout** élément de l'ensemble de départ admet une **unique** image par f.

Pour une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors le graphe de f est exactement ce dont on a l'habitude : l'ensemble des couples (x, y) où $y = f(x)$.
Et la condition sur l'existence et l'unicité d'une image a déjà été évoquée au chapitre 2 : elle signifie que toute droite verticale rencontre le graphe en un unique point.
En particulier, deux applications f et g sont égales si et seulement si :

- elles ont le même ensemble de départ
- elles ont le même ensemble d'arrivée
- pour tout élément x de leur ensemble de départ, $f(x) = g(x)$.

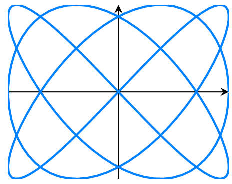


FIGURE 3.2– Une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ qui n'est pas le graphe d'une application.

Remarque. Le second point (l'égalité des ensembles d'arrivée) est le moins naturel.
En effet, si l'on s'en tient à la définition, les deux applications $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée[20].
Nous verrons qu'en pratique, nous omettrons ce point dans la plupart des cas, nous en reparlerons lorsque nous définirons la corestriction.

[20] Mais pourtant elles ont même ensemble de départ, et prennent partout les mêmes valeurs.

En revanche, il y a un cadre où il est totalement légitime d'ignorer ce second point, c'est celui des fonctions numériques[21], à savoir les fonctions qui ont pour ensembles de départ et d'arrivée des parties de $\mathbf{R}$.
Dans ce cas, on considérera toujours (là aussi, un peu abusivement) que leur ensemble d'arrivée est $\mathbf{R}$, et donc les deux fonctions f et g ci-dessus seront considérées égales.

[21] C'est-à-dire celles qui ont été étudiées chapitre 2, qui à un réel associent un autre réel.

Exemples 3.64

En pratique, nous ne définirons jamais une application en se donnant un triplet, et comme pour les fonctions numériques, nous utiliserons la notation $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.
Donnons tout de même quelques exemples d'applications qui ne sont pas des fonctions numériques, mais avec des ensembles de départ et/ou d'arrivée plus exotiques.

- $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & \{z \in A \mid |z| = 1\} \end{array} \right.$, qui à un ensemble (inclus dans $\mathbf{C}$) associe un autre ensemble.
- $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}^*) & \longrightarrow & \mathbf{C}^* \\ A & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset \\ e^{i\frac{2\pi}{\min A}} & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases} \end{array} \right.$.
- $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & p \end{array} \right.$ n'est pas bien définie, le rationnel 2 s'écrit à la fois $\frac{2}{1}$ et $\frac{4}{2}$, donc son image n'est pas uniquement définie.
En revanche l'application qui à un rationnel associe le numérateur de son écriture irréductible est bien définie.

Géométriquement
$f(A)$ est l'intersection de A avec le cercle trigonométrique.

Définition 3.65 (Identité) – Soit E un ensemble. On appelle **identité de** E l'application $\mathrm{id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$.

Les notions d'image et d'antécédent, déjà rencontrées pour les fonctions numériques se généralisent sans difficulté à toutes les applications.

Définition 3.66 (Image, antécédent) – Soit $f : E \to F$ une application.

- Si $x \in E$, et si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image de x par f.**
- Si $y \in F$, et si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent de y par f.**

⚠ L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application.
En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y et surtout pas[22] l'antécédent de y par f.

Par exemple, si on considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, alors 0 possède un unique antécédent par f qui est 0, 1 possède deux antécédents par f qui sont -1 et 1 et -1 ne possède aucun[23] antécédent par f.

[22] Sauf si pour une raison ou une autre, on sait déjà qu'un tel antécédent est unique.

[23] Le carré d'un nombre réel ne peut être négatif.

Exemple 3.67

Soit f l'application définie sur l'ensemble des élèves de MP2I, à valeurs dans $[\![1, 16]\!]$, qui à un étudiant associe le numéro de son groupe de colle.
Alors $f(Candide) = 16$, de sorte que 16 est l'image de Candide, et donc Maxime est un antécédent de 16.
Notons que Julien est aussi un antécédent de 16.

Définition 3.68 – Soient E et F deux ensembles. L'ensemble de toutes les applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.

Notation

La notation F^E sera motivée plus tard, lorsque nous compterons le nombre d'éléments de $\mathscr{F}(E, F)$ dans le cas où E et F sont finis. Attention au fait que c'est l'espace de départ qui est en exposant.

Exemple 3.69

Il est tout à fait possible de considérer des applications elles-mêmes définies sur des ensembles d'applications. Par exemple, si on note $\mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables, il est possible de considérer l'application $D : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$, qui à une fonction associe sa dérivée.
Notons alors $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$ la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.
Une fonction dérivable f est alors un antécédent de h par D si et seulement si $f' = h$, soit si et seulement si f' est nulle. Ce qui est le cas si et seulement si f est constante.

Définition 3.70 – Si I et E sont deux ensembles, on note parfois $(a_i)_{i \in I}$ au lieu de $a : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & a(i) \end{array} \right.$, et on parle alors de **famille d'éléments de E indexée par I** au lieu de parler d'application.

En particulier, une suite, qui est une famille indicée par $\mathbf{N}$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (ou dans $\mathbf{C}$ pour les suites complexes).
On préfère alors largement[24] la notation $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à $u : n \mapsto u(n)$.
L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathscr{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, ou encore $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

[24] Par habitude...

3.6.2 Composition d'applications

Définition 3.71 – Soient E, F, G trois ensembles, et soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$ deux applications. On appelle composée de g et f, et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarque

Si on veut que la composition ait bien un sens, il faut nécessairement que l'espace d'arrivée de f soit l'espace de départ de g, afin qu'on puisse bien appliquer g à $f(x)$.

⚠ Le sens dans lequel on effectue la composition est important : même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux bien définies[25], en règle générale ces deux applications ne sont pas égales.

Par exemple, si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x + 2\pi \end{array} \right.$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(\sin(x)) = \sin(x) + 2\pi \neq \sin(x + 2\pi) = \sin(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

[25] C'est-à-dire lorsque $G = E$, soit

$$f : E \to F$$

et $g : F \to E$.

Notons qu'on a toujours, pour $f : E \to F$,

$$\mathrm{id}_F \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f.$$

Terminologie

On dit que id est un élément neutre pour la composition.

Dans le cas particulier où l'espace de départ et l'espace d'arrivée de f sont égaux, alors on peut composer f avec elle-même. Puis composer cette composée avec f, etc.

Définition 3.72 – Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$.
On pose alors $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $f^{n+1} = f \circ f^n$.
Autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Cette notation a un léger inconvénient, c'est qu'elle peut être confondue avec le produit (pour peu que E soit un espace dans lequel on a un produit clairement défini). Lorsqu'il y risque de confusion, on note parfois $f^{\circ n}$ au lieu de f^n.

Il est alors très facile de se convaincre que pour tous $k, n \in \mathbf{N}$, $f^k \circ f^n = f^n \circ f^k = f^{k+n}$. En revanche, lorsqu'on compose trois applications ou plus, l'ordre dans lequel la composition est effectuée n'a pas d'importance, comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 3.73 (Associativité de la composition) : *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Démonstration. Commençons par noter que $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont toutes deux E comme espace de départ et H comme espace d'arrivée. Pour le reste, la preuve est identique à celle qui a été donnée pour les fonctions numériques. □

Nous nous contentons de ces quelques définitions pour l'instant, et reviendrons dans un chapitre ultérieur sur l'étude générale des applications.

EXERCICES DU CHAPITRE 3

▶ Logique

EXERCICE 3.1 Si E désigne l'ensemble des élèves de MP2I, F l'ensemble des livres existants alors on note $P(x,y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y». F

Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1) $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
2) $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
3) $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
4) $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
5) $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
6) $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
7) $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

EXERCICE 3.2 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation. F

1) $\forall x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x^2} = x$
2) $\forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$
3) $\exists x \in \mathbf{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4) $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x < \sqrt{x}$
5) $\forall (a,b) \in \mathbf{Z}^2,\ \exists (u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ au + bv = 1$
6) $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{Z},\ \exists z \in \mathbf{R},\ z \neq x + y$

EXERCICE 3.3 PD

1) Montrer que $\forall a \in [0,1],\ \exists b \in \mathbf{R},\ a = \cos b$.
2) En déduire que $\forall t \in [0,2],\ \exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ t = \cos x + \sin y$.

EXERCICE 3.4 Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : \mathbf{R} \to J$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les propriétés suivantes : PD

1) f n'est pas paire
2) f est périodique
3) f n'est pas constante
4) f est croissante
5) f n'est pas strictement décroissante
6) f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$
7) f n'est pas la fonction nulle
8) f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J.

EXERCICE 3.5 PD

1) Donner la négation, ainsi que la valeur de vérité de la proposition suivante

$$\forall a \in]-\pi,\pi[\,,\ \left(\cos(a) > 0 \Rightarrow a \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\right).$$

2) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?

   a) $\forall t \in \mathbf{R}, (f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0))$
   b) $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0)$ **ou** $(\forall t \in \mathbf{R}, f(t) < 0)$.

EXERCICE 3.6 Permutation de quantificateurs AD

Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles.

Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y))$. Que dire de la réciproque ?

EXERCICE 3.7 Soient P, Q, R trois propositions logiques. PD

1) Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.
2) Montrer que les assertions (a) et (b) suivantes sont équivalentes :
   a) $(P \vee Q) \Rightarrow R$ et $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
   b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$.

EXERCICE 3.8 Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$. AD

Exercice 3.9 Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite localement constante sur I si **D**

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

1) Montrer que $f : I \to \mathbf{R}$ est localement constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = f(x)$.
2) Montrer qu'une fonction constante sur I est localement constante.
3) Donner un exemple de partie $I \subset \mathbf{R}$ et de fonction $f : I \to \mathbf{R}$ non constante mais localement constante.
4) Prouver que toute fonction localement constante sur I est constante si et seulement si I est un intervalle.

▶ Ensembles

Exercice 3.10 Soient A et B deux ensembles avec $A \subset B$. Déterminer $A \cup B$ et $A \cap B$. **F**

Exercice 3.11 Soit E un ensemble et soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. **PD**

1) Montrer que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.
2) Montrer que $(A \cap B = A \cap C$ **et** $A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow (B = C)$.

Exercice 3.12 Soient A et B deux ensembles. Est-il vrai que $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$? **AD**
Que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?

Exercice 3.13 Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$ si et seulement si $E \subset F$. **PD**

Exercice 3.14 Décrire les ensembles suivants : **PD**

1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \textbf{ et } x < 1) \textbf{ ou } x = 2\}$
2) $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0 \Rightarrow x > 1)\}$
3) $C = \{x \in \mathbf{R} \mid (x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 > 4) \textbf{ ou } (x^2 > 4 \textbf{ et } x > 2)\}$ $(\star)$.

Exercice 3.15 Soient A, B, C trois parties d'un même ensemble E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes : **PD**

1) $A \setminus B \subset C$ 2) $A \setminus C \subset B$ 3) $A \subset B \cup C$.

Exercice 3.16 Que valent les ensembles suivants : $\mathscr{P}(\{1\}), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})), \mathscr{P}(\{1,2,3,4\}), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))))$ $(\star)$? **PD**

Exercice 3.17 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que **AD**

1) $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
2) $\overline{\overline{A}} = A$
3) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
5) $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.
6) $A \setminus B = \complement_A^{A \cap B}$.

Exercice 3.18 Montrer que $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbf{R}$. **AD**

Exercice 3.19 On considère A et B deux parties de E. Résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$. **D**

Exercice 3.20 Soit E un ensemble et soient $E_1, \ldots, E_n$ $(n \geqslant 2)$ des parties deux à deux distinctes de E. Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre. **D**

▶ Raisonnements divers

Exercice 3.21 Soit x un irrationnel strictement positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel. **F**

Exercice 3.22 Soit $r \in \mathbf{N}^*$, et pour $i \in [\![0, r-1]\!]$, soit $A_i = \{n \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z},\ n = rk + i\}$. **PD**
Montrer que $A_0, \ldots, A_{r-1}$ sont deux à deux disjoints.

Exercice 3.23 Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$. **PD**

Exercice 3.24 Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$. **PD**

EXERCICE 3.25 AD

1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

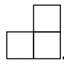
EXERCICE 3.26 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 AD

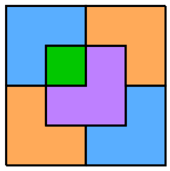
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$.

EXERCICE 3.27 D

Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ vérifiant : 1)$\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, f(n) = p$ et 2) $\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) \geqslant n$.
Prouver que $f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. *On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.*

EXERCICE 3.28 Un peu de Tétris TD

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ ($n \geqslant 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 : ) et de triominos coudés .
Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 3

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.1

1. Tout le monde a lu tous les livres.[1]
2. Tout le monde a lu au moins un livre.[2]
3. Il existe un étudiant qui a lu au moins un livre.
4. Cf question précédente : on peut échanger deux quantificateurs existentiels.
5. Il existe un étudiant qui a lu tous les livres.[3].
6. Tout livre a été lu par au moins un étudiant.
7. Il existe un livre que tous les étudiants ont lu.[4]

[1] Faux : avez vous tous lu le dernier Guillaume Musso ?

[2] J'espère que oui !

[3] Permettez-moi d'en douter !

[4] Vrai : *L'Émile* de ROUSSEAU.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.2

1. **Faux.** En effet, pour $x = -1$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \neq \sqrt{x^2}$ (ce qui est par exemple vrai pour $x = -1$).
2. **Faux.** Pour $x = -3$, on a $x \leqslant 2$ et pourtant $x^2 = 9 > 4$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2$ **et** $x^2 > 4$.
3. **Vrai.** $x = \dfrac{1}{4}$ convient, puisque $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ qui est bien plus grand que $\dfrac{1}{4}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
4. **Faux.** Pour $x = 1$, on a $x = \sqrt{x}$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
5. **Faux.** Si $a = b = 0$, alors, quels que soient u et v dans $\mathbf{Z}$, $au + bv = 0$.
   Sa négation est $\exists (a, b) \in \mathbf{Z}^2,\ \forall (u, v) \in \mathbf{Z}^2,\ au + bv \neq 1$.
6. **Vrai.** Prenons $x = \dfrac{1}{2}$, et $z = 0$ (indépendamment de la valeur de y). Alors quel que soit $y \in \mathbf{Z}$, $0 \neq y + \dfrac{1}{2}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{Z},\ \forall z \in \mathbf{R},\ z = x + y$.

Plus généralement

Cette proposition est fausse pour tout $x < 0$.

Rappel

La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.3

1. Nous savons déjà[5] que la fonction cos réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.
   Et donc $\forall a \in [0, 1], \exists! b \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], a = \cos b$.
   Mais qui peut le plus peut le moins : on peut remplacer $\exists!$ par $\exists$, et s'il existe un b dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors il existe $b \in \mathbf{R}$ (mais qui cette fois n'a plus de raison d'être unique !)
2. Soit $t \in [0, 2]$.
   ▸ **Si $t \leqslant 1$**, alors $t = t + 0 = t + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   Et par la question précédente, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $t = \cos(x)$.
   Et donc, en prenant $y = 0$, nous venons de prouver qu'il existe deux réels x et y tels que $t = \cos x + \sin y$.
   ▸ **Si $t > 1$**, alors $t - 1 \in [0, 1]$.
   Donc par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que
   $$t - 1 = \cos b \Leftrightarrow t = \cos b + 1 = \cos b + \sin \frac{\pi}{2}.$$
   Et donc il existe deux réels $x = b$ et $y = 0$ tels que $t = \cos x + \sin y$.
   Alternative : soit $t \in [0, 2]$. Alors $\dfrac{t}{2} \in [0, 1]$.
   Et alors par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{t}{2} = \cos(b)$.
   Considérons un tel b, de sorte que $\dfrac{t}{2} = \cos(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.
   Alors en posant $x = b$ et $y = \dfrac{\pi}{2} - b$, on a
   $$\cos(x) + \sin(y) = \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b) + \cos(b) = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

[5] Si jamais nous ne l'avons pas dit, à vous de le prouver à l'aide du théorème de la bijection.

Solution de l'exercice 3.4

1. Rappelons que f est paire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ f(-x) = f(x)$.
Donc la négation de cette proposition est $\exists x \in \mathbf{R},\ f(-x) \neq f(x)$.
2. Nous avons dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbf{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.
Soit encore $\exists T \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x+T) = f(x)$.
3. Deux options ici : dire que f n'est pas constante revient à dire qu'elle prend au moins deux valeurs. Donc
$$\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x) \neq f(y).$$
Une autre option, plus pédestre, est de dire que f est constante si et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda.$$
Et donc la négation en est $\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq \lambda$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. La fonction f est strictement décroissante si et seulement si
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$
Donc la négation en est $\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x < y$ **et** $f(x) \leqslant f(y)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
7. Rappelons que la fonction nulle est la fonction qui vaut **toujours** zéro.
Et donc que f est non nulle dès lors qu'elle ne s'annule pas en au moins un point : $\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq 0$.
8. f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur J si tout élément de J possède un unique antécédent par f.
Soit encore $\forall y \in J,\ \exists! x \in \mathbf{R},\ f(x) = y$.
Et si vous n'aimez pas les $\exists!$, cela s'écrit encore
$$\forall y \in J,\ \exists x \in \mathbf{R},\ (f(x) = y) \textbf{ et } (\forall z \in \mathbf{R},\ (y = f(z) \Rightarrow z = x)).$$

⚠ Attention ! Il n'est pas question de permuter les deux quantificateurs, cela signifierait que le $T \in \mathbf{R}_+^*$ peut dépendre du $x \in \mathbf{R}$ choisi, ce que nous ne voulons pas !

Remarque Si l'on sait que f est à valeurs dans J, il est possible de restreindre les λ à J.

Rappel La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

Solution de l'exercice 3.5

1. La négation en est $\exists a \in]-\pi,\pi[, \cos(a) > 0$ **et** $a \notin \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.
Or cette négation est fausse, puisqu'il est bien connu que pour $a \in]-\pi,\pi[$, $\cos(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Donc pour $a \in]-\pi,\pi[$, si $\cos(a) > 0$, alors $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Puisque la négation est fausse, la proposition de départ est vraie.
2. Ces assertions ne sont pas équivalentes. Prenons par exemple f la fonction définie par $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = 1$ **ou** $f(x) = -1$, si bien que l'assertion (a) est vraie.
En revanche, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$, si bien que l'assertion (b) est fausse.

En français : (a) signifie que f ne s'annule jamais, et (b) signifie que f ne s'annule jamais et reste de signe constant sur $\mathbf{R}$.
On a bien $(b) \Rightarrow (a)$, mais pas l'implication réciproque.

Solution de l'exercice 3.6

Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)$.
Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F,\ P(x_0,y)$.
Soit $y \in F$. Alors $P(x_0,y)$ est vraie.
Et donc $\exists x \in E,\ P(x,y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$).
Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)$.
Nous venons donc bien de prouver que
$$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)).$$
En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est vraie[6], alors que $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est fausse[7].
Commentaires : *nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles $\forall$ et $\exists$.*
Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ est vraie, alors $\forall\exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fausse ! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles $\forall$ et $\exists$.

[6] Pour tout réel, il existe un réel plus grand.

[7] Il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.7

Il suffit de faire des tables de vérité.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (\neg Q).$$

2.a. On pourrait faire des tables de vérité, mais également utiliser ce qui précède :

$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv$ **non**$(P$ **ou** $Q)$ **ou** $R \equiv$ (**non** P **et** **non** Q) **ou** $R \equiv$ (**non** P **ou** R) **et** (**non** Q **ou** R).

Mais $P \Rightarrow R \equiv$ **non** P **ou** R et $Q \Rightarrow R \equiv$ **non** Q **ou** R, et donc

$$(P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R) \equiv ((\textbf{non } P \textbf{ ou } R)) \textbf{ et } (\textbf{non } Q \textbf{ ou } R).$$

On a donc bien

$$(P \textbf{ ou } Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R).$$

2.b. Montrons que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ ont même table de vérité.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Là aussi, il aurait été possible d'utiliser la question 1 :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R.$$

Et sur le même principe, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R$.
Et donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.8

⚠ *Il y a là un abus de notation que nous ferons souvent : on note $\forall \varepsilon > 0$ pour dire $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.*
Et donc la négation de $\forall \varepsilon > 0, P(\varepsilon)$ est $\exists \varepsilon > 0, \neg P(\varepsilon)$.
Et surtout pas $\exists \varepsilon \leqslant 0, \neg P(\varepsilon)$.
Il s'agit de prouver une implication, nous pouvons donc prouver sa contraposée.
Celle-ci est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| \geqslant \varepsilon)$.
Soit donc x non nul. Alors $|x| > 0$. Et par conséquent, $\varepsilon = |x|$ est bien un réel strictement positif tel que $|x| \geqslant \varepsilon$.
Ainsi, nous venons de prouver que

$$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon).$$

Et donc sa contraposée, qui est notre proposition de départ est également vraie.
Rappel *: une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. On ne confondra pas la contraposée avec la négation et/ou la réciproque.*

Une autre solution : c'est peut-être un peu moins naturel, mais il est tout à fait possible de revenir à la définition de l'implication : $P \Rightarrow Q \equiv P \vee \neg Q$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que pour $x \in \mathbf{R}$, $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ **ou** $x \neq 0$.
Si $x \neq 0$, il n'y a rien à dire, on a directement $x \neq 0$, donc $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)$ **ou** $x \neq 0$.
Et si $x = 0$, alors $|x| = 0$ et donc $\forall \varepsilon > 0$, $0 = |x| < \varepsilon$.
Donc on a bien l'implication annoncée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.9

1. Supposons f localement constante sur I.
Soit alors $x \in I$. Notons alors $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a$.
Mais en particulier, comme $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(x) = a$.
Et donc pour tout $t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = f(x)$.
Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.

Inversement, si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$, alors pour $x \in I$ fixé, en notant $a = f(x)$, il existe bien $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x) = a.$$

Et donc nous avons prouvé que

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = a$$

de sorte que f est localement constante sur I.

2. Soit f la fonction constante égale à λ sur I.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = \lambda$.
En particulier, pour tout $x \in I$, pour tout $t \in]x-1, x+1[\cap I,\ f(t) = \lambda$.
Et donc en prenant $a = \lambda$ et $\varepsilon = 1$, on a $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a$. Et donc on a bien

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

Et donc f est localement constante.
Un autre exemple de fonction localement constante mais non constante serait la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie non pas sur $\mathbf{R}$ mais sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Remarque Dans la définition, les variables ε et a peuvent dépendre de x, nous sommes en train de dire que dans le cas précis d'une fonction constante, il est **possible** de prendre les mêmes valeurs pour tout $x \in I$.

3. Considérons la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$.
Prouvons alors que f est localement constante.
Soit donc $x \in \mathbf{R}^*$. Distinguons alors deux cas :
► <u>si $x > 0$</u> : notons $\varepsilon = \frac{x}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset \mathbf{R}_+^*$ et donc $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*,\ f(t) = 1$.
Donc en posant $a = 1$, on a bien prouvé que

$$\exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[,\ f(t) = a.$$

► <u>si $x > 0$</u> : notons alors $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}[\cap \subset \mathbf{R}_-^*$.
Et donc $a = -1$ convient.
Ainsi, on a bien prouvé que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*,\ f(t) = a.$$

Donc f est localement constante, mais n'est clairement pas constante sur $\mathbf{R}^*$.

4. L'exemple donné ci-dessus se transpose assez bien, pour prouver que si I n'est pas un intervalle, alors il existe une fonction définie sur I, localement constante mais non constante.
En effet, si I n'est pas un intervalle, alors $\exists (x, y) \in I^2, x \leqslant y$ **et** $(\exists z \in \mathbf{R}, (x \leqslant z \leqslant y$ **et** $z \notin I))$.
Autrement dit, il existe trois réels $x \leqslant z \leqslant y$ tels que $x \in I, y \in I$ et $z \notin I$.
Soit alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t > z \\ -1 & \text{si } t < z \end{cases} \end{array} \right.$.
On prouve comme ci-dessus que f est localement constante sur I.
Et pourtant $f(x) = -1 \neq f(y) = 1$, donc f n'est pas constante.
Par contraposée, nous venons donc de prouver le sens direct : si toute fonction localement constante sur I est constante, alors I est un intervalle.

Remarque Nous ne disons rien du cas $t = z$, puisque $z \notin I$.

Réciproquement, supposons que I soit un intervalle, et soit f une fonction localement constante sur I.
Laissons de côté le cas où I est vide[8] ou réduit à un point[9].
Autrement dit, considérons le cas où I est infini[10].

[8] L'ensemble vide est bien un intervalle, bien que peu intéressant.

[9] Idem.

[10] Savez-vous prouvez qu'un intervalle contient soit 0, soit 1, soit une infinité d'éléments ?

Soit alors $x \in I$, et soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = a$.
▶ **Si x n'est pas l'une des bornes de I**, c'est-à-dire s'il existe $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.
Alors en prenant $\varepsilon' = \min(\varepsilon, x - x_1, x_2 - x)$, on a $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[\subset I$ et $\forall t \in]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$, $f(t) = a$.
Donc f est constante, égale à a sur $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$.
En particulier, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.
▶ **Si x est la borne de droite de I**, c'est-à-dire si $I \cap]x, x+\varepsilon[= \emptyset$.
Alors il existe $x_1 \in I$ tel que $x_1 < x$, et donc en posant $\varepsilon' = \min(x - x_1, \varepsilon)$, alors $]x-\varepsilon', x] \subset I$, et pour tout $t \in]x-\varepsilon', x]$, $f(t) = a$.
Comme f n'est pas définie à droite de x, ceci prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.
▶ **Si x est la borne de gauche de I** : on raisonne comme pour la borne de droite.

Au final, nous venons de prouver que pour tout $x \in I$, f est dérivable en x avec $f'(x) = 0$. Mais I étant un intervalle (et c'est fondamental ici), si f est de dérivée nulle sur I, alors elle est constante sur I.

> **Arnaque ?**
> Cette histoire de dérivée en une borne de I n'est pas totalement claire pour l'instant, et nécessitera (une fois de plus) d'avoir une bonne définition de la dérivée.
> L'idée est que si x n'est pas une borne de I, alors il faut connaître f «autour de x» et «des deux côtés de x» pour parler de sa dérivabilité en x.
> Pensez par exemple à la valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, mais dont la restriction à $\mathbf{R}_+$, qui est l'identité de $\mathbf{R}_+$ est dérivable en 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.10

Il semble plutôt intuitif[11] que $A \cup B = B$, mais il faut le prouver, ce qui peut se faire par double inclusion.
On a toujours $B \subset A \cup B$.
Inversement, soit $x \in A \cup B$. Alors, par définition d'une union, $x \in A$ ou $x \in B$. Or, si $x \in A$, puisque $A \subset B$, alors $x \in B$.
Donc nous avons prouvé que dans tous les cas, si $x \in A \cup B$, alors $x \in B$, c'est-à-dire que $A \cup B \subset B$.
Et donc on a bien l'égalité annoncée : $A \cup B = B$.

De même, il semble plutôt clair que $A \cap B = A$.
On a toujours $A \cap B \subset A$.
Soit $x \in A$. Alors, puisque $A \subset B$, $x \in B$.
Et donc x est à la fois dans A et dans B : il est dans $A \cap B$.
Nous venons donc de prouver que $\forall x \in A$, $x \in A \cap B$, c'est-à-dire que $A \subset A \cap B$, et donc par double inclusion $A = A \cap B$.

[11] Faire des dessins pour s'en convaincre !

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.11

1. Procédons par double implication.
▶ Si $A = B$, il est évident que $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$.
Donc ceci prouve l'implication $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$.

▶ Supposons donc à l'inverse que $A \cap B = A \cup B$.
Nous souhaitons prouver que $A = B$, et pour cela, nous pouvons procéder par double inclusion.
Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$), et donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$).
On en déduit que $x \in B$ (puisque $A \cap B \subset B$).
Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $x \in A$, $x \in B$, donc que $A \subset B$.
En échangeant les rôles de A et B, on prouve exactement de la même manière que $B \subset A$.
Et donc par double inclusion, $A = B$, si bien que $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

Par double implication, nous avons donc prouvé que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Alternative : pour l'implication $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$, proposons une autre solution.
Supposons donc que $A \cap B = A \cup B$.
On a alors $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, ce qui s'écrit encore, au vu des hypothèses faites, $A \cap B \subset A \subset A \cap B$.
Par double inclusion, on a donc $A \cap B = A$.
Et sur le même principe, $A \cap B = B$, si bien que $A = B$.

> **Échange ?**
> Dans l'hypothèse, A et B jouent des rôles totalement symétriques, et donc si on les échange, le même raisonnement reste valable mot pour mot afin de prouver $B \subset A$.
> Lorsque deux raisonnements sont identiques, vous pouvez le dire ainsi pour ne pas tout réécrire, mais n'en abusez pas, si les arguments sont différents, vous devez bien tenir deux raisonnements.

2. Il est évident que si $B = C$, alors $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
Supposons donc $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
Prouvons alors que $B \subset C$. Soit $x \in B$.
▶ **Si $x \in A$**, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in A \cap C$, de sorte que $x \in C$.

▸ **Si** $x \notin A$, alors $x \in A \cup B$ et donc $x \in A \cup C$.
Mais puisque $x \notin A$, s'il est dans $A \cup C$, c'est qu'il est dans C.

Ainsi, nous venons de prouver que $\forall x \in B, x \in C$, de sorte que $B \subset C$.
En échangeant les rôles de B et Con prouve que $C \subset B$, et donc par double inclusion, $B = C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.12

1. On n'a pas en général $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
En effet, si $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$, alors $A \cup B = \{1, 2\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$, mais pourtant $A \cup B \notin \mathscr{P}(A)$ et $A \cup B \notin \mathscr{P}(B)$.
2. On a bien $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
En effet, si E est un ensemble, alors on a

$$\begin{aligned} E \in \mathscr{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow E \subset A \cap B \\ &\Leftrightarrow (E \subset A) \textbf{ et } (E \subset B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \textbf{ et } E \in \mathscr{P}(B) \\ &\Leftrightarrow E \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B). \end{aligned}$$

Et donc ceci prouve bien que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

Détaillons tout de même l'équivalence $((E \subset A) \textbf{ et } (E \subset B)) \Leftrightarrow E \subset A \cap B$.
Supposons que $(E \subset A)$ et que $(E \subset B)$.
Alors pour $x \in E$, on a $x \in A$ et $x \in B$, et donc $x \in A \cap B$. Ceci prouve donc que $E \subset A \cap B$.

Inversement, si $E \subset A \cap B$, puisque $A \cap B \subset A$, alors $E \subset A$. Et on prouve de même que $E \subset B$, de sorte qu'on a bien $(E \subset A)$ et $(E \subset B)$.

> **Pour aller plus loin**
> À quelle(s) condition(s) a-t-on
> $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cup B)$?

> **Détails**
> Si cette équivalence vous semble douteuse, elle est détaillée ci-dessous !

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.13

Procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$, alors toute partie de F est une partie de F. Mais E lui même est une partie de E, et donc $E \subset F$.
Si vous préférez une rédaction plus formelle : $E \in \mathscr{P}(E)$, et donc $E \in \mathscr{P}(F)$. Et par conséquent, $E \subset F$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, supposons que $E \subset F$, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Alors $A \subset E$, et donc $A \subset F$. Donc $A \in \mathscr{P}(F)$.
Nous venons donc de prouver que tout élément de $\mathscr{P}(E)$ est un élément de $\mathscr{P}(F)$, donc $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$.

> **Rappel**
> L'équivalence
> $$E \in \mathscr{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$$
> est la **définition** de $\mathscr{P}(F)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.14

1. Il n'y a pas de grande difficulté ici : $A =]0, 1[\cup \{2\}$.
2. Plus dur : rappelons que $(x > 0) \Rightarrow (x > 1)$ est vraie si $(x > 0)$ et $(x > 1)$ sont vraies, ou si $x > 0$ est fausse.
Donc $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid (x > 0) \textbf{ et } (x > 1)\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
3. Il faut travailler un peu plus ici, et se souvenir que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P) \vee Q$.
On a donc, pour un réel x fixé,

$$\begin{aligned} (x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 > 4) \textbf{ ou } (x^2 > 4 \textbf{ et } x > 2) &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } (x^2 > 4 \textbf{ et } x > 2) \\ &\equiv ((x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } ((x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ ou } x > 2) \\ &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } (x^2 > 4 \textbf{ ou } x > 2) \\ &\equiv (x > 2 \textbf{ ou } x^2 > 4) \textbf{ et } (x^2 > 4) \\ &\equiv (x > 2 \textbf{ et } x^2 > 4) \textbf{ ou } x^2 > 4 \\ &\equiv x^2 > 4. \end{aligned}$$

Et donc $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 > 4\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.15

Utilisons un raisonnement circulaire, en prouvant que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).
▸ Supposons que $A \setminus B \subset C$, et prouvons que $A \setminus C \subset B$.

Soit donc $x \in A \setminus C$. Supposons par l'absurde que $x \notin B$. Alors $x \in A$ (car $A \setminus C \subset A$) et $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. Et donc d'après l'hypothèse, $x \in C$, ce qui contredit le fait que $x \in A \setminus C = A \cap \overline{C}$.
Donc $A \setminus C \subset B$.

► Supposons à présent que $A \setminus C \subset B$, et soit $x \in A$. Alors si $x \notin C$, $x \in A \setminus C$, et donc $x \in B$.
Autrement dit, soit $x \in C$, soit $x \in B$. Et dans tous les cas, $x \in B \cup C$.

► Enfin, supposons que $A \subset B \cup C$, et soit $x \in A \setminus B$.
Alors $x \in A$, donc $x \in B \cup C$. Mais $x \notin B$, et donc $x \in C$.
On en déduit que $A \setminus B \subset C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.16

Puisque $\{1\}$ est un singleton, on a $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
On en déduit que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$.
De même, en se rappelant qu'une partie de $\{1,2,3,4\}$ peut contenir $0, 1, 2, 3$ ou 4 éléments, et en listant toutes les parties à un élément, puis celles à deux éléments, etc, on obtient

$$\mathscr{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}.$$

On a $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
Et donc $\mathscr{P}(\emptyset)$ est un singleton, de sorte que $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Une étape supplémentaire donne

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}.$$

Cet ensemble a donc quatre éléments, de sorte qu'on est dans un cas similaire à $\mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$: il suffit de remplacer 1 par $\emptyset$, 2 par $\{\emptyset\}$, 3 par $\{\{\emptyset\}\}$ et 4 par $\{\{\{\emptyset\}\}\}$.
Il vient donc

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)))) = \{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\{\emptyset\}\}\}\},\\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\},\\ &\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}.\end{aligned}$$

> **Danger !**
> $\emptyset$ est l'ensemble vide.
> $\{\emptyset\}$ est un ensemble qui ne contient qu'un élément (lui même un ensemble) : l'ensemble vide.
> $\{\{\emptyset\}\}$ est un ensemble, qui ne contient qu'un élément : l'ensemble $\{\emptyset\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.17

Pour chaque question, je donne plusieurs méthodes afin de vous montrer qu'il existe souvent plusieurs moyens de répondre à la question posée, à vous de voir laquelle est la plus simple (en général, le plus simple est de travailler directement sur les ensembles si c'est possible, en utilisant les propriétés vues en cours).

1. Puisqu'il s'agit de prouver une équivalence, procédons par double implication.
Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Alors $B \subset A \cup B \subset B \cap C \subset C$, donc $B \subset C$.
Et de même, $A \subset A \cup B \subset B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$.
Ainsi $A \subset B \subset C$.

   Inversement, supposons que $A \subset B \subset C$. Il s'agit donc de prouver que $A \cup B = B \cap C$.
Puisque $A \subset B$, on a $A \cup B = B$. Et d'autre part, puisque $B \subset C$, on a $B \cap C = B$.
Et donc $A \cup B = B = B \cap C$.
Ainsi, on a bien prouvé l'équivalence

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C.$$

2. C'est assez évident : pour $x \in E$, on a

$$x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \textbf{non}(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow \textbf{non}(\textbf{non}(x \in A)) \Leftrightarrow x \in A.$$

3. Plusieurs options sont possibles[12].
<u>**Première méthode : en travaillant sur les ensembles**</u> : on a

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

<u>**Seconde méthode : par équivalences**</u> : pour $x \in E$, on a

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A \textbf{ et } x \notin B) \textbf{ ou } (x \in A \textbf{ et } x \notin C)$$

[12] Et je vous laisse choisir votre préférée...

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } (x \notin B \textbf{ ou } x \notin C)\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } (x \in \overline{B} \cup \overline{C})\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } x \in \overline{B \cap C}\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \textbf{ et } x \notin B \cap C\\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cap C).
\end{aligned}$$

Troisième méthode : par double inclusion.
Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Alors soit $x \in A \setminus B$, soit $x \in A \setminus C$.
Dans le premier cas, $x \in A$, et $x \notin B$, donc $x \notin B \cap C$, de sorte que $x \in A \setminus (B \cap C)$.
Et dans le second cas, $x \in A$ et $x \notin C$, donc $x \notin B \cap$, et donc $x \in A \setminus (B \cap C)$.
On a donc prouvé que $\forall x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $x \in A \setminus (B \cap C)$, de sorte que

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C).$$

Inversement, soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \cap C$.
Donc soit $x \notin B$, auquel cas $x \in A \setminus B \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Soit $x \notin C$, auquel cas $x \in A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
Nous avons donc bien $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. Prouvons directement que $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, l'autre équivalence en découlera directement en échangeant les rôles de A et B.
Supposons donc que $A \setminus B = A$.
Alors $A \cap \overline{B} = A$, et donc $A \cap B = (A \cap \overline{B}) \cap B = A \cap \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} = \emptyset$.

Donc $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Alternative : supposons par l'absurde que $A \cap B \neq \emptyset$.
Alors il existe un élément x dans $A \cap B$.
Mais un tel x est alors dans A et dans B, donc n'est pas dans $A \setminus B$. Et puisque $A \setminus B = A$, x n'est donc pas dans A, ce qui est absurde.
On en déduit que $A \cap B = \emptyset$, ce qui prouve que $A \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Méthode
Pour prouver qu'un ensemble est vide, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il contient au moins un élément pour arriver à une contradiction.

Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et prouvons que $A \setminus B = A$.
L'inclusion $A \setminus B \subset A$ est vraie, par définition de $A \setminus B$.
Et si $x \in A$, alors $x \notin B$, faute de quoi on aurait $x \in A \cap B$, contredisant la vacuité de $A \cap B$.
Par conséquent, $x \in A \setminus B$, et donc $A \subset A \setminus B$.
Par double inclusion, $A = A \setminus B$, ce qui achève de prouver la seconde implication, et donc l'équivalence

$$A \setminus B = A \Leftarrow A \cap B = \emptyset.$$

Alternative : on a toujours[13] $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
Et donc si $A \cap B = \emptyset$, $A = (A \setminus B) \cap \emptyset = A \cap B$.

[13] Un élément de A est soit dans B (et donc dans $A \cap B$), soit dans $\overline{B}$ et donc dans $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.

5. Là aussi nous pourrions procéder par double inclusion, mais il est tout aussi simple de procéder par équivalence.
Soit donc $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A} \setminus \overline{B} &\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \textbf{ et } (x \notin \overline{B})\\
&\Leftrightarrow (x \notin A) \textbf{ et } (x \in B)\\
&\Leftrightarrow x \in B \setminus A.
\end{aligned}$$

Et donc $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

Encore plus simple : $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B = B \setminus A$.

6. Il serait possible de raisonner par double inclusion, essayons d'y aller directement par équivalence : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
x \in \complement_A^{A\cap B} &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \cap B)\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin B))
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B.$$

Alternative :

$$\begin{aligned}\complement_A^{A\cap B} &= A \setminus (A\cap B) = A \cap \overline{(A\cap B)}\\ &= A \cap \left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\ &= \left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\\ &= A\cap\overline{B} = A\setminus B.\end{aligned}$$

Loi de De Morgan.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.18

Commençons par dire deux mots de l'intuition géométrique qui se cache là-derrière : vous savez que $x^2 + y^2 = 1$ est une équation du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
Et donc $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points qui se trouvent à l'intérieur de ce cercle : $\mathscr{C}$ est le disque centré en l'origine et de rayon 1.

Détails
Il s'agit de l'ensemble des points dont la distance à l'origine est inférieure à 1.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe deux parties A et B de $\mathbf{R}$ telles que $\mathscr{C} = A \times B$.
Puisque $(0,1) \in \mathscr{C}$, nécessairement $1 \in B$.
De même, puisque $(1,0) \in \mathscr{C}$, alors $1 \in A$.
Et donc $(1,1) \in A \times B = \mathscr{C}$, ce qui est absurde car $1^2 + 1^2 > 1$.
On en déduit donc que notre hypothèse de départ est fausse : $\mathscr{C}$ n'est pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.19

Notons que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap X \subset A$.
Et donc si $B \not\subset A$, alors l'équation ne possède pas de solution.

Méthode
Nous sommes en train de faire un raisonnement par analyse synthèse, et nous commençons par l'analyse : si X est solution, que peut-on dire à son sujet ?

En revanche, si $B \subset A$, considérons une solution X de l'équation. Alors on a

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup \overline{A}) = \underbrace{(X \cap A)}_{=B} \cup (X \cap \overline{A}) = B \cup (X \cap \overline{A}).$$

Et donc en particulier, $B \subset X$. De plus $X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.
Donc X est de la forme $B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$.

Méthode
Il s'agit ici de la synthèse : si X est de la forme $B \cup C$, est-il bien solution de l'équation ?

Inversement, si $X = B \cup C$, avec $C \subset \overline{A}$, alors

$$A \cap X = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C)}_{=\emptyset \text{ car } C \subset \overline{A}} = A \cap B = B.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathscr{S} = \left\{B \cup C,\ C \in \mathscr{P}(\overline{A})\right\} = \left\{X \in \mathscr{P}(E) \mid B \subset X \subset B \cup \overline{A}\right\}.$$

Intuition
Un ensemble X vérifie $A \cap X = B$ si et seulement si X contient B tout entier, ainsi que des éléments qui ne sont pas dans A.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.20

Juste pour le plaisir, et bien que ceci ne nous soit pas vraiment utile dans la suite, reformulons l'énoncé : il s'agit de prouver que

$$\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur n, le nombre d'ensembles.
Autrement dit, nous prouvons la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante : «quelles que soient $E_1, \dots, E_n$ des parties deux à deux distinctes de E, il en existe une qui ne contienne aucune des autres.»
Notons que là encore, il peut être instructif[14] d'essayer d'écrire $\mathscr{P}(n)$ à l'aide de quantificateurs :

[14] Oserais-je dire «amusant» ?

$$\mathscr{P}(n) : \forall (E_1, \dots E_n) \in \mathscr{P}(E)^n,\ (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow E_i \neq E_j) \Rightarrow (\exists i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\},\ E_j \not\subset E_i).$$

Pour $n = 2$, donnons nous deux parties E_1, E_2 de E distinctes.
Alors on ne peut avoir à la fois $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, car alors on aurait $E_1 = E_2$, contredisant

le fait que $E_1 \neq E_2$.
Donc on a toujours soit[15] E_1 qui ne contient pas E_2, soit E_2 qui ne contient pas E_1.
Supposons à présent que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et considérons $E_1, \dots, E_{n+1}$ des parties distinctes de E.
Par hypothèse de récurrence, l'un des $E_1, \dots, E_n$, appelons-le E_i, ne contient aucun des autres.
Il y a alors deux cas possibles :

- Si $E_{n+1} \not\subset E_i$, alors aucun des $E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_{n+1}$ n'est contenu dans E_i.
- Si $E_{n+1} \subset E_i$, alors E_{n+1} ne contient aucun des E_k, $k \in [\![1, n]\!]$.
  En effet, pour $k \neq i$, si on avait $E_k \subset E_{n+1}$, comme $E_{n+1} \subset E_i$, on aurait également $E_k \subset E_i$, ce qui contredit la définition de i.
  Et pour $k = i$, on ne peut avoir $E_i \subset E_{n+1}$ car on a déjà $E_{n+1} \subset E_i$, et par hypothèse $E_i \neq E_{n+1}$ car $E_1, \dots, E_{n+1}$ sont deux à deux distincts..
  Et donc E_{n+1} ne contient aucun des ensembles $E_1, \dots, E_n$.

Ainsi, dans tous les cas, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
Et donc, pour toute famille finie de parties deux à deux distinctes de E, l'une[16] de ces parties n'en contient aucune autre.

[15] Et peut-être même les deux à la fois !

[16] Au moins.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.21

Il s'agit donc de prouver que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.
Prouvons plutôt la contraposée, qui est : $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$.
Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, alors il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$.
Et donc $x = (\sqrt{x})^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ est également le quotient de deux entiers, donc dans $\mathbf{Q}$.
Ainsi, on a bien prouvé que $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, de sorte que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.22

Il s'agit de prouver que pour tout $(i,j) \in [\![0, r-1]\!]^2$ vérifiant $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient donc $i \neq j$ deux élément distincts de $[\![0, r-1]\!]$, et supposons qu'il existe $n \in A_i \cap A_j$.
Alors, puisque $n \in A_i$, il existe $k_1 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_1 + i$, et de même, il existe $k_2 \in \mathbf{Z}$ tel que $n = rk_2 + j$.
On a donc $0 = n - n = r(k_1 - k_2) + i - j \Leftrightarrow i - j = r(k_2 - k_1)$.
Donc r divise $i - j$. Mais on a $-r + 1 \leqslant i - j \leqslant r - 1$, et le seul nombre de $[\![-r+1, r-1]\!]$ qui est divisible par r est 0, donc $i = j$, ce qui est absurde.
Ainsi, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Danger ! L'erreur à ne pas faire serait de supposer que k_1 et k_2 sont égaux. Autrement dit, d'écrire : «il existe k tel que $n = kr + i$ et $n = kr + j$.»

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.23

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls[17].
Alors $q\ln(2) = p\ln(3) \Leftrightarrow \ln(2^q) = \ln(3^p) \Leftrightarrow 2^q = 3^p$.
Mais 2^q est pair, alors que 3^p est impair, d'où une contradiction.
On en déduit que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

[17] Puisque $\ln(2) \neq 0$, il est raisonnable de supposer $p \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.24

Supposons que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Alors α^2 est encore dans $\mathbf{Q}$.
Or, $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 5}{2}$ est un rationnel : il existe deux entiers p et q tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{6}$.
Alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 6 \Leftrightarrow 6q^2 = p^2$.
La suite de la preuve est alors la même que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$: on montre que p est pair, puis que q est pair, contredisant l'irréductibilité de $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse de départ est fausse : $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

De même, si $\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{2}}} \in \mathbf{Q}$, alors son carré $4+\sqrt{3+\sqrt{2}}$ est dans $\mathbf{Q}$ car somme de deux rationnels.
Donc $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ est rationnel, et donc son carré aussi : $3+\sqrt{2}$ est rationnel. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde !

On en déduit que $\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ est irrationnel.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.25

1. Procédons par analyse synthèse, et soit f une telle fonction. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, en prenant $y = 0$, il vient $f(0) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.
Par conséquent, f est la fonction nulle.

   Inversement, il est clair que la fonction nulle satisfait à la relation donnée.
Et donc la fonction nulle est la seule fonction à satisfaire cette relation.
Remarque *: plus généralement, le même raisonnement prouve qu'une telle fonction ne peut pas être définie sur un ensemble contenant* 0.
En particulier, le $\ln$ *vérifie bien* $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$*, mais son ensemble de définition ne contient pas* 0 *!*

2. Supposons que f satisfasse $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors en prenant $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$.
Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En prenant $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f(0)f(1) - f(0) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, de sorte que $f(0) = 1$.
On en déduit donc que $f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f(0) - f(0 \times x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 + x$.
Ainsi, la seule fonction susceptible de satisfaire les conditions de l'énoncé est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

   Inversement, notons $f : x \mapsto 1 + x$. Alors pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y.$$

   Donc la fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé.
On en déduit que la seule fonction vérifiant les conditions requises est $x \mapsto 1 + x$.

> ⚠ **Attention !**
> Nous n'avons procédé qu'à l'analyse : **si** une telle fonction existe, **alors** c'est $x \mapsto 1 + x$, mais la synthèse reste à faire, c'est-à-dire qu'il faut encore déterminer si cette fonction vérifie ou non la condition de l'énoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.26

Procédons par analyse-synthèse.
Si deux tels réels a et b existent, alors en particulier, $1 = u_0 = a(-1)^0 + b2^0 = a + b$.
Et de même, $3 = u_1 = a(-1)^1 + b2^1 = -a + 2b$.

Donc $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{3} \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Ainsi, si deux tels réels existent, nous les avons uniquement déterminés.

Reste à faire la synthèse : il faut encore prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour ce faire, procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai (car nous avons tout fait pour !)
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n + 1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+3}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2(-1)^n + 2^{n+3} + 22^{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^n(2-1) + 2^{n+2}(2+2)\right) = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+2} + 2^{n+2+2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n + 2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

> **Rédaction** ✎
> Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.27

Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $f(n) = n$.
Notons donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $f(n) = n$
Initialisation : par le point 1) il existe un entier p tel que $f(p) = 0$.
Or, par le point 2) $f(p) \geqslant p$, soit encore $0 \geqslant p$.
Puisque $p \geqslant 0$, on a donc $p = 0$, si bien que $f(0) = 0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies, c'est-à-dire telles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$.
Par le point 1), il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f(p) = n + 1$.
Par ailleurs, par le point 2), $f(p) \geqslant p$, donc $n + 1 \geqslant p$.
Ainsi, $p \in [\![0, n + 1]\!]$.
Mais par hypothèse, on a déjà $f(0) = 0 \neq n + 1$, $f(1) = 1 \neq n + 1, \dots, f(n) = n \neq n + 1$.
Donc $p \geqslant n + 1$, si bien que par double inégalité $p = n + 1$.
Et donc $f(n + 1) = n + 1$, si bien que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

Rédaction

Dans une récurrence forte, il faut faire apparaître **très clairement** que vous ne supposez pas seulement $\mathscr{P}(n)$ vraie, mais bien $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \leqslant n$.

Donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$, ce qui est exactement la définition de $f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3.28

Nous allons raisonner par récurrence[18] sur n, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos».
Pour $n = 2$, ça se passe d'explications[19].
Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes[20].

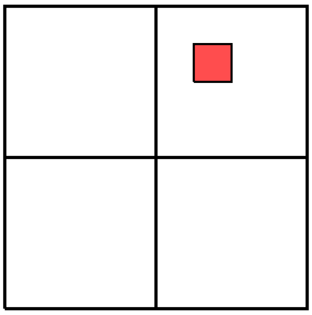
- **Étape 1** : partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2** : Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3** : positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4** : les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos.
  Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.

Ainsi, $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

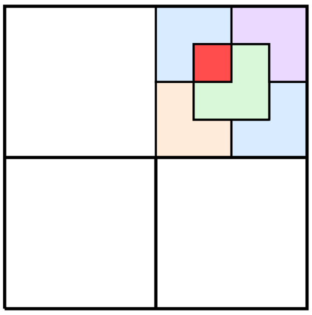
[18] Simple.

[19] Il n'y a que trois cases vides !

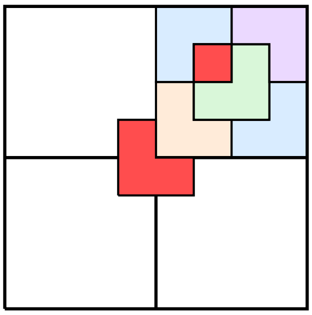
[20] Ces étapes sont illustrées sur la figure ci-dessous.



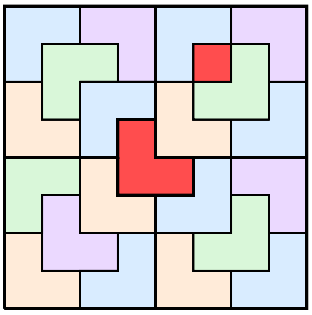
Étape 1



Étape 2



Étape 3



Étape 4

Sommes, produits, systèmes linéaires

4

4.1 Sommes et produits

4.1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Il est fréquent d'avoir à écrire des sommes d'un grand nombre de termes, et il n'est pas question d'écrire alors tous les termes de la somme.
On peut s'en tirer en écrivant des pointillés comme dans $1+2+\cdots+999+1000$, mais nous introduisons ici une autre notation, souvent plus pratique.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres complexes[1]. On note alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ ou $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$ la somme de ces n nombres :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Notons que lorsque $n = 1$, cette somme ne contient qu'un seul nombre (a_1), ce qui n'est pas totalement évident avec la notation utilisant les pointillés.

Exemple 4.1

La somme des 100 premiers entiers $1+2+\cdots+99+100$ s'écrit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k$.

Plus généralement, si p et q sont deux entiers avec $p \leqslant q$, et si $a_p, \dots, a_q$ sont des complexes, on note

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q.$$

La variable k est ce qu'on appelle une variable muette, et on peut donc la nommer comme on le souhaite, à condition de ne pas utiliser le nom de variables déjà définies.
Par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{\alpha=1}^{100} \alpha$.
En revanche, la variable en question n'a plus aucune signification en dehors de la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ a un sens, $\displaystyle k\cancel{\sum_{k=1}^{n}} k$ n'en a pas.
En effet, dans la somme, on sait que k prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, 100$, mais en dehors de la somme, que vaut k ? 1 ? 2 ? 100 ? Autre chose ?
Une fois la somme terminée, la variable est de nouveau disponible[2], et donc peut être utilisée de nouveau, par exemple pour une autre somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{30} k^3$ a bien un sens.
Cette quantité aurait aussi pu être écrite $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{j=1}^{30} j^3$.

[1] Rappelons qu'un réel est un complexe comme les autres, et donc que tout ce qui suit est donc aussi valable pour des réels.

[2] Il y a là une certaine analogie avec le concept de variable locale en Python : le i n'a de signification qu'à l'intérieur de la somme.

La seule précaution à prendre pour le nom de la variable de sommation et de ne pas utiliser le nom d'une variable déjà utilisée par ailleurs.

Par exemple, il n'est pas question définir une suite (u_n) par $u_n = \cancel{\sum_{n=1}^{10} n^2}$.

En effet, quand je choisis une valeur de n, par exemple parce que je souhaite calculer la valeur de u_4, n devient **fixé.** Il n'est alors plus possible de le faire varier de 1 à 10.
De même, les bornes de la somme ne peuvent en aucun cas dépendre de la variable de sommation : $\cancel{\sum_{n=1}^{n}}$ ou $\cancel{\sum_{n=-n}^{6}}$ n'ont aucun sens, n ne peut pas varier entre 1 et n (puisque n vaut justement n).

Mais si n est une variable qu'on a déjà définie, alors $\sum_{k=1}^{n}$ et $\sum_{k=-n}^{6}$ ont un sens.

Plus généralement, si I est un ensemble **fini** et si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par I, on note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme de tous ces complexes.

Et si I est infini ?
Il est bien plus difficile de donner un sens à une somme infinie. Nous en parlerons plus tard dans l'année, et vous en reparlerez en deuxième année.

Exemple 4.2

La terminologie «famille indexée par I» est un peu effrayante, mais signifie juste que pour chaque élément i de l'ensemble I, on dispose d'un nombre a_i.
Si $I = [\![1, n]\!]$, alors ces nombres sont $a_1, \dots, a_n$.
Si E est l'ensemble des élèves de MP2I : $E = \{\text{Julien, Armelle, Chadi}, \dots\}$ et que pour chaque élève $e \in E$, je dispose de sa note n_e au dernier devoir, alors la moyenne de classe est

$$\frac{1}{48}\sum_{e\in E} n_e = \frac{1}{48}\left(n_{\text{Julien}} + n_{\text{Armelle}} + \cdots + n_{\text{Chadi}}\right).$$

Remarque
On peut toujours numéroter les éléments d'un ensemble fini. Par exemple, j'aurais aussi bien pu attribuer un numéro à chaque élève la classe : Thomas = 1, Margot = 2, ...
Et donc ma famille de notes se trouverait alors numérotée avec des nombres : $n_1, n_2, \dots, n_{48}$.

Notons qu'il est possible de renuméroter les éléments qui composent la somme, et que par exemple, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+2} = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} + a_{n+2} = \sum_{i=2}^{n+2} a_i$.
On dit alors qu'on a réalisé le changement d'indice $i = k + 2$.
De même, $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}$. Nous avons ici réalisé le changement d'indice $i = n - k$.

Les seuls changement d'indices pertinents dans le cadre des sommes sont de la forme

$\boxed{i} = \pm \boxed{k} + p$, où $p \in \mathbb{Z}$

«nouvelle» variable «ancienne» variable

On ne fera par exemple pas de changement d'indices de la forme $i = 2k$, même si on pourrait parfois être tenté d'écrire par exemple $\cancel{\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i}}$.
Ceci ne peut pas être correct car les $2i$ ne prennent que des valeurs paires : et donc $\sum_{i=0}^{n} a_{2i} = a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ alors que $\sum_{k=0}^{2n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$.

Alternative
On peut aussi remarquer que l'une des deux sommes contient $2n$ termes et l'autre n'en contient que n.

Par convention, on décide que si $q < p$, alors $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ et plus généralement, que si $I = \emptyset$, $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

On s'autorise également des notations du type, $\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n} a_k$, $\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ divisible par } 3}}^{n} a_k$ ou $\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 100\\ k \text{ premier}}} a_k$, qui ne nécessitent pas davantage d'explications.

Sur le même principe, on note $\prod_{k=p}^{q} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_q$ le produit des nombres $a_p, \ldots, a_q$.

On convient alors que si $q < p$, $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$ et que si $I = \emptyset$, $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

4.1.2 Propriétés de la somme et du produit

La plupart des propriétés qui suivent sont très intuitives, et doivent être comprises bien plus qu'apprises par cœur.

- **(Somme de termes tous égaux)** : pour $\alpha \in \mathbf{C}$ (une constante ne dépendant pas de $i \in I$), $\sum_{i \in I} \alpha = \alpha \times \mathrm{Card}(I)$.

  En particulier, $\sum_{k=p}^{q} \alpha = \alpha(q-p+1)$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha = n\alpha$ et $\sum_{k=0}^{n} \alpha = (n+1)\alpha$.

- **(Relation de Chasles)** : si $p \leqslant q \leqslant r$, alors $\sum_{k=p}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k$.

  Plus généralement, si I_1 et I_2 sont deux ensembles **disjoints**[3] alors

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i.$$

  Ceci n'est plus valable si I_1 et I_2 ne sont pas disjoints, car certains termes se trouveraient alors comptés deux fois dans le membre de droite (une fois dans chaque somme).

- **(Linéarité de la somme)** : pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$.

Les deux premières propriétés se traduisent facilement pour le produit :

$$\prod_{i \in I} \alpha = \alpha^{\mathrm{Card}(I)}, \quad \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \left(\prod_{i \in I_1} a_i\right) \times \left(\prod_{i \in I_2} a_i\right).$$

La troisième est un peu plus traîtresse : $\prod_{k=1}^{n} \lambda u_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} u_k$, et sûrement pas $\cancel{\lambda \prod_{k=1}^{n} u_k}$.

Et plus généralement, $\prod_{i=1}^{n} (\lambda u_i v_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} u_i \times \prod_{i=1}^{n} v_i$.

Enfin, notons que $\prod_{i \in I} \alpha^{u_i} = (\alpha)^{\sum_{i \in I} u_i}$.

Cardinal

Le cardinal $\mathrm{Card}(I)$ d'un ensemble fini I est le nombre d'éléments de I.
En particulier, si $p \leqslant q$,

$$\mathrm{Card}([\![p, q]\!]) = q - p + 1.$$

[3] C'est-à-dire qui n'ont pas d'éléments communs :

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Terminologie

Nous ne parlons pas de linéarité du produit, le terme linéaire (qui sera défini plus tard) faisant uniquement référence aux sommes.

Exemple 4.3

Si $I = [\![1, 2n]\!]$, et si on note $I_1 = \{k \in [\![1, 2n]\!],\ k \text{ pair}\}$ et $I_2 = \{k \in [\![1, 2n]\!],\ k \text{ impair}\}$, alors I_1 et I_2 sont disjoints, de sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2i) - \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \\
&= \cancel{2\sum_{i=1}^{n} i} - \cancel{2\sum_{i=1}^{n} i} + \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

$I = I_1 \cup I_2$.

Détails

$$I_1 = \{2i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$I_2 = \{2i-1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Linéarité de la somme.

$$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

La relation de Chasles peut se généraliser[4] de la manière suivante : si $I_1, \dots, I_n$ sont des ensembles deux à deux disjoints, et si $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in I_k} a_i$. On parle alors de **sommation par paquets**.

[4] La preuve se fait par récurrence.

Autrement dit

L'hypothèse faite sur $I_1, \dots, I_n$ revient à demander à ce qu'ils forment une partition de I (en tous cas lorsqu'ils sont non vides).

Exemple 4.4

Reprenons l'exemple précédent, et notons que
$[\![1, 2n]\!] = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \dots \{2n-1, 2n\}$.
Autrement dit, si pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $I_k = \{2k-1, 2k\}$, alors les I_k sont deux à deux disjoints et leur union vaut $[\![1, 2n]\!]$ tout entier.
Et donc par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} (-1)^i i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{2j-1}(2j-1) + (-1)^{2j} 2j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (2j - (2j-1)) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.\end{aligned}$$

Exemple 4.5

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculons $\sum_{i=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor$.
On a alors, pour $k \leqslant n-1$, $\left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \leqslant \sqrt{i} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leqslant i \leqslant (k+1)^2 - 1$.
Et donc il vient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{i} \right\rfloor \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \left((k+1)^2 - 1 - k^2 + 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Détails

On a écrit

$$[\![1, n^2-1]\!] = \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

où

$$I_k = \{[\![k^2, (k+1)^2 - 1]\!].$$

On appelle **somme télescopique** une somme de la forme $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

Il s'agit alors d'une somme où les termes se simplifient deux à deux, à l'exception de quelques termes[5]. En effet, on a

[5] Le premier et le dernier.

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + \cdots + (\cancel{a_q} - \cancel{a_{q-1}}) + (a_{q+1} - \cancel{a_q}) = a_{q+1} - a_p.$$

De manière plus rigoureuse,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= \sum_{i=p+1}^{q+1} a_i - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= a_{q+1} + \cancel{\sum_{k=p+1}^{q} a_k} - \cancel{\sum_{k=p+1}^{q} a_k} - a_p = a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

Méthode

Pour effectuer un changement d'indice, on commence par exprimer la «nouvelle» variable en fonction de l'«ancienne». Ici, $i = k+1$. Les bornes de la somme s'obtiennent alors en cherchant les valeurs extrêmes de la nouvelle variable en fonction de celles de l'ancienne.

Exemple 4.6 **Un grand classique**

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
Et donc pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

De même, il existe des produits télescopiques : $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_{p+1}}}{a_p}\frac{\cancel{a_{p+2}}}{\cancel{a_{p+1}}}\cdots\frac{a_{q+1}}{\cancel{a_q}} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

4.1.3 Quelques formules remarquables

Les formules qui suivent sont à connaître par cœur et sont la base de nombreux calculs de sommes.

Proposition 4.7 (Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique) :
Soit q un nombre complexe. Alors pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Si $q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Si $q \neq 1$, notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$. Alors

$$qS = q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} q^i.$$

Et donc $S - qS = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$.

On en déduit que $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

Remarque

Il serait tout à fait possible de prouver le résultat par récurrence.
L'avantage de la stration proposée ici est que, si vous oubliez la formule, mais retenez l'idée de la démonstration (calculer $S - qS$), alors vous serez capables de retrouver le résultat.

Corollaire 4.8 – *Soient $q \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$ et soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, avec $a \leqslant b$. Alors*

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}.$$

Cette formule se retient bien plus simplement sous la forme suivante :

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = (\textit{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\textit{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = \sum_{k=a}^{b} q^a q^{k-a} = q^a \sum_{k=a}^{b} q^{k-a} = q^a \sum_{i=0}^{b-a} q^i = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q}.$$

□

Exemple 4.9

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{2k-3}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^{-3}} \frac{1}{3^{2k}} = 27 \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{9}\right)^k = 27 \frac{1}{81} \frac{1 - \frac{1}{9^{n-1}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{1}{9^{n-1}}\right).$$

Proposition 4.10 : *Pour $n \in \mathbf{N}$, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Premier terme
Notons que ces sommes ont un premier terme qui est nul, et donc les formules sont valables que les sommes commencent à $k = 0$ ou qu'elles commencent à $k = 1$.

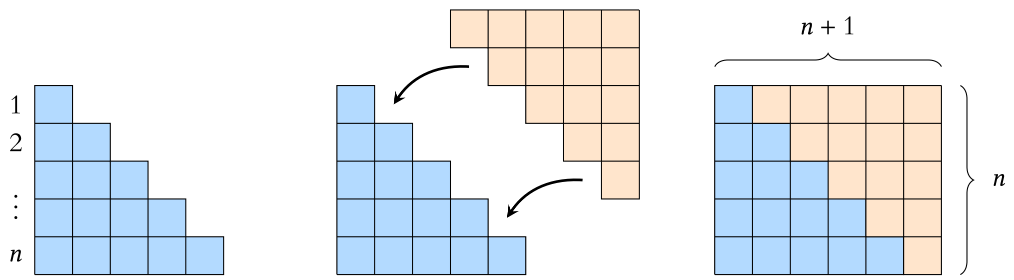
Démonstration. Notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

Alors en effectuant le changement d'indice $i = n - k$ on obtient $S = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n - i)$.

Et donc

$$2S = S + S = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{i=0}^{n} (n - i) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n - k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1).$$

Et par conséquent, $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.



Prouvons la seconde formule par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Soit donc $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Pour $n=0$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons à présent $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}\\ &= \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}.\end{aligned}$$

Méthode
$2n^2+7n+6$ est un polynôme en n, qui possède -2 comme racine «évidente».
On peut donc le factoriser par $n+2$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence :
pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Proposition 4.11 (Troisième identité remarquable généralisée) :
Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)\\ &= (a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a-b)\times\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}.\end{aligned}$$

Démonstration. Développons directement le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= a\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k - b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{i=1}^{n} a^{n-i}b^i\\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k - b^n = a^n - b^n.\end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé $i=k+1$.
Et alors lorsque k varie de 0 à $n-1$, i varie de 1 à n.

□

Exemples 4.12

- Pour $n=2$, on retrouve le classique $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
- Pour $n=3$, $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.
- Pour $a=1$, on retrouve $1^{n+1}-q^{n+1}=(1-q)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, ce qui nous fournit une autre démonstration de la formule de la proposition ??.
- En particulier, si n est impair,

$$a^n+b^n = a^n-(-b)^n = (a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+(-1)^{n-2}ab^{n-2}+(-1)^{n-1}b^{n-1}\right).$$

4.1.4 Sommes et produits doubles

Une famille de nombres peut ne pas dépendre d'un seul indice, mais de deux, comme par exemple i^j ou $\dfrac{i+1}{j!}$.

Pour calculer la somme d'un telle famille (finie bien entendu), il faut souvent réussir à faire apparaître des sommes simples.
Le cas le plus facile est en fait le cas général d'une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$, ce qui revient à considérer une famille de nombres complexes $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,m}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,m}$ indexée par les éléments de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$.

On peut se représenter ces mn nombres sous forme d'un tableau[6], et la somme que nous cherchons à calculer est alors la somme de tous les coefficients du tableau.

[6] Voir la figure ci-dessous.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
i \backslash j & 1 & 2 & \cdots & m & \\
\hline
1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & \to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1,j} \\
\hline
2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & \to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{2,j} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \quad \vdots \\
\hline
n & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} & \to \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{n,j} \\
\hline
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,m} &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{1,j}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{2,j}\\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{n,j}\end{array}\right\} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}
\qquad
\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,m}}_{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$$

Il y a plusieurs options pour calculer cette somme. L'une d'entre elles est de commencer par calculer la somme de chaque ligne (ce qui à i fixé correspond à $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$), puis calculer la somme des sommes des lignes, qui est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$.
Mais il est également possible de commencer, à j fixé, par calculer la somme des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne, qui est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$, puis de calculer la somme des sommes de colonne, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.
Et alors, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]} a_{i,j}$.
Il est également possible d'imaginer que certaines cases du tableau soient vides. Par exemple, les cases sous la diagonale. Autrement dit, que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Simplifions nous la vie, et considérons le cas où $m = n$, c'est-à-dire où notre tableau est carré.

Dans ce cas, à i fixé, la somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.
Et donc la somme de tous les coefficients du tableau est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$.
D'autre part, si on commence par calculer la somme sur les colonnes, la somme de la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.

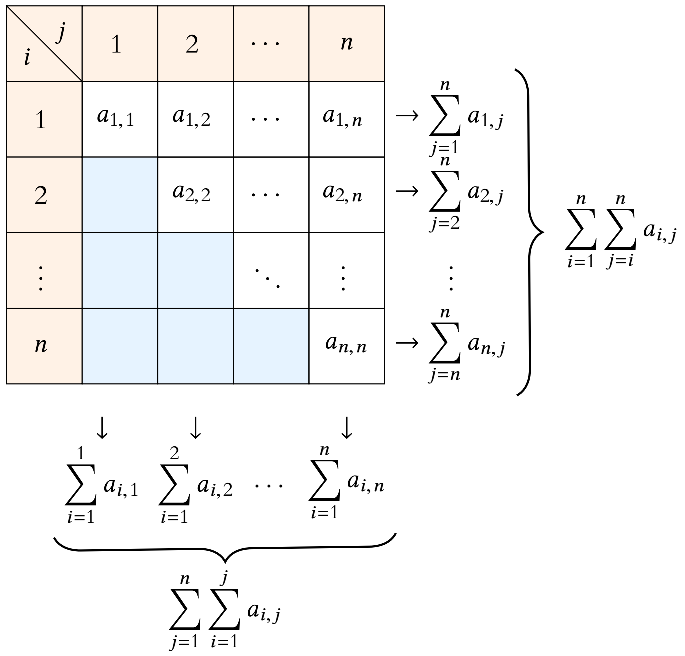


Figure 4.1 – Calcul de sommes triangulaires.

Et donc la somme de tous les coefficients est $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.

Ainsi, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$. On note fréquemment $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$ cette somme.

Méthode

L'emploi de cette notation est conseillé lorsqu'on manipule des doubles sommes, et c'est souvent le plus simple pour intervertir les deux sommes en limitant les risques d'erreur.

Exemple 4.13

Calculons $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

La deuxième somme ne dépendant pas de j, on peut sortir j de la somme.

Enfin, nous pourrions tenir le même type de raisonnement avec des sommes triangulaires où les coefficients diagonaux sont également nuls.
Tous les résultats sur les interversions de sommes sont résumés ci-dessous.

Proposition 4.14 (Interversion de sommes) : *Plus généralement, on a*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

Toutes les règles sur l'interversion de deux sommes s'étendent sans difficultés aux interversions de produits, en remplaçant le symbole $\sum$ par le symbole $\prod$.

Corollaire 4.15 – *Si pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = b_i c_j$, *alors*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right).$$

Démonstration. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i c_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \sum_{j=1}^{n} c_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

□

Explication

La quantité $\sum_{j=1}^{n} c_j$ ne dépend pas de i, et donc peut sortir de la somme par linéarité.

⚠ La proposition ci-dessus ne s'applique qu'aux sommes où le terme $a_{i,j}$ peut s'écrire comme produit d'un terme ne dépendant que de i et d'un terme ne dépendant que de j, ce n'est pas le cas de toutes les sommes !
C'est par exemple possible pour $a_{i,j} = 2^{2i+3j} = 4^i 8^j$, mais pas pour $a_{i,j} = (i+j)!$

Corollaire 4.16 –

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

Démonstration. On a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$$
$$= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j + a_i^2 + \sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j\right)$$
$$= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_i a_j + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

Relation de Chasles.

□

Notons que cette formule est bien connue si $n = 2$, c'est juste $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
Si $n = 3$, on a

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2 = (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac).$$

Plus généralement, lorsqu'on développe $(a_1 + \cdots + a_n)^2$, on fait apparaître tous les carrés $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$, ainsi que tous les «doubles produits» $a_i a_j$ avec $i \neq j$, qui apparaissent deux fois chacun.
Donc plutôt que d'écrire $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_i a_j$, on peut écrire $\displaystyle 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$.

4.2 COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

4.2.1 Définition, premières propriétés

Commençons par donner une autre expression de la factorielle, souvent plus pratique que celle dont nous disposons déjà :

Proposition 4.17 : *Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.*

Intérêt
Le principal avantage de cette formule est qu'il n'y a pas besoin de distinguer le cas $n = 0$.

Démonstration. Pour $n = 0$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} k = 1 = 0!$
Et pour $n > 0$, on retrouve bien évidemment le produit des entiers de k à n. □

Définition 4.18 (Coefficients binomiaux) – Soient n, k deux entiers naturels. On appelle **coefficient binomial «k parmi n»** le nombre $\binom{n}{k}$ défini par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que lorsque $k \leqslant n$, ceci s'écrit encore

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)} \frac{1}{k!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Proposition 4.19 : *Pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

□

Donnons quelques valeurs remarquables qu'il est bon de connaître :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 4.20 (Formule de Pascal) : *Pour tous entiers naturels k et n, on a*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. ▶ Si $k > n$, alors on a aussi $k+1 > n$ et $k+1 > n+1$, donc les trois termes sont nuls, il n'y a rien à démontrer.

▶ Si $k = n$, alors $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 1 + 0 = 1 = \binom{n+1}{k+1}$.

▶ Enfin, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!}\\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = n!\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

□

A priori, les coefficient binomiaux sont des rationnels, car quotients de deux entiers, mais la formule précédente nous permet de dire bien mieux :

> **Corollaire 4.21 –** *Quels que soient les entiers naturels k et n,* $\binom{n}{k} \in \mathbf{N}$.

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la proposition $\mathscr{P}(n)$:

$$\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \binom{n}{k} \in \mathbf{N}.$$

Pour $n = 0$, c'est assez évident car $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$ et pour $k \geqslant 1$, $\binom{0}{k} = 0$.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soit $k \in \mathbf{N}$.
Si $k = 0$, $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1 \in \mathbf{N}$.
Et si $k \geqslant 1$, alors par la proposition précédente,

$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\in \mathbf{N}} + \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbf{N}} \in \mathbf{N}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Les deux formules 4.19 et 4.20 ont une interprétation très simple sur le triangle de Pascal (qui est le tableau ci-dessous, le nombre situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne étant $\binom{i-1}{j-1}$).

Décalage ?
La première ligne correspond à $n = 0$ et la première colonne correspond à $k = 0$.
Donc par exemple $\binom{4}{2}$ n'est pas sur la 4ème ligne et 2ème colonne, mais sur la 5ème ligne et 3ème colonne.
Le même type de décalage se rencontrera lorsqu'on manipulera des listes en Python.

$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

$n=0$	1						
$n=1$	1 +	1					
		‖					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10 +	10	5	1	
				‖			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 4.22 : *Soient $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Alors* $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Une fois encore, il n'y a besoin de travailler que pour $k \leqslant n$. On a alors

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

□

4.2.2 La formule du binôme de Newton

Théorème 4.23 (Formule du binôme de Newton) : *Soient a et b deux nombres complexes*[7]*, et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

[7] En particulier, cette formule reste valable si a et b sont des réels !

Démonstration. Fixons a et b, et prouvons par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour $n = 0$, on a $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$.
Et d'autre part, $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons donc que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \\
&= a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $i = k+1$, de sorte que $k = i-1$.

Formule de Pascal.

Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, de sorte que par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Enfin, on a

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

□

Remarque. En particulier, pour $n = 2$, on retrouve

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

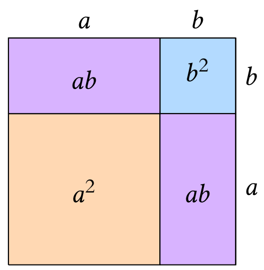


FIGURE 4.2– $(a+b)^2 = \dots$

Il est également utile de connaître la formule pour $n = 3$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exemples 4.24

- $(a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} a^k \left(-b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

  Ainsi, la somme des coefficients de la $n^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal vaut 2^n.
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$.

4.2.3 Interprétation(s) des coefficients binomiaux

Il existe une interprétation des coefficients binomiaux que vous avez déjà rencontrée en terminale : $\binom{n}{k}$ est le nombre de manières d'obtenir k succès en n répétitions d'épreuves de Bernoulli.

Ou si vous préférez parler en termes d'arbres, le nombre de chemins de longueur n qui ont emprunté exactement k fois la branche de droite dans un arbre binaire.

Probabilités
Notons qu'ici, nous ne comptons que le nombre d'issues, pas leur probabilités, et donc que les épreuves de Bernoulli soient indépendantes ou non, équiprobables ou non, n'a aucun importance ici.

En effet, notons $C(n,k)$ le nombre de «chemins» à n essais menant à exactement k succès[8].
Par convention, on décide que $C(0,0) = 1$.
Il est clair que $C(n,0) = 1$: il n'y a qu'un seul moyen de n'avoir aucun succès, c'est d'avoir échoué à chaque essai.
De même, il est clair que $C(n,n) = 1$.
Enfin, si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors pour avoir k succès en n essais, il y a deux options :

- soit le dernier essai a été un échec, et donc il fallait avoir déjà eu k succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de $C(n-1,k)$ manières,
- soit le dernier essai a été un succès, et donc il fallait avoir eu $k-1$ succès lors des $n-1$ premiers essais, ce qui pouvait se produire de $C(n-1,k-1)$ façons.

On a donc $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$.

Il est à présent possible de prouver par récurrence sur n la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C(n,k) = \binom{n}{k}$».

Pour $n = 0$, c'est évident car $C(0,0) = 1 = \binom{0}{0}$.

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors $C(n+1,0) = 1 = \binom{n+1}{0}$, $C(n+1,n+1) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ et si $k \in [\![1,n]\!]$, alors

$$C(n+1,k) = C(n,k) + C(n,k-1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

[8] Sur l'arbre ci-dessous, c'est le nombre de chemins partant de la case du haut et menant à $(k+1)^{\text{ème}}$ case de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne.

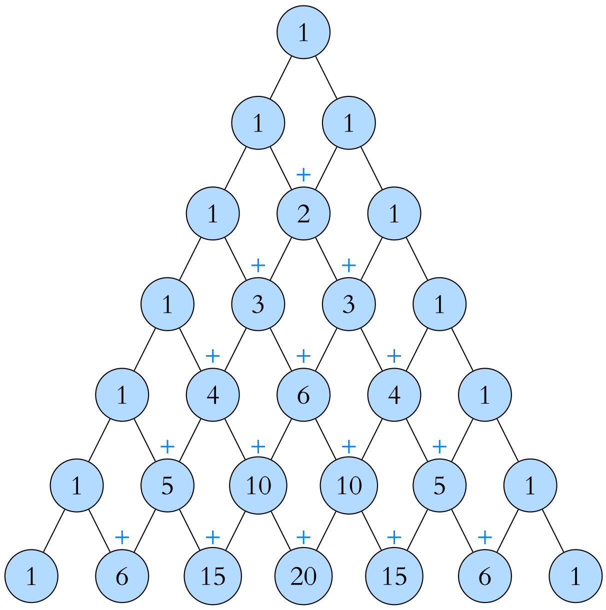


Figure 4.3 – Le nombre de chemins menant à une case donnée est la somme des nombres de chemins menant aux deux cases situées juste au dessus.

Ainsi, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, $C(n,k) = \binom{n}{k}$.
Enfin, il est évident que si $k > n$, alors $C(n,k) = 0 = \binom{n}{k}$.

Détails
On ne peut avoir strictement plus de succès que d'essais...

Maintenant que nous disposons de cette interprétation des coefficients binomiaux, revenons un instant sur la formule du binôme : on a par définition,

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}.$$

Et donc lorsqu'on développe cette expression «à la main», il nous faut à chaque fois choisir un terme (a ou b) dans le premier facteur, un terme (a ou b) dans le second facteur, etc.
Autrement dit, on répète n fois l'expérience «choisir a (parlons de succès) ou b (parlons d'échec) dans le $i^{\text{ème}}$ facteur $a+b$.»
On obtient ainsi des produits de n termes tous égaux à a ou à b, donc de la forme $a^k b^{n-k}, k \in [\![0, n]\!]$.
Or, à k fixé, le nombre de manières d'obtenir $a^k b^{n-k}$ est le nombre de manières d'obtenir exactement k succès dans notre répétition d'expériences de Bernoulli : c'est donc $\binom{n}{k}$.
Et par conséquent, le coefficient devant $a^k b^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$.

Une autre interprétation importante des coefficients binomiaux, sur laquelle nous nous attarderons longuement dans un chapitre ultérieur est la suivante : $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E à n éléments.
En effet, pour choisir une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, il faut répéter n fois l'expérience à 2 issues suivantes : choisir ou non de prendre le premier élément de E, choisir de prendre ou non le second élément de E, etc.
Alors les parties de E à k éléments sont celles pour lesquelles on a obtenu k succès (= choisi k éléments), elles sont donc au nombre de $\binom{n}{k}$.

Exemple 4.25

Le nombre de trinômes de colle possibles en MP2I est $\binom{48}{3}$: c'est le nombre de façons de choisir une partie à 3 éléments de l'ensemble des étudiants.

Remarquons qu'une partie d'un ensemble à n éléments possède soit 0 éléments[9], soit un seul élément, soit deux éléments, ..., soit n éléments.
Et donc le nombre total de parties de E est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

[9] C'est alors $\emptyset$.

Exemple 4.26 La formule du capitaine

Revenons sur la formule 4.22 : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
Le sélectionneur d'une équipe de hockey doit former une équipe de k personnes parmi les n joueurs dont il dispose, et doit nommer un capitaine. Il y a alors deux options :

1. choisir les k joueurs qui composent l'équipe, et choisir un capitaine parmi ces k joueurs.
2. choisir un capitaine, puis lui choisir $k-1$ coéquipiers parmi les $n-1$ autres joueurs.

Dans le premier cas, il y a $\binom{n}{k}$ manières de former l'équipe, et une fois l'équipe choisie, il y a k manières de choisir le capitaine.
Soit donc en tout $k\binom{n}{k}$ choix[10] possibles.

[10] Un choix étant ici une équipe de k joueurs, dont l'un est désigné capitaine.

Dans le second cas, il y a n manières de choisir le capitaine, et pour chaque choix du capitaine, $\binom{n-1}{k-1}$ manières de choisir ses coéquipiers.
Soit en tout $n\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles.
On retrouve ainsi $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

4.3 SYSTÈMES LINÉAIRES

4.3.1 Système de deux équations à deux inconnues

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

où x et y sont les deux inconnues, et a, b, c, d, e, f sont des réels ou des complexes fixés.
Résoudre le système, c'est trouver tous les couples (x, y) dans $\mathbf{R}^2$ (ou dans $\mathbf{C}^2$) vérifiant le système.
On supposera dans la suite que ni (a, b) ni (c, d) ne sont égaux à $(0, 0)$.
Notons que dans le cas réel, $ax + by = e$ et $cx + dy = f$ sont deux équations de droites. Nommons $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ces deux droites.
Alors un point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système si et seulement si il satisfait les deux équations de droites, c'est-à-dire s'il appartient aux deux droites.
Il y a alors trois cas possibles :

1. si les deux droites sont confondues, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$, et donc l'ensemble des solutions du système est $\mathcal{D}_1$. Il y a donc une infinité de solutions.
2. si les deux droites sont parallèles et non confondues, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$: le système n'a pas de solution.

3. si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un point, et donc le système possède une unique solution.

Notons de plus que $\overrightarrow{u_1} = (a, b)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et que $\overrightarrow{u_2} = (c, d)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$.
Et donc les droites sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires[11], soit si et seulement si $ad - bc = 0$.
Et donc le système admet une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
La quantité $ad-bc$ est appelée **déterminant du système** $(\mathcal{S})$, et sera largement généralisée plus tard dans l'année.

[11] C'est-à-dire ont même direction.

4.3.2 Système de deux équations à trois inconnues

Considérons à présent un système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x & + & a_{1,2}y & + & a_{1,3}z & = & b_1 \\ a_{2,1}x & + & a_{2,2}y & + & a_{2,3}z & = & b_2 \end{cases}$$

Alors pour $i \in \{1, 2\}$, $a_{i,1}x + a_{i,2}y + a_{i,3}z = b_i$ est l'équation d'un plan[12] $\mathcal{P}_i$ de $\mathbf{R}^3$.
Résoudre le système, c'est trouver les coordonnées des points qui satisfont aux deux équations de plans à la fois, donc trouver $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

[12] Sauf si tous les $a_{i,j}$ sont nuls, mais nous négligerons ce cas pour l'instant.

Plusieurs options s'offrent à nous :

1. si les deux plans sont parallèles et distincts, alors leur intersection est vide : le système n'a pas de solution.
2. si les deux plans sont confondus, alors $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$, et donc le système possède une infinité de solutions.
3. si les plans ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite, qui contient une infinité de points, et donc le système possède une infinité de solutions.

Notons qu'un tel système ne peut pas posséder une unique solution.

4.3.3 Cas général : système linéaire de n équations à p inconnues

Dans toute la suite, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés des scalaires.

Définition 4.27 – On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

où les inconnues sont $x_1, \ldots, x_p$, des éléments de $\mathbf{K}$, et où les $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ sont des scalaires **fixés.**

En particulier, les équations qui composent un système linéaire ne font pas apparaître de x_i^2, de $\sqrt{x_i}$, de e^{x_i}, etc.
Un peu de vocabulaire :

1. Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
2. $(b_1, \ldots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système. $(\mathcal{S})$.
3. Le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre par $(0, \ldots, 0)$ est appelé **système homogène associé à** $(\mathcal{S})$
4. On dit que le système $(\mathcal{S})$ est **incompatible** s'il ne possède pas de solution. Sinon, il est dit **compatible.**

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours $(0, \ldots, 0)$ comme solution.

Systèmes triangulaires

Définition 4.28 – Un système linéaire est dit **triangulaire** s'il est de la forme

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1+ & a_{1,2}x_2+ & a_{1,3}x_3+ & \cdots + & a_{1,n-1}x_{n-1}+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & a_{2,2}x_2+ & a_{2,3}x_3+ & \cdots + & a_{2,n-1}x_{n-1}+ & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & \vdots & \\ & & & & a_{n-1,n}x_{n-1}+ & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Soit encore si $n = p$ et si $a_{i,j} = 0$ pour $j < i$.

Dans le cas où tous les coefficients diagonaux (les $a_{i,i}$) sont non nuls, le système possède une unique solution, que l'on obtient de la manière suivante :

1. la dernière équation nous donne directement $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$
2. puis, en substituant à x_n la valeur obtenue précédemment, l'avant-dernière équation nous donne $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$
3. on poursuit alors le même procédé en remontant une à une les équations jusqu'à obtenir la valeur de x_1.

Exemple 4.29

Résolvons le système $\left\{\begin{array}{l} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = 6 \end{array}\right.$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y - z = 1 \\ z = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x - 2y - z = -4 \\ 2y = 1 + 3 \\ z = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x = -4 + 3 + 4 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Et donc l'unique solution au système est $\left(\dfrac{3}{5}, 2, 3\right)$.

Opérations élémentaires

Définition 4.30 – On dit que deux systèmes $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ à p inconnues sont **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.
Autrement dit, $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ est solution de $(\mathscr{S}_1)$ si et seulement si il est solution de $(\mathscr{S}_2)$.

Pour modifier un système en un système équivalent, nous disposons de trois opérations élémentaires qui sont

- L'échange de deux lignes. Lorsqu'on échange la $i^{\text{ème}}$ ligne avec la $j^{\text{ème}}$, on note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La multiplication d'une ligne par un scalaire **non nul**. Si on multiplie L_i par $\lambda \neq 0$, on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- L'ajout à une ligne d'un multiple d'une **autre** ligne. On note alors $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Notons qu'avec un peu d'habitude, on peut directement ajouter à une ligne des multiples de plusieurs autres lignes, et par exemple effectuer des opération du type $L_2 \leftarrow L_2 + L_1 - 3L_3$.

Non nul !
Si on multiplie une ligne par 0, cela revient tout bonnement à la faire disparaître, ce qui a de fortes chances de changer l'ensemble des solutions du système.

> **Proposition 4.31 :** *Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.*

Démonstration. Notons $(\mathscr{S})$ le système de départ et $(\mathscr{S}')$ le système obtenu à partir de $(\mathscr{S})$ à l'aide d'une opération élémentaire.

- Il est évident que l'échange de deux lignes ne change pas l'ensemble des solutions d'un système.
- Si on a effectué l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$.
  Si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S})$, alors on a en particulier $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i$, et donc en multipliant par λ,
  $$\lambda\left(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p\right) = \lambda b_i \Leftrightarrow \lambda a_{i,1}x_1 + \cdots + \lambda a_{i,p}x_p = \lambda b_i$$
  de sorte que $(x_1, \dots, x_p)$ satisfait encore la $i^{\text{ème}}$ équation de $(\mathscr{S}')$.
  Et puisque les autres équations sont inchangées, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S}')$.
  Il reste à prouver qu'inversement, une solution de $(\mathscr{S}')$ est encore solution de $(\mathscr{S})$.
  Mais si on remarque qu'on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ en réalisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}L_i$, alors ce qui vient d'être dit s'applique, et donc une solution de $(\mathscr{S}')$ est solution de $(\mathscr{S})$.
  Ainsi, $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{S}')$ ont les mêmes solutions.
- Dans le cas où l'opération réalisée est $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $j \neq i$.
  Soit alors $(x_1, \dots, x_p)$ une solution de $(\mathscr{S})$.
  Alors en particulier $a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i$ et $a_{j,1}x_1 + \cdots + a_{j,p}x_p = b_j$.
  Et donc en multipliant la seconde égalité par λ et en ajoutant ces deux égalités, il vient
  $$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})x_1 + \cdots + (a_{j,p} + \lambda a_{j,p})x_p = b_i + \lambda b_j$$
  de sorte que $(x_1, \dots, x_p)$ satisfait à la $i^{\text{ème}}$ équation de $(\mathscr{S}')$.
  Puisque les autres équations sont inchangées, $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S}')$.
  Inversement, on remarque qu'on passe de $(\mathscr{S}')$ à $(\mathscr{S})$ par l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$, et donc $(\mathscr{S})$ et $(\mathscr{S}')$ ont les mêmes solutions.

□

Ensemblistement
Nous venons de prouver que 'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est **inclus** dans l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S}')$.

La méthode du pivot de Gauss

Lorsque vous étiez petits et que vous avez appris à résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues, on vous a probablement présenté deux méthodes : la méthode par substitution (où l'on se sert d'une équation pour exprimer l'une des variables en fonction de l'autre avant de réinjecter cette expression dans la seconde équation) et la méthode par combinaison (où une combinaison astucieusement choisie des deux équations permet de faire disparaître l'une des variables).
Pour des systèmes linéaires plus généraux, la méthode par substitution mène à des calculs trop complexes pour être réellement efficace[13], et c'est la seconde méthode que nous allons chercher à développer ici.

Remarque
La substitution est exactement ce qu'on utilise lorsqu'on résout un système triangulaire.

[13] Bien qu'en théorie, elle soit valable.

Dans la suite nous donnons donc un algorithme qui permet de résoudre tous les systèmes linéaires, en utilisant le principe suivant : puisque les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système, essayons de bien choisir nos opérations de manière à nous ramener à des systèmes plus simples à résoudre (et si possible à des systèmes triangulaires).

Considérons donc un système linéaire

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

► Si tous les coefficients $a_{i,1}$ devant x_1 sont nuls, alors x_1 n'apparaît dans aucune équation. Donc sa valeur n'a aucune importance.
On résout donc le système $(\mathscr{S}')$ qui est le même que $(\mathscr{S})$, mais vu en tant que système des $p-1$ inconnues $x_2, \dots, x_p$.
Alors pour tout $x_1 \in \mathbf{K}$, $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(x_2, \dots, x_p)$ est solution de $(\mathscr{S}')$.
Autrement dit, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est
$\{(x, x_2, \dots, x_p), (x_2, \dots, x_p) \text{ solution de } (\mathscr{S}'), x \in \mathbf{K}\}$. Il s'agit donc de résoudre $(\mathscr{S}')$.
► Si l'un des $a_{i,1}$ est non nul, quitte à échanger deux lignes, on suppose qu'il s'agit de $a_{1,1}$.

Terminologie

Le coefficient $a_{i,1}$ que l'on choisit de mettre sur la première ligne est appelé **pivot**.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, réalisons l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ (ou ce qui est équivalent, l'opération $L_i \leftarrow a_{1,1} L_i - a_{i,1} L_1$), ce qui ne change pas l'ensemble des solutions, et a pour effet de faire disparaître les termes en x_1 de toutes les équations suivant la première.
Le système[14] $(\widetilde{\mathscr{S}})$ obtenu est alors de la forme

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} a_{1,1}x_1 + & a_{1,2}x_2 + & \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & \widetilde{a}_{2,2}x_2 + & \cdots + & \widetilde{a}_{2,p}x_p & = & \widetilde{b}_2 \\ & & \vdots & & & \\ & \widetilde{a}_{n,2}x_2 + & \cdots + & \widetilde{a}_{n,p}x_p & = & \widetilde{b}_n \end{array}\right.$$

[14] Équivalent au système $(\mathscr{S})$.

Notons alors $(\widetilde{\mathscr{S}'})$ le système

$$\begin{cases} \widetilde{a_{2,2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{2,p}}x_p & = \widetilde{b_2} \\ & \vdots \\ \widetilde{a_{n,2}}x_2 + \cdots + \widetilde{a_{n,p}}x_p & = \widetilde{b_n} \end{cases}$$

On résout alors ce système suivant la même méthode, et alors, à toute solution $(x_2, \dots, x_p)$ de ce système correspond une unique solution $(x_1, \dots, x_p)$ de $(\widetilde{\mathscr{S}})$ (et donc[15] de $(\mathscr{S})$).
Pour l'obtenir, il suffit de réinjecter les valeurs de $x_2, \dots, x_p$ dans l'équation $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_p$ afin de déterminer la valeur de x_1 correspondante.

[15] Car $\mathscr{S}$ et $(\widetilde{\mathscr{S}})$ sont équivalents.

À chaque étape, nous sommes ramenés à la résolution d'un système qui comporte une équation de moins, ce qui finira toujours par aboutir à une seule équation, que nous savons alors résoudre.
En effet, trois cas de figure se présentent :

Remarque

Une formulation équivalente serait $b = c$, avec b et c deux constantes distinctes.

1. soit cette dernière équation est de la forme $0 = b$, avec $b \neq 0$, auquel cas elle ne possède pas de solution (et donc le système de départ n'a pas non plus de solutions).
2. soit elle est de la forme $ax_p = b$, avec $a \neq 0$, qui possède pour unique solution $x_p = \dfrac{b}{a}$.
   C'est notamment ce qui se produit pour les systèmes triangulaires à coefficients diagonaux non nuls.
3. soit elle est de la forme $a_q x_q + a_{q+1}x_{q+1} + \cdots + a_p x_p = b$, avec $q < p$ et $a_q \neq 0$, et alors elle possède une infinité de solutions : pour tout choix de $(x_{q+1}, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^{q-p}$, $x_q = \dfrac{b - a_{q+1}x_{q+1} - \cdots - a_p x_p}{a_q}$ convient.
   Et donc l'ensemble de ses solutions est $\left\{\left(\dfrac{b - a_{q+1}x_{q+1} - \cdots - a_p x_p}{a_q}, x_{q+1}, \dots, x_p\right), (x_{q+1}, \dots, x_{q-p}) \in \mathbf{K}^{q-p}\right\}$.

Quelques exemples

Voici qui vaut bien mieux qu'un long discours.

Exemple 4.32

Considérons le système $\begin{cases} \quad -y+2z=5 \\ -4x+y-5z=0 \\ \quad x+y-\ z=-6 \end{cases}$

Puisque le coefficient en x de la première ligne est nul, on commencer par échanger deux lignes, afin d'obtenir un pivot non nul. Échangeons donc L_1 et L_3.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} & -y+ & 2z & = & 5 \\ -4x & +y- & 5z & = & 0 \\ x & +y- & z & = & -6 \end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & y- & z & = & -6 \\ -4x+ & y- & 5z & = & 0 \\ & -y+ & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

Nous pouvons donc prendre le 1 devant le x de la première équation comme pivot, et donc effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2+4L_1$, qui a pour effet de faire disparaître les x de la seconde équation[16].

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ -4x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2+4L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ & & 5y & - & 9z & = & -24 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

Nous ne nous préoccupons donc plus de la seconde ligne pour l'instant. Dans le système ainsi obtenu, le terme en y de la seconde ligne est non nul. Nous pouvons donc le prendre comme pivot. Notons que ceci nous contraindrait à diviser par 5 la première équation, ce qui ferait apparaître des dénominateurs un peu pénibles.
Deux solutions s'offrent à nous pour éviter ceci :

- échanger les lignes 2 et 3 pour prendre le -1 comme pivot.
- réaliser l'opération $L_3 \leftarrow 5L_3+L_1$, qui revient à effectuer successivement les deux opérations élémentaires $L_3 \leftarrow 5L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3+L_1$.

Nous choisissons ici la seconde solution.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ & & 5y & - & 9z & = & -24 \\ & - & y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow 5L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -6 \\ & & 5y & - & 9z & = & -24 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Le système obtenu est alors triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc il possède une unique solution.
On a alors immédiatement $z=1$, puis $5y=-24+9=-15 \Leftrightarrow y=-3$ et enfin $x=-6-(-3)+1=-2$.
Donc l'unique solution au système est $(-2,-3,1)$.

Choix du pivot

Nous pourrions aussi bien choisir d'échanger L_1 et L_2, prenant ainsi -4 comme pivot.
Cela aura l'inconvénient de nécessiter une division par 4 dans la suite, bien moins plaisante qu'une division par 1 !
On essaiera donc toujours de choisir des pivots les plus simples possibles (-1 ou 1 si on le peut).

[16] La dernière équation ne comportant pas de x, on ne s'en préoccupe pas.

Le cas que nous venons de voir est en quelque sorte le plus agréable, puisqu'on aboutit à un système triangulaire, dont la résolution est aisée. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas !

Exemple 4.33 **Un système de 4 équations à 4 inconnues**

Résolvons le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} 5x-6y+6z-t=0 \\ 2x-3y+4z-t=1 \\ x \qquad\ -2z+t=-2 \\ -3x+3y-2z \qquad =1 \end{cases}$

Nous pourrions nous contenter de prendre le 5 de la première ligne comme pivot, mais puisque la troisième équation contient un 1, commençons donc par échanger les lignes 1 et 3.

$$(\mathscr{S}) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x \quad -2z+t=-2 \\ 2x-3y+4z-t=1 \\ 5x-6y+6z-t=0 \\ -3x+3y-2z \quad =1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-5L_1 \\ L_4\leftarrow L_4+3L_1}}{\iff} \begin{cases} x \quad -2z+t=-2 \\ -3y+8z-3t=5 \\ -6y+16z-6t=10 \\ 3y-8z+3t=-5 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4\leftarrow L_4+L_2}}{\iff} \begin{cases} x \quad -2z+t \quad =-2 \\ -3y+8z-3t \quad =5 \\ +0=0 \\ +0=0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont bien entendu inutiles, puisqu'elles sont satisfaites quelles que soient les valeurs de x, y, z, t.

Reste donc seulement $\begin{cases} x \quad -2z+t=-2 \\ -3y+8z-3t=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-2+2z-t \\ y=-\frac{5}{3}-\frac{8}{3}z+t \end{cases}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\left(-2+2z-t, -\frac{5}{3}-\frac{8}{3}z-t, z, t\right),\ (z,t)\in\mathbf{R}^2\right\}$

On dit alors que z et t sont des **inconnues secondaires** en fonction desquelles on choisit d'exprimer les autres (ici x et y, appelées **inconnues principales**).

Notons qu'on aurait pu choisir d'autres inconnues secondaires.
Exprimons par exemple x et t en fonction de y et z.
La deuxième équation nous donne donc $t=-\frac{5}{3}+y-\frac{8}{3}z$.
Et alors la première équation donne

$$x=-2+2z-t=-2+\frac{5}{3}-y+\frac{8}{3}z+2z=-\frac{1}{3}-y+\frac{14}{3}z.$$

Et donc l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est $\left\{\left(-\frac{1}{3}-y+\frac{14}{3}z, y, z, -\frac{5}{3}+y-\frac{8}{3}z\right),\ (y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}$.

Est-ce la même chose ?
Il ne saute pas aux yeux qu'on ait bien trouvé le même ensemble de solutions, mais je vous rassure, il s'agit bien du même (et peut-être saurez vous le prouver ....)

Exemple 4.34

$$\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ -2x+y+5z=4 \\ 4x+5y+3z=5 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 3L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow 3L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 7y+13z=14 \\ 7y+13z=11 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} 3x+3y-z=1 \\ 7y+13z=14 \\ 0=-3 \end{cases}$$

La dernière équation ne peut pas être satisfaite, et donc le système est incompatible.

Remarque
Notons qu'à l'étape précédente, il était déjà largement possible de voir que le système est incompatible, et cette dernière opération élémentaire n'était pas indispensable.

Notons que sur ces trois exemples, nous avons un système possédant une unique solution, un possédant une infinité de solutions, et un ne possédant pas de solution.
Ce sont en fait les trois seuls cas possibles[17], ce que nous justifierons plus tard, mais qui a quasiment déjà été fait : un système composé d'une unique équation linéaire ne peut posséder que zéro, une seule ou une infinité de solutions.
Terminons par une dernière définition :

Définition 4.35 – On dit qu'un système linéaire est un **système de Cramer** s'il possède autant d'inconnues que d'équations, et s'il possède une **unique** solution.

Par exemple, un système de deux équations à deux inconnues est de Cramer si et seulement si son déterminant est non nul.

[17] Par exemple il ne se peut pas qu'un système linéaire ne possède que 2 solutions : s'il en a plus d'une, il en a forcément une infinité.

Exercices du chapitre 4

▸ Sommes et produits

Exercice 4.1 Calculer les sommes suivantes : **F**

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}}$ 2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$ 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ 5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{3k}$ où $x \in \mathbf{R}$

Exercice 4.2 Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$. **F**

Exercice 4.3 Calculer les produits suivants : **PD**

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k^2$ 3) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^k\right)$ 5) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$

2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(4i^2-1)$ 4) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ $(n \geqslant 2)$ 6) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-3)^{k^2-k}$

Exercice 4.4 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$. Pour quelle(s) valeur(s) de n est-ce une inégalité stricte ? **F**

Exercice 4.5 Soit q un réel fixé. **PD**

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} q^k$.

2) En procédant à une interversion de sommes, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$.

Exercice 4.6 Sommes doubles **PD**
Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|i-j| \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j \qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)}$$

Exercice 4.7 Des produits semblables, mais différents ! **AD**
On considère les produis suivants

$$A = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij,\ B = \prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} ij,\ C = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij,\ D = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij,\ E = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij.$$

Calculer A. En déduire B. Exprimer B en fonction de C et D. En déduire C, puis D et E.

Exercice 4.8 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^3$. **AD**

En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^3$ en fonction de n. *On pourra distinguer deux cas suivant la parité de n.*

Exercice 4.9 Soit $x, y \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Simplifier les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(x+ky)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(x+ky)$. **AD**

Exercice 4.10 En remarquant que $k = (k+1)-1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk!$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$. **PD**

Exercice 4.11 **PD**

1) Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que $\forall x > 1$, $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.

2) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

EXERCICE 4.12 Inégalité de Tchebychev (Oral Polytechnique) D

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites monotones de réels. Comparer les réels $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

► Coefficients binomiaux et formule du binôme

EXERCICE 4.13 AD

1) En dérivant de deux manières la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

2) Sur le même principe, calculer les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

EXERCICE 4.14 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. En déduire $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$. AD

EXERCICE 4.15 Calculer $\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}$. PD

EXERCICE 4.16 On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. AD

1) Donner deux preuves de cette formule : l'une par récurrence, l'autre en calculant de deux manières $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$.

2) En déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} ij$.

EXERCICE 4.17 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$. D

À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

EXERCICE 4.18 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$. D

EXERCICE 4.19 Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i}\right]$. TD

► Systèmes linéaires

EXERCICE 4.20 Résoudre $\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$ F

EXERCICE 4.21 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues complexes : F

$$\begin{cases} -5x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - (3+i)y - (9+3i)z = 5-3i \\ 2x - 2y - 6z = 2-2i \\ 4x - (2+2i)y - (6+6i)z = 6-2i \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 4.22 **Des systèmes à paramètres** AD

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues réelles. On pourra si besoin distinguer plusieurs cas suivant la valeur de $m \in \mathbf{R}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & m \\ x & + & my & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

EXERCICE 4.23 Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbf{R}$ le nombre de solutions du système AD

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 4

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.1

1. Notons que $\dfrac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = \dfrac{2\cdot(2^2)^k}{3^{-1}\cdot(3^2)^k} = 6\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.
Et donc en utilisant la formule pour la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique[1]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k+1}}{3^{2k-1}} = 6\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 6\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{54}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right).$$

[1] Ici de raison $\frac{4}{9} \neq 1$.

2. On a $i(i-1) = i^2 - i$ et donc

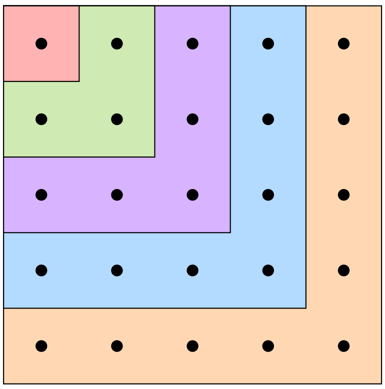
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

3. Par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1)+(n+1) = (n+1)^2.$$

⚠ Attention !
Entre 0 et n, il y a $n+1$ nombres, et non n.
Et donc $\sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$.

Interprétation géométrique *: notons que la somme calculée n'est autre que* $1+3+5+\cdots+(2n+1)$*, la somme des* $(n+1)$ *premiers entiers impairs.*
Le dessin ci-dessous (dans le cas $n=4$*) devrait vous convaincre du résultat.*



4. Il s'agit de noter que $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.
Et donc nous sommes en présence d'une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1).$$

5. C'est directement la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{3k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^3)^k 1^{n-k} = \left(1-x^3\right)^n.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.2

Notons $P = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$, et notons que P est le produit de tous les entiers impairs de 1 à $2n+1$.
Or, nous savons que le produit de tous les entiers[2] de 1 à $2n+1$ vaut $(2n+1)!$.
On a donc

$$P = \frac{(2n+1)!}{\prod\limits_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k} = \frac{(2n+1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

[2] Pairs et impairs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.3

1. On a $\prod_{k=1}^{n} 2k^2 = 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^2 = 2^n (n!)^2$.

2. Notons que $(4i^2-1) = (2i+1)(2i-1)$. Et donc

$$\prod_{i=1}^{n}(4i^2-1) = \prod_{i=1}^{n}(2i+1) \times \prod_{i=1}^{n}(2i-1).$$

Notons que nous avons reconnu le produit d'entiers impairs consécutifs.
On a alors

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(2i+1) &= \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i+1)\prod_{i=1}^{n}(2i)}{\prod_{i=1}^{n}(2i)} \\ &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)\times 2\times 4\times\cdots\times 2n}{2^n \prod_{i=1}^{n} i} \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.\end{aligned}$$

Méthode
On multiplie numérateur et dénominateur par le produit des entiers pairs afin de faire apparaître une factorielle.

Et de même, il vient $\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

On en déduit donc que $\prod_{i=1}^{n}(4i^2-1) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{4^n (n!)^2}$.

3. On a $\exp\left(2^k\right) = \left(e^2\right)^k$, et donc

$$\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^k\right) = \left(e^2\right)^{0+1+\cdots+n} = \left(e^2\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{n(n+1)}.$$

Astuce
C'est un archi-classique :
$k^2-1 = k^2-1^2 = (k-1)(k+1)$.

4. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} &= \frac{\left(\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} i \prod_{j=3}^{n+1} j}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n} k} \\ &= \frac{1\times \cancel{\prod_{i=2}^{n-1}} i}{n \times \cancel{\prod_{i=2}^{n-1}} i} \times \frac{(n+1)\times \cancel{\prod_{j=3}^{n}} j}{2\times \cancel{\prod_{j=3}^{n}} j} \\ &= \frac{1}{n}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

Chgts d'indices
Dans le premier produit, on a posé $i = k-1$ et dans le second, $j = k+1$.

Rédaction
Avec l'habitude, on peut se passer de détailler cette étape si on est certain d'avoir bien repéré les termes qui ne se simplifient pas.

5. On a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$
$$= \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} 2i\right)^2}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{\left(2^n \prod_{i=1}^{n} i\right)^2}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Détails

Nous avons reconnu que le dénominateur est le produit des entiers impairs de 3 à $2n+1$.
On choisit alors de multiplier (au numérateur et au dénominateur) par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ afin de faire apparaître une factorielle.

6. On a

$$\prod_{k=0}^{n}(-3)^{k^2-k} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(-3)^{k^2}}{\prod_{k=0}^{n}(-3)^k} = \frac{(-3)^{\sum_{k=0}^{n} k^2}}{(-3)^{\sum_{k=0}^{n} k}}$$
$$= \frac{(-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}{(-3)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$
$$= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}}$$
$$= (-3)^{\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}} = (-3)^{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.4

Notons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $k! \leqslant n!$

Et donc en sommant ces inégalités, il vient $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \sum_{k=0}^{n} n!$

Or dans cette dernière somme, le terme à l'intérieur de la somme ne dépend pas de k, donc

$$\sum_{k=0}^{n} n! = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

Attention !

Le nombre de termes est bien $n+1$ (et non n) car on somme de 0 à n et non de 1 à n.

Ceci prouve donc que $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Si $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} k! = 0! + 1! = 2$ et $(n+1)! = 2! = 2$. Donc l'inégalité n'est pas stricte.

En revanche, dès que $n \geqslant 2$, on a $0! < n!$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n} k! < \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)!$$

Rappel

Lorsqu'on somme des inégalités, dès que l'une des inégalités est stricte, l'inégalité obtenue par sommation est stricte.
Même si toutes les autres sont des égalités.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.5

1. Commençons par noter que pour $k = 0$, on a $kq^k = 0$ et donc $\sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k$.

On a alors

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} q^k = \sum_{k=1}^{n} q^k \sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{n} kq^k.$$

2. Si $q = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous supposons donc à présent que $q \neq 1$. En intervertissant les deux sommes de l'égalité obtenue précédemment, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} q^k &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n q^k \\
&= \sum_{i=1}^n q^i \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q} \\
&= \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^n \left(q^i - q^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^n q^i - \sum_{i=1}^n q^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-q} \left(q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}\right) \\
&= \frac{q-(n+1)q^{n+1}+nq^{n+2}}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

C'est ici qu'il est important d'avoir $q \neq 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.6

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (i+j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=1}^i j\right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \sum_{j=1}^i j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{i(i+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(3i^2 + i\right) \\
&= \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\
&= \frac{3}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Détails
La première somme est une somme de constantes (i ne dépend pas de j, et donc vaut i fois le nombre de termes, qui ici est également i.

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i,j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \max(i,j) + \sum_{j=i+1}^n \max(i,j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^i j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}(6n+2n+1-3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

3. Notons que pour $i \leqslant j$, on a $i - j \leqslant 0$ et donc $|i - j| = j - i$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}|i-j| = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(j-i)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j}1 - \sum_{i=1}^{j}i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j^2-j}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Une alternative utilisant une sommation par paquets : notons que si $I = \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid j \geqslant i\right\}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}(j-i) = \sum_{(i,j)\in I}(j-i).$$

Mais pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $I_k = \{(i,j) \in I \mid j - i = k\}$, de sorte que $I = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k$.

Alors par sommation par paquets[3],

$$\sum_{(i,j)\in I}(j-i) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}(j-i) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}k.$$

[3] Les I_k sont bien deux à deux disjoints.

Mais $I_k = \{(1,k), (2,k+1), \dots, (n-k, n)\}$, qui est de cardinal $n-k$.
Donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I_k} k = k \times \mathrm{Card}(I_k) = k(n-k)$.

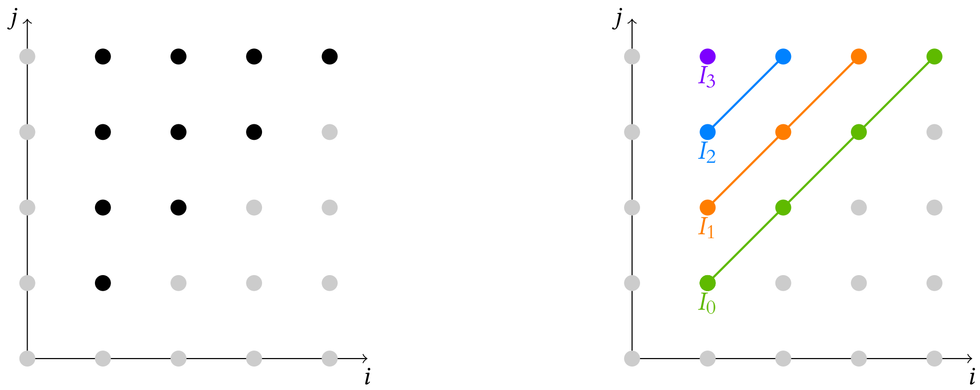


FIGURE 4.1 – Les points en noir de la figure de gauche représentent les couples $(i, j) \in I$.
Sur la figure de droite, on a décomposé I en «paquets».

Et alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{(i,j)\in I_k}k = \sum_{k=0}^{n-1}k(n-k)&\\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}k - \sum_{k=0}^{n-1}k^2\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

4. Séparons en trois la seconde somme, suivant que $i-j$ soit strictement positif, strictement négatif, ou nul :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|i-j| + \underbrace{|i-i|}_{=0} + \sum_{j=i+1}^{n}|i-j|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\\ &= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\\ &= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.\end{aligned}$$

Ces deux sommes sont les mêmes !

Détails

On reconnaît la somme calculée à la question précédente.

5. Puisque $i2^j$ est le produit d'un terme ne dépendant que de i et d'une terme ne dépendant que de j, un résultat du cours nous garantit directement que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i2^j = \left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}2^j\right) = \frac{n(n+1)}{2}2\left(2^n-1\right) = n(n+1)\left(2^n-1\right).$$

6.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)} &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\ell\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sum_{\ell=1}^{n}\ell-k\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{n(n+1)}{2}-k\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\frac{n(n+1)}{12}\left(3n(n+1)-2(2n+1)\right)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\frac{n(n+1)}{12}(3n^2-n-2)\\ &= \frac{n+1}{12(n-1)}(n-1)(3n+2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.7

On a

$$\begin{aligned}A = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} ij = \prod_{i=1}^{n} i^n\prod_{j=1}^{n} j\\ &= \prod_{i=1}^{n} i^n n! = (n!)^n\prod_{i=1}^{n} i^n = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n(n!)^2\\ &= (n!)^n\times(n!)^n = (n!)^{2n}.\end{aligned}$$

☠ Danger !

Le produit est traître : si vous «sortez» un λ du produit (ici i), il sort à la puissance le nombre de termes !

Ensuite,

$$B = \frac{A}{\prod_{i=1}^{n} i^2} = \frac{A}{\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2} = \frac{A}{(n!)^2} = (n!)^{2n-2}.$$

On a ensuite

$$C \times D = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij \times \prod_{i=1}^{n} i^2 = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j}} ij \times \left(\prod_{i=1}^{n} i^2\right)^2 = B(n!)^4.$$

Il est clair[4] que $C = D$.
Et donc $CD = C^2 = B(n!)^4$ donc $C^2 = (n!)^{2n+2}$ et alors $C = (n!)^{n+1}$.
Enfin, $C = E \times \prod_{i=1}^{n} i^2 = E(n!)^2$ et donc $E = \dfrac{C}{(n!)^2} = (n!)^{n-1}$.

[4] Les noms de variables sont muets !

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.8

Effectuons une sommation par paquets, en notant que

$$[\![1, 2n]\!] = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \cdots \cup \{2n-1, 2n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{2k-1, 2k\}.$$

Alors il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 &= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{2k-1}(2k-1)^3 + (-1)^{2k}(2k)^3\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((2k)^3 - (2k-1)^3\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(8k^3 - (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1)\right) \\
&= 12 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 6 \sum_{k=1}^{n} k + n \\
&= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n \\
&= n\,(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1) \\
&= n\left(4n^2 + 6n + 2 - 3n - 3 + 1\right) = n\left(4n^2 + 3n\right) \\
&= n^2\,(4n+3)\,.
\end{aligned}$$

Donc, si n est pair, avec $n = 2p$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 = p^2(4p+3) = \frac{n^2}{4}(2n+3).$$

Et si $n = 2p+1$ est impair, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^3 = \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i i^3 + (-1)^{2p+1}(2p+1)^3 = p^2(4p+3) - n^3.$$

Or, $p = \dfrac{n-1}{2}$, de sorte que $p^2(4p+3) = \dfrac{(n-1)^2}{4}(2n+1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i i^3 = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{4} - n^3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.9

Il est clair que si $y = 0$, alors

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x) = (n+1)\operatorname{ch}(x) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(x) = (n+1)\operatorname{sh}(x).$$

En revanche, si $y \neq 0$, on a

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(x + ky) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x+ky} + e^{-x-ky}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{x+ky}+e^{-x-ky}\right)\\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k + \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-y}\right)^k\\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-(e^y)^{n+1}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-(e^{-y})^{n+1}}{1-e^{-y}}\\
&= \frac{e^x}{2}\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\\
&= \frac{e^x}{2}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}-e^{\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}-e^{y/2}} + \frac{e^{-x}}{2}\frac{e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{-y/2}}\frac{e^{\frac{n+1}{2}y}-e^{-\frac{n+1}{2}y}}{e^{y/2}-e^{-y/2}}\\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} + \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}\\
&= \operatorname{ch}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Détails

Il était ici important d'avoir $e^y \neq 1$ et $e^{-y} \neq 1$ afin d'appliquer une formule bien connue sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Astuce

On factorise $e^a - e^b$ par $e^{\frac{a+b}{2}}$.
En particulier lorsque $a = 0$, $1 - e^b$ peut se factoriser par $e^{b/2}$.

De la même manière, il vient

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(x+ky) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{x+ky}-e^{-x-ky}}{2}\\
&= \frac{e^x}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^y)^k - \frac{e^{-x}}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-y}\right)^k\\
&= \frac{\exp\left(x+\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)} - \frac{\exp\left(-x-\frac{n}{2}y\right)}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}\\
&= \operatorname{sh}\left(x+\frac{n}{2}y\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}y\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Les deux sommes ci-dessus ont déjà été calculées et simplifiées ci-dessus, aucun besoin de refaire le calcul !

Alternative : une méthode légèrement différente consiste à noter que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ et $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$.
On a donc

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{x+ky} = e^x \sum_{k=0}^{n}(e^y)^k = e^x\frac{1-e^{(n+1)y}}{1-e^y}.$$

Et de même,

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-x-ky} = e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-y}\right)^k = e^{-x}\frac{1-e^{-(n+1)y}}{1-e^{-y}}.$$

Et donc en sommant ces deux relations,

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} + \frac{e^{-x}-e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

Et de même, en soustrayant les deux égalités précédemment établies,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^{x+(n+1)y}}{1-e^x} - \frac{e^{-x}-e^{-x-(n+1)y}}{1-e^{-y}}\right).$$

La suite du calcul est inchangée.

Solution de l'exercice 4.10

On a bien la relation $k = (k+1) - 1$, et donc

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = \sum_{k=0}^{n} k!\left((k+1)-1\right) = \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)! - k!\right).$$

On reconnaît là une somme télescopique, qui vaut donc $(n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$.
Sur le même principe, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right).$$

Là encore il s'agit d'une somme télescopique qui vaut : $\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Solution de l'exercice 4.11

1. Pour $x > 1$, on a $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1} = \dfrac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$.
   On aura donc $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{1}{x^2-1}$ si et seulement si pour tout $x > 1$, $(a+b)x+(b-a) = 1$.
   Par identification[5], cela revient à $\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.
2. On en déduit que pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

[5] Ce qui est légitime pour les coefficients d'un polynôme : deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Danger ! On a sûrement reconnu une somme «télescopique» en ce sens que la plupart des termes se simplifient deux à deux. Mais contraitement aux somes télescopiques usuelles, ici les deux premiers et les deux derniers termes ne vont pas se simplifier, et pas seulement le premier et le dernier.

Solution de l'exercice 4.12

Afin de comparer nos deux réels, essayons de calculer la différence des deux :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j - n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right).$$

Notons donc

$$\begin{aligned}\Delta = &\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j - n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_n - n y_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_k(y_i-y_k) + \underbrace{x_k(y_k-y_k)}_{=0} - \sum_{i=k+1}^{n} x_k(y_k - y_i)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} x_k(y_i-y_k) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k+1}^{n} x_k(y_k-y_i) \\ &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_k(y_i-y_k) - \sum_{1\leqslant k<i\leqslant n} x_k(y_k-y_i) \\ &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_k(y_i-y_k) - \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} x_i(y_i-y_k) \\ &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} (x_k-x_i)(y_i-y_k).\end{aligned}$$

Détails Les variables sont muettes, on a renommé i en k et k en i.

Et donc si les deux suites $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ sont de même monotonie, pour tout $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < k$, $(x_k - x_i)$ et $(y_k - y_i)$ sont de signes opposés, si bien que leur produit est négatif.

Et donc $\Delta \leqslant 0$, de sorte que $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

En revanche, si elles sont de monotonies opposées[6], alors pour $i < k$, $(x_k - x_i)$ et $(y_i - y_k)$ sont de même signe.

Et donc $\Delta \geqslant 0$, si bien que $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1} x_k y_k$.

[6] C'est-à-dire si l'une est croissante et l'autre décroissante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.13

1. Notons $f_n : x \mapsto (1+x)^n$.
D'une part, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x) = n(1+x)^{n-1}$.
Mais en utilisant la formule du binôme avant de dériver, on obtient, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Et donc en dérivant[7], $f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

En particulier, $f_n'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$.

On en déduit donc que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

[7] Ce qui est légitime car f_n est polynomiale, donc dérivable.

2. En dérivant une seconde fois f_n, on obtient $f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ et $f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$.

Donc en évaluant de nouveau en $x = 1$, il vient $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Pour calculer la somme des $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, plutôt que de dériver f_n, intégrons la.

Une primitive de f_n est $F_n : x \mapsto \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$.
D'autre part, une autre primitive de f_n est

$$G_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1}.$$

Donc F_n et G_n diffèrent d'une constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G_n(x) = F_n(x) + \lambda$.
Or, $F_n(0) = \frac{1}{n+1}$ et $G_n(0) = 0$, donc $\lambda = -\frac{1}{n+1}$.
On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = G_n(0) = F_n(0) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

Danger !
Attention, il n'existe pas qu'une seule primitive (alors qu'il n'y a qu'une seule dérivée). Donc a priori, nous avons là deux primitives différentes, il n'est pas dit que ce soient les mêmes !

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.14

Les deux premières sont évidentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0.$$

Pour les deux autres sommes, il faut comprendre que les $2k, 0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sont les entiers pairs inférieurs ou égaux à n.

Et donc $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{i}$.

Détails
Pour s'en convaincre, il faut probablement distinguer le cas n pair du cas n impair.

Et de même, les $2k+1$, $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ sont les entiers impairs entre 0 et n.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{i}$.

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Et de même,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

Et donc leur somme valant 2^n, ces deux quantités valent $\dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Une alternative : utilisons l'identité de Pascal, qui pour la seconde somme nous donne

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\binom{n-1}{2k} + \binom{n-1}{2k+1} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{i-1}.$$

Sur le triangle de Pascal, cela revient à dire que chacun des $\binom{n}{k}$ avec k impair est la somme de deux termes consécutifs de la ligne précédente. Et qu'en sommant tous les termes, on obtient ainsi la somme de tous les termes de la ligne précédente du triangle de Pascal, dont on connaît la somme. Une relation analogue est vraie pour les termes pairs, mais il faut

$$\begin{array}{r|ccccccccccccc}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1 & & 1 \\
n=2 & 1 & + & 2 & & 1 & + & 0 \\
 & & & \shortparallel & & & & \shortparallel \\
n=3 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
n=5 & 1 & + & 5 & & 10 & + & 10 & & 5 & + & 1 \\
 & & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & & & \shortparallel \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Figure 4.2 – La somme des termes impairs (en vert) d'une ligne est la somme de tous les termes de la ligne précédente.

être un peu plus soigneux pour l'écrire car le 1 en début de ligne n'est pas somme de deux termes de la ligne précédente.

Solution de l'exercice 4.15

Remarquons qu'il s'agit de calculer la somme de tous les termes figurant dans les n premières lignes et n premières colonnes du triangle de Pascal.

Puisque nous savons calculer la somme des lignes, il est judicieux de commencer par calculer la somme de chaque ligne (c'est-à-dire de sommer, à i fixé, sur j).

Ainsi,

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}$$

Si $j > i$, $\binom{i}{j} = 0$.

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}1^j1^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}(1+1)^i$$

Formule du binôme.

$$= \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1.$$

Somme des termes d'une suite géométrique.

Alternative : en réalité, il est aussi possible de commencer par calculer la somme d'une colonne, puis de faire la somme des colonnes, mais il faut être un peu plus astucieux.

Notons que par l'identité de Pascal, $\binom{i}{j} = \binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j+1}$.

Et donc pour $j \in [\![1, n]\!]$ fixé,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j}\right] = \binom{n+1}{j+1} - \underbrace{\binom{i+1}{0}}_{=0} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}.$$

On reconnaît alors la somme des coefficients de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal, privée de son premier coefficient, qui vaut 1.

Donc $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{i}{j} = 2^{n+1}-1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.16

1. Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1$, donc la récurrence est initialisée.

Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)\left(n^2+2n+1\right) \\
&= \frac{n+1}{4}\left(n^2(n+1)+4n^2+8n+4\right) \\
&= \frac{n+1}{4}\left(n^3+5n^2+8n+4\right) \\
&= \frac{n+1}{4}(n+1)\left(n^2+4n+4\right) \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Méthode
Puisque n^3+5n^2+8n+4 est un polynôme en n, dont -1 est une racine, il se factorise par $n+1$.

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Pour la seconde preuve, remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)$ est une somme télescopique :

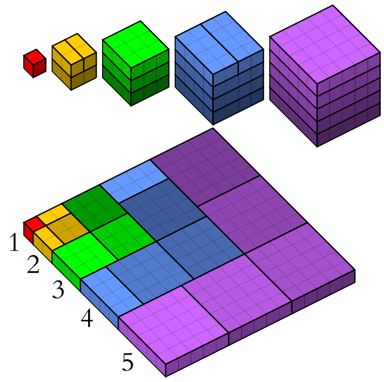
$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{i=2}^{n+1}i^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = (n+1)^4-1.$$

D'autre part, on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$(k+1)^4 - k^4 = k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) &= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\\ &= 4\sum_{k=1}^{n}k^3+n\left(2n^2+5n+4\right).\end{aligned}$$



En isolant la somme des cubes, on obtient donc

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3 &= (n+1)^4-1-n\left(2n^2+5n+4\right)\\ &= n^4+4n^3+6n^2+4n-n\left(2n^2+5n+4\right)\\ &= n\left(n^3+2n^2+n\right)=n^2(n^2+2n+1)=n^2(n+1)^2.\end{aligned}$$

Et par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Cette formule possède l'interprétation graphique ci-dessus, je vous laisse y réfléchir.

Les plus courageux d'entre vous pourront essayer de pousser cette méthode plus loin en calculant la somme des n premières puissances $4^{\text{èmes}}$ *en calculant*

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-k^5\right).$$

2. Permutons les deux sommes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}ij=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}ij &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}ij\\ &= \sum_{j=2}^{n}j\sum_{i=1}^{j-1}j\\ &= \sum_{j=2}^{n}j\frac{(j-1)j}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\left(j^3-j^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^3-j^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^3-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\ &= \frac{n(n+1)\left(3n^2+3n-4n-2\right)}{24}=\frac{n(n+1)\left(3n^2-n-2\right)}{24}\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.\end{aligned}$$

Méthode

Puisque $3n^2-n-2$ est un polynôme de degré 2 en n, nous savons le factoriser en produit de termes de degré 1 en cherchant ses racines. Plutôt que de calculer un discriminant, notons que 1 est racine évidente, et donc qu'on peut le factoriser par $n-1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.17

Soit $n\in\mathbf{N}$, et soient x,y deux réels strictement positifs. Alors

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n+\left(1+\frac{y}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{y}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{y}{x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\left(\frac{x}{y}\right)^k + \left(\frac{y}{x}\right)^k \right).$$

Mais pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left(\frac{y}{x}\right)^k = \dfrac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^k}$.

Or, pour $t > 0$, on a

$$(t-1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2t \leqslant t^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} \geqslant 2 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} \geqslant 2.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $(t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

En particulier, pour $t = \left(\frac{x}{y}\right)^k$, il vient donc

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2 \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant 2(1+1)^n \leqslant 2^{n+1}.$$

Si $n = 0$, l'inégalité est évidemment une égalité.
Et si $n > 0$, et que $x = y$, alors il y a encore égalité puisque $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
En revanche, si $x \neq y$, alors $\frac{x}{y} \neq 1$ et donc comme mentionné précédemment $\frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} > 2$.
Donc dans la somme, le terme correspondant à $k = 1$ est une inégalité stricte, donc l'inégalité finale est également stricte.
Ainsi, l'inégalité $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$ est une égalité si et seulement si $n = 0$ ou $x = y$.

> **Alternative**
> Un autre moyen d'établir cette inégalité (classique) est d'étudier la fonction $t \mapsto t + \frac{1}{t}$.

> **Remarque**
> Ce terme n'apparaît dans la somme que si $n \geqslant 1$, raison pour laquelle nous avons du traiter à part le cas $n = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.18

Notons que le premier et le dernier terme de la somme sont égaux à 1, et donc que $u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant 2$.

D'autre part, pour $k = 1$ et $k = n-1$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$.
Pour les autres coefficients, essayons de nous faire une petite intuition de ce qu'il se passe. Les coefficients que nous considérons sont sur une même ligne du triangle de Pascal. Or, vous avez probablement déjà constaté que sur une ligne du triangle de Pascal, les coefficients croissent jusqu'au milieu de la ligne, puis décroissent.
En particulier, si $k \in [\![2, n-2]\!]$, on doit avoir $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.
Admettons provisoirement ceci. On aura alors, pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \dfrac{2}{n(n-1)}$.

Et donc

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} \leqslant (n-3)\frac{2}{n(n-1)}.$$

Et par conséquent, il vient

$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + 2\frac{(n-3)}{n(n-1)}.$$

Mais $\dfrac{2(n-3)}{n(n-1)} = \dfrac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{n - \frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Reste à présent à prouver ce que nous n'avons que «constaté» sur le triangle de Pascal.
Soit donc $k \in [\![2, n-2]\!]$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 3} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{n-2}{k}\frac{n-3}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{3}.$$

Or, on a $k \leqslant n-2$, de sorte que $\frac{n-2}{k} \geqslant 1$. Puis $\frac{n-3}{k-1} \geqslant 1, \dots, \frac{n-k+1}{3} \geqslant 1$.
Et donc on a bien, comme annoncé, $\binom{n}{k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Une autre manière de le dire : pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n!(k+1)!(n-k-1)!}{n!k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Et donc on a $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{k+1} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} \geqslant 1 \Leftrightarrow k+1 \geqslant n-k \Leftrightarrow k \geqslant \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow k \geqslant \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.
Donc les coefficients binomiaux croissent bien jusqu'au milieu de l'une ligne du triangle de Pascal, de sorte que pour $k \in \left[\!\!\left[2, \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\right]\!\!\right]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$ et pour $k \in \left[\!\!\left[\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1, n-2\right]\!\!\right]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$.

Remarque *: il aurait été possible d'utiliser le même raisonnement pour dire que pour tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{1} \geqslant n$.

Mais alors nous pourrions seulement affirmer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \geqslant \frac{n-2}{n}$.

Nous aurions alors obtenu l'encadrement $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{n-2}{n}$.
Malheureusement, le membre de droite tend alors vers 3, et donc le théorème des gendarmes ne peut plus s'appliquer.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.19

Il s'agit d'utiliser la formule de Pascal : pour $i \geqslant 1$, $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}\right] &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n+1}{i}\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i-1}\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[1+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}+\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[2+2\sum_{i=1}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left[2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}+\binom{n}{k}\right]\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{k}\binom{n}{i}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2+2\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^2$$
$$= (2^n)^2 = 2^{2n}.$$

Rappelons que la formule clé que nous avons utilisée à l'avant dernière étape est

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.20

1. Commençons par échanger la première ligne et la seconde, ce qui n'est pas obligatoire, mais nous permettra d'utiliser le 1 comme pivot plutôt qu'un 3.

$$\begin{cases} 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3x - 6y - 6z + 8t = 2 \\ -2x + 4y + 4z - 5t = 3 \\ 6x - 12y - 12z + 16t = 4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3z - 4t = 2 \\ -2z + 3t = 3 \\ 6z - 8t = 4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ 3z - 4t = 2 \\ t = 13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z + 4t = 0 \\ z = 18 \\ t = 13 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ z = 18 \\ t = 13 \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(2y+2, y, 18, 13)\,,\ y \in \mathbf{K}\}$.

2. En soustrayant les deux lignes, il vient

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 - t \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{(-z, 1-t, z, t)\,,\ (z,t) \in \mathbf{K}^2\right\}$.

3. Allons-y :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 7z = 1 \\ -2z = 1 \\ -3y - 6z = 3 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 7z = 1 \\ -2z = 1 \\ -13z = 4 \end{cases}$$

Les deux dernières équations ne peuvent être satisfaites simultanément, donc le système ne possède pas de solution.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.21

1. On a

$$\begin{cases} -5x+y+2z=2 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x-y-2z=2 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 5L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow 5L_3+3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -5x+\ \ y+\ \ 2z=2 \\ \qquad 7y+14z=14 \\ \quad -2y-\ \ 4z=16 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2/7 \\ L_3\leftarrow -L_3/2}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -5x+y+2z=2 \\ y+2z=2 \\ y+2z=-8 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont clairement incompatibles, donc le système ne possède pas de solution.

2. On a

$$\begin{cases} 4x & - & (3+i)y & - & (9+3i)z & = & 5-3i \\ 2x & - & 2y & - & 6z & = & 2-2i \\ 4x & - & (2+2i)y & - & (6+6i)z & = & 6-2i \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x & - & (3+i)y & - & (9+3i)z & = & 5-3i \\ & & (-1+i)y & + & (-3+3i)z & = & -1-i \\ & & (1-i)y & + & (3-3i)z & = & 1+i \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x & - & (3+i)y & - & (9+3i)z & = & 5-3i \\ & & (-1+i)y & + & (-3+3i)z & = & -1-i \\ & & & 0 & & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x & - & (3+i)y & - & (9+3i)z & = & 5-3i \\ & & y & & & = & \dfrac{1+i}{1-i}-3z \end{cases}$$

Mais $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$.
Et donc il vient $y = i-3z$ et par conséquent

$$4x = 5-3i+(9+3i)z+(3+i)(i-3z) = 5-3i+(9+3i)z+3i-1-9z-3iz = 4.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{(1, i-3z, z),\ z \in \mathbf{C}\}$.

3. Il est bien entendu possible d'utiliser la méthode du pivot : retirer la première ligne à chacune des autres fera disparaître les x_1, et nous laissera une deuxième ligne avec un coefficient en x_2 égal à 1.
Puis nous retirerons la seconde ligne à chacune des suivantes, etc.
Mais notons qu'il est possible d'aller plus vite en réalisant les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \dots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.
On obtient alors le système triangulaire suivant

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +\cdots+ & x_n & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & +\cdots+ & x_n & = & 0 \\ & & & & x_3 & +\cdots+ & x_n & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & x_{n-1}+ & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_n & = & 0 \end{cases}$$

Ce système triangulaire possède alors pour unique solution $(1, 0, \dots, 0)$.

Remarque

Notons que la méthode du pivot aurait fait apparaître le même système triangulaire, mais aurait nécessité plus d'opérations.
Il est d'ailleurs intéressant d'essayer de compter le nombre d'opérations élémentaires demandé par chacune de ces méthodes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.22

1. Il est naturel de commencer par soustraire la première ligne aux deux suivantes :

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & - & y & + & z & = & m \\ & & (m-1)y & - & 2z & = & 1-m \\ & & & - & 2z & = & 1-m \end{cases}$$

► **Si $m \neq 1$** : alors ce système est triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Il est donc de Cramer, et il vient successivement $z = \dfrac{m-1}{2}$, $y = 0$ et $x = m - z = \dfrac{m+1}{2}$.
L'unique solution du système est donc $\left(\dfrac{m+1}{2}, 0, \dfrac{m-1}{2}\right)$.

► **Si $m = 1$** : on a alors $z = 0$, et la première équation devient $x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$ et donc l'ensemble des solutions du système est $\{(1+y, y, 0),\ y \in \mathbf{R}\}$.

2. Commençons par échanger la première et la dernière ligne, car le cas où $m = 0$ est problématique : on ne pourrait pas prendre m comme pivot.
Il vient alors

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & 1-m \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 1 \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & & & & (2-m-m^2)z & = & 1-m \end{array}\right.$$

► Si $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1, -2\}$, alors la dernière équation ne possède pas de solution car $1 - m \neq 0$.
► En revanche, si $m^2 - m - 1 \neq 0$, alors $z = \dfrac{m-1}{m^2+m-2} = \dfrac{1}{m+2}$, $y = z$, et donc $x = 1 - (1+m)z = 1 - \dfrac{m+1}{m+2} = \dfrac{1}{m+2}$.
Donc le système possède une unique solution, qui est $\left(\dfrac{1}{m+2}, \dfrac{1}{m+2}, \dfrac{1}{m+2}\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4.23

Commençons notre pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & (a-2)y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & & & (-a^2+a+6)z & = & 3-a \end{array}\right.$$

► <u>Si $a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 3$</u>.
Alors soit $a = -2$, et la dernière ligne est $0 = 5$, qui n'est pas possible, donc le système est incompatible.
Soit $a = 3$, et donc la dernière ligne est $0 = 0$, qu'on peut donc supprimer.
Le système obtenu est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls, et possède une infinité de solutions.
► <u>Si $a^2 - a - 6 \neq 0$</u>, alors le système est échelonné, et possède une unique solution (que l'on pourrait exprimer en fonction de a, mais ce n'est pas demandé).

Fonctions circulaires

5

5.1 Notion de congruence

Définition 5.1 – Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On dit que deux réels x et y sont **congrus modulo** α s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.
On note alors $x \equiv y \pmod{\alpha}$ ou $x \equiv y \ [\alpha]$.
Ainsi, $\{y \in \mathbf{R} \mid y \equiv x \ [\alpha]\} = \{x + k\alpha, \ k \in \mathbf{Z}\}$.
On note parfois cet ensemble $x + \alpha\mathbf{Z}$, où $\alpha\mathbf{Z} = \{k\alpha, \ k \in \mathbf{Z}\}$.

Autrement dit
x et y sont congrus modulo α si leur différence est un multiple **entier** de α.

Exemples 5.2

- Un entier n est pair si et seulement si il est congru à 0 modulo 2, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2k$.
- De même, n est impair si et seulement si il est congru à 1 modulo 2.
- Un angle est défini modulo 2π, c'est-à-dire que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π.
Par exemple, $7\pi \equiv \pi \ [2\pi]$, et $\dfrac{11\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

Notons qu'il est possible de «diviser» par $\lambda \neq 0$ dans des congruences, à condition de diviser également ce qui se trouve dans le modulo.
Plus précisément, pour $a, b \in \mathbf{R}$, $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}^*$, on a $a \equiv b \ [\alpha]$ et si et seulement si $\frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} \ [\frac{\alpha}{\lambda}]$.
En effet, on a

$$a \equiv b \quad [\alpha] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \ a = b + k\alpha \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \ \frac{a}{\lambda} = \frac{b}{\lambda} + k\frac{\alpha}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} \equiv \frac{b}{\lambda} \quad [\frac{\alpha}{\lambda}].$$

5.2 Fonctions trigonométriques

5.2.1 Sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ne seront définies proprement qu'en deuxième année, via les formules suivantes[1]

$$\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$
$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

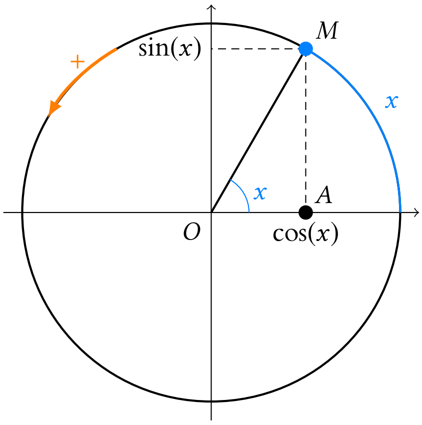
[1] Qui ne sont ni à comprendre ni à connaître pour l'instant !

Cette année, nous nous en tiendrons à l'intuition que vous en avez acquise au lycée, reposant sur la notion d'angles dans des triangles rectangles.

Dans toute la suite, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Définition 5.3 – On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Autrement dit, $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \ x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition 5.4 – Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit M l'unique point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$.
On appelle alors **cosinus** de x et on note $\cos(x)$ l'abscisse de M.
De même, on appelle **sinus** de x et on note $\sin(x)$ l'ordonnée de M.



Rappelons que ceci correspond bien[2] à la trigonométrie de collège : le triangle OAM est rectangle en A, et son hypoténuse est de longueur 1 puisque M est sur le cercle trigonométrique.
Par conséquent,

$$\cos(x) = \cos\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{OA}{OM} = OA$$

et de même

$$\sin(x) = \sin\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{AM}{OM} = AM.$$

[2] Au moins dans le cas où $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Proposition 5.5 (Paramétrisation du cercle trigonométrique) : *Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $x^2 + y^2 = 1$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathscr{C}$), alors il existe un unique $t \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.*

Démonstration. Il est évident qu'un tel t existe : c'est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point de coordonnées (x, y).
Nous admettons l'unicité, puisqu'elle nécessite de disposer d'une définition rigoureuse de π, ce que nous n'avons pas encore. □

π ?
Notons que le nombre π n'a jamais été défini proprement (si ce n'est que c'est le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1, mais qu'est-ce qu'un périmètre ?).
Là aussi, vous aurez l'occasion d'en reparler l'an prochain, π pouvant être défini comme étant le plus petit réel positif dont le cosinus vaut -1.

Remarque. On a choisi de prendre $t \in]-\pi, \pi]$, mais on aurait également pu prendre $t \in [0, 2\pi[$, ou encore dans n'importe quel intervalle de longueur 2π ouvert d'un côté et fermé de l'autre.

Corollaire 5.6 – *Soit $r > 0$ et soit $\mathscr{C}_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 = r^2\}$.
Alors pour tout $(x, y) \in \mathscr{C}_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}_r$. Alors $(x', y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ est sur $\mathscr{C}$ puisque

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

Et donc il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$(x', y') = (\cos\theta, \sin\theta) \Leftrightarrow (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

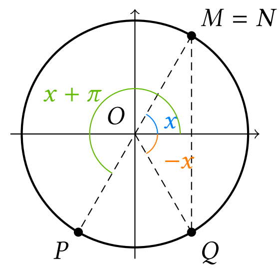
□

Ceci est à la base des coordonnées dites **polaires** qu'on utilise notamment en physique : tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$ différent de O est sur un unique cercle de centre O (celui de rayon $\sqrt{x^2 + y^2}$).
Et donc il existe un unique couple $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Autrement dit, au lieu de repérer un point par son abscisse et son ordonnée comme on en a l'habitude, on peut se donner un rayon[3] et un angle.
C'est d'ailleurs le principe de la représentation exponentielle des nombres complexes que nous (re)verrons au chapitre suivant.

[3] La distance du point à l'origine.

Proposition 5.7 : *Les fonctions* sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques, et pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, on a* $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ *et* $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.
De plus, cos *est paire et* sin *est impaire.*

Démonstration. Puisqu'un angle de 2π correspond à un tour complet du cercle, le point M de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x$ et le point N de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = x + 2\pi$ sont confondus.
Ils ont donc même abscisse et même ordonnée : $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.



De même, un angle de π correspond à un demi-tour du cercle. Et donc si P est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right) = x + \pi$, alors P est le symétrique de M par rapport à l'origine.
Et donc $\cos(x+\pi) = x_P = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = y_P = -\sin(x)$.

Enfin, si Q est le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OQ}\right) = -x$, alors Q est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Et donc en particulier, il a même abscisse que M (de sorte que $\cos(-x) = \cos(x)$) et son ordonnée est l'opposée de celle de M (et donc $\sin(-x) = -\sin(x)$). □

Proposition 5.8 : *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, on a* $\cos^2 x + \sin^2(x) = 1$.

Démonstration. Soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$, et soit A le point de coordonnées $(\cos x, 0)$.
Alors OMA est un triangle rectangle en A, dont l'hypoténuse OM est de longueur[4] 1.
Puisque $AM = \sin x$, par le théorème de Pythagore, on a

$$OA^2 + MP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

□

[4] Car $M \in \mathscr{C}$.

Remarque. Notons que si l'on sait dériver sin et cos (voir ci-dessous), la formule se retrouve en dérivant $x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
On obtient alors une fonction constante, qui vaut 1 en 0 et donc en tout $x \in \mathbf{R}$.

Corollaire 5.9 – *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$*, on a* $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ *et* $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Démonstration. Puisque $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leqslant 1$, on a bien $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, et de même pour $\sin(x)$. □

Proposition 5.10 (Dérivées des fonctions trigonométriques) : *Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur* $\mathbf{R}$*, avec*

$$\sin' = \cos \quad \textit{et} \quad \cos' = -\sin.$$

Démonstration. Admis (pour l'instant). □

Puisqu'on sait que $\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ et que $\sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, alors nous en déduisons facilement les sens de variations de cos et sin.

Terminons enfin par une inégalité classique

Proposition 5.11 : *Pour tout réel* x*, on a* $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

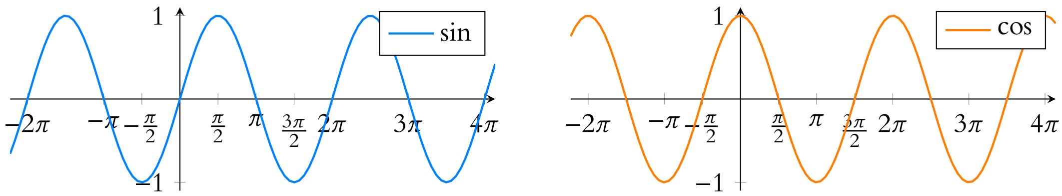


FIGURE 5.1 – Les fonctions sin et cos.

Démonstration. Commençons par noter que si $|x| \geqslant 1$, l'inégalité est évidente, puisque $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.
Autrement dit, il reste à prouver l'inégalité pour $x \in [-1, 1]$.

Sur $[0, 1]$, définissons une fonction f par : $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = x - \sin(x)$.
Alors f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$.
Donc f est croissante. Puisque par ailleurs, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant x$.
Puisque par ailleurs, $[0, 1] \subset [0, \pi]$, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sin(x) \geqslant 0$, et donc

$$|\sin(x)| = \sin(x) \leqslant x = |x|.$$

Pour $x \in [-1, 0]$, on a alors $-x \in [0, 1]$, si bien que

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

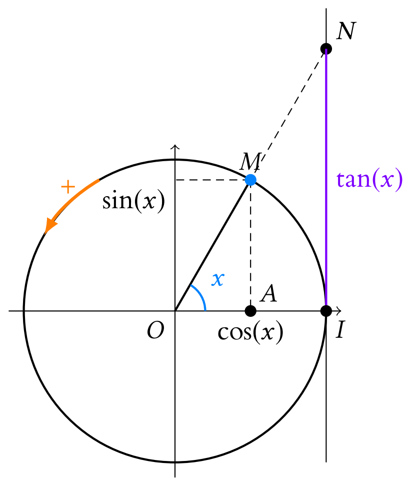
□

5.2.2 Fonction tangente

Définition 5.12 – On appelle **tangente** et on note tan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Remarque
L'ensemble de définition de la tangente est précisément l'ensemble des points où le cosinus ne s'annule pas, et donc où le quotient possède un sens.



Notons, comme sur la figure ci-contre, l'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.
Alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires, donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Mais alors $\lambda = \dfrac{1}{\cos x}$ et donc

$$y_N = \lambda \sin(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

Ainsi, géométriquement, $\tan(x)$ est la distance[5] IN.

[5] Algébrique, c'est-à-dire avec un éventuel signe.

Proposition 5.13 : *La fonction tangente est impaire, π-périodique, dérivable sur son ensemble de définition et*

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{D} = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.
La fonction tan est impaire car quotient d'une fonction impaire (le sinus) par une fonction paire (le cosinus).
Pour $x \in \mathscr{D}$, on a encore $x + \pi \in \mathscr{D}$, et

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

Enfin, tan est dérivable sur $\mathscr{D}$ car quotient de fonctions dérivables[6], et

$$\forall x \in \mathscr{D},\ \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Enfin, notons que $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$. □

[6] Dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathscr{D}$.

Remarque. La dérivée de tan est positive partout où elle est définie.
On n'en déduira pas pour autant que tan est croissante sur son ensemble de définition, mais uniquement qu'elle l'est sur chacun des intervalles contenus dans son intervalle de définition (et en particulier sur les $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$).

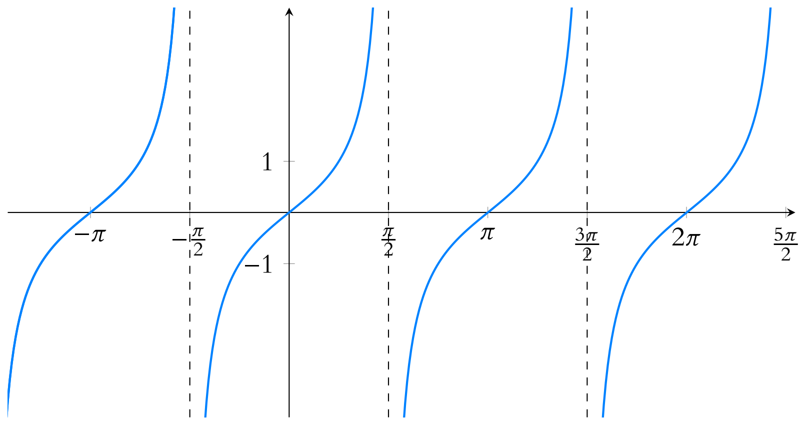


FIGURE 5.2 – La fonction tangente.

La fonction cotangente n'est pas au programme, mais vous pourriez être amenés à la rencontrer dans des exercices.

Définition 5.14 – On appelle **cotangente**, et on note cotan la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ par

$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

⚠ On n'a pas $\text{cotan} = \frac{1}{\tan}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition.
En revanche, il est vrai que si $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z} = \left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, alors $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

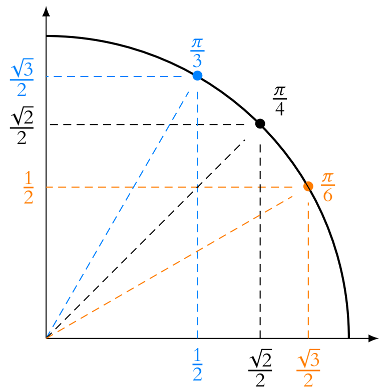
Remarque
$x \notin \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$ est la condition pour que $\tan(x)$ et $\text{cotan}(x)$ soient tous deux définis.

Nous ne donnons aucune formule pour la cotangente, mais toutes ses propriétés (et notamment sa dérivée) se retrouvent à partir de la définition.

5.2.3 Valeurs remarquables

Les valeurs suivantes sont à connaître par cœur, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle trigonométrique si besoin.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×



Pour 0 et $\frac{\pi}{2}$, c'est évident.
Pour $x = \frac{\pi}{4}$, il s'agit de remarquer que le point M de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ est sur la première bissectrice, et donc que son sinus et son cosinus sont égaux.
Étant positifs et liés par la relation $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$, il ne peuvent que valoir $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, une preuve sera donnée en TD.

Notons que combinées aux formules usuelles[7], ces valeurs permettent d'obtenir les sinus, cosinus et tangentes de tous les angles multiples de $\frac{\pi}{6}$ ou de $\frac{\pi}{4}$.

[7] Rappelées ci-dessous.

Exemple 5.15

$$\cos\left(-5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

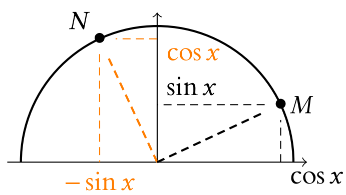
$$\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3 Formules usuelles

Lemme 5.16. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Démonstration. Traitons le cas où $x \in [0, \pi[$, le cas général s'en déduira par les formules[8] pour $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$ et la 2π-périodicité.
Si $x = \frac{\pi}{2}$, c'est évident, et de même si $x = 0$.
Supposons donc $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$.
Alors le point $M \in \mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ est sur la droite (OM) qui a pour vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\tan x \\ 1 \end{pmatrix}$.
Et donc si N est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = x + \frac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{ON}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ 1 \end{pmatrix}$.
Alors, puisque $N \in \mathscr{C}$, $\lambda^2 \tan^2(x) + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2(1 + \tan^2(x)) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \cos^2 x$.
Et donc $\lambda = \pm\cos x$, de sorte que l'abscisse de N est soit $-\sin(x)$ (si $\lambda = \cos(x)$), soit $\sin(x)$ (si $\lambda = -\cos(x)$).
Mais si $x \in [0, \pi]$, $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ possède un cosinus négatif.
Puisque $\sin(x) \geqslant 0$, on a donc $\lambda = \cos(x)$.
Et ainsi, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$. □

[8] Déjà prouvées.



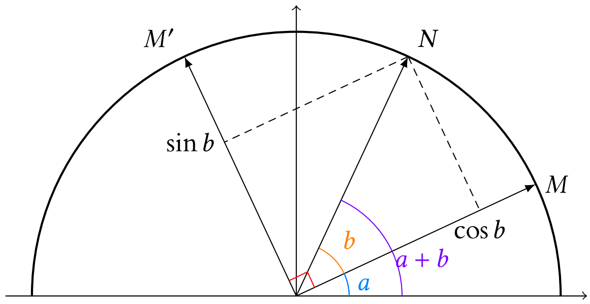
Rappel
$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Proposition 5.17 (Formules d'addition) : *Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Alors*

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Démonstration. Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé, et considérons les points M et N du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tels que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = a$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = a+b$.
On a alors $\overrightarrow{OM} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\overrightarrow{ON} = \cos(a+b)\vec{i} + \sin(a+b)\vec{j}$.

Notons alors M' le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2}$, de sorte que $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ est un repère orthonormé.
On a alors $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = b$, et donc les coordonnées de N dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ sont $(\cos b, \sin b)$.



Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{ON} &= \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'} \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}\right) \\
&= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}\right) \\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\,\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\,\vec{j}.
\end{aligned}$$

Mais par unicité[9] des coordonnées de N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a donc

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Les deux autres égalités s'obtiennent en changeant b en $-b$ et en utilisant la parité (resp. l'imparité) du cosinus (resp. du sinus). □

[9] Un vecteur s'écrit de manière **unique** comme un multiple de $\vec{i}$ plus un multiple de $\vec{j}$.

Notons qu'on retrouve alors des formules déjà rencontrées précédemment :

Corollaire 5.18 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

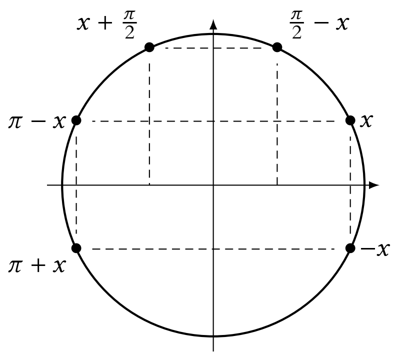
$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) = -\cos(x),\ &\sin(x+\pi) = -\sin(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x),\ &\sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x),\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x),\ &\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Remarque

Ce n'est rien d'autre que le lemme 5.16.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de la proposition précédente. □

Remarques. ► Il n'est pas question d'apprendre toutes ces formules par cœur : une fois de plus, elles se retrouvent facilement avec un cercle trigonométrique.



Astuce — Si vous voulez les retrouver sur un dessin comme ci-dessous, surtout ne prenez pas un angle proche de $\frac{\pi}{4}$, vous ne sauriez alors plus distinguer $\sin x$ de $\cos x$. Prendre x proche de 0 (par exemple environ $\frac{\pi}{6}$) est plus sage.

► Notons en particulier que

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin'(x) \text{ et } \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x).$$

Et donc dériver sinus ou cosinus, c'est déphaser de $\frac{\pi}{2}$. Ceci permet aisément de calculer les dérivées successives de sin ou cos :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En particulier — La dérivée 4$^{\text{eme}}$ de sin (resp. de cos) est sin (resp. cos). En effet,

$$\begin{aligned}\sin^{(4)}(x) &= \sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin(x+2\pi)\\ &= \sin(x).\end{aligned}$$

Proposition 5.19 (Formules d'addition : cas de la tangente) : *Soient a, b deux réels. Sous réserve que toutes les tangentes suivantes existent*[10]*, on a*

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

[10] C'est-à-dire si ni a, ni b, ni $a+b$ (ou $a-b$ pour la seconde formule) ne soient congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Démonstration. 1) On a

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a \sin b}{\cos a\cos b - \sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos a\cos b}\,\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

La formule 2) s'en déduit aisément en changeant b en $-b$ et en utilisant l'imparité de la tangente. □

Proposition 5.20 (Formules de duplication) : *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x.$$

Démonstration. On a $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
Mais $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Donc

$$\cos(2x) = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Et de même, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et donc $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.
Enfin, $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\cos x \sin x$. □

Corollaire 5.21 – *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a*

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \textit{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Démonstration. Immédiat en utilisant les formules pour $\cos(2x)$. □

Exemples 5.22

► Les formules précédentes sont particulièrement intéressantes lorsqu'il s'agit de trouver une primitive de $\cos^2$ (ou de $\sin^2$).

En effet, une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2}$, de sorte qu'une primitive de $\cos^2$ est $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

► Résolvons l'équation $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que $\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x))$.

Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

Donc au final, il s'agit de résoudre $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que x est solution si et seulement si $2x \equiv \pm\frac{\pi}{6} \ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{12} \ [\pi]$.

Remarque

Rappelons que si dériver un produit est chose facile, il est bien plus dur d'intégrer un produit.
On ne dispose pas de formule générale pour intégrer u^2 (mais seulement pour $u'u^2$).

Proposition 5.23 (Formules de l'arc moitié) : *Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. Notons alors $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors*

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

et si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Remarque

Ces formules sont en fait hors programme, mais le programme officiel mentionne qu'il faut savoir les retrouver, donc tenir le raisonnement ci-contre.

Démonstration. On a $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De même, $\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}t = \frac{2t}{1+t^2}$.

Enfin, si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, alors $\cos(x) \neq 0$ et donc

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

□

Proposition 5.24 (Formules de développement) : *Si a et b sont deux réels, alors*

1. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
2. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules d'addition. Prouvons par exemple la dernière :

$$\begin{aligned}\sin(a+b) + \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ &= 2\sin(a)\cos(b).\end{aligned}$$

Donc en divisant par 2, on a le résultat souhaité. □

Les formules qui suivent ne sont pas explicitement au programme, et donc pas à connaître par cœur, mais il faut savoir les retrouver si nécessaire.

Corollaire 5.25 (Formules de factorisation) – *Si p et q sont deux réels, alors*

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Terminologie

Ces formules, ainsi que celles de la proposition précédente sont appelées **formules de Simpson.**

Démonstration. Les preuves étant une fois de plus très similaires, nous ne prouvons que la première formule.
Notons que pour cela, il suffit de développer le membre de droite à l'aide des formules de développement, et de constater qu'on obtient bien $\cos p + \cos q$.
Mais pour savoir les retrouver, mieux vaut comprendre leur origine : on a reconnu le lien avec les formules de développement, et on sait déjà que

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

On aimerait donc trouver deux réels a et b tels que $\begin{cases} a+b = p \\ a-b = q \end{cases}$
Ce système[11] possède une unique solution, qui est $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$, d'où la formule annoncée. □

[11] D'inconnues a et b.

Remarque. On ne donne pas de formule pour $\sin p - \sin q$, mais il suffit de changer q en $-q$ dans la dernière formule.

Exemple 5.26

Soit $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ et r non congru à 0 modulo 2π.

Essayons de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(x+kr)$.

Remarque

Si $r \equiv 0\ [2\pi]$, alors il est facile de constater que cette somme vaut $(n+1)\cos(x)$.

On a alors

$$\begin{aligned} S_n \sin\frac{r}{2} &= \sum_{k=0}^{n} \cos(x+kr)\sin\frac{r}{2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+kr+\frac{r}{2}\right) - \sin\left(x+kr-\frac{r}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+kr+\frac{r}{2}\right) - \sin\left(x+(k-1)r+\frac{r}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+nr+\frac{r}{2}\right) - \sin\left(x-\frac{r}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Somme télescopique.

Mais alors, en utilisant la formule pour $\sin(p) - \sin(q)$, il vient

$$S_n \sin\frac{r}{2} = \cos\left(x+\frac{nr}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right).$$

Et enfin, comme $\frac{r}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$, $\sin\frac{r}{2} \neq 0$ et donc , $S_n = \dfrac{\cos\left(x+\frac{n}{2}r\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin\frac{r}{2}}$.

5.4 Équations et inéquations trigonométriques

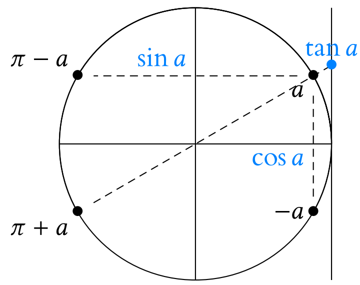
Proposition 5.27 : *On a*

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ **ou** } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Et de même,

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a \equiv b \qquad [2\pi] \text{ **ou** } a \equiv \pi - b \qquad [2\pi].$$

Enfin, on a $\tan a = \tan b$ *si et seulement si* $a \equiv b \ [\pi]$.



Démonstration. Prouvons le résultat pour le cosinus.

Commençons par supposer que $a, b \in [-\pi, \pi]$.
Sur $[0, \pi]$, la fonction cos est strictement décroissante, continue, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, donc elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
Et de même, cos réalise une bijection[12] de $[-\pi, 0[$ sur $[-1, 1[$.
Ainsi, tout réel de $[-1, 1[$ possède exactement deux antécédents par cos dans $[-\pi, \pi]$: un dans $[-\pi, 0[$ et un dans $[0, \pi]$.
En particulier si $a \in [-\pi, \pi]$ est non nul (de sorte que $\cos a \neq 1$), alors nous connaissons déjà deux antécédents de $\cos a$ par cos : ce sont a et $-a$ (car $\cos(-a) = \cos(a)$).
Ce sont donc les seuls, de sorte que pour $b \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos b = \cos a \Leftrightarrow a = b$ **ou** $a = -b$.
Si $\cos(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0$, alors $\cos(b) = 1$ si et seulement si $b = 0$. Donc si et seulement si $a = b$, qui s'écrit encore $a = b$ **ou** $a = -b$ puisque $-0 = 0$.

[12] Croissante.

Dans le cas général, pour $a \in \mathbf{R}$, il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.
En effet, on a

$$-\pi < a+2k\pi \leqslant \pi \Leftrightarrow -\pi-a < 2k\pi \leqslant -a+\pi \Leftrightarrow -\frac{a}{2\pi}-\frac{1}{2} < k \leqslant -\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leqslant -\frac{a}{2\pi}+\frac{1}{2} < k+1.$$

Donc cette double inégalité est vraie si et seulement si $k = \left\lfloor -\frac{a}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
Si a et b sont deux réels tels que $\cos a = \cos b$, alors il existe $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et $b + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$, et $\cos(a + 2k_1\pi) = \cos(a) = \cos(b) = \cos(b + 2k_2\pi)$.
Et donc par ce qui précède, $a + 2k_1\pi = a + 2k_2\pi$ **ou** $a + 2k_1\pi = -b - 2k_2\pi$.
Donc nécessairement, $a \equiv b \ [2\pi]$ **ou** $a \equiv -b \ [2\pi]$.
Enfin, si $a \equiv b \ [2\pi]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$, et donc $\cos(a) = \cos(b + 2k\pi) = \cos(b)$.
Et de même, si $a \equiv -b \ [2\pi]$, alors $\cos(a) = \cos(-b) = \cos(b)$.
Donc nous avons bien prouvé que pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi] \text{ **ou** } a \equiv -b \quad [2\pi].$$

Pour le sinus, il suffit de noter que $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.
Et donc si et seulement si

$$\frac{\pi}{2} - a \equiv \frac{\pi}{2} - b \quad [2\pi] \text{ **ou** } \frac{\pi}{2} - a \equiv -\frac{\pi}{2} + b \quad [2\pi] \Leftrightarrow a \equiv \quad [2\pi] \text{ **ou** } b \equiv \pi - a \quad [2\pi].$$

Enfin, pour la tangente, notons qu'elle est π-périodique, et donc qu'il suffit de savoir résoudre $\tan x = \tan a$ pour $a, x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Mais sur cet intervalle, la tangente est strictement croissante, donc ne prend qu'une seule fois la valeur $\tan a$, en $x = a$.

□

Exemple 5.28

On a $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si

$$2x \equiv \frac{5\pi}{6} \quad [2\pi] \text{ **ou** } 2x \equiv \frac{-5\pi}{6} \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si

$$x \equiv \frac{5\pi}{12} \quad [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{12} \quad [\pi].$$

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on n'hésitera pas à s'aider d'un cercle, sans oublier de travailler modulo 2π. Dans ce cas, on n'écrira pas des inégalités modulo 2π (ce dont nous n'avons jamais donné de définition), et on reviendra à la définition de congruence («il existe un entier k tel que ...»)

Exemple 5.29

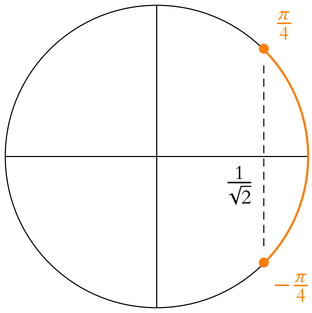
Résolvons l'inéquation $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque la fonction cos est 2π-périodique, il suffit de la résoudre dans un intervalle de longueur 2π, puis de procéder à des translations de 2π.

Pour $x \in]-\pi, \pi]$, on a[13]

$$\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[.$$



[13] Ne justifions rien, ça se «voit» sur le cercle. Si on voulait le justifier rigoureusement, il faudra sûrement étudier les variations de cos sur $]-\pi, \pi]$, ce qui n'est pas bien difficile, mais dont on se passera volontiers.

Proposition 5.30 (Transformation de $a\cos x + b\sin x$) : *Soient a et b deux réels. Alors il existe un réel φ tel que*

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Interprétation physique

La somme de deux signaux périodiques de même période est encore un signal périodique de même période. Son amplitude est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son déphasage vaut φ.

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors il n'y a rien à dire, n'importe quelle valeur de φ convient. Sinon, on a

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right).$$

Mais $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel[14] φ tel que $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi \end{cases}$.

[14] Unique modulo 2π.

Et alors

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

□

Exemples 5.31

Résolvons l'équation $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = -1$.
On a

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = 2\left(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos(x) + \sin\frac{\pi}{3}\sin(x)\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\cos x + \sqrt{3}\sin(x) = -1 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \textbf{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{-2\pi}{3} \quad [2\pi]\\ &\Leftrightarrow x = \pi \quad [2\pi] \textbf{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi].\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

5.5 FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Vous avez sûrement déjà utilisé la touche $\cos^{-1}$ de votre calculatrice, qui permet de retrouver un angle à partir de son cosinus.
Il ne s'agit pas de **la** bijection réciproque de cos car celle-ci n'est pas bijective : comme toute fonction périodique, tout élément de son image possède une infinité d'antécédents.
En revanche, en restreignant cos à un intervalle plus petit, elle devient bijective, et donc il est possible d'introduire sa bijection réciproque.

5.5.1 Arc sinus et arc cosinus

Définition 5.32 – La fonction $\sin_{|\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
On appelle alors **arc sinus** et on note Arcsin sa bijection réciproque :

$$\text{Arcsin} : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \text{Arcsin}(x) \end{array} \right. .$$

Démonstration. La fonction sin est continue[15] sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle y est strictement croissante car sa dérivée, qui est la fonction cosinus, est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, on a $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
Donc par le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. □

[15] Car dérivable.

Rappel
Une dérivée qui s'annule uniquement en un nombre fini de points n'est pas un obstacle à la **stricte** monotonie.

Remarque. Puisque sin est strictement croissante, il en est de même de Arcsin. Et puisque sin est impaire, il en est de même de Arcsin.
En effet, pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\sin(-\text{Arcsin}(x)) = -\sin(\text{Arcsin}(x)) = -x.$$

Puisque $-\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, c'est l'unique antécédent de $-x$ par sin dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: c'est $\text{Arcsin}(-x)$.

⚠ On n'a pas, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.
Ceci n'est vrai que pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En effet, nous n'avons pas dit que Arcsin est la bijection réciproque de sin sur $\mathbf{R}$ tout entier[16], mais uniquement la bijection réciproque de sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, pour $x \in [-1, 1]$, on a bien $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$, car $\text{Arcsin}(x)$ est bien dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
On retiendra que pour $(x, \theta) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\theta = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

[16] Et pour cause, sin ne peut pas être bijective sur **R** puisqu'elle y est périodique, et prend donc une infinité de fois chaque valeur.

En effet, $\theta = \operatorname{Arcsin}(x)$ si et seulement si il s'agit de l'antécédent[17] de x par sin **dans** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
La seconde condition, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est absolument indispensable, on ne peut pas se contenter de $\sin\theta = x$. En effet, il existe une infinité de réels dont le sinus vaut x, ce sont tous les nombres congrus à $\operatorname{Arcsin} x$ ou à $\pi - \operatorname{Arcsin}(x)$ modulo 2π.

[17] Nécessairement unique.

Remarque

C'est le même principe que lorsqu'on dit que

$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La première condition implique que $x = \pm\sqrt{a}$, mais il faut la seconde pour décider de la valeur exacte de x.

Exemples 5.33

► Calculons $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right)$.

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

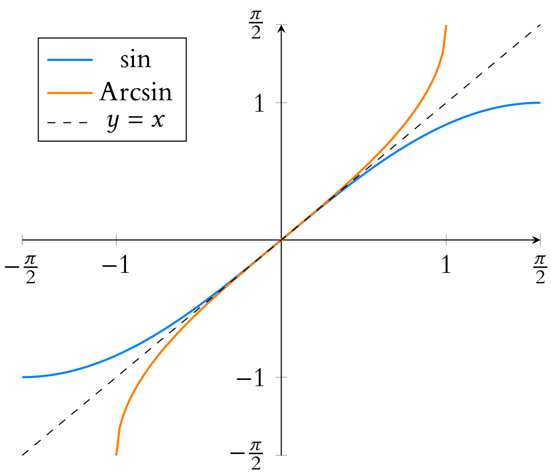
Puisque $\frac{3\pi}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{18\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7}$.

► Certaines valeurs de la fonction Arcsin doivent être connues sans hésitation, en lien avec les valeurs remarquables de la fonction sinus.
Par exemple, $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Proposition 5.34 : *La fonction* Arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$, *et*

$$\forall x \in]-1,1[,\ (\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Les propriétés générales des dérivées des bijections réciproques prouvent que Arcsin est dérivable là où $\sin' \circ \operatorname{Arcsin}$ ne s'annule pas.
C'est-à-dire sur l'ensemble des $x \in]-1,1[$ tels que $\cos(\operatorname{Arcsin} x) \neq 0$.
Mais $\operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(x) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$.
Et donc Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, $(\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin}(x))}$.
Il s'agit donc de calculer $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$.
Or, nous savons que pour $x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x$.
Et donc $\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$.
Or, $\operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) \geqslant 0$.
On en déduit donc que $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
Et donc $\forall x \in]-1,1[$, $(\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □



Notons que la fonction sin possédant des tangentes horizontales en $\pm\frac{\pi}{2}$, Arcsin possède des tangente verticales en ± 1.

Définition 5.35 – La fonction $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle alors **arc cosinus** et on note Arccos sa bijection réciproque :

$$\mathrm{Arccos} : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arccos}(x) \end{array} \right. .$$

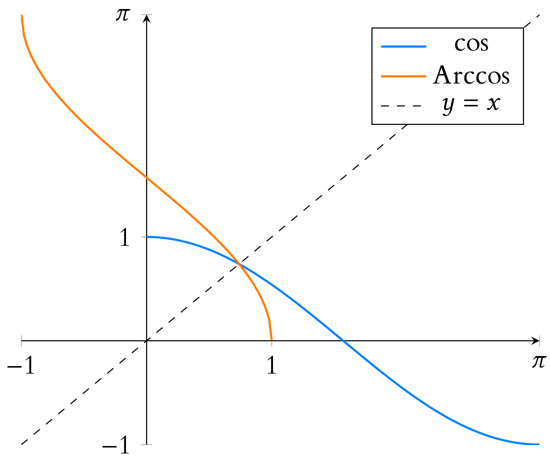
Démonstration. La fonction cos est continue car dérivable, et sur $[0,\pi]$, sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x) \leqslant 0$.
De plus, cette dérivée s'annule uniquement en 0 et en π, donc $\cos_{|[0,\pi]}$ est strictement décroissante.
Puisque $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, par le théorème de la bijection, $\cos_{|[0,\pi]}$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. □

Plus généralement
Une fonction paire n'est jamais bijective puisqu'elle prend au moins deux fois chaque valeur (à moins que son ensemble de définition soit réduit à $\{0\}$, ce qui est totalement inintéressant).

Remarque. Puisque $\cos_{|[0,\pi]}$, est strictement décroissante, il en est de même de Arccos.
En revanche, la parité de cos n'induit pas une parité de Arccos, par exemple car son ensemble de définition n'est pas symétrique !
Enfin, toutes les valeurs déjà connues pour le cos se traduisent en termes d'Arccos.
Par exemple $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Comme pour l'arcsinus, on a toujours, pour $x \in [-1,1]$, $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$, mais on pas toujours $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$, ceci n'étant vrai que pour $x \in [0,\pi]$.

On retiendra que $\theta = \mathrm{Arccos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$.



Exemple 5.36

Résolvons l'équation $\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}\frac{12}{13}$, d'inconnue $x \in [-1,1]$.
Notons que $\mathrm{Arcsin}\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On aura alors, pour $x \in [-1,1]$,

$$\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}\frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = \cos\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right).$$

Mais $\cos^2\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) + \sin^2\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1$ soit encore

Équivalence
L'équivalence n'est vraie que parce que les deux nombres $\mathrm{Arccos}(x)$ et $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)$ sont dans $[0,\pi]$, intervalle sur lequel cos est bijective.

$\cos^2\left(\text{Arcsin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$.
Puisque $\text{Arcsin}\,\frac{12}{13} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{12}{13}\right) > 0$ et donc $\cos\left(\text{Arcsin}\,\frac{12}{13}\right) = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.
Par conséquent, $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\,\frac{12}{13} \Leftrightarrow x = \frac{5}{13}$.
Et donc, $\frac{5}{13}$ est l'unique solution de l'équation $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}\,\frac{12}{13}$.

Proposition 5.37 :

$$\forall x \in [-1, 1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = \sin(\text{Arcsin}(x)) = x.$$

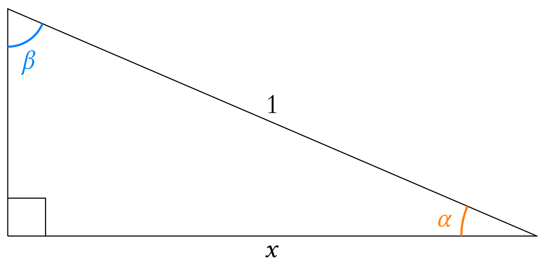
D'autre part, puisque $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arcsin}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \leqslant \pi$.
Et donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = x \\ \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(x)$. □

Remarque
Comme prouvé ici, ainsi que dans la preuve de la proposition 5.34, on a, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Il faut, sinon le savoir par cœur, être capable de le redémontrer.

Remarque. Cette relation a en fait une interprétation géométrique très simple si $x \in]0, 1[$. En effet, si l'on se place, comme dans la figure ci-dessous dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'un des côtés vaut x, on a $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.
Mais $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, de sorte que $\alpha = \text{Arccos}\,x$ et de même, $\sin\beta = \frac{x}{1}$, et donc $\beta = \text{Arcsin}(x)$.
Et donc $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = \text{Arccos}\,x + \text{Arcsin}\,x$.



Corollaire 5.38 – *La fonction* Arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et pour tout* $x \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration. Notons que ceci aurait pu être prouvé en reproduisant la preuve de la dérivabilité de Arcsin.
Mais en utilisant la relation précédente, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)$.
Et donc Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ car somme de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée pour tout $x \in]-1, 1[$ par $\text{Arccos}'(x) = -\text{Arcsin}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

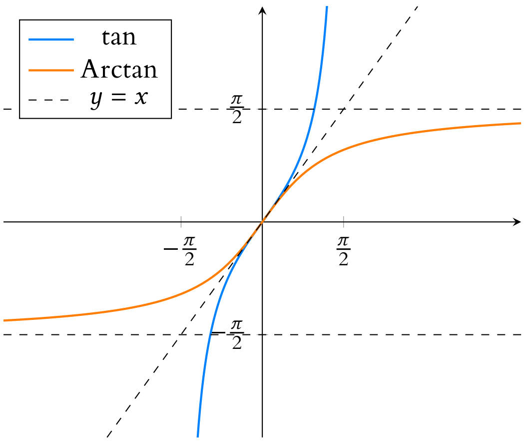
5.5.2 Arc tangente

Définition 5.39 – La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.
On appelle **arc tangente** et on note Arctan sa bijection réciproque :

$$\text{Arctan} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) \end{array} \right.$$

Démonstration. La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, $\tan_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$. □

⚠ Bien que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, on n'a absolument pas $\text{Arctan} = \dfrac{\text{Arcsin}}{\text{Arccos}}$!



Une fois n'est pas coutume, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ mais $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ n'est vrai que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Enfin, on retiendra que $\theta = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan\theta \\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$.

Exemple 5.40

Calculons $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \text{Arctan}\,\frac{1}{7}$. On a

$$\tan\theta = \frac{\tan \text{Arctan}\,\frac{1}{3} + \tan\text{Arctan}\,\frac{1}{7}}{1 - \tan\text{Arctan}\,\frac{1}{3}\tan\text{Arctan}\,\frac{1}{7}} = \frac{\frac{10}{21}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2}.$$

Nous serions tentés d'en déduire que $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$, mais encore faut-il s'assurer que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Mais puisque $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, alors $0 \leqslant \text{Arctan}\,\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ et de même $0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{7} < \frac{\pi}{4}$.

On en déduit donc que $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \tan\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ et par conséquent $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{2}$.

Proposition 5.41 : *La fonction* Arctan *est strictement croissante sur* $\mathbf{R}$*, impaire, avec* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.
De plus, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ *et* $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. La stricte croissance découle de celle de tan, de même que l'imparité.
En effet, si $x \in \mathbf{R}$, alors $\tan(-\mathrm{Arctan}(x)) = -\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = -x$ et donc par application de l'arctangente, $-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(-x)$.
Les limites découlent aussi de celles de la tangente.
Enfin, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ n'est jamais nul, Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

Exemple 5.42

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

En effet, si $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \mathrm{Arcsin}(x)$, alors f est dérivable[18] sur $]-1,1[$, et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$, avec $f(0) = \mathrm{Arctan}(0) - \mathrm{Arcsin}(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

[18] Car composée de fonctions qui le sont.

Exercice
Retrouver ce résultat sans passer par les dérivées.

Proposition 5.43 : *Pour* $x \in \mathbf{R}^*$*, on a*

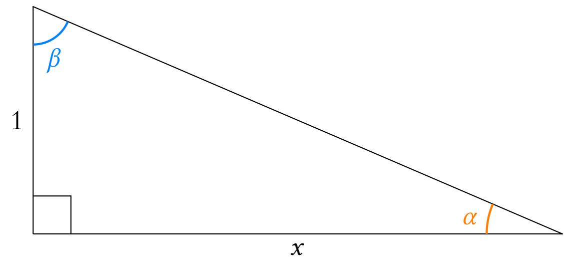
$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Alors g est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Il serait alors tentant d'en déduire que g est constante, mais $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle !
En revanche, $\mathbf{R}_+^*$ est un intervalle sur lequel g est donc constante.
Or, $g(1) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.
De même, g est constante sur $\mathbf{R}_-^*$, égale à $g(-1) = -\frac{\pi}{2}$. □

Notons que cette formule a une interprétation géométrique très simple si $x > 0$: dans le triangle rectangle suivant, $\tan\alpha = \dfrac{1}{x}$ et donc $\alpha = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$ et $\tan\beta = x$ et donc $\beta = \operatorname{Arctan}(x)$.
Or, il est évident que la somme des deux vaut $\frac{\pi}{2}$.



EXERCICES DU CHAPITRE 5

▶ Fonctions circulaires

EXERCICE 5.1 F

1) En notant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
2) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 5.2 PD

1) Écrire $\sin(5x)$ sous forme d'un polynôme en $\sin(x)$.
2) En déduire que $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

EXERCICE 5.3 Soient p, q deux réels tels que $\sin p + \sin q \neq 0$. Simplifier $\dfrac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$. En déduire la valeur de $\tan\dfrac{\pi}{24}$ sans déterminer $\cos\dfrac{\pi}{24}$, ni $\sin\dfrac{\pi}{24}$. AD

EXERCICE 5.4 Étudier le signe sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x) - \cos(3x)$. PD

EXERCICE 5.5 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^3 \leqslant x^2$, et déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette inégalité est une égalité. En déduire l'ensemble des solutions de $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$. PD

EXERCICE 5.6 Équations et inéquations F

Résoudre les équations et inéquations suivantes. *Autant que possible, on s'aidera d'un cercle trigonométrique.*

1. $\cos x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $|\tan(x)| \leqslant 1$
3. $\cos^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4}$
4. $2\sin^2(x) + \sin^2(2x) = 2$
5. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1$.

EXERCICE 5.7 Formules de la tangente de l'arc moitié PD

Soit $x \notin \pi + 2\pi\mathbf{Z}$. On pose $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Montrer que $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

EXERCICE 5.8 Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Retrouver alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\cos\frac{\pi}{3}$. F

EXERCICE 5.9 Résoudre les équations suivantes : AD

1) $\tan(2x) = 3\tan(x)$
2) $\cos(2x) - \cos(3x) = 0$
3) $1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0$

EXERCICE 5.10 Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin x$.

EXERCICE 5.11 Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x) \geqslant 1$. *On pourra commencer, lorsque c'est possible, par se ramener à une inéquation en* $\tan x$. PD

EXERCICE 5.12 Montrer que pour $n \geqslant 2$, on a $2\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (où il y a $n-1$ racines carrées). PD

EXERCICE 5.13 AD

1) Démontrer que pour tout α dans un ensemble à préciser, on a $\tan^2\alpha\tan(2\alpha) = \tan(2\alpha) - 2\tan\alpha$.
2) En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}}$ où $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.
3) Donner la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 5.14 Un produit infini AD

1) Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}$.
3) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

EXERCICE 5.15 Pour $x \in \mathbf{R}$, comparer $\cos(\sin(x))$ et $\sin(\cos(x))$. TD

► Fonctions circulaires réciproques

EXERCICE 5.16 Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$. F

EXERCICE 5.17 Calculer les nombres suivants : F

1. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{19\pi}{3}\right)\right)$
6. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

EXERCICE 5.18 Calculer $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$. PD

EXERCICE 5.19 Simplifier les expressions suivantes, en précisant les valeurs de x pour lesquelles elles ont un sens : AD

1. $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$
2. $(\star)\ \sin(\operatorname{Arctan} x)$
3. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right)$
4. $\tan(\operatorname{Arccos} x)$
5. $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$

EXERCICE 5.20 Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$. PD

EXERCICE 5.21 Montrer les identités suivantes : PD

1) $\operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$
2) $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$
3) $2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}$

EXERCICE 5.22 AD

1) Pour $k \in \mathbf{N}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
2) En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

EXERCICE 5.23 À l'aide de calculs de dérivées, prouver les formules suivantes : AD

1) $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
2) $\forall x \in [0,1]$, $\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

EXERCICE 5.24 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$. PD

1) Vérifier que f est bien définie.
2) Justifier que tout réel positif x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \tan^2(\theta/2)$, avec $0 \leqslant \theta < \pi$.
3) Montrer alors que $f(x) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

EXERCICE 5.25 Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(2x)$. AD

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2) Calculer la valeur de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
3) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution.
4) Déterminer cette solution.

EXERCICE 5.26 Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$. D

EXERCICE 5.27 AD

1) Simplifier $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2) Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{5}{13}$
3) En déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 5.28 (Oral Polytechnique) TD

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \cdots + u_n)^2}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{u_n}$. *On pourra noter* $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\dfrac{1}{u_n}$.

Correction des exercices du chapitre 5

Solution de l'exercice 5.1

1. On a
$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$
Et de même,
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

2. On a
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8}-1.$$
Et donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
Puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{8} \leqslant 1$, $\cos\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ et donc on en déduit que
$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$
On en déduit donc que $\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.
Et de même, puisque $\sin\frac{\pi}{8} \geqslant 0$, il vient donc $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
Enfin, on a
$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$
Notons qu'on pourrait aussi utiliser
$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}-1 = \frac{4}{2+\sqrt{2}}-1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
ce qui, en notant que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$ conduit au même résultat, à savoir $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

⚠ Attention !
Si on ne prend pas garde de vérifier la positivité de $\cos\frac{\pi}{8}$, on peut seulement affirmer que
$$\left|\cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}.$$

Alternative
On aurait aussi pu utiliser la formule
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$
et utiliser la valeur de $\cos^2\frac{\pi}{8}$ calculée plus tôt, en justifiant là encore que $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 5.2

1. On a $\sin(5x) = \sin(4x+x) = \sin(x)\cos(4x)+\cos(x)\sin(4x)$.
Mais
$$\cos(4x) = 1-2\sin^2(2x) = 1-2(2\cos(x)\sin(x))^2 = 1-8\cos^2(x)\sin^2(x) = 1-8(1-\sin^2(x))\sin^2(x) = 1-8\sin^2(x)+8\sin^4(x).$$
Et de même, $\sin(4x) = 2\cos(2x)\sin(2x) = 2(1-2\sin^2(x))2\cos(x)\sin(x)$.
Et donc
$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \sin(x)-8\sin^3(x)+8\sin^5(x)+4(1-\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x)-8\sin^3(x)+8\sin^5(x)+4(1-2\sin^2(x))\cos^2(x)\sin(x)\\ &= \sin(x)-8\sin^3(x)+8\sin^5(x)+4((\sin(x)-2\sin^3(x))(1-\sin^2(x))\\ &= \sin(x)-8\sin^3(x)+8\sin^5(x)+8\sin^5(x)-12\sin^3(x)+4\sin(x)\\ &= 16\sin^5(x)-20\sin^3(x)+5\sin(x).\end{aligned}$$

2. Notons $s = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Puisque $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = \sin(\pi) = 0$, d'après la question précédente, il vient
$$16s^4-20s^3+5s = 0 \Leftrightarrow s\left(16s^4-20s^2+5\right) = 0.$$

Il est clair[1] que $s \neq 0$, et donc $16s^4 - 20s^2 + 5 = 0$.
Posons alors $S = s^2$, de sorte que S est racine de $16S^2 - 20S + 5$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 80$, de sorte que les deux racines en sont

$$S_1 = \frac{20 - \sqrt{80}}{32} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ et } S_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

Ces deux racines sont positives, et donc $s = \sqrt{S_1}$ ou $S = \sqrt{S_2}$.

[1] Car $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.

Puisque $0 < \dfrac{\pi}{5} < \dfrac{\pi}{4}$, on a $0 < s < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Or $S_2 > \frac{1}{2}$, si bien que $\sqrt{S_2} > \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Et donc nécessairement, $s = \sqrt{S_1} = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

Remarque

Il ne coûte pas beaucoup plus cher de prouver que

$$\sin(2\pi/5) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

puisqu'il s'agit aussi d'une racine positive de $16X^5 - 20X^3 + 5X$, et qu'elle est strictement plus grande que $\sin(\pi/5)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.3

On applique nos formules :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \text{ et } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

Donc en passant au quotient, $\dfrac{\cos q - \cos p}{\sin p + \sin q} = \tan \dfrac{p-q}{2}$.
Comme dans l'exercice 1, on a $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, et donc pour $p = \dfrac{\pi}{3}$ et $q = \dfrac{\pi}{4}$, il vient

$$\tan \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{6} - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.4

Rappelons qu'on a $\cos a - \cos b = -2 \sin \dfrac{a+b}{2} \sin \dfrac{a-b}{2}$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2x) - \cos(3x) = 2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Sur $[0, 2\pi]$, $\sin \frac{x}{2} \geqslant 0$, et donc le signe de $\cos(2x) - \cos(3x)$ est entièrement déterminé par celui de $\sin \frac{5x}{2}$.

x	0		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		2π
$\sin \frac{5x}{2}$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.5

Pour $-1 \leqslant x < 0$, c'est évident car $x^3 < 0$ et $x^2 > 0$. Et on ne peut alors pas avoir égalité.
Pour $x \in [0, 1]$, on a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ qui est négatif, et s'annule uniquement pour $x = 0$ ou $x = 1$.
Donc $x^3 \leqslant x^2$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0, 1\}$.
Puisque pour tout réel x, $\cos x \in [-1, 1]$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$, alors ce qui précède s'applique, et donc $\cos^3 x + \sin^3 x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 \leqslant 1$.
Et on a égalité si et seulement si on a simultanément $\cos x \in \{0, 1\}$ et $\sin x \in \{0, 1\}$.
Soit si et seulement si $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.6

1. Rappelons que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
   Par 2π-périodicité du cosinus, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

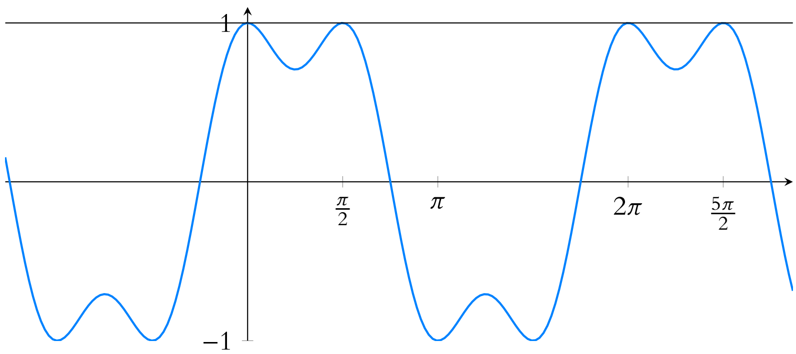


FIGURE 5.1 – La fonction $x \mapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^3$.

2. Nous savons que tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Et donc pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \tan(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Par π-périodicité de tan, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

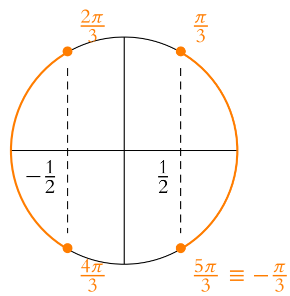
3. On a $\cos^2(x) \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x \geqslant \frac{1}{2}$ **ou** $\cos(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Sur $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions est donc $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Une manière peut-être un peu plus élégante de le dire est que dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Et donc l'ensemble des solutions dans $\mathbf{R}$ est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right).$$



4. Nous savons que $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et donc

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin^2(2x) &= 2\sin^2(x) + 4\cos^2(x)\sin^2(x) = 2\sin^2(x)\left(1 + 2\cos^2(x)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(1 + 2\left(1 - \sin^2(x)\right)\right) \\ &= 2\sin^2(x)\left(3 - 2\sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

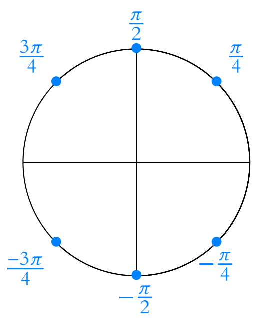
Posons alors $X = \sin^2(x)$, de sorte que l'équation de départ s'écrit encore

$$X(3 - 2X) = 1 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0.$$

Les solutions en sont alors $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

Donc x est solution de l'équation de départ si et seulement si $\sin(x) = \pm 1$ ou $\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.



5. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin(x)\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Méthode

Pour simplifier une expression de la forme

$$A\cos x + B\sin x$$

factoriser par $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Et donc on a

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}.$$

Pour $x + \frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$, ceci est équivalent à $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right[= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[.$$

Solution de l'exercice 5.7

Commençons par noter que l'hypothèse faite sur x est équivalente à $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, ce qui garantit l'existence de t.
On a alors $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$.
Mais puisque $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ et donc

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Rappel
Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Et donc $\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

De même, on a

$$\sin(x) = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \frac{2}{1+t^2}t = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin, la dernière formule est immédiate en se souvenant que

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Solution de l'exercice 5.8

On a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(x+2x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x)\\
&= \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) - 2\sin^2(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2(1-\cos^2(x))\cos(x)\\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

Notons qu'en particulier, pour $x = \frac{\pi}{3}$, on obtient $-1 = \cos(\pi) = 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3}$.
Et donc $\cos\frac{\pi}{3}$ est racine du polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X + 1$.
Or, -1 est racine évidente de P, qui se factorise donc en $P(X) = (X+1)(4X^2 - 4X + 1)$, dont les racines sont -1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Puisque $\cos\frac{\pi}{3} \neq -1$ et $\cos\frac{\pi}{3} > 0$, on en déduit que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
De là, il vient[2] $\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[2] Car $\sin\frac{\pi}{3} \geqslant 0$.

Puis en notant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\begin{aligned}
\sin(4x) &= \sin(2\times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)\\
&= 4\sin(x)\cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right)\\
&= 8\cos^3(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5.9

1. Notons que l'équation n'a de sens que si x et $2x$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π c'est-à-dire si et seulement $x \notin \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.
Nous savons que

$$\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

et donc

$$\tan(2x) = 3\tan(x) \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan(x) \Leftrightarrow 2\tan(x) = 3\tan(x)(1-\tan^2(x)) \Leftrightarrow \tan(x)\left(3\tan^2(x)-1\right) = 0.$$

Et donc si et seulement si $\tan x = 0$ ou $\tan(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
C'est le cas si et seulement si $x \equiv 0 \quad [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [\pi]$.

2. On a $\cos(2x) - \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(3x)$, ce qui est le cas si et seulement si

$$2x \equiv 3x \quad [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -3x \quad [2\pi].$$

Soit encore si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -3x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -2k\pi \text{ ou } x = k\frac{2\pi}{5}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

> **Remarque**
> Ceci pourrait aussi s'écrire entièrement avec des congruences si on est à l'aise. Par exemple,
> $$2x \equiv -3x \quad [2\pi] \Leftrightarrow 5x \equiv 0 \quad [2\pi]$$
> $$\Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [\tfrac{2\pi}{5}]$$

3. Par les formules de Simpson, on a

$$\cos x + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(x).$$

D'autre part, $1+\cos(2x) = 2\cos^2(x)$, et donc

$$1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x)\left(\cos(2x)+\cos(x)\right) = 0.$$

Donc l'équation est satisfaite si et seulement si $\cos(x) = 0$ ou

$$\cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x).$$

Soit encore si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou $2x \equiv \pi - x \quad [2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi \quad [2\pi]$.
Mais $2x \equiv \pi - x \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} \quad [\frac{2\pi}{3}]$ et $2x \equiv x - \pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\pi \quad [2\pi]$.
Donc au final l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Et puisque $(2k+1)\pi = \frac{\pi}{3} + 3k\frac{2\pi}{3}$, on peut donc écrire plus simplement que l'ensemble des solutions est

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.10

Les fonctions sin et cos étant 2π-périodiques, il suffit de chercher les solutions dans $]-\pi,\pi]$, les autres s'obtiendront par translation de $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Nous supposons donc dans la suite que $x \in]-\pi,\pi]$.
Commençons par noter que le membre de gauche n'a de sens que si

$$1+2\cos(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Soit encore si et seulement si $-\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.
Puisqu'une racine est toujours positive, pour $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$, on a $\sin(x) < 0$, et donc x n'est évidemment pas solution de l'équation.
Enfin, pour $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors

$$\sqrt{1+2\cos(x)} \leqslant \sin(x) \Leftrightarrow 1+2\cos(x) \leqslant \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos^2(x)+2\cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x)(2+\cos(x)) \leqslant 0.$$

Puisque $2+\cos(x)$ est évidemment positif, cette dernière inégalité n'est vérifiée que pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ dans $]-\pi, \pi]$ est $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.11

Notons que par 2π-périodicité de sin et cos, il suffit de chercher les solutions dans $[-\pi, \pi]$.
Mieux : $\cos^2$ et $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sont π-périodiques, et il suffit donc de chercher les solutions dans $[0, \pi]$.
On suppose donc dans la suite que $x \in [0, \pi]$.
Constatons que $\frac{\pi}{2}$ n'est pas solution, et que pour $n \neq \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire lorsque $\tan x$ existe), on a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ et

$$\cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)\tan(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Et donc il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$\frac{1-\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \geqslant 1.$$

Posons alors $X = \tan x$. On a

$$\frac{1-X}{1+X^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1-X}{1+X^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-X^2-X}{1+X^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow X(X+1) \leqslant 0.$$

Ce qui est le cas si et seulement si $X \in [-1, 0]$. Soit encore si et seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.12

Prouvons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n = 2$, on a $2\cos\dfrac{\pi}{2^2} = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, donc la récurrence est initialisée.
Supposons la formule vraie à un rang $n \geqslant 2$. Alors $2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 2\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)$.
Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\cos(x) = \cos\left(2\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$.
Soit encore $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$. En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2^n}$, $2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 1+\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ et donc

$$4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}} = 2+2\cos\frac{\pi}{2^n} = 2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ racines}}.$$

Puisque $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif, et donc

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ racines}}.$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \geqslant 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.13

1. Pour que $\tan\alpha$ et $\tan(2\alpha)$ aient un sens, il faut que $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$.
Pour un tel α, on a $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ et donc

$$\tan(2\alpha) - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha - 2\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan^2\alpha\tan(2\alpha).$$

2. En utilisant la formule de la question précédente[3], il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan^2\frac{x}{2^k}\tan\frac{x}{2^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left(\tan\frac{x}{2^{k-1}} - 2\tan\frac{x}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\tan\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^k\tan\frac{x}{2^k}\\ &= \tan x - 2^n\tan\frac{x}{2^n}.\end{aligned}$$

[3] Qui est valable car pour $k \geqslant 1$,

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{2k} \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

3. Il nous faut donc déterminer la limite de $2^n\tan\frac{x}{2^n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Or,

$$2^n\tan\frac{x}{2^n} = x\frac{\tan\frac{x}{2^n} - \tan(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\tan'(0) = x(1+\tan^2(0)) = x.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \tan(x) - x$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.14

Notons que si x n'est pas un multiple entier de 2π, aucun des $\frac{x}{2^k}$, $k \geqslant 1$ n'est multiple de π, et donc les $\sin\frac{x}{2^k}$ sont tous non nuls.

1. La formule étant donnée dans l'énoncé, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, on a $\cos\frac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$ car $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin(x)$.
Supposons donc la formule vraie au rang n.
Alors

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n 2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cos\frac{x}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}.\end{aligned}$$

Et donc la formule est encore vraie au rang $n+1$, de sorte que par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
Alternative sans récurrence : on peut faire le même calcul sans récurrence, en notant que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\sin\frac{x}{2^{k-1}} = 2\sin\frac{x}{2^k}\cos\frac{x}{2^k}$ et donc $\cos\frac{x}{2^k} = \dfrac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos\frac{x}{2^{k-1}}}$. Et donc

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2^k}}\\ &= \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Produit télescopique.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

3. Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par la question précédente, $\dfrac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit que $2^n \sin \dfrac{x}{2^n} = x \dfrac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x}$.

Solution de l'exercice 5.15

Posons $f(x) = \sin(\cos(x)) - \cos(\sin(x))$. Il s'agit donc de déterminer le signe de $f(x)$.
On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\cos(x)) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin(x)\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappel
On a $\sin(p) - \sin(q)$
$= 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

Mais nous savons également que

$$\sin(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin(x) + \sin\frac{\pi}{4}\cos(x)\right) = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Et de même,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$$

et de même,

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\cos(x)-\sin(x)}{2} + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

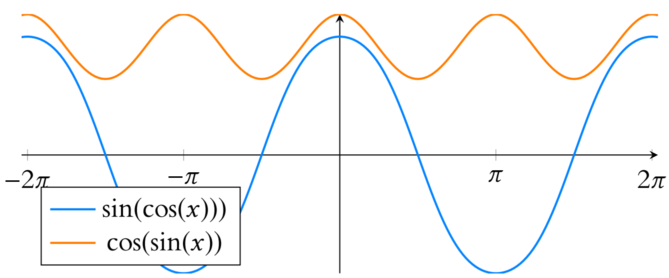
Mais puisque[4] $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, alors $0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{4} < \pi$ et $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$-\pi \leqslant \frac{\sin x + \cos x}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$$

et

$$0 < \frac{\cos x - \sin x}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi.$$

Donc les deux fonctions $x \mapsto \sin\left(\dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{2}\right)$ ne s'annulent pas sur $\mathbf{R}$.
Il en est donc de même de f. Étant continue, elle de signe constant[5].
Or, $f(0) = \sin(1) - \cos(0) = \sin(1) - 1 < 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$.



[4] Le plus simple pour s'en convaincre est probablement d'élever au carré et de garder en tête que $\pi^2 > 9$.

[5] Sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait entre un point où elle positive et un point où elle est négative.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.16

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \operatorname{Arctan}(x) - x$. Alors f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

Et donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisqu'on a $f(0) = \operatorname{Arctan}(0) = 0$, on en déduit que

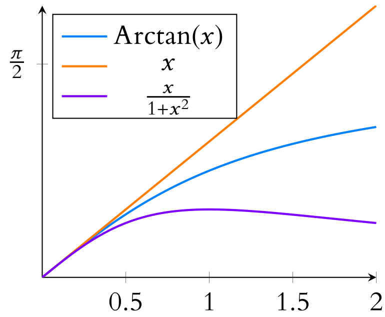
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x.$$

De même, soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Alors g est dérivable et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}.$$



SOLUTION DE L'EXERCICE 5.17

1. Puisque $\dfrac{5\pi}{13} \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}\cos\dfrac{5\pi}{13} = \dfrac{5\pi}{13}$.

Danger ! L'égalité $\operatorname{Arccos}\cos x = x$ ne vaut que pour $x \in [0,\pi]$.

2. On ne peut s'en tirer comme à la question précédente puisque $\dfrac{7\pi}{8} \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
En revanche, $\sin\dfrac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{8}\right)$, et donc puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\operatorname{Arcsin}\sin\frac{7\pi}{8} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{8}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$
3. Exactement sur le même principe, $\operatorname{Arcsin}\sin\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{Arcsin}\sin\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
4. On $\cos\dfrac{22\pi}{7} = \cos\left(-\dfrac{6\pi}{7}\right) = \cos\dfrac{6\pi}{7}$.
Et puisque $\dfrac{6\pi}{7} \in [0,\pi]$, on en déduit que $\operatorname{Arccos}\cos\dfrac{22\pi}{7} = \dfrac{6\pi}{7}$.
5. On a $\sin\dfrac{19\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6}$.
Et donc $\operatorname{Arccos}\sin\dfrac{19\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.
6. Par π-périodicité de la tangente, $\tan\dfrac{5\pi}{4} = \tan\dfrac{\pi}{4}$.
Et donc $\operatorname{Arctan}\tan\dfrac{5\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$ car $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.18

Puisque $2 > 1$, $\operatorname{Arctan}(2) > \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Et de même pour $\operatorname{Arctan}(3)$.
Et donc[6], on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

D'autre part, on a

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)\right) = \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}(2)\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}(3)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(2)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(3)\right)} = \frac{5}{1-6} = -1.$$

Et donc, $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) - \pi$ est l'unique nombre de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut -1 : c'est $-\dfrac{\pi}{4}$.
Et donc $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

[6] Une arctangente est toujours strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Unicité L'unicité est garantie par le fait que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.19

1. On a, pour $x \in [-1,1]$,
$$\sin(2\operatorname{Arcsin} x) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. L'expression donnée à un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, puisque $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) > 0$, et en particulier est non nul.
Et donc $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 + x^2$, si bien que
$$\cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}.$$
On a alors $\sin^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan}(x)) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.
Et donc $|\sin(\operatorname{Arctan}(x))| = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$.
Reste à remarquer que si $x \geqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \geqslant 0$, si bien que
$$\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Et si $x \leqslant 0$, alors $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, et donc $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) \leqslant 0$, de sorte que $\sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{-|x|}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Utilisons une formule de linéarisation : pour tout $x \in [-1,1]$,
$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x\right) = \frac{\cos(\operatorname{Arccos} x) + 1}{2} = \frac{x+1}{2}.$$

4. Pour $x \in [-1,1]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
Et donc $\tan(\operatorname{Arccos} x) = \dfrac{\sin(\operatorname{Arccos} x)}{\cos(\operatorname{Arccos} x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

5. On a, pour $u \in \mathbf{R}$,
$$\begin{aligned}\cos(3u) = \cos(u+2u) &= \cos(u)\cos(2u) - \sin(u)\sin(2u) = \cos(u)\left(2\cos^2(u) - 1\right) - 2\sin^2(u)\cos(u)\\ &= 2\cos^3(u) - \cos(u) - 2\left(1-\cos^2(u)\right)\cos(u) = 4\cos^3(u) - 3\cos(u).\end{aligned}$$
Et donc pour $x \in [-1,1]$,
$$\cos(3\operatorname{Arccos} x) = 4\cos^3(\operatorname{Arccos} x) - 3\cos(\operatorname{Arccos} x) = 4x^3 - 3x.$$

Plus généralement
On peut prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\operatorname{Arccos}(x))$ est une fonction polynomiale de degré n.
Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.20

Il est clair que f est 2π-périodique, donc il suffit de tracer son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis d'effectuer des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$.
De plus, f est paire, car la fonction cos l'est, et donc il suffit de tracer son graphe sur $[0, \pi]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $x \in [0, \pi]$, on a $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$.
Si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0, \pi]$, et donc $\operatorname{Arccos}(\cos(2x)) = 2x$, et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}2x = 0$.
En revanche, si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$, et donc $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec $2\pi - 2x \in [0, \pi]$.
Et donc $\operatorname{Arccos}(\cos 2x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\pi - 2x)) = 2\pi - 2x$.
Et donc $f(x) = x - \dfrac{1}{2}(2\pi - 2x) = 2x - \pi$.

Remarque
Cette formule n'est rien d'autre que la définition de l'arc cosinus, qui est la bijection réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.21

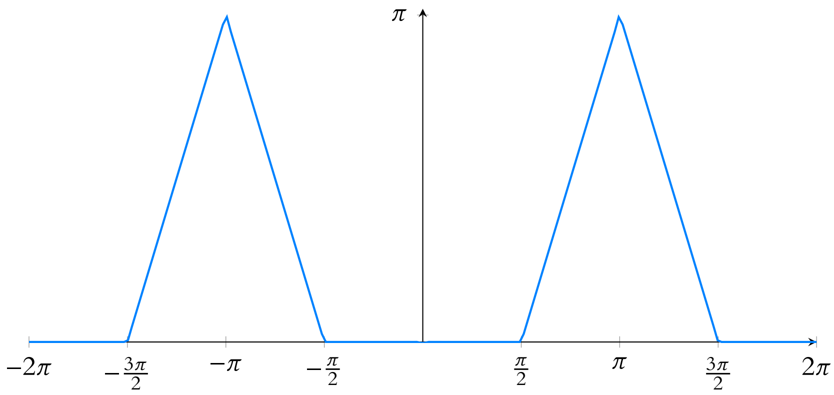


FIGURE 5.2 – $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$

1. Notons $\theta = \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13}$ et $\varphi = \operatorname{Arctan}\dfrac{2}{3}$.
   On a alors $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ et $\tan\varphi = \dfrac{2}{3}$.
   Nous savons de plus que $\sin\theta = \sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{12}{13}$.
   Et donc $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$.
   D'autre part, on a
   $$\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}.$$
   D'autre part, puisque $\dfrac{5}{13} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   De même, puisque $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, alors $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}$ et donc $0 < 2\varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
   Et donc $\begin{cases} \tan(\theta) = \tan(2\varphi) \\ \theta, 2\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Rightarrow \theta = 2\varphi.$
   Alternative : notons $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}$.
   Puisque $\frac{2}{3} \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{2}{3} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant \theta < \pi$.
   Alors $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3}\right)) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}\frac{2}{3})} - 1 = \dfrac{2}{1+\frac{4}{9}} - 1 = \dfrac{18}{13} - 1 = \dfrac{5}{13}$.
   Et donc on a à la fois $\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \cos(\theta) = \frac{5}{13} \end{cases}$ donc $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{5}{13}$.

> **Danger !**
> Il est indispensable de s'assurer que θ et 2π sont dans le même intervalle de longueur π, faute de quoi ils pourraient avoir la même tangente sans être égaux.

2. Commençons par noter que $\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} \in [0,\pi]$.
   Mais $\cos\left(2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}\right) - 1 = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - 1 = \dfrac{9}{8} - 1 = \dfrac{1}{8}$.
   Et donc on a bien $2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{8}$.

> **Méthode**
> Un réel θ n'est égal à $\operatorname{Arccos} x$ que s'il vérifie les deux conditions
> $$\begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ \cos\theta = x \end{cases}$$

3. On a $\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right) - 1 = 2\left(1-\sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5}\right)\right) - 1 = \dfrac{7}{25}$.
   Et puisque $\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2\operatorname{Arcsin}\dfrac{3}{5} \in [0,\pi]$, de sorte que
   $$\cos\left(2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{25} \Leftrightarrow 2\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} = \operatorname{Arccos}\frac{7}{25}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.22

1. On a
   $$\tan\left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)\right) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(k+1)) - \tan(\operatorname{Arctan}(k))}{1+\tan(\operatorname{Arctan}(k+1))\tan(\operatorname{Arctan}(k))}$$

$$= \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k+1}.$$

Mais par croissance de la fonction arctangente, on a $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k) \geqslant 0$, et $\operatorname{Arctan}(k+1) - \underbrace{\operatorname{Arctan}(k)}_{\geqslant 0} \leqslant \operatorname{Arctan}(k+1) < \frac{\pi}{2}$.

Et donc $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$ est un réel de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{k^2+k+1}$: il est égal à $\operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1}$.

2. D'après la question précédente, on a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k))$$
$$= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(n+1).$$

Détails

On aura reconnu une somme télescopique.

Et donc en passant à la limite, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de l'exercice 5.23

1. Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Alors f est dérivable car somme de composées de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)$$
$$= 0.$$

Donc f est constante.
Or on a $f(0) = \operatorname{Arcsin}(0) - \operatorname{Arctan}(0) = 0 - 0 = 0$.
Et donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Méthode

Puisque f est constante, il suffit de trouver sa valeur en un point pour connaître sa valeur sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2. Considérons la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$.
Alors g est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[,\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0.$$

⚠ Attention !

La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1, donc on prendra bien soin d'exclure ces deux nombres du domaine de dérivabilité de g.

Et donc la fonction g est constante sur $]0,1[$. De plus, pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(0) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Et donc pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$.
Notons que pour $x = 0$, ce résultat est encore valable car $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$ et $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
Et de même pour $x = 1$, car $\operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2-1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.24

1. La fonction Arccos n'étant définie que sur $[-1,1]$, il s'agit de s'assurer que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{1-x}{x+1} \in [-1,1]$.
Mais une rapide étude des variations de $x \mapsto \dfrac{1-x}{x+1}$ prouve que cette fonction est croissante sur $\mathbf{R}$, vaut 1 en 0 et tend vers -1 en $+\infty$.
Donc pour tout $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \dfrac{1-x}{x+1} \leqslant 1$, et donc $f(x)$ est bien défini.
2. La fonction $g : \theta \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est continue sur $[0,\pi[$, strictement croissante[7], et on a $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi} g(\theta) = +\infty$.
Par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[0,\pi[$ sur $\mathbf{R}_+$ et donc tout réel positif possède un unique antécédent par g.
3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et soit θ comme dans la question précédente.
Alors
$$\frac{1-x}{x+1} = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \cos^2(\theta/2)\left(1-\tan^2(\theta/2)\right) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta).$$
Et par conséquent,
$$f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{x+1}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\cos(\theta)\right).$$
Puisque $\theta \in [0,\pi]$, $f(x) = \theta$.
Reste à donner l'expression de θ en fonction de x : pour $x \geqslant 0$ et $\theta \in [0,\pi]$, on a
$$x = \tan^2(\theta/2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tan(\theta/2) \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right).$$
Et donc on a bien $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right)$.

[7] Car composée de deux fonctions qui le sont.

Remarque
Il aurait aussi été possible de constater que f et $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ ont même dérivée, et coïncident en un point (par exemples en 1), et donc sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.25

1. Puisque Arcsin n'est définie que sur $[-1,1]$, pour que $f(x)$ soit défini, il faut que x et $2x$ soient dans $[-1,1]$, ce qui est le cas si et seulement si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Donc $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.
2. On a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$.
3. La fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$ car somme de deux fonctions strictement croissantes.
On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
Puisque f est continue, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathscr{D}$ sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
Et donc $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ possède une unique solution puisque $\dfrac{\pi}{2} \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
4. Soit α l'unique solution de l'équation.
Alors $\operatorname{Arcsin}(2\alpha) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.
Et donc $\sin(\operatorname{Arcsin}(2\alpha)) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)\right) = \cos(\operatorname{Arcsin}(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}$.
Soit encore $2\alpha = \sqrt{1-\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 1-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
Mais $\alpha \geqslant 0$, et donc $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.26

Notons que la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions strictement croissantes.

Puisqu'elle est continue (car dérivable), et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{3\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3\pi}{2}$, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
Et donc il existe une et une seule solution α à l'équation de l'énoncé.
Puisque de plus $f(0) = 0$, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que cette solution est positive strictement.
De même, puisque $g(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) > 2\operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\alpha < 1$.

Ensuite, pour $x > 0$, $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
D'autre part, pour $x \in]0, \alpha]$, on a $0 < \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) < \dfrac{\pi}{2}$ et

$$\begin{aligned}\tan\left(\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1)\right) &= \frac{\tan \operatorname{Arctan}(x-1) + \tan \operatorname{Arctan}(x+1)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(x-1)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(x+1)\right)}\\ &= \frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{2-x^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent[8], $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{2-x^2}\right)$.
Et donc pour $x \in]0, \alpha]$ on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

[8] Il s'agit de deux nombres de $[0, \frac{\pi}{2}[$ de même tangente.

Détails
La fonction arctangente est bijective, et donc si deux réels ont la même image, ils sont égaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.27

1. Posons $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.
Puisque th est à valeurs dans $]-1, 1[$, et que Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, par somme et composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Sa dérivée est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} - \frac{1-\operatorname{th}^2(x)}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)}} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \sqrt{1-\operatorname{th}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \sqrt{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}} = 0.$$

Rappel
Pour tout x réel,
$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

Et par conséquent, f est constante sur $\mathbf{R}$. Mais $f(0) = \operatorname{Arctan}(0) + \operatorname{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.

Remarque : sans passer par les dérivées, une option était de calculer directement $\cos\left(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))\right)$ à l'aide des formules d'addition.
En effet, on sait calculer $\cos^2(\operatorname{Arctan}(u)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(u))}$ et s'en servir pour déterminer les valeurs de $\cos(\operatorname{Arctan}(u))$ et $\sin(\operatorname{Arctan}(u))$.
Et de même, on sait calculer $\cos(\operatorname{Arccos} u) = u$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(u)) = \sqrt{1-u^2}$.
Ici, on trouve que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\left(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))\right) = 0$.
Puisque par ailleurs, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, et que sur cet intervalle, cos ne s'annule qu'en $\frac{\pi}{2}$ on en déduit que $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13} &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{5}{13}\\ &\Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5\\ &\Leftrightarrow 8e^{2x} = 18 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}$.

Et donc on en déduit, en appliquant la question 1 à $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ que

$$\operatorname{Arctan}\frac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 5.28

Il est aisé de constater que (u_n) est strictement croissante, et donc en particulier à valeurs positives.

Comme indiqué, soit $\theta_n = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{u_n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Alors

$$(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)^2 = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta_{n+1}} - 1 = \frac{1 - \sin^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{\cos^2\theta_{n+1}}{\sin^2\theta_{n+1}} = \frac{1}{\tan^2\theta_{n+1}}.$$

Soit encore[9] $\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n}$. Alors

$$\tan\theta_{n+1} = \frac{1}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n} + u_n} = \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta_n} + \frac{1}{\sin\theta_n}} = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + 1}.$$

Mais, pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{\sin(2t)}{\cos(2t)+1} = \frac{2\sin t\cos t}{2\cos^2 t - 1 + 1} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Et en particulier, $\frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n + 1} = \tan\frac{\theta_n}{2}$.

Et alors, en passant à l'arctangente, $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ et donc $\theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} = 2^n \sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}$.

Mais la fonction sin étant dérivable en 0, avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Et par conséquent,

$$\frac{2^n}{u_n} = 2^n \frac{\sin\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}{\frac{\theta_1}{2^{n-1}}}\frac{\theta_1}{2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\theta_1.$$

Mais $\theta_1 = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{u_1} = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On en déduit que $\frac{2^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

[9] Ces deux quantités sont positives, donc on peut enlever les carrés.

Remarque

On peut même aller un peu plus loin, et prouver que ceci est égal à $\pi - 2\operatorname{Arctan}(x)$ (je vous laisse vous inspirer par exemple des exercices précédents si vous souhaitez prouver cette formule).

6 Nombres complexes

6.1 L'ensemble des nombres complexes

6.1.1 Définition

La définition précise de **C** est hors-programme[1], donc nous nous contenterons **d'admettre** qu'il existe un ensemble noté **C**, dont tous les éléments s'écrivent de manière unique sous la forme $a+ib$, $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, sur lequel sont définies deux opérations $+$ et $\times$, satisfaisant aux mêmes règles de calcul que dans **R** et vérifiant $i^2=-1$.
Ainsi, si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ sont deux éléments de **C**, on a

- $z+z'=(a+a')+i(b+b')$
- $z\times z'=(a+ib)(a'+ib')=aa'+i(ab'+a'b)+\underbrace{i^2}_{=-1}bb'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$.

Remarquons tout de suite que $z+z'=z'+z$ et $zz'=z'z$ (on dit alors que l'addition et la multiplication sont commutatives), ce qui découle du fait que la l'addition et la multiplication de réels sont des opérations commutatives.

[1] Les curieux pourront se référer à l'appendice en fin de chapitre.

L'écriture $z=a+ib$, avec $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ est appelée **forme algébrique** du complexe z.
L'unicité de l'écriture sous forme algébrique signifie que $a+ib=a'+ib'$ si et seulement si on a à la fois $\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$.

Autrement dit — Une égalité entre deux complexes signifie qu'on a deux égalités de réels.

Définition 6.1 – Si $z=a+ib\in\mathbf{C}$, alors on appelle :

- **partie réelle de** z le nombre réel a, que l'on note $\mathrm{Re}(z)$
- **partie imaginaire de** z le nombre réel b, que l'on note $\mathrm{Im}(z)$

On a donc $z=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$.

Un nombre complexe est donc entièrement caractérisé par la donnée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.
Si $\mathrm{Im}(z)=0$, alors on confond le complexe z et le réel $\mathrm{Re}(z)$, de sorte qu'on considère que $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.
Un complexe z est donc un réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow z=\mathrm{Re}(z)$. Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur**. On note $i\mathbf{R}$ l'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble $\{ib,\ b\in\mathbf{R}\}$.

Proposition 6.2 : *Si z,z' sont deux nombres complexes, alors on a*

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z').$$

Danger ! — La partie réelle (resp. imaginaire) d'un produit n'est pas le produit des parties réelles (resp. imaginaires).

Démonstration. Immédiat. □

Si $z=a+ib$, avec $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, est un nombre complexe non nul[2] possède un inverse car si on note $z^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$, alors

$$zz^{-1}=(a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+i\left(-\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=1.$$

[2] C'est-à-dire tel que $a\neq 0$ **ou** $b\neq 0$.

Ceci implique notamment que, à l'instar de ce qui se passe dans **R**, si z et z' sont deux complexes alors $zz'=0\Leftrightarrow z=0$ **ou** $z'=0$.

Autrement dit — Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

En effet, supposons que $zz' = 0$, et que z soit non nul. Alors en multipliant $zz' = 0$ par z^{-1}, il vient
$$z^{-1}zz' = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot z' = 0 \Leftrightarrow z' = 0.$$
Ceci nous permet également de définir la division de deux complexes en posant, pour $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = z(z')^{-1}$.

Définition 6.3 – Considérons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Alors tout point M est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y).
Si M a pour coordonnées (x, y), on dit que le complexe $z = x + iy$ est **l'affixe de** M.
On dit également que M est **l'image du complexe** $z = x + iy$.
De même, si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est un vecteur du plan, on dit que le complexe $z = x + iy$ est l'affixe de $\vec{u}$.

Les réels sont donc les complexes dont l'image est située sur l'axe des abscisses, et les imaginaires purs ceux dont l'image est situé sur l'axe des ordonnées.
Remarquons alors qu'il y a une correspondance entre les complexes et les points du plan : à chaque complexe correspond un unique point du plan et vice versa.
Nous dirons bientôt que l'application qui à un point du plan associe son affixe réalise une bijection du plan sur $\mathbf{C}$.

6.1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6.4 – Si $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est un complexe, le complexe $\overline{z} = a - ib$ est appelé **nombre conjugué**[3] de z.
Autrement dit, $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.

[3] Ou plus simple conjugué.

Géométriquement, l'image de $\overline{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

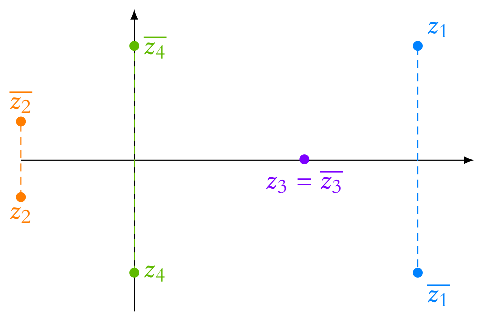


FIGURE 6.1 – Quelques complexes et leurs conjugués (on confond ici un complexe et son image dans le plan).

Remarques. ► Un complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
► De même, $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
► Notons tout de suite que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$. On dit alors que $f : z \mapsto \overline{z}$ est une *involution*, c'est-à-dire une application telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.

Géométriquement
Un point est invariant par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si il est sur cet axe.

Proposition 6.5 : *Si z et z' sont deux complexes, alors*
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$
De plus, si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *et plus généralement,* $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Démonstration. Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sous forme algébrique. Alors
$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + i(b + b')} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \overline{z} + \overline{z'}.$$

De même,

$$\overline{zz'} = (a-ib)(a'-ib') = (aa'-bb') - i(ab'+a'b) = \overline{(aa'-bb') + i(a'b+ab')} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

Et si $z \neq 0$, en utilisant le point précédent, on a

$$\overline{\frac{1}{z}}\,\overline{z} = \overline{\frac{1}{z}z} = \overline{1} = 1.$$

Et donc $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.
Enfin, en combinant les deux formules précédentes,

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \overline{z'}\,\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z'}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}.$$

□

Proposition 6.6 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.*

Démonstration. Si $z = a + ib$ est la forme algébrique de z, $\overline{z} = a - ib$ de sorte que $z + \overline{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
Et $z - \overline{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$. □

6.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 6.7 – Si $z = a + ib \in \mathbf{C}$, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on appelle **module de** z le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Géométriquement, $|z|$ n'est autre que la longueur du segment joignant l'origine O au point d'affixe z.

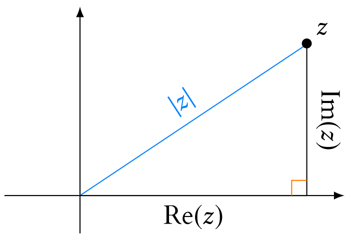


FIGURE 6.2 – Le module d'un complexe. Merci Pythagore !

Remarque
Ceci justifie qu'on utilise la même notation pour le module et la valeur absolue, puisque dans le cas d'un réel, ces deux notations désignent la même quantité.

En particulier, si z est un réel, alors $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = \sqrt{z^2}$ est égal à la valeur absolue de z.

Proposition 6.8 : *Si $z \in \mathbf{C}$, alors $z\overline{z} = |z|^2$.*

Démonstration. C'est un simple calcul, si $z = a + ib$, alors,

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - \underbrace{i^2}_{=-1} b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

□

Corollaire 6.9 – *Si $z \in \mathbf{C}^*$, alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Cette formule s'écrit encore, si $z = a+ib$, sous la forme $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Proposition 6.10 (Propriétés du module) :

1. *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
2. *Si* $z \in \mathbf{C}$, *alors* $|\overline{z}| = |z|$. *De plus, on a* $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
3. *Si* z, z' *sont deux complexes, alors* $|zz'| = |z| \cdot |z'|$ *et si* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

   En particulier, $|-z| = |z|$ *et* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \mathbf{C}$, $z = a+ib$, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.
   Alors $|\mathrm{Re}(z)|^2 = |a|^2 = a^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant |z|^2$.
   Et donc par croissance de la racine carrée, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$.
   De même, $|\mathrm{Im}(z)| = |b| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \leqslant |z|$.

Cas d'égalité

On a alors $|\mathrm{Re}(z)| = |z|$ si et seulement si $b = 0$, soit si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.

2. Si $z = a+ib$, alors $\overline{z} = a - ib$, de sorte que $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.
   De plus, on a $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0$.
   Or, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, donc

$$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$

Géométriquement

Le seul point à distance nulle de l'origine est l'origine.

3. On a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2.$$

   Mais des modules sont toujours positifs, donc en passant à la racine,

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|.$$

   En particulier, pour $z \neq 0$, il vient $\left|\frac{1}{z}\right||z| = \left|z\frac{1}{z}\right| = |1| = 1$.

   Et donc $\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$.

   On en déduit que si $z' \neq 0$,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z\frac{1}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'}\right||z| = \frac{1}{|z'|}|z| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

□

Remarque. Puisque le module d'un produit est le produit des modules, pour $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$, $|z^n| = |z|^n$ (et il faudrait nécessairement une récurrence pour le prouver proprement). Cette formule reste valable si $z \neq 0$ et $n \in \mathbf{Z}$.

En revanche, les choses se passent moins bien pour la somme, et le module d'une somme n'est que rarement la somme des modules. Par exemple, $|1+i| = \sqrt{2} \neq |1| + |i|$.
Plus précisément, on dispose de l'inégalité suivante.

Théorème 6.11 (Inégalité triangulaire) : *Si* z_1, z_2 *sont deux nombres complexes, alors*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si $z_1 = 0$ *ou s'il existe* $\lambda \in \mathbf{R}_+$ *tel que* $z_2 = \lambda z_1$.

Cas d'égalité

Le cas d'égalité signifie que les vecteurs d'affixes z_1 et z_2 sont colinéaires et de même sens.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |_2|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2\\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)| + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2\,|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2\\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2\,.
\end{aligned}$$

Donc $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
De plus il y a égalité si et seulement si chacune des inégalités ci-dessus est une égalité, soit si et seulement si $|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)| = \mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)$ et $|\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)| = |\overline{z_1}z_2|$.
La première condition équivaut au fait que $\mathrm{Re}\,(\overline{z_1}z_2)$ soit positif, et la seconde au fait que $\overline{z_1}z_2$ soit réel.
Donc au final, il y a égalité si et seulement si $\overline{z_1}z_2 \in \mathbf{R}_+$.

Nous tenons donc une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité triangulaire soit une égalité, mais celle-ci n'est pas forcément des plus agréables, essayons de la transformer un peu.
Il est clair que si $z_1 = 0$, alors l'inégalité triangulaire est une égalité.
Si $z_1 \neq 0$, et qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, alors il existe $\overline{z_1}z_2 \in \mathbf{R}_+$, si bien que $z_2 = \dfrac{1}{|z_1|^2}\overline{z_1}z_1z_2 = \underbrace{\dfrac{\overline{z_1}z_2}{|z_1|^2}}_{\in\mathbf{R}_+} z_1$ est bien un multiple positif de z_1.
Et inversement, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$, alors $\overline{z_1}z_2 = \lambda|z_1|^2 \in \mathbf{R}_+$.
Ceci prouve bien qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $z_1 = 0$ ou qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$. □

Corollaire 6.12 – *Quels que soient les complexes z et z', on a $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$.*

Démonstration. La preuve est la même que dans le cas réel, en exploitant par exemple $|z| = |(z + z') - z'| \leqslant |z + z'| + |z'|$. □

Notons qu'en utilisant à la fois l'inégalité triangulaire et l'inégalité triangulaire renversée, et en changeant z' en son opposé, on arrive à

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Corollaire 6.13 – *Si $z_1, \dots, z_n$ sont des complexes, alors $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n z_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n |z_i|$.*
Si on suppose de plus que $z_1 \neq 0$, alors cette inégalité est une égalité si et seulement si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Remarque
Si l'un au moins des z_j est non nul, alors quitte à les re-numéroter, on peut supposer que $z_1 \neq 0$. Sauf si tous sont nuls, mais alors le résultat est évident.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, comme pour le cas réel. Si $n = 1$ c'est évident, et si $n = 2$, c'est le théorème précédent.
Supposons donc que pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n z_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n |z_i|$ et soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ $n + 1$ nombres complexes. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right|\\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| && \text{C'est le théorème précédent.}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| && \text{Hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tous complexes $z_1, \dots, z_n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$. Pour le cas d'égalité lorsque $z_1 \neq 0$, il s'agit de remarquer qu'il y a égalité, si et seulement si toutes les inégalités qui précèdent sont des égalités. Donc si et seulement si

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \text{ et } \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Par hypothèse de récurrence, la seconde égalité implique que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un réel positif λ_j tel que $z_j = \lambda_j z_1$.
Et par l'inégalité triangulaire, il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \lambda(z_1 + \cdots + z_n) = \underbrace{\lambda(1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)}_{\in \mathbf{R}_+} z_1$.

Inversement[4], si pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $z_j = \lambda_j z_1$, avec $\lambda_j \in \mathbf{R}_+$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_1\right| = |z_1| \left|\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i}_{\in \mathbf{R}_+}\right| = |z_1| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i |z_1| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|.$$

[4] À ce stade, nous avons prouvé que s'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, **alors** les z_i sont tous des multiples positifs de z_1. La réciproque reste à faire si on veut bien montrer une équivalence.

Et donc l'inégalité triangulaire est une égalité. □

6.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Souvenons-nous qu'il est possible d'identifier les nombres complexes aux points du plan. Le plus simple pour caractériser un point du plan est de se donner son abscisse et son ordonnée, ce qui en termes de nombres complexes, correspond à la partie réelle et la partie imaginaire. C'est ce que nous avons appelé la forme algébrique d'un complexe. Elle est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, mais les calculs de produits ou de quotients sont plus désagréables.

Dans le chapitre 5, nous avons mentionné qu'il existait un autre moyen de repérer un point du plan, en se donnant le rayon d'un cercle centré en $(0, 0)$ (donc un réel strictement positif) et un angle. Il s'agit des coordonnées polaires utilisées en physique. La caractérisation d'un complexe par un rayon et un angle est appelée écriture exponentielle, et nous allons voir qu'elle est particulièrement efficace pour le calcul de produits.

6.2.1 Groupe des nombres complexes de module 1

Définition 6.14 – On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| = 1\}.$$

Autrement dit
$\mathbf{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Remarque. Si z est un complexe non nul, alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbf{U}$.
En effet, $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{1}{|z|}|z| = 1$.

Exemples 6.15

- $1, i, -i$ et -1 sont dans $\mathbf{U}$.
Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$, $1 + i \notin \mathbf{U}$ mais $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \in \mathbf{U}$.
- Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. Alors $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $z \in \mathbf{U}$.

En effet, on a $\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2 - z + \overline{z} - 1}{|z-1|^2} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} - i\frac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|z-1|^2}$.
Et donc ce nombre est imaginaire pur si et seulement si

$$|z|^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}.$$

Les propriétés qui suivent expliquent qu'on appelle $\mathbf{U}$ un groupe, notion que nous rencontrerons bientôt dans un cadre plus général.

Proposition 6.16 : $1 \in \mathbf{U}$ *et pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbf{U}$, $z_1z_2 \in \mathbf{U}$ *et* $\frac{1}{z_1} \in \mathbf{U}$.

Démonstration. Cela découle directement des propriétés du module. □

Proposition 6.17 : *Si* $z \in \mathbf{C}$ *est non nul, alors* $z \in \mathbf{U}$ *si et seulement si* $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

En particulier
L'inverse de i est son conjugué : $-i$.

Démonstration. Nous savons que $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et donc $\frac{1}{z} = \overline{z} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$. □

6.2.2 Notation $e^{i\theta}$

Proposition 6.18 : *Soit* $z \in \mathbf{U}$. *Alors il existe* $\theta \in \mathbf{R}$ *tel que* $z = \cos\theta + i\sin\theta$.
Un tel réel θ *est appelé un argument de* z.

Terminologie
Il existe une infinité de tels réels θ, donc on veillera bien à dire **un** argument, et pas l'argument.

Démonstration. Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbf{U}$. Alors $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.
Autrement dit, (a, b) appartient au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Mais nous avons vu précédemment[5] qu'alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique modulo 2π, tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
Et donc $z = \cos\theta + i\sin\theta$. □

[5] C'est ce que nous avons appelé la paramétrisation du cercle trigonométrique.

Définition 6.19 – Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

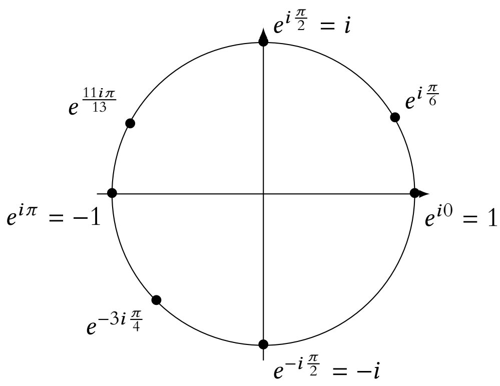
Remarques. ▶ Notons qu'en particulier, $e^{i0} = 1$. Et plus généralement, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
On a également $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-1 = e^{i\pi}$.
Cette dernière formule, souvent écrite $e^{i\pi} + 1 = 0$, est nommée identité d'Euler, et est souvent décrite comme «l'une des plus belles formules mathématiques» du fait qu'elle relie cinq nombres d'importance capitale : $0, 1, i, e$ et π.
▶ Avec cette notation, $\mathbf{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbf{R}\}$.

Plus belle ?
On pourrait discute des heures pour décider si c'est ou non **la** plus belle des formules, mais il faut bien reconnaître qu'elle est assez fascinante !

Graphiquement, le point M_θ d'affixe $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}\right) = \theta$.

⚠ Pour l'instant il ne s'agit que d'une notation, et a priori, rien ne justifie qu'il existe un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que nous utilisons en analyse[6].
Il y a bien un lien, et il existe une formule qui permet de définir de la même manière $e^x, x \in \mathbf{R}$ et $e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}$, et vous apprendrez tout cela quand vous serez plus grands[7].
En particulier, vous noterez bien que je n'ai à aucun moment défini ce que serait le logarithme d'un nombre complexe,
Pour l'instant, contentons-nous de constater que $e^{i\theta}$ partage bien des propriétés avec l'exponentielle réelle dont nous avons l'habitude :

[6] La bijection réciproque du logarithme.
[7] L'an prochain !



Proposition 6.20 : *Soient $\theta, \theta_1, \theta_2$ des réels. Alors*

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. *Et donc,* $e^{i\theta} \in \mathbf{U}$
2. $\forall k \in \mathbf{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
3. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$
4. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
5. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, *donc* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Démonstration. 1. On a

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1.$$

2. Pour $k \in \mathbf{Z}$, on a, par 2π-périodicité des fonctions cos et sin

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}.$$

3. Nous savons qu'à tout point du cercle trigonométrique correspond un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$. Autrement dit, pour $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi, \pi]$, $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$.
Mais il existe un (unique) entier k_1 tel que $\theta_1 + 2k_1\pi \in]-\pi, \pi]$ et de même il existe un unique entier k_2 tel que $\theta_2 + 2k_2\pi \in]-\pi, \pi]$.
Et alors, si $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$, alors $e^{i\theta_1} = e^{i(\theta_1+2k_1\pi)} = e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$ de sorte que $\theta_1 + 2k_1\pi = \theta_2 + 2k_2\pi$, et donc $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.
La réciproque est évidente d'après le point précédent.
4. Il s'agit d'utiliser les formules de trigonométrie vues au chapitre précédent :

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

> **Astuce**
> Si on utilise ici les formules d'addition pour prouver le résultat, c'est un bon moyen de les retrouver si on les oublie : $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ est la partie réelle de $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.

5. On a $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = 1$. Et donc $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
Et puisque $e^{i\theta}$ est de module 1, son inverse est égal à son conjugué, de sorte que $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
6. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

□

6.2.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe, argument(s)

Proposition 6.21 : *Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ tel que*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

On a alors $r = |z|$, et si $z \neq 0$, alors θ est unique modulo 2π, autrement dit si pour $(r_1, r_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$, on a $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$ alors $r_1 = r_2 = |z|$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \quad [2\pi]$.

Démonstration. Si $z = 0$, alors pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $z = 0e^{i\theta}$.
Et si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc dans $\mathbf{U}$.
Par conséquent, il existe θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \underbrace{|z|}_{\in\mathbf{R}_+} e^{i\theta}$.

Si $z \in \mathbf{C}$ s'écrit $z = re^{i\theta}$, alors $|z| = |r| \underbrace{\left|e^{i\theta}\right|}_{=1} = |r|$.

Et donc pour $z \neq 0$, si $z = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2}$, alors $r_1 = r_2 = |z| \neq 0$, de sorte que $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ et donc $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$. □

L'écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbf{R}_+$ est appelée **forme exponentielle** de z.
Notons que cette écriture est particulièrement bien adaptée au calcul de produits, puisque si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, alors $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

⚠ Méfions tout de même d'une chose : r doit être positif, et pas seulement réel !
Par exemple, $z = -2e^{i\pi/6}$ n'est pas une forme exponentielle, car son module ne peut valoir -2.
En revanche, en notant que $-1 = e^{i\pi}$, alors $z = 2e^{7i\pi/6}$, qui est bien une écriture sous forme exponentielle, avec 2 pour module.

Méthode
Bien qu'il soit possible de calculer des produits/quotients de complexes sous forme algébrique, on privilégiera autant que possible la forme exponentielle.

Définition 6.22 – Soit $z \in \mathbf{C}$. On appelle **argument** de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
Si z est non nul, et possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
En revanche, $z \in \mathbf{C}^*$ possède un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, qu'on appelle **argument principal de** z, et qu'on note $\arg(z)$.

Autrement dit
Deux arguments de z sont congrus modulo 2π.

Remarques. ▸ Géométriquement, si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors $\arg(z)$ est l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Puisque $|z|$ est la distance OM, définir un complexe par sa forme exponentielle $re^{i\theta}$, c'est définir M par sa distance à l'origine et l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
▸ Et de même, si $\vec{u}$ a pour affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = \|\vec{u}\|$ et $\theta \equiv \left(\vec{i}, \vec{u}\right) \quad [2\pi]$.
▸ Un complexe non nul z est un réel positif si et seulement si $\arg(z) = 0$ et c'est un réel négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi$.
Enfin, $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

Exemples 6.23

▸ Soit $z = 1 + i$. Alors $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Et alors

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, et même l'argument principal de z.

▸ Soit $z = 2 - 3i$. Alors $|z| = \sqrt{13}$.

Terminologie
Avez-vous bien saisi la subtilité ? <u>Un</u> argument et pas <u>l</u>'argument, mais si on parle d'argument principal, alors il y en a un seul, qu'on appelle donc <u>l</u>'argument principal.

Et donc $z = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} - i\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
Notons $\theta = \arg(z)$.
On a alors $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Donc $\theta = \operatorname{Arccos}\frac{2}{\sqrt{13}}$ ou $\theta = -\operatorname{Arccos}\frac{2}{\sqrt{13}}$.
Mais puisque $\sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} \leqslant 0$, $\theta \in]-\pi, 0]$.
Et donc $\theta = -\operatorname{Arccos}\frac{2}{\sqrt{13}}$.
De même, nous aurions pu remarquer que $\tan\theta = \frac{|z|\sin\theta}{|z|\cos\theta} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{-3}{2}$.
Puisque $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\cos\theta > 0$ et donc $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Et donc $\theta = \operatorname{Arctan}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\operatorname{Arctan}\frac{3}{2}$.
Exercice : prouver que si $z = a + ib \in \mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}$, alors

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}\frac{b}{a} - \pi & \text{si } a < 0 \textbf{ et } b \leqslant 0 \\ \operatorname{Arctan}\frac{b}{a} + \pi & \text{si } a < 0 \textbf{ et } b < 0 \end{cases}$$

Remarque
Notons au passage que nous venons de prouver une égalité non triviale entre un arccosinus et une arctangente.

Proposition 6.24 : *Soient z, z' deux complexes non nuls. Alors*
1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$
3. $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ [2\pi]$

Démonstration.
1. Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, alors $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, de sorte que $\theta+\theta' = \arg(z)+\arg(z')$ est un argument de zz'. Et donc est congru à $\arg(zz')$ modulo 2π.
2. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Et donc $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$. Notons que sauf si $\theta = \pi$, $-\arg(z)$ est dans $]-\pi, \pi]$ et donc est égal à $\arg(\overline{z})$.
3. Si $n \geqslant 0$, la preuve se fait par récurrence en utilisant le point 1.
Et si $n < 0$, il suffit de noter que $z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$, avec $-n \geqslant 0$. Et donc
$$\arg(z^n) \equiv -n\arg\frac{1}{z} \equiv n\arg(z) \quad [2\pi].$$

□

Égal ou congru ?
Si
$$\arg(z) + \arg(z') \in]-\pi, \pi]$$
alors c'est l'argument principal de zz', mais sinon il faut ajouter $\pm 2\pi$ à $\theta + \theta'$ pour tomber dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Revenons sur le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si $z_1 \neq 0$ alors nous avons prouvé que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
Mais alors, si $z_1 = re^{i\theta}$, il vient donc $z_2 = \underbrace{\lambda r}_{\in\mathbf{R}_+} e^{i\theta_1}$.
Et donc z_1 et z_2 ont même argument θ_1.
Et inversement, si z_1 et z_2 ont même argument θ, $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$ et donc en posant $\lambda = \frac{|z_2|}{|z_1|} \in \mathbf{R}_+$, on a $z_2 = \lambda z_1$, et donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire.
On retiendra donc que $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si $z_1 z_2 = 0$, ou si $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

6.2.4 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition 6.25 (Formules d'Euler) : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors*
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. C'est un simple calcul : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = 2\cos\theta$ et de même

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i\,\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = 2i\sin\theta.$$

□

Exemples 6.26 **Factorisation par l'angle moitié**

Comme nous avions factorisé les sommes d'exponentielles réelles $e^a \pm e^b$ par $e^{(a+b)/2}$, il est souvent judicieux de factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$ par $e^{i(a+b)/2}$.
Par exemple, on a

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2} - e^{i(b-a)/2}\right) = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2} - e^{-i(a-b)/2}\right) = 2i\sin\frac{a-b}{2}e^{i(a+b)/2}.$$

Ceci permet notamment d'obtenir à peu de frais le module et un argument de $e^{ia} \pm e^{ib}$.

Cette astuce permet notamment de retrouver certaines formules de trigonométrie : si θ, θ' sont deux réels, alors $\cos\theta + \cos\theta'$ est la partie réelle de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$. Mais

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{\frac{i\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Mais la partie réelle du membre de droite est $2\cos\dfrac{\theta+\theta'}{2}\cos\dfrac{\theta-\theta'}{2}$ et donc

$$\cos\theta + \cos\theta' = 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}.$$

Exemples 6.27 **Application à la trigonométrie : linéarisation**

► Linéarisons $\cos^4(\theta)$, c'est-à-dire essayons de l'écrire comme somme de fonctions de la forme $\theta \mapsto \cos(k\theta)$ ou $\theta \mapsto \sin(k\theta)$. On a

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4 + 4\left(e^{i\theta}\right)^3 e^{-i\theta} + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2 + 4e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right) && \text{Formule du binôme.} \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(2\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2} + 8\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} + 6\right) \\
&= \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Cette écriture est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à déterminer une primitive de $\theta \mapsto \cos^4\theta$. Une telle primitive est par exemple

$$\theta \mapsto \frac{1}{32}\sin(4\theta) + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{3\theta}{8}.$$

► De même, linéarisons $\sin^3\theta$:

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta).$$

Proposition 6.28 (Formule de Moivre) : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Alors*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Démonstration.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

□

6.2.5 Exponentielle complexe

Définition 6.29 (Exponentielle complexe) – Si $z = a+ib$, on note e^z le complexe défini par $e^z = e^a e^{ib}$.

Remarque. Notons que dans cette définition, e^a désigne l'exponentielle du nombre réel a, c'est-à-dire celle dont nous avons l'habitude[8] et e^{ib} désigne $\cos b + i\sin b$.
L'écriture $e^z = e^a e^{ib}$ est donc la forme exponentielle de e^z, avec $|e^z| = e^a = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et où un argument de e^z est $\mathrm{Im}(z)$. Une conséquence immédiate en est que $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\ [2\pi]$.
Donc si et seulement si z et z' diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$: $e^z = e^{z'}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z' = z + 2ik\pi$.

[8] La bijection réciproque de ln si vous préférez.

Proposition 6.30 :

1. *L'application $z \mapsto e^z$ est $2i\pi$-périodique : pour tout $z \in \mathbf{C}$, $e^{z+2i\pi} = e^z$.*
2. *$\forall (z,z') \in \mathbf{C}^2$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.*

Démonstration. 1. Voir la remarque suivant la définition de l'exponentielle.

2. On a, par linéarité des parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{\mathrm{Re}(z+z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z+z')} = e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Im}(z')} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z')} \\ &= e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \times e^{\mathrm{Re}(z')} e^{i\,\mathrm{Im}(z')} = e^z e^{z'}. \end{aligned}$$

□

Détails

Nous utilisons là le fait que nous savons déjà que la formule annoncée est valable pour $z, z' \in \mathbf{R}$ (propriété de l'exponentielle réelle), mais aussi pour $z, z' \in i\mathbf{R}$ (c'est la proposition 6.20).

⚠ On ne parlera pas de logarithme complexe, et je ne veux voir dans vos copies que des logarithmes de nombres réels strictement positifs.
Il est vrai que tout complexe non nul possède un antécédent par $z \mapsto e^z$, car si $z = re^{i\theta}$, alors $z = e^{\ln r} e^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$.
En revanche il n'y a pas unicité d'un tel antécédent (ils sont même en nombre infini par $2i\pi$-périodicité), et donc il n'y en a pas un qu'on aurait, plus que les autres, envie d'appeler le logarithme.

6.3 Équations polynomiales dans C

L'un des principaux inconvénients[9] de $\mathbf{R}$ est l'absence de racine carrée pour les nombres négatifs : si $a \in \mathbf{R}_-$, l'équation $x^2 = a$ ne possède pas de solution réelle.
En revanche, elle possède deux solutions complexes, qui sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.
Mieux, nous allons voir dans la suite que tout nombre complexe possède des racines carrées, et que plus généralement, toute équation polynomiale de degré 2 à coefficients complexes possède des solutions complexes.

[9] Et c'est d'ailleurs historiquement ce qui a conduit à l'introduction des complexes.

Mieux

Nous verrons un peu plus tard que toute équation polynomiale, quel que soit son degré, admet des solutions dans $\mathbf{C}$.

6.3.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 6.31 – Si $a \in \mathbf{C}$, et si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $z^2 = a$, on dit que z est une racine carrée de a.

⚠ On prendra bien garde à dire **une** racine carrée de z et non **la** racine carrée de z.
En effet, si z est une racine carrée de a, alors $-z$ est aussi une racine carrée de a car $(-z)^2 = (-1)^2 z^2 = z^2 = a$.
Il n'y a pas de raison de préférer l'une à l'autre, et donc aucune des deux ne mérite d'être **la** racine carrée de a.
En revanche, si z est un réel positif, alors des deux nombres $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, un seul des deux est positif, et c'est alors celui qu'on appelle la racine carrée de a.

Danger ! On n'utilisera jamais les notations $\sqrt{z}$ ou $z^{\frac{1}{2}}$ pour un complexe z, et on les réservera au cas où z est un réel positif.

Exemples 6.32

- Les deux nombres i et $-i$ sont des racines carrées de -1.
- On a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Et donc $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine carrée de i.
Son opposé est donc une autre racine carrée de i.

Proposition 6.33 : *Soit $a \in \mathbf{C}$. Alors a possède des racines carrées.*
Plus précisément : la seule racine carrée de 0 est 0, et si $a = re^{i\theta}$ est non nul, alors z possède exactement deux racines carrées qui sont $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -z_1$.

Démonstration. Il est évident que $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
Si $a \neq 0$, considérons l'écriture exponentielle de a : $a = re^{i\theta}$.
Posons alors $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, de sorte que $z_1^2 = re^{i\theta} = a$.
On a alors, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$z^2 = a \Leftrightarrow z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z^2 - z_1^2 = 0 \Leftrightarrow (z - z_1)(z + z_1) = 0.$$

Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $z^2 = a \Leftrightarrow z = z_1$ ou $z = -z_1$. □

Notons que ce qui précède n'est vraiment utile que si on connaît la forme exponentielle[10] de a, ce qui n'est pas toujours le cas.
Si on ne dispose que de la forme algébrique de a : $a = c + id$, cherchons les racines carrées de a également sous forme algébrique : $z = C + iD$.
On a alors $z^2 = (C^2 - D^2) + 2iCD$. Pour déterminer C et D tels que $z^2 = a$, on utilise alors :

- l'égalité des parties réelles : $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}(a) \Leftrightarrow C^2 - D^2 = c$
- l'égalité des parties imaginaires : $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(a) \Leftrightarrow 2CD = d$
- l'égalité des modules $|z|^2 = |a| \Leftrightarrow C^2 + D^2 = \sqrt{c^2 + d^2}$.

En ajoutant et soustrayant la première et la dernière équation, on obtient les valeurs de C^2 et D^2. Ce qui nous donne 2 valeurs pour C et 2 valeurs pour D, soit 4 couples (C, D) possibles.
Mais CD doit être du signe de d, ce qui ne nous laisse donc plus que deux couples (C, D) possibles, qui sont donc les deux racines carrées de a.

[10] Et donc un argument.

Exemple 6.34

Cherchons les racines carrées de $-8+6i$, sous la forme $z=a+ib$.
On a $z^2=a^2-b^2+2iab$.

On a donc $z^2=-8+6i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ a^2+b^2=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10 \\ 2ab=6 \end{cases}$

En ajoutant les deux premières équations, il vient $a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$ et en soustrayant les deux premières équations, il vient $b^2=9 \Leftrightarrow b=\pm 3$.
Enfin, on a $ab=3$, et donc a et b doivent être de même signe.
Ainsi, $z_1=1+3i$ et $z_2=-1-3i$ sont les deux racines complexes de $-8+6i$.

Remarque
Si on oublie l'égalité des modules, il ne reste qu'un système de deux équations à deux inconnues, qui, bien que correct, est bien plus difficile à résoudre.

6.3.2 Équations de degré 2 à coefficients complexes

Théorème 6.35 : *Soient a,b,c trois complexes avec $a\neq 0$, soit $\Delta=b^2-4ac$, et soit δ une racine carrée de Δ.*

1. *Si $\Delta=0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ possède une unique solution dans $\mathbb{C}$ qui est $z=-\dfrac{b}{2a}$.*
   Dans ce cas, on a la factorisation suivante :
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2.$$
2. *Si $\Delta\neq 0$, alors l'équation $az^2+bz+c=0$ possède deux solutions complexes qui sont $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$. Dans ce cas,*
$$\forall z\in\mathbb{C},\ az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

Terminologie
Δ est appelé le **discriminant** de l'équation.

Terminologie
On dit alors que $-\frac{b}{2a}$ est une racine **double** du polynôme az^2+bz+c.

Démonstration. Notons qu'on a toujours

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right). \qquad (\star)\end{aligned}$$

Méthode
Cette étape est la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2, qu'il est bon de savoir refaire. Rappelons que la méthode est simple : il s'agit de «trouver» le bon λ de sorte que les termes en z^2 et en z soient ceux qui apparaissent en développant $(z+\lambda)^2$.

Identité remarquable.

Et donc

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}=0 \text{ ou } z=z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b-\delta}{2a}.\end{aligned}$$

Si $\Delta=0$, alors ces deux nombres sont confondus, et sinon, ils sont distincts.
Dans les deux cas, les factorisations annoncées découlent directement de $(\star)$. □

Remarque. Dans les deux cas, nous avons factorisé az^2+bz+c en produit de deux termes de degré 1, éventuellement confondus dans le cas où $\Delta=0$.

On dit alors que $-\frac{b}{2a}$ est une racine double de $az^2 + bz + c$ car le facteur $z + \frac{b}{2a}$ apparaît deux fois dans la factorisation de $az^2 + bz + c$.

Exemple 6.36

Résolvons l'équation $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0$.
On a $\Delta = (-3 + i)^2 - 4(4 - 3i) = 8 - 6i - 16 + 12i = -8 + 6i$.
Nous avons alors prouvé précédemment qu'on pouvait prendre $\delta = 1 + 3i$.
Et donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{3 - i + \delta}{2} = 2 + i \text{ et } z_2 = \frac{3 - i - \delta}{2} = 1 - 2i.$$

Choix de δ
Il y a deux choix possibles pour δ, mais bien entendu, ces deux choix conduisent aux mêmes solutions.

Corollaire 6.37 – *Si a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ possède :*

- *deux solutions réelles qui sont $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$*
- *une unique solution $z = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$*
- *deux solutions complexes conjuguées si $\Delta < 0$, qui sont*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration. Cela découle du théorème précédent, en notant que $\Delta \in \mathbf{R}$.

- si $\Delta = 0$, il n'y a rien à dire.
- Si $\Delta > 0$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$, et les deux solutions obtenues sont alors des réels.
- Si $\Delta < 0$, alors on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, et on remarque alors que les deux solutions sont conjuguées, puisqu'elles ont même partie réelle $\frac{-b}{2a}$.

□

Exemple 6.38 **Un cas important**

Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Intéressons nous à l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
Alors $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = -4\sin^2\theta < 0$.
On peut donc prendre $\delta = 2i\sin\theta$. Donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\theta}.$$

Exercice
Pour quelle(s) valeurs(s) de θ ces solutions sont-elles réelles ?

Proposition 6.39 (Relations racines-coefficients) : *Soient a, b, c trois complexes avec $a \neq 0$, et soient z_1, z_2 les deux solutions, éventuellement confondues[11] de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors*

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} \text{ et } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}.$$

[11] Si $\Delta = 0$.

Démonstration. Nous savons déjà que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
En développant, il vient donc

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2\right) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2.$$

Pour $z = 0$, il vient donc $c = az_1z_2 \Leftrightarrow z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.
Et pour $z = 1$, on obtient

$$a + b + c = a - a(z_1 + z_2) + az_1z_2 \Leftrightarrow b = -a(z_1 + z_2).$$

□

Remarque
Plutôt que de prendre successivement $z = 0$ et $z = 1$, on pourrait arguer que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Mais ce résultat, qui a été admis en terminale, sera prouvé un peu plus tard dans l'année.

Ces relations, liant les racines du polynôme $az^2 + bz + c$ à ses coefficients seront largement généralisées plus tard dans l'année.
Une application classique est la résolution d'un certain type de systèmes non linéaires de deux équations à deux inconnues :

Exemple 6.40 Système somme-produit

Soit le système $\begin{cases} xy = -1 + i \\ x + y = 1 + 2i \end{cases}$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{C}^2$.
Si x et y sont les deux solutions[12] de $z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + i) = 0$, alors par la proposition précédente, (x, y) est solution du système.
Inversement, si (x, y) est une solution du système, alors x et y sont les seules solutions de

$$(z - x)(z - y) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (x + y)z + xy = 0 \Leftrightarrow z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + y) = 0.$$

Autrement dit, nous venons de prouver que (x, y) est solution du système si et seulement si x et y sont les solutions de $z^2 - (1 + 2i))z + (-1 + i) = 0$.
Le discriminant de cette dernière équation est alors $\Delta = (1 + 2i)^2 + 4(1 - i) = 1$, et donc les deux solutions de cette équation sont $x_1 = \dfrac{1 + 2i - 1}{2} = i$ et $x_2 = 1 + i$.
Et donc les deux solutions du système sont $(i, 1 + i)$ et $(1 + i, i)$.

[12] Éventuellement confondues.

Sur le même principe, on prouve que les solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les couples formés des deux solutions[13] de $z^2 - sz + p = 0$.

[13] Confondues si $\Delta = 0$.

Remarques. ► Il existe une manière plus synthétique[14] de dire que «(x, y) est solution du système si et seulement si x et y sont les deux solutions (éventuellement confondues) de $z^2 - sz + p = 0$» qui est la suivante :
«Un couple (x, y) est solution de $\begin{cases} x + y = z \\ xy = p \end{cases}$ si et seulement si $\{x, y\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.» ► Un moyen simple de retrouver l'équation, sans forcément faire intervenir les relations racines coefficients est de procéder par substitution : si on a à la fois $xy = p$ et $x + y = s \Leftrightarrow y = s - x$, alors $p = x(s - x) \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$.

[14] Je dirais même plus esthétique.

6.3.3 Racines $n^{\text{èmes}}$

Définition 6.41 – Soit $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On dit que z est une **racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité** si $z^n = 1$.
On note $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C},\ z^n = 1\}$.

Exemples 6.42

► $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, donc i est une racine $4^{\text{ème}}$ de l'unité.
C'est aussi une racine $8^{\text{ème}}$ de l'unité puisque $i^8 = \left(i^4\right)^2 = 1^2 = 1$.
► $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ est une racine $12^{\text{ème}}$ de l'unité, puisque $\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{12} = e^{10i\pi} = 1$.

Plus généralement
Si $z \in \mathbf{U}_n$ et si n divise m, alors $z \in \mathbf{U}_m$.

Notons tout de suite que si $z \in \mathbf{U}_n$, alors $|z^n| = 1 \Leftrightarrow |z|^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.
Et donc que $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$.

Proposition 6.43 (Caractérisation des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) : *Soit $z \in \mathbf{C}$, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $z \in \mathbf{U}_n$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.*

Démonstration. Notons $z = re^{i\theta}$ la forme exponentielle de z. Alors $z^n = r^n e^{in\theta}$.

Et donc $z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$

En particulier, la seconde condition est équivalente au fait qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Et donc $z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

□

N'en déduisons pas trop vite qu'il existe une infinité de racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité : on a $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \quad [2\pi]$.

En revanche, si k et k' sont dans $[\![0, n-1]\!]$, alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$ si et seulement si

$$\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \frac{k}{n} \equiv \frac{k'}{n} \quad [1] \Leftrightarrow k \equiv k' \quad [n] \Leftrightarrow k = k'.$$

Et donc nous pouvons raffiner la proposition précédente de la manière suivante :

Corollaire 6.44 – *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe exactement n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, qui sont $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$.*
Autrement dit, $\mathbf{U}_n = \{\zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Géométriquement, les éléments de $\mathbf{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et qui passe par 1.

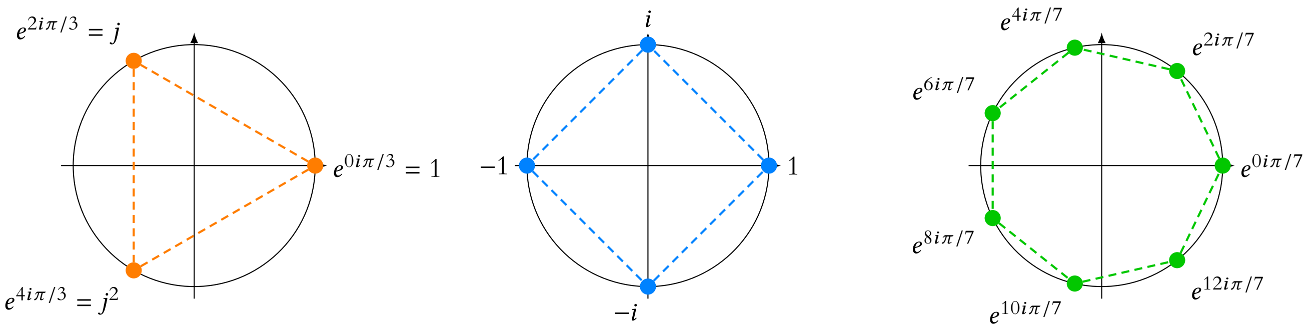


Figure 6.3 – Les éléments de $\mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4$ et $\mathbf{U}_7$.

Exemple 6.45 **Racines cubiques de l'unité**

Les éléments de $\mathbf{U}_3$, c'est-à-dire les racines cubiques de l'unité sont 1, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$.

On a alors $e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, que l'on note généralement j.

Et alors $e^{4i\pi/3} = \overline{j} = j^2$. Autrement dit, $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \overline{j}\}$.

Physiciens !

Les physiciens ont l'habitude de noter j ce que l'on note i (car i désigne déjà l'intensité). À ma connaissance, ils n'ont pas de notation standard pour ce que nous appellerons j.

Proposition 6.46 : *Soit $n \geqslant 2$. Alors* $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega = 0$.

Autrement dit, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$.

Démonstration. Le passage de la première somme à la seconde est immédiat puisque $\mathbf{U}_n = \{\zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Mais on a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta)^k = \frac{1-(\zeta)^n}{1-\zeta} = \frac{1-1}{1-\zeta} = 0.$$

□

Détails
Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\zeta \neq 1$.

Proposition 6.47 : *Soit $a \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :*

1. *si $a = re^{i\theta}$, avec $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, alors $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de a.*
2. *a possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$. Si a_0 est l'une d'entre elles, alors les racines $n^{\text{èmes}}$ de a sont les $a_0 \times \omega$, $\omega \in \mathbf{U}_n$.*

Et si $a = 0$?
Si $a = 0$, il est évident que 0 est l'unique solution de $z^n = a$.

Démonstration. 1) Il est immédiat que que $\left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta} = a$.
2) Soit a_0 une[15] racine $n^{\text{ème}}$ de a. Alors pour $z \in \mathbf{C}$, on a

$$z^n = a \Leftrightarrow z^n = a_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a_0}\right)^n = 1.$$

Donc z est une racine $n^{\text{ème}}$ de a si et seulement si $\frac{z}{b}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité. Soit si et seulement si il existe $\omega \in \mathbf{U}_n$ tel que $z = a_0\omega$.
Puisqu'il existe exactement n racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, on obtient ainsi n racines $n^{\text{èmes}}$ de a. □

[15] Et il en existe par le point 1).

⚠ La notation $\sqrt[n]{z}$ est totalement interdite si z n'est pas un réel[16], puisqu'on ne saurait pas laquelle des n racines de z cela désigne.

[16] Et même un réel positif dans le cas où n est pair.

Exemple 6.48

Cherchons les racines $5^{\text{èmes}}$ de $a = 9 - i3\sqrt{3}$.
On a $|a| = \sqrt{81+27} = \sqrt{108} = \sqrt{4 \times 27} = 6\sqrt{3}$.
Donc $a = 6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$.

Et donc les racines $5^{\text{èmes}}$ de a sont les $\sqrt[5]{6\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0, 4]\!]$.

6.4 Application des complexes à l'étude de transformations géométriques

Dans cette partie, on munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On rappelle qu'alors à tout point du plan correspond un unique complexe et vice-versa.
Alors à toute transformation du plan correspond une unique application $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. En effet, si $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une transformation géométrique[17] du plan, on peut lui associer la fonction de $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui à $z \in \mathbf{C}$ associe l'affixe du point $f(M)$, où M a pour affixe z.
Et inversement, à $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, on peut associer la transformation qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $g(z)$.

[17] Une rotation, une symétrie axiale ou centrale, une translation, etc

6.4.1 Interprétation du module et de l'argument

L'interprétation d'un module comme une distance est bien connue, mais reprouvons la :

Proposition 6.49 : *Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $|z_A - z_B|$ est la distance AB.*

Démonstration. Notons $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ les formes algébriques respectives de z_A et z_B.
Alors $|z_A - z_B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = AB$. □

Proposition 6.50 : *Soient A, B, C, D quatre points du plan d'affixes respectives a, b, c et d. Alors tout argument du complexe $\dfrac{b-a}{d-c}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$.*

Démonstration. Notons $b - a = r_1 e^{i\theta_1}$ et $d - c = r_2 e^{i\theta_2}$.
Nous savons alors que $\theta_1 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$.
Or, $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{b-a}{d-c} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.
Et donc $\theta_1 - \theta_2 \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \vec{i}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$.
Et puisque tous les autre arguments de $\dfrac{b-a}{d-c}$ sont congrus à $\theta_1 - \theta_2$ modulo 2π, tous sont des mesures de $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right)$. □

Corollaire 6.51 – *Avec les notations précédentes,*

- *les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a}$ est un réel.*
- *les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}$.*

Démonstration. ► Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv 0 \quad [\pi]$.
Mais un complexe possède 0 comme argument si et seulement si c'est un réel positif, et il possède π comme argument si et seulement si c'est un réel négatif.
Et donc $\dfrac{b-a}{c-a}$ est réel si et seulement si ses arguments sont congrus à 0 modulo π.
► De même, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Soit si et seulement si un argument de $\dfrac{b-a}{d-c}$ est $\pm\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
Soit si et seulement si $\dfrac{b-a}{d-c}$ est imaginaire pur. □

Plus précisément
Cet angle est nul si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, et est égal à π si ils sont de sens opposés.

Exemple 6.52 Formule d'Al-Kashi (ou loi des cosinus)

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b, c.
Notons $u = b - a$, $v = b - c$ et $w = c - a$.
Alors $u = v + w$, et donc

$$\begin{aligned} |u|^2 = |v + w|^2 &= (v + w)\left(\overline{v} + \overline{w}\right) \\ &= v\overline{v} + w\overline{w} - \overline{v}w - v\overline{w} \\ &= |v|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}\left(v\overline{w}\right). \end{aligned}$$

Notons $\theta = \arg(v\overline{w}) \equiv \arg(\overline{w}) + \arg(v) \equiv \arg\left(\frac{v}{w}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{c-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$.
Et donc $\mathrm{Re}(v\overline{w}) = |v\overline{w}|\cos\theta = |v||w|\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

Il vient donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\cos\left(\widehat{BCA}\right)$.
Nous retrouvons donc la célèbre formule d'Al-Kashi[18].

Orientation Puisque nous ne voyons l'angle ici qu'à travers son cosinus, il n'est pas utile de l'orienter (car le cosinus est pair).

18 Qui implique entre autres Pythagore et sa réciproque.

6.4.2 Transformations géométriques

Définition 6.53 – Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur** $\vec{u}$ l'application qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 6.54 : *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a. Alors la fonction associée à la translation de vecteur $\vec{u}$ est* $f_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z+a \end{array} \right.$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer que si $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2, alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de $\vec{v_1} + \vec{v_2}$.
Donc si M est le point d'affixe z, $\overrightarrow{OM}$ possède pour affixe z. Et donc l'image M' de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$.
Donc $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z + a$. Mais l'affixe de M' est égale à celle de $\overrightarrow{OM'}$. □

Définition 6.55 – Soit A un point du plan, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle **homothétie de rapport** λ **et de centre** A l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$.

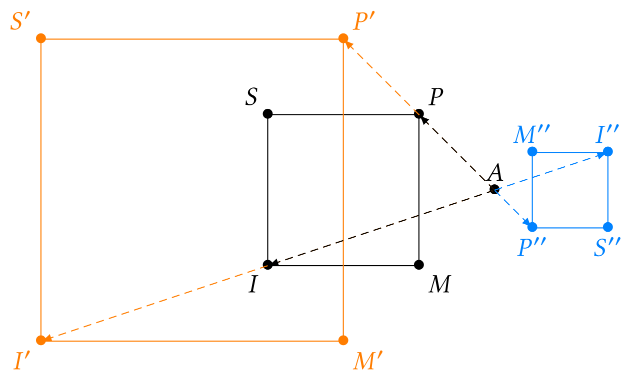


FIGURE 6.4 – En orange, l'image du carré $MPSI$ par l'homothétie de centre A et de rapport 2. En bleu, l'image de $MPSI$ par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Remarques. Une homothétie de rapport différent de 1 possède un unique point fixe, qui est son centre.
Une homothétie de rapport 1 est aussi la translation de vecteur nul.
Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale.

Proposition 6.56 : *Soit A un point du plan d'affixe a et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction associée à l'homothétie de centre A et de rapport λ est* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \lambda(z-a)+a \end{array} \right.$.

Démonstration. Soit M' le point d'affixe $a + \lambda(z - a)$.
Alors $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $\lambda(z - a)$, qui est l'affixe de $\lambda\overrightarrow{AM}$.
Et donc $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$, de sorte que M' est bien l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ. □

Définition 6.57 – Soit Ω un point du plan, et soit $\theta \in \mathbf{R}$. On appelle **rotation de centre Ω et d'angle θ** l'application qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

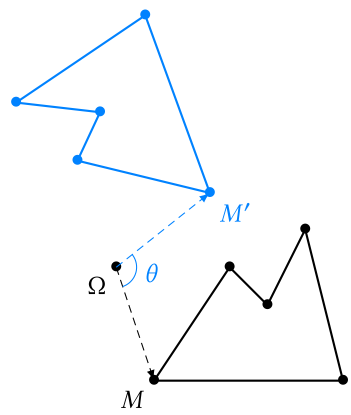


Figure 6.5 – Une rotation.

Remarques. Une rotation d'angle $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$ possède un unique point fixe qui est son centre.
Une rotation d'angle congru à 0 modulo 2π est la translation de vecteur nul.
Une rotation d'angle π est une homothétie de même centre et de rapport -1.

Proposition 6.58 : *Soit Ω un point du plan d'affixe ω et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction associée à la rotation de centre Ω et d'angle θ est* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array} \right.$.

Démonstration. Soit M un point d'affixe z, et soit M' l'image de $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$. Alors

$$\Omega M' = \left|e^{i\theta}(z-\omega)\right| = |z - \omega| = \Omega M.$$

Et

$$\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \arg\frac{z'-\omega}{z-\omega} \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

□

Il est assez facile de se convaincre[19] qu'une rotation conserve les angles et les distances, et qu'une homothétie préserve les angles et les rapports de distances, c'est-à-dire que toutes les distances sont multipliées par une même constante (qui est le rapport de l'homothétie).

[19] Et c'est un bon exercice que de le faire.

6.4.3 Similitudes directes

Définition 6.59 – Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une transformation du plan.
On dit que f est une **similitude directe** si :

- elle envoie deux points distincts sur deux points distincts :

$$\forall (M, N) \in \mathscr{P}^2,\ M \neq N \Rightarrow f(M) \neq f(N).$$

- elle préserve les rapports de distances : $\forall (M, N, P, Q) \in \mathscr{P}^4$, avec $P \neq Q$,

$$\frac{f(M)f(N)}{f(P)f(Q)} = \frac{MN}{PQ}.$$

- elle préserve les angles orientés :

$$\forall (M, N, P, Q) \in \mathscr{P}^4,\ \left(\overrightarrow{f(M)f(N)}, \overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right).$$

Proposition 6.60 : *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Alors la transformation du plan associée à f est une similitude directe si et seulement si f est une fonction affine non constante, c'est-à-dire si et seulement si il existe deux complexes $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f(z) = az + b$.*

Démonstration. Supposons que la transformation associée à f soit une similitude directe, et soit $z \in \mathbf{C}$.
Notons M le point d'affixe z, A le point d'affixe 1 et O le point d'affixe 0.
Alors $|z| = \left|\frac{z-0}{1-0}\right| = \frac{OM}{OA}$, et $\arg\left(\frac{z-0}{z-1}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.
Notons alors M', A' et O' le point d'affixes respectives $f(z)$, $f(1)$ et $f(0)$.
Puisque f conserve les rapports de distances, $\left|\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right| = \frac{O'M'}{O'A'} = \frac{OM}{OA} = |z|$.
Et puisque f conserve les angles, pour $z \neq 0$,

$$\arg\left(\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}\right) = \left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z).$$

Et donc les complexes, $\frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)}$ et z ont mêmes modules et mêmes arguments : ils sont égaux.
Ainsi, $f(z) = z\,(f(1) - f(0)) + f(0)$.
Ceci étant valable pour tout $z \in \mathbf{C}$, f est bien une fonction affine.
Notons que puisque f préserve les rapports de distances, deux points distincts ne peuvent avoir même image, donc $f(1) - f(0) \neq 0$.

Inversement, soient $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, et soit $f : z \mapsto az + b$.
Puisque $a \neq 0$, deux points distincts sont toujours d'image distincte.
Et pour M, N, P, Q quatre points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4, et d'images respectives M', N', P', Q', on a

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{f(z_3)-f(z_4)} = \frac{az_1 + b - az_2 - b}{az_3 + b - az_4 - b} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Donc par identification des modules et des arguments,

$$\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ} \text{ et } \left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\right).$$

Et donc la transformation associée à f est une similitude directe.

□

Corollaire 6.61 – ► *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.*
► *Les translations, rotations et homothéties sont des similitudes directes.*

Démonstration. ▶ Si $f : z \mapsto az + b$ et $g : z \mapsto cz + d$ sont deux similitudes, avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $g \circ f : z \mapsto c(az + b) + d = acz + (bc + d)$ est encore une fonction affine avec $ac \neq 0$, donc $g \circ f$ est encore une similitude directe.
▶ Pour le second point, il suffit de constater que les expressions complexes données pour les translations, rotations et homothéties sont toutes des fonctions polynomiales de degré 1 en z. □

Remarque. Le premier point aurait pu se prouver directement à l'aide de la définition d'une similitude directe.

Proposition 6.62 : *Soit Ω un point du plan, soit r une rotation de centre Ω et d'angle θ, et soit h une homothétie de centre Ω et de rapport λ. Alors $r \circ h = h \circ r$.
L'application $r \circ h$ est alors appelée* ***la similitude directe de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ.***

Autrement dit
L'ordre dans lequel on effectue les deux transformations n'est pas important.

Démonstration. Prouvons le résultat sur les fonctions associées (que nous noterons[20] encore r et h). Soit z un complexe. Alors $h(z) = \omega + \lambda(z - \omega)$ et donc

$$r(h(z)) = \omega + e^{i\theta}\left(\lambda(z-\omega) + \omega) - \omega\right) = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega).$$

De même, $r(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$, et donc

$$h(r(z))\omega + \lambda\left(e^{i\theta}(z-\omega) + \omega - \omega\right) = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega) = r(h(z)).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbf{C}$, $h \circ r = r \circ h$. □

[20] Abusivement.

Remarques. ▶ Notons que la preuve ci-dessus nous donne la forme complexe de $r \circ h$: c'est $z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.
▶ Il n'y a pas unicité de λ et θ. En particulier, on vérifiera qu'une similitude d'angle θ et de rapport λ est égale à la similitude de même centre, d'angle $\theta + \pi$ et de rapport $-\lambda$.
L'idée étant qu'une homothétie de rapport -1 est également une rotation d'angle π.

Nous pouvons à présent classifier complètement les similitudes directes :

Proposition 6.63 : *Soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe. Alors :*

1. *soit f est une translation, ce qui se produit si et seulement si $a = 1$*
2. *soit f possède un unique point fixe Ω. Dans ce cas, f est la similitude directe de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle* $\arg(a)$.

Points fixes
Cette proposition donne une méthode pour déterminer le centre d'une similitude directe qui n'est pas une translation : c'est son unique point fixe.
Notons qu'une translation possède soit aucun point fixe, soit une infinité (dans le cas de l'identité, qui est la translation de vecteur nul), mais jamais un unique.

Démonstration. ▶ Si $a = 1$, alors $f : z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur d'affixe b.
▶ Si $a \neq -1$, alors un complexe z est un point fixe de f si et seulement si $f(z) = z \Leftrightarrow az + b = z \Leftrightarrow z = -\frac{b}{a-1}$.
Donc f possède bien un unique point fixe. Notons Ω ce point, et notons h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.
Alors les formules obtenues pour $h \circ r$ dans la preuve de la proposition précédente prouvent que pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$(h \circ r)(z) = -\frac{b}{a-1} + \underbrace{|a|e^{i\arg(a)}}_{=a}\left(z + \frac{b}{a-1}\right) = az + \frac{ab - b}{a-1} = az + b = f(z).$$

Et donc f est bien de la forme indiquée. □

Exemple 6.64

Caractérisons la transformation T du plan associée à $f : z \mapsto (2i + 1)z - 1$.
C'est une similitude directe par ce qui précède.
Son centre est l'unique point fixe de f, et on a $f(z) = z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}$.

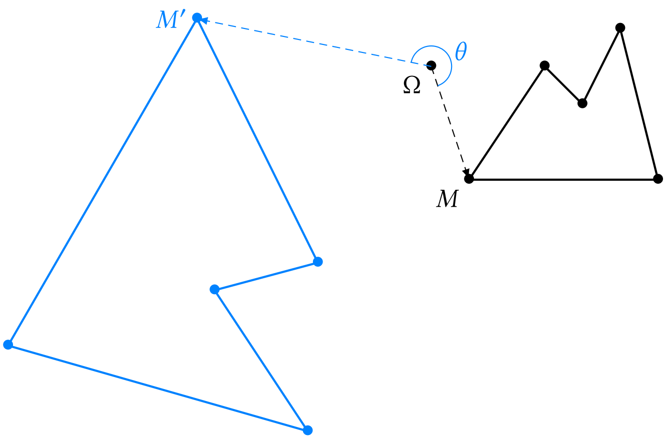


FIGURE 6.6 – Une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

> De plus, son rapport est $|2i+1| = \sqrt{5}$, et son angle est $\arg(2i+1) = \text{Arctan}(2)$. Ainsi, T est la similitude directe de centre $(1,2)$, de rapport $\sqrt{5}$ et d'angle Arctan 2.

Il existe aussi des transformations appelées similitude indirectes, qui sont les composées des similitudes directes par une symétrie axiale. Elles transforment les angles en angles opposés. On peut prouver que ce sont les transformations associées aux fonctions de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$. Leur étude générale est hors programme.
Plus généralement, on appelle similitude toute transformation qui préserve les rapports de distance, et on peut prouver qu'alors il s'agit soit d'une similitude directe soit d'une similitude indirecte.

HORS PROGRAMME : CONSTRUCTION DU CORPS $\mathbf{C}$

Expliquons rapidement comment définir concrètement $\mathbf{C}$ (il s'agit là d'une définition parmi d'autres possibles, bien que toutes soient équivalentes).

Il suffit de définir $\mathbf{C}$ comme étant l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de deux réels, l'idée étant qu'un complexe $z = a + ib$ est entièrement défini par le couple (a, b).
Pour $x \in \mathbf{R}$, on confond alors x et le complexe $(x, 0)$, de sorte que $\mathbf{R}$ est identifié à $\{(x, 0),\ x \in \mathbf{R}\}$, et donc que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
Il faut alors définir ce que sont l'addition et la multiplication de deux couples de réels. Si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ sont deux éléments de $\mathbf{C}$, posons

- $z + z' = (x + x', y + y')$
- $z \times z' = (xx' - yy', xy' + x'y)$

Ceci est bien compatible avec les opérations existant sur les réels, au sens où si x et x' sont deux réels, alors $x + x'$ désigne le même objet, qu'on voit x et x' comme de «vrais» réels ou comme les couples $(x, 0)$ et $(x', 0)$.
On vérifie alors que

1. $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ z + z' = z' + z$ (commutativité de l'addition)
2. $\forall z, z', z'' \in \mathbf{C}^3,\ z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ (associativité de l'addition)
3. $\forall z \in \mathbf{C},\ z + 0 = 0 + z = z$ (0 est élément neutre pour l'addition)
4. $\forall z \in \mathbf{C},\ \exists! z' \in \mathbf{C},\ z + z' = z' + z = 0$ (existence d'un inverse pour l'addition)
5. $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2,\ zz' = z'z$ (commutativité de la multiplication)
6. $\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$ (associativité de la multiplication)
7. $\forall z \in \mathbf{C},\ 1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ (existence d'un élément neutre pour la multiplication)
8. $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\},\ \exists z \in \mathbf{C},\ zz' = z'z = 1$ (existence d'un inverse pour la multiplication)
9. $\forall (z, z', z'') \in \mathbf{C}^3,\ (z + z') \cdot z'' = z \cdot z'' + z \cdot z'$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).

Nous rencontrerons de nouveau ces neuf propriétés plus tard, elles donnent à **C** le droit de prétendre au titre de **corps (commutatif)** sur lequel nous reviendrons plus tard, et qui sera d'une importance capitale en algèbre linéaire.
Il n'aura probablement pas échappé à votre sagacité que **R** et **Q** vérifient aussi ces neuf propriétés (et donc sont également des corps commutatifs).
La preuve de toutes ces propriétés est **très** rébarbative, donnons en quelques unes à titre d'exemple, les autres sont laissées comme exercices.

Démonstration. 1. Soient $z, z' \in \mathbf{C}$. Il existe alors quatre réels a, b, a' et b' tels que $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$.
Alors $z + z' = (a + a', b + b')$, et $z' + z = (a' + a, b' + b)$.
Mais la somme de deux réels ne dépend pas du sens dans lequel on effectue la somme[21] donc $z + z' = (a + a', b + b') = (a' + a, b' + b) = z' + z$.
4. Soit $z = (a, b) \in \mathbf{C}$.
Alors en posant $z' = (-a, -b)$, il vient $z + z' = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = 0$.
Et par commutativité de l'addition (point 1.), on a aussi $z' + z = 0$.
8. Soit $z = (a, b) \in \mathbf{C}$. Soit alors $z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Alors

$$zz' = \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, b\frac{a}{a^2+b^2} + a\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0) = 1.$$

□

[21] L'addition de réels est commutative.

Déjà vu ?
Avez-vous reconnu ce z' ? Pensez à l'inverse d'un complexe tel que vous le e connaissez.

Reste tout de même à se convaincre que **C** ainsi défini est bien l'ensemble dont nous avons l'habitude... Notons alors $i = (0, 1)$, de sorte que $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$.
On vérifie alors aisément que $i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0^2 - 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -1$, et plus généralement, que

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \text{ et } (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Autrement dit que nous retrouvons bien les opérations auxquelles nous sommes habitués, et à partir desquelles nous avons construit tout le chapitre.
Insistons bien sur le fait que ce n'est en aucun cas une coïncidence : nous avons délibérément défini l'addition et la multiplication sur $\mathbf{R}^2$ pour qu'elles correspondent à celles dont nous avons l'habitude !

EXERCICES DU CHAPITRE 6

▸ Forme algébrique, forme exponentielle

EXERCICE 6.1 Identité du parallélogramme F
Montrer que pour tous $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interpréter géométriquement.

EXERCICE 6.2 Soit $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$. Donner la forme exponentielle, puis la forme algébrique de z^{2019}. PD

EXERCICE 6.3 Pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, déterminer le module et un argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$, $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$, $1+i\theta$. AD

EXERCICE 6.4 Déterminer tous les complexes z tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z+1|$. PD

EXERCICE 6.5 Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|a+b+c| = |ab+ac+bc|$. AD

EXERCICE 6.6 Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. PD

EXERCICE 6.7 Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, de forme algébrique $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. AD
Montrer que l'argument principal de z est $\theta = 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

EXERCICE 6.8 Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$. PD

1) Montrer que $|z^3 + 2iz| \leqslant 3$.
2) Quels sont les z pour lesquels cette inégalité est en fait une égalité ?

EXERCICE 6.9 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$. AD
Indication : calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes.

EXERCICE 6.10 Déterminer $\left\{\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U} \setminus \{1\}\right\}$. AD

▸ Applications à la trigonométrie

EXERCICE 6.11 Linéarisation PD

1) Linéariser $\sin^5(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5(x)\,dx$.
2) Linéariser $\cos^2(2x)\sin^3(3x)$.

EXERCICE 6.12 Soit $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$. PD

EXERCICE 6.13 Pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$. AD

EXERCICE 6.14 Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\frac{1}{3}$ (Oral ENS) TD
Notons $\alpha = \dfrac{\operatorname{Arccos}\frac{1}{3}}{\pi}$. Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel, c'est-à-dire que $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

1) Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.
2) Montrer que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. Conclure.

► Racines $n^{\text{èmes}}$

Exercice 6.15 Déterminer les racines cinquièmes de j et de $\dfrac{2\sqrt{2}}{i-1}$. F

Exercice 6.16 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{R}$. Résoudre l'équation $(1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$. PD

Exercice 6.17 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega$. PD

Exercice 6.18 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$ possède exactement $n-1$ solutions, qui sont toutes réelles. AD

Exercice 6.19 AD

1) Résoudre l'équation $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$, $Z \in \mathbf{C}$.
2) En déduire les solutions de $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Exercice 6.20 Banque CCP 89 AD
Soit $n \in \mathbf{N}$, avec $n \geqslant 2$ et soit $\zeta = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

1) On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $\zeta^k - 1$.
2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

► Équations dans C

Exercice 6.21 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: F

1. $z^2 + (5-2i)z + 5 - 5i = 0$
2. $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$
3. $z^4 - z^2 + (1-i) = 0$

Exercice 6.22 PD

1) Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=3-2i \\ xy=5-i \end{cases}$, d'inconnues $(x,y) \in \mathbf{C}^2$.
2) Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ existe-t-il des rectangles pour lesquels l'aire a et le périmètre p sont reliés par la relation $p = \lambda\sqrt{a}$?

Exercice 6.23 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: PD

1) $z^2 = \overline{z}$
2) $z^2 = -\overline{z}^2$
3) $z^2 = 2\overline{z}$
4) $z^2 = \frac{1}{z^2}$

Exercice 6.24 Résoudre l'équation $z^2 + 2|z| - 3 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$. AD

► Application des complexes à la géométrie

Exercice 6.25 Caractériser géométriquement l'ensemble des complexes z de $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ tels que $\dfrac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R}$. PD

Exercice 6.26 Soient $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ les sommets d'un polygone convexe régulier direct à n côtés, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit z_k l'affixe de M_k. Donner l'expression des z_k en fonction de z_0 et z_1. PD

Exercice 6.27 Que peut-on dire de la composée de deux rotations ? De la composée de deux homothéties ? F

Exercice 6.28 Similitudes directes PD

1) Caractériser géométriquement la similitude associée à $z \mapsto \left(1 + i\sqrt{3}\right) z - i\sqrt{3}$.
2) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}(-1,0)$ et soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Caractériser géométriquement $t \circ r \circ t$ et $r \circ t \circ r$.

3) Montrer qu'une similitude directe f réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que tout complexe possède un unique antécédent par f. Prouver que f^{-1} est encore une similitude directe, et déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques en fonction de ceux de f.

EXERCICE 6.29 Soit $z \in \mathbf{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur z : AD

1) les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont-il alignés ?
2) les points d'affixes z, z^2 et z^3 sont-ils les sommets d'un triangle rectangle en le point d'affixe z^2 ?

EXERCICE 6.30 Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b et c. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. D

1) Calculer j^2 et en déduire une expression de $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j.
2) Montrer que ABC est équilatéral direct (c'est-à-dire avec $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ si et seulement $a + bj + cj^2 = 0$.
3) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

EXERCICE 6.31 Soit $a \in \mathbf{U}$, soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ les n racines $n^{\text{èmes}}$ de a. D
Montrer que les points d'affixes $(1 + z_k)^n$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ sont alignés.

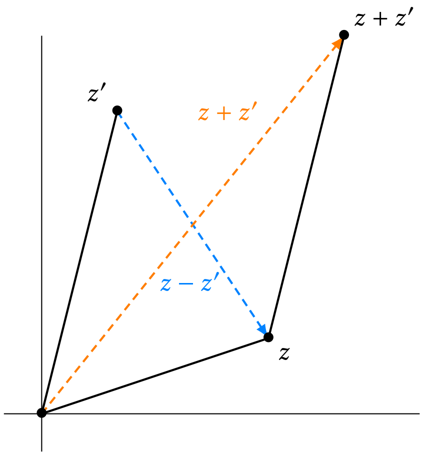
CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.1

Soient z, z' deux complexes. Alors

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)+(z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)\\ &= |z|^2+|z'|^2+z\overline{z'}+\overline{z}z'+|z|^2+|z'|^2-z\overline{z'}-\overline{z}z'\\ &= 2\left(|z|^2+|z'|^2\right).\end{aligned}$$

Cette formule traduit le fait que dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs de deux côtés consécutifs est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales.



> **Méthode**
> Pour travailler avec un quotient, mieux vaut travailler dès le départ avec les formes exponentielles du numérateur et du dénominateur plutôt que d'essayer d'obtenir la forme algébrique du quotient. En effet, la forme exponentielle est bien plus adaptée à la manipulation de quotients que la forme algébrique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.2

On a $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$. Et donc $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

De même, on a $|1-i| = \sqrt{2}$ et donc $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Et par conséquent,

$$z^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\frac{5\times 2019}{12}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\frac{10095\pi}{12}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\frac{3365\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+840\times 2\pi\right)} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019} e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Soit encore

$$z^{2019} = \left(\sqrt{2}\right)^{2019}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}2^{1009}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{1009}(1+i).$$

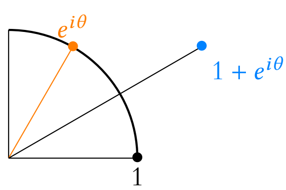
> **Signe**
> Notons qu'un tel raisonnement ne serait plus valable pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$, puisque le module serait alors $-2\cos\frac{\theta}{2}$ (un module est toujours positif).

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.3

On a

$$1+e^{i\theta} = e^0+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}.$$

Puisque $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, son cosinus est positif, et donc $2\cos\frac{\theta}{2} = |1+e^{i\theta}|$.
Autrement dit, nous avons déjà sous les yeux la forme exponentielle de $1+e^{i\theta}$, de sorte qu'un argument en est $\frac{\theta}{2}$.
Sur le même principe, on a



$$1-e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}.$$

En notant que $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, on a donc

$$1 - e^{i\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}.$$

Si $\theta \in [0, \pi]$, alors $\sin\frac{\theta}{2} \geqslant 0$, et donc $|1 - e^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\theta-\pi}{2}$.
En revanche, pour $\theta \in]-\pi, 0[$, alors $\sin\frac{\theta}{2} < 0$, et donc

$$1 - e^{i\theta} = -2\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta-\pi}{2}} e^{i\pi} = \underbrace{-2\sin\frac{\theta}{2}}_{\in \mathbf{R}_+} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}.$$

Et donc $|1 - e^{i\theta}| = -2\sin\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\theta+\pi}{2}$.

Pour le quotient, le principe est le même, et on peut même utiliser les calculs déjà effectués. Notons tout de même que ce quotient n'est défini que pour $\theta \neq \pi$. Dans ce cas il vient

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{1 + e^{i\theta}} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i\tan\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in]0, \pi[$, alors $\tan\frac{\theta}{2} \geqslant 0$, et donc $\left|\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right| = \tan\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $\frac{\pi}{2}$ (car c'est un argument de π).
Et si jamais $\theta \in]-\pi, 0[$, alors $\tan\frac{\theta}{2} < 0$, de sorte que $\left|\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right| = -\tan\frac{\theta}{2}$ et un argument en est $-\frac{\pi}{2}$ (qui est un argument de $-i$).

Enfin, le module de $1 + i\theta$ est $\sqrt{1+\theta^2}$.
Puisque $1 + i\theta$ a une partie réelle positive, son argument principal α, est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Et donc[1] $\tan\alpha = \frac{\theta}{1} = \theta$. On en déduit que $\alpha = \operatorname{Arctan}\theta$.

[1] Puisque $\operatorname{Re}(1 + i\theta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.4

Puisque $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, on a $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ si et seulement si $|z| = 1$.
Et pour $z \in \mathbf{U}$, on a alors

$$|z+1| = 1 \Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1) = 1 \Leftrightarrow \underbrace{|z|^2}_{=1} + z + \overline{z} + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}.$$

Et donc les deux seules solutions sont $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.

Remarque
À ce stade, nous avons prouvé que l'ensemble des solutions est **inclus** dans **U**.

Détails
Connaissant la partie réelle et le module, il y a au plus deux choix pour la partie imaginaire. D'ailleurs, saurez-vous dire à quelle(s) condition(s) sur $(r, a) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ il n'existe qu'un complexe z vérifiant $|z| = r$ et $\operatorname{Re}(z) = a$?

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.5

Puisque a est de module 1, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et donc $a = \frac{1}{\overline{a}}$.
Et de même $b = \frac{1}{\overline{b}}$ et $c = \frac{1}{\overline{c}}$.
Et donc

$$a + b + c = \frac{1}{\overline{a}} + \frac{1}{\overline{b}} + \frac{1}{\overline{c}} = \frac{\overline{bc} + \overline{ac} + \overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{ab + ac + bc}}{\overline{abc}}.$$

On en déduit que

$$|a + b + c| = \frac{|\overline{ab + ac + bc}|}{|\overline{abc}|} = \frac{|ab + ac + bc|}{|a| \cdot |b| \cdot |c|} = |ab + ac + bc|.$$

Rappel
Un complexe et son conjugué ont même module.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.6

On a $e^z + e^{-z} = 1 \Leftrightarrow e^z + \frac{1}{e^z} = 1 \Leftrightarrow \frac{(e^z)^2 + 1}{e^z} = 1 \Leftrightarrow (e^z)^2 - e^z + 1 = 0$.
Résolvons donc l'équation $Z^2 - Z + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 4 = -3$.

Et donc les deux racines complexes de cette équation sont $Z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Et donc z est solution de l'équation de départ si et seulement si

$$e^z = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } e^z = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Si $z = a+ib$ est la forme algébrique de z, alors $e^z = e^a e^{ib}$ est la forme exponentielle de e^z. Et donc z est solution de l'équation de départ si et seulement si$z \equiv i\dfrac{\pi}{3} \quad [i2\pi]$ ou $z \equiv -i\dfrac{\pi}{3} \quad [i2\pi]$.

Rappel
Le module de e^z est $e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Et donc l'ensemble des solutions de $e^z + e^{-z} = 1$ est

$$\left\{i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.7

Commençons par noter que z n'étant pas un réel négatif, on n'a pas à la fois $b = 0$ et $a \leqslant 0$.
Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{a^2} = |a| \geqslant -a$, si bien que $a + \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$.
Et dans le cas où $b = 0$, alors $a > 0$, et donc $a + \sqrt{a^2+b^2} > 0$, et donc est non nul.
Donc déjà, θ est bien défini.

Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = z$, soit encore que $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a$ et $\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b$.
Utilisons pour cela les formules de l'angle moitié : si $t = \tan(\theta/2)$, alors

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Or ici, $\tan(\theta/2) = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) = \dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$.
Et donc

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1 - \frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}}{1 + \frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2+2a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+b^2}}\\
&= \frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2}}{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}} = a\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}}\\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = a$.

Et de même,

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \frac{2\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}{1 + \frac{b^2}{(a+\sqrt{a^2+b^2})^2}} = \frac{2b}{\frac{2a^2+2b^2+2a\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}}\\
&= b\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+a} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.
\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta = b$.
Et donc enfin, $\sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta} = a+ib = z$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.8

1. Puisque $z^3 + 2iz = z\left(z^2+2i\right)$, on a

$$|z^3 + 2iz| = |z||z^2+2i| \leqslant |z|\left(|z^2| + |i|\right) \leqslant |z|(1+2) \leqslant 3.$$

2. On a égalité ci-dessus si et seulement si chacune des inégalités employées est en réalité une égalité.

Soit si et seulement si $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z|^2 = 1 \\ |z^2 + 2i| = |z^2| + |2i| \end{cases}$
Notons que ces deux premières conditions sont équivalentes.
D'autre part, nous savons qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $z^2 = \lambda 2i$.

Mais ceci n'est compatible avec $|z| = 1$ que si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, soit si et seulement si $z^2 = i$.
Et donc si et seulement si $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $z = -e^{i\frac{\pi}{4}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.9

D'après la formule du binôme de Newton, on a $(1+i)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k}$.
Mais i^k ne peut prendre que 4 valeurs : $i, -1, -i$ et 1.
Plus précisément : si $k = 2p$ est pair, alors $i^k = \begin{cases} -1 & \text{si } p \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } p \text{ est pair} \end{cases} = (-1)^p = (-1)^{k/2}$.
Et dans le cas où $k = 2p+1$ est impair, alors $i^k = \begin{cases} i & \text{si } p \text{ est pair} \\ -i & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} = (-1)^p i$.
Et donc, il vient

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} (-1)^{k/2}\binom{n}{k} + i \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} (-1)^{(k-1)/2}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} + i \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \\ &= S_1 + iS_2.\end{aligned}$$

Bornes
Un nombre pair $k = 2p$ est inférieur ou égal à n si et seulement si $2p \leqslant n \Leftrightarrow p \leqslant \frac{n}{2}$.
Mais p étant entier, ceci équivaut à $p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
On raisonne de même pour les bornes de la seconde somme.

Mais d'autre part, nous savons que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Et par conséquent,

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

On en déduit donc que

$$S_1 = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \text{ et } S_2 = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Quelques commentaires : ► *nous pourrions aller plus loin, et distinguer différents cas suivant les valeurs de n, par exemple en remarquant que lorsque n est multiple de 4, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$, et donc $S_2 = 0$. Il y aurait alors probablement au moins 4 cas à distinguer.*
► *Un des inconvénients de cette formule est qu'on n'y voit pas directement que S_1 et S_2 sont des entiers*[2].
Toutefois, notons que si n est pair, alors $(\sqrt{2})^n$ est une puissance de 2 (et donc un entier), et $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ sont entiers[3].
Et si n est impair, alors $(\sqrt{2})^n$ est de la forme $2^k\sqrt{2}$ et $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, de sorte que S_1 est bien un entier.

[2] Ce sont des sommes d'entiers.

[3] Ils valent 0, 1 ou −1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.10

Souvenons-nous que $\mathbf{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbf{R}\}$.
Or, pour $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-e^{i\theta}} &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{1}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\ &= e^{-i\frac{\theta}{2}} \frac{i}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.\end{aligned}$$

Donc déjà, tous les $\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U}$ sont de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Il est facile de vérifier que la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0,2\pi[$ sur $\mathbf{R}$, et donc que pour tout complexe z de partie réelle $\frac{1}{2}$, il existe $\theta \in]0,2\pi[$ tel que $z = \dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$.

Et donc $\left\{\dfrac{1}{1-z}, z \in \mathbf{U}\right\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.11

1. En utilisant les formules d'Euler, on a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2^5 i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5 \\ &= \frac{e^{i5x}-5e^{i3x}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{i3x}-e^{-5ix}}{i2^5} \\ &= \frac{1}{16}\left(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\right).\end{aligned}$$

$i^5 = i$.

On en déduit qu'une primitive de $x \mapsto \sin^5(x)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{16}\left(\frac{-1}{5}\cos(5x)+\frac{5}{3}\cos(3x)-10\cos(x)\right).$$

Et donc que

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\,dx = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{10}{3}+20\right) = \frac{1}{16}\frac{256}{15} = \frac{16}{15}.$$

2. Toujours à l'aide des formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}\cos^2(2x)\sin^3(3x) &= \left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{1}{-2^5 i}\left(e^{4ix}+2+e^{-4ix}\right)\left(e^{9ix}-3e^{3ix}+3e^{-3ix}-e^{-9ix}\right) \\ &= \frac{1}{-2^5 i}\left(e^{13ix}-3e^{i7x}+3e^{ix}-e^{-5ix}+2e^{9ix}-6e^{-3ix}+6e^{3ix}-2e^{-9ix}+e^{5ix}-3e^{-ix}+3e^{-7ix}-e^{-13ix}\right) \\ &= \frac{-1}{2^4}\left(\frac{e^{13ix}-e^{-13ix}}{2i}+2\frac{e^{9ix}-e^{-9ix}}{2i}-3\frac{e^{i7x}-e^{-7ix}}{2i}+\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2}+6\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}+3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(-\sin(13x)-2\sin(9x)+3\sin(7x)-\sin(5x)+6\sin(3x)-3\sin(x)\right).\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.12

Calculons directement $C_n + iS_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \left(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)\right) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

En effet, on a alors

$$\begin{aligned}C_n + iS_n &= \sum_{k=1}^n \left(e^{i\theta}\right)^k \\ &= e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= e^{i\theta}\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}}-e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Remarque

L'hypothèse faite sur θ est importante ici, car elle garantit que $e^{i\theta} \neq 1$, et donc que l'on peut appliquer une formule bien connue.

Il ne reste alors plus qu'à remarquer que

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n+iS_n) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.13

D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k = \left(1+e^{i\theta}\right)^n.$$

Or $1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$.
On en déduit que $(1+e^{i\theta})^n = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}e^{in\theta/2}$.
Et donc $C_n = \mathrm{Re}\left((1+e^{i\theta})^n\right) = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\left(n\dfrac{\theta}{2}\right)$ et de même, $S_n = \mathrm{Im}\left((1+e^{i\theta})^n\right) = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\sin\left(n\dfrac{\theta}{2}\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.14

1. On a $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = \dfrac{1}{3} + i\sin\left(\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} + i\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1+2i\sqrt{2}}{3}$.

2. On $\left(1+2i\sqrt{2}\right)^n = 3^n \Leftrightarrow \left(e^{i\pi\alpha}\right)^n = 1$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité.
En effet, si $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, alors
$$\left(e^{i\pi\frac{p}{q}}\right)^{2q} = e^{2ip\pi} = 1.$$
Et inversement, si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $e^{i\pi\alpha} = e^{i\frac{\pi k}{n}}$.
Et donc $\pi\alpha \equiv \dfrac{\pi k}{n}\quad[2\pi] \Leftrightarrow \alpha \equiv \dfrac{k}{n}\quad[1]$.
Et par conséquent, α est rationnel[4].
Bref, nous avons bien prouvé que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si et seulement si $e^{i\pi\alpha}$ est une racine de l'unité, soit si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 2^n$.

> **Remarque**
> Ce critère n'est pas spécifique au nombre α que l'on considère ici, et reste valable pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

3. Montrons par récurrence qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, avec $a_n - b_n$ non divisible par 3.
Pour $n = 1$, c'est évident : on prend $a_n = 1$ et $b_n = 2$, de sorte que $a_n - b_n = -1$ n'est pas divisible par 3.
Supposons donc acquise l'existence de a_n et b_n vérifiant ces conditions. Alors
$$\begin{aligned}(1+2i\sqrt{2})^{n+1} &= (1+2i\sqrt{2})^n(1+2i\sqrt{2}) = (a_n+ib_n\sqrt{2})(1+2i\sqrt{2})\\ &= (a_n-4b_n)+(2a_n+b_n)i\sqrt{2}.\end{aligned}$$
Nous pouvons donc poser $a_{n+1} = a_n - 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + b_n$, qui sont bien des entiers.
Et alors $a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n - 5b_n = -6b_n + (b_n - a_n)$.
Si $a_{n+1} - b_{n+1}$ était divisible par 3, il existerait alors un entier k tel que
$$a_{n+1} - b_{n+1} = 3k \Leftrightarrow -6b_n + b_n - a_n = 3k \Leftrightarrow a_n - b_n = 3(-k-2b_n)$$
contredisant le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe donc deux entiers a_n et b_n tels que $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$ avec $a_n - b_n$ non divisible par 3.

Supposons donc à présent que α soit rationnel. Il existe alors n tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.
Mais alors $a_n + b_n i\sqrt{2} = 3^n$ est réel, et donc $b_n = 0$, et $a_n = 3^n$. Ceci vient contredire le fait que $a_n - b_n$ n'est pas divisible par 3.
Et donc α ne peut pas être rationnel.

[4] Nous avons même prouvé un peu mieux : α est rationnel et peut s'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est vaut n.

Solution de l'exercice 6.15

On a $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc les racines $5^{\text{èmes}}$ de j sont les $e^{i\left(\frac{2\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0,4]\!]$.

D'autre part, on a $\dfrac{i-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, et donc

$$\frac{2\sqrt{2}}{i-1} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

de sorte que ses racines $5^{\text{èmes}}$ sont les $\sqrt[5]{2}e^{-\left(-\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$, $k \in [\![0,4]\!]$.

Solution de l'exercice 6.16

Il s'agit donc de trouver les solutions à $(1+z)^n = e^{2ina}$.
Un complexe z est solution de cette équation si et seulement si $1+z$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de e^{2ina}, soit si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$1 + z = e^{i\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)} \Leftrightarrow z = e^{i\left(2a+\frac{2k\pi}{n}\right)} - 1.$$

Soit si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

$$z = e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\left(e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\right) = 2ie^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Méthode

$1 + e^{i\theta}$ se factorise bien par $e^{i\theta/2}$.

Remarquons que ces n solutions sont bien deux à deux distinctes, puisque les racines $n^{\text{èmes}}$ de e^{2ina} le sont.

Solution de l'exercice 6.17

Nous savons que $\mathbf{U}_n = \left\{e^{i2\frac{k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$

Et donc $P = \displaystyle\prod_{\omega\in\mathbf{U}_n} \omega = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}}$. Soit encore

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\frac{\pi}{n}}\right)^k = \exp\left(2i\frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1} k\right).$$

Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$. Et donc

$$P = e^{i\frac{2\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6.18

Il est clair que $z = i$ n'est pas solution, donc pour $z \neq i$, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Par conséquent, z est solution si et seulement si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

- **Si** $k = 0$, alors cette équation se réécrit $\dfrac{z+i}{z-i} = 1$, et n'a donc pas de solution.
- **Pour** $k \neq 0$, alors

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = i\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}.$$

Donc déjà, l'équation de départ possède au plus $n-1$ solutions, qui sont les $i\dfrac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

⚠ Attention !

Pour l'instant, il n'est pas clair que ces solutions soient toutes distinctes !

D'autre part, on a

$$i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}}\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Donc toutes nos solutions sont réelles. Puisque cotan est strictement décroissante sur $]0;\pi[$, intervalle auquel appartiennent les $\frac{k\pi}{n}$, ces nombres sont tous différents deux à deux.
Donc l'équation possède bien $n-1$ solutions, qui sont toutes réelles.

Commentaire *: pour* $x \notin \{2\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}\cup\{k\pi,,k\in\mathbf{Z}\}$, *on a* $\operatorname{cotan} x = \dfrac{1}{\tan x}$.
Mais si n est pair, pour $k=\dfrac{n}{2}$, $\tan\dfrac{k\pi}{n}=0$ *et son inverse n'est pas défini, ce qui justifie le recours à la cotangente.*
Si on souhaite l'éviter, on peut dire que si n est impair, les solutions sont les $\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}$, $k\in[\![1,n-1]\!]$, *et si n est pair, les solutions sont les* $\dfrac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}$, $k\in[\![1,n-1]\!]\setminus\{n/2\}$ *et* 0 *(qui correspond à* $k=\dfrac{n}{2}$.*)*

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.19

1. Remarquons que 1 n'est pas solution de l'équation, et que pour $Z\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$, on a $Z^3+Z^2+Z+1=\dfrac{1-Z^4}{1-Z}$.
Et donc, toujours pour $Z\neq 1$, $Z^3+Z^2+Z+1=0 \Leftrightarrow 1-Z^4=0 \Leftrightarrow Z\in\mathbf{U}_4$.
Mais $\mathbf{U}_4=\{1,-1,i,-i\}$, et donc, 1 n'étant pas solution, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1,i,-i\}$.

2. D'après ce qui précède, z est solution si et seulement si $\dfrac{z+i}{z-i}\in\{-1,i,-i\}$.
   - On a $\dfrac{z+i}{z-i}=-1 \Leftrightarrow z+i=i-z \Leftrightarrow z=0$.
   - On a $\dfrac{z+i}{z-i}=i \Leftrightarrow (1-i)z=1-i \Leftrightarrow z=1$.
   - Enfin, $\dfrac{z+i}{z-i}=-i \Leftrightarrow (1+i)z=-1-i \Leftrightarrow z=-1$.

   Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0,1,-1\}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.20

1. Déterminer module et argument de ζ^k-1, c'est déterminer sa forme exponentielle. Et pour cela, notre meilleur allié est la factorisation par l'angle moitié.
On a $\zeta^k-1=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1=e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k}{\pi}n}\right)=2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)e^{\frac{ik\pi}{n}}$.
Soit encore
$$\zeta^k-1=2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$
Puisque $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\geqslant 0$, c'est donc bien le module de ζ^k-1 : $\left|\zeta^k-1\right|=2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de ζ^k-1 est $\dfrac{k\pi}{n}+\dfrac{\pi}{2}$.

> **Signe**
> Il est important de regarder le signe, car si
> $$z=re^{i\theta}$$
> avec $r<0$, alors $|z|=-r$ et un argument de z est $\theta+\pi$!

2. Notons que pour $k=0$, $\zeta^k-1=1-1=0$, et donc
$$S=\sum_{k=1}^{n-1}\left|\zeta^k-1\right|=2\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
Donc S est la partie imaginaire de
$$A=2\sum_{k=1}^{n-1}e^{i\frac{k\pi}{n}}=2\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k=2e^{i\frac{\pi}{n}}\frac{1-e^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}-e^{i\frac{n\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}=2\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}+1}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}.$$
Or, comme à la question 1, on prouve que $1-e^{i\frac{\pi}{n}}=-2i\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
Et $1+e^{i\frac{\pi}{n}}=e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}+e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
Donc après simplification,
$$A=2i\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=i\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}.$$
Et alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left|\zeta^k-1\right|=\frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.21

À l'exception de la dernière équation, il n'y a pas grand chose à dire : il suffit d'appliquer la méthode...

1. Le discriminant vaut $\Delta = (5-2i)^2 - 20(1-i) = 25 - 20i - 4 - 20 + 20i = 1$.
Donc les racines de l'équation sont $z_1 = -2+i$ et $z_2 = -3+i$.

2. $\Delta = -3+4i$. On a alors $(a+ib)^2 = \Delta$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2+b^2 = |\Delta|^2 = 5 \\ 2ab = 4 \\ a^2-b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Les deux racines carrées de Δ sont donc $1+2i$ et $-1-2i$, de sorte que les solutions de l'équation sont $2i$ et -1.

3. Commençons par résoudre $Z^2 - Z + (1-i) = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $Z_1 = -i$ et $Z_2 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Les solutions de l'équation de départ sont donc les racines carrées de Z_1 et de Z_2, qui sont au nombre de 4 et sont

$$e^{-i\frac{\pi}{4}},\ -e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ et } \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.22

1. Rappelons un résultat traité dans un exemple du cours : les couples de solutions du système $\begin{cases} x+y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les couples formés des deux racines de $X^2 - sX + p$.
Donc ici, il s'agit de déterminer les racines de $X^2 - 4X + 5$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $-4 = (2i)^2$, et donc les deux racines sont $2 \pm i$, de sorte que les deux couples de solutions du système $\begin{cases} x+y = 4 \\ xy = 5 \end{cases}$ sont $(2+i, 2-i)$ et $(2-i, 2+i)$.
De même, pour le second système, il s'agit de déterminer les racines de $X^2-(3-2i)X+5-i$.
Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = (3-2i)^2 - 4(5-i) = -15-8i$.
Cherchons alors $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
On a alors

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) \\ a^2+b^2 = \sqrt{|\Delta|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -15 \\ ab = -4 \\ a^2+b^2 = \sqrt{289} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 16 \\ ab = -4 \end{cases}$$

On a donc $a = \pm 1$, $b = \pm 4$, et puisque a et b sont de signes opposés, les deux racines carrées complexes de Δ sont $\delta = 1-4i$ et $\delta_2 = -\delta_1 = -1+4i$.
On en déduit que les racines de $X^2 - (3-2i)X + 5 - i$ sont $\dfrac{3-2i+1-4i}{2} = 2-3i$ et $\dfrac{3-2i-1+4i}{2} = 1+i$.
Et donc les couples solutions au système initial sont $(1+i, 2-3i)$ et $(2-3i, 1+i)$.

> **Remarque**
> Sauf en cas de racine double, il y a deux tels couples, obtenus en échangeant les racines.

2. Notons que si x et y sont les deux côtés d'un rectangle, alors son aire est $a = xy$ et son périmètre est $p = 2(x+y) \Leftrightarrow x+y = \dfrac{p}{2}$.
Et donc on a $p = \lambda\sqrt{a} \Leftrightarrow x+y = \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2}$.
Si l'aire $a > 0$ est fixée, il s'agit donc de trouver les valeurs de λ pour lesquelles le système $\begin{cases} xy = a \\ x+y = \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2} \end{cases}$.
C'est-à-dire les valeurs pour lesquelles l'équation $x^2 - \dfrac{\lambda\sqrt{a}}{2}x + a = 0$ possède des solutions réelles.
Or le discriminant de cette équation vaut $\dfrac{\lambda^2 a}{4} - 4a = \dfrac{a}{4}(\lambda^2 - 16)$.
Il est donc positif ou nul si et seulement si $\lambda \geqslant 4$.

Quelques commentaires *: nous venons de prouver que le rapport entre le périmètre d'un rectangle et son aire[5] ne peut pas être aussi petit que l'on veut.*

Autrement dit, à périmètre p fixé, l'aire d'un rectangle ne peut pas dépasser $\frac{p^2}{16}$. *C'est assez intuitif : on ne peut avoir une aire très grande pour un rectangle de petit périmètre (mais on peut avoir une aire très petite pour un rectangle de grand périmètre.)*

On pourrait d'ailleurs prouver que cette borne $\frac{p^2}{16}$ *est atteinte uniquement pour les carrés.*

De manière générale, à périmètre fixé, la «figure»[6] avec la plus grande aire est le disque, pour laquelle on a $a = \frac{p^2}{4\pi}$.

[5] Notons que ces grandeurs sont homogènes, comme disent les physiciens.

[6] Le terme est vague, mais donner une définition précise nous emmènerait trop loin.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.23

1. Il est clair que 0 est solution. Cherchons donc les solutions non nulles sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
Alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ et $\overline{z} = re^{-i\theta}$.
On a donc $z^2 = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ e^{2i\theta} = e^{-i\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ e^{3i\theta} = 1 \end{cases}$
Or, $e^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $z = e^{i\theta}$ est une racine cubique de l'unité, donc si et seulement si $z \in \{1, j, j^2\}$.
Et donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\{0, 1, j, j^2\}$.

2. De nouveau, remarquons que 0 est solution, et cherchons les solutions non nulles sous la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$.
Alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ et $-\overline{z^2} = -r^2 e^{-2i\theta} = r^2 e^{i(\pi - 2\theta)}$.
Et donc $z^2 = -\overline{z}^2$ si et seulement si $e^{2i\theta} = e^{i(\pi-2\theta)}$, soit si et seulement si
$$2\theta = \pi - 2\theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad [\frac{\pi}{2}].$$
Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des complexes qui ont pour argument $\pm\frac{\pi}{4}$ ou $\pm\frac{3\pi}{4}$.

Autrement dit
Les solutions sont les complexes dont l'image est sur l'une des deux bissectrices d'équations $y = \pm x$.

3. Une fois de plus, 0 est solution, et nous cherchons les solutions non nulles sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$. Alors $z^2 = 2\overline{z} \Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = 2re^{-i\theta}$.
Donc z est solution de $z^2 = 2\overline{z}$ si et seulement si
$$r^2 = 2r \Leftrightarrow r = 2 \text{ et } e^{2i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = 1 \Leftrightarrow e^{i\theta} \in \left\{1, j, j^2\right\}.$$
Et donc les solutions de l'équation sont $0, 2, 2j, 2j^2$.

4. Un complexe z est solution si et seulement si $z^2\overline{z}^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^4 = 1$.
Et donc si et seulement si $|z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}$.

Rappel
$z\overline{z} = |z|^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.24

Cherchons z sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On a alors
$$z^2 + 2|z| - 3 = 0 \Leftrightarrow r^2 e^{i2\theta} + 2r - 3 = 0.$$
En particulier, si z est solution, alors $r^2 e^{2i\theta} = 3 - 2r$.
Ces deux complexes, doivent donc avoir le même module.
Le module de $r^2 e^{2i\theta}$ est r^2. En revanche, le module de $3 - 2r$ est $|3 - 2r|$.

► **Si** $3 - 2r \geqslant 0 \Leftrightarrow r \leqslant \frac{3}{2}$: alors $|3 - 2r| = 3 - 2r$.
Et donc on a $r^2 = 3 - 2r \Leftrightarrow r^2 + 2r - 3 = 0$.
Les solutions de cette équation sont 1 et -3. Et donc la seule solution positive[7] est $r = 1$.
Reste donc alors $e^{2i\theta} = 3 - 2 = 1$, de sorte que $2\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ et donc $\theta \equiv 0 \quad [\pi]$.
Ainsi, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, de sorte que $z = e^{i0} = 1$ ou $z = e^{i\pi} = -1$.

[7] Rappelons qu'on a supposé $r > 0$.

► **Si** $3 - 2r < 0 \Leftrightarrow r > \frac{3}{2}$: alors $|3 - 2r| = 2r - 3$.
On a alors $r^2 = 2r - 3 \Leftrightarrow r^2 - 2r + 3 = 0$.
Mais ce polynôme de degré 2 possède un discriminant égal à $-8 < 0$, et donc ne possède

pas de solution réelle.

Ainsi, les seules solutions possibles de l'équation sont 1 et -1.
Il est aisé de vérifier que ce sont bien des solutions, et donc que l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1, 1\}$.
Quelques commentaires *: il est assez facile de voir que -1 et 1 sont solutions. Une erreur à ne pas commettre serait de dire qu'on a là deux solutions, et qu'il s'agit d'une équation de degré deux qui ne possède donc au plus que deux solutions, ce qui prouverait donc sans calculs qu'on a toutes les solutions.*
En effet, notre équation de départ ***n'est pas une équation polynomiale de degré*** *2 en raison de la présence du module de z. Une équation polynomiale serait de la forme $az^2 + bz + c = 0$.*

Vérification ?
Notons que nous n'avons pas procédé par équivalences, mais par implications.
Autrement dit, nous avons effectué un raisonnement par analyse-synthèse, l'analyse nous disant que si z est solution alors $z = \pm 1$.
La synthèse consiste donc à vérifier que ce sont bien des solutions.

Solution de l'exercice 6.25

Écrivons $z = a + ib$ sous forme algébrique. Alors

$$\frac{z+2}{1+iz} = \frac{(z+2)(1-i\overline{z})}{|1+iz|^2} = \frac{z+2-i|z|^2-2i\overline{z}}{|1+iz|^2}.$$

Et donc

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{1+iz}\right) = \frac{1}{|1+iz|^2}\left(b-|z|^2-2a\right) = \frac{1}{|1+iz|^2}\left(b-a^2-b^2-2a\right).$$

On en déduit que $\dfrac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R}$ si et seulement si $b-a^2-b^2-2a = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+2a-b = 0$.
Mais $a^2+2a+b^2-b = (a+1)^2-1+b^2-b = (a+1)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$, de sorte que

$$\frac{z+2}{1+iz} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (a+1)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

On reconnaît là l'équation d'un cercle de centre $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Notons que ceci se retrouve directement à l'aide des complexes, en notant que la condition obtenue n'est autre que

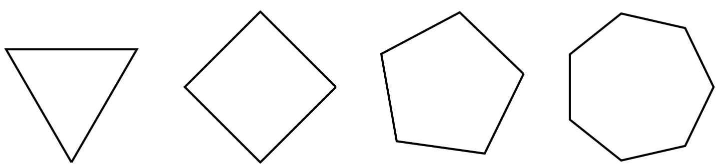
$$\left|z-\left(-1+i\frac{1}{2}\right)\right|^2 = \frac{5}{4}.$$

Et donc l'ensemble cherché est le cercle centré en le point d'affixe $-1+i\dfrac{1}{2}$, et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé de i.

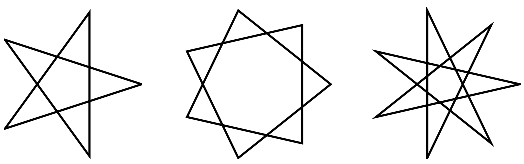
Remarque
Il est facile de vérifier que i appartient à ce cercle.

Solution de l'exercice 6.26

Nous ne donnons pas de définition de polygone convexe régulier, mais il s'agit bien de ceux auxquels vous pensez :



Il existe tout de même des polygones réguliers[8] qui ne sont pas convexes (on parle alors de polygones étoilés). Par exemple ceux qui se trouvent ci-dessous :



[8] Dont tous les côtés sont de même longueur.

Enfin, direct signifie que les sommets sont parcourus dans le sens trigonométrique.

Si Ω est le centre[9] du polygone, alors pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, M_{k+1} est l'image de M_k par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

[9] L'intersection des médiatrices des segments joignant deux sommets distincts.

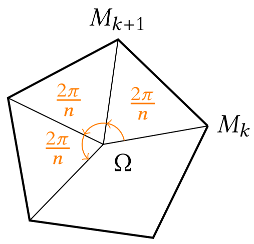


FIGURE 6.1 – Chaque sommet se déduit du précédent par une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

Soit encore, en notant ω l'affixe de Ω,

$$z_{k+1} - \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}(z_k - \omega).$$

Notons alors $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, de sorte que la relation précédente nous donne

$$z_{k+1} - \omega = \zeta(z_k - \omega).$$

Une récurrence rapide[10] prouve qu'alors

$$z_k - \omega = \zeta^k(z_0 - \omega).$$

[10] Ou plus simplement le fait que M_k est l'image de M_0 par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$.

Ceci est en particulier vrai pour $k = 1$, ce qui nous donne une relation entre ω, z_0 et z_1 :

$$z_1 - \omega = \zeta(z_0 - \omega) \Leftrightarrow \omega(\zeta - 1) = \zeta z_0 - z_1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\zeta z_0 - z_1}{\zeta - 1}.$$

Et donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$z_k = \omega + \zeta^k(z_0 - \omega) = \frac{\zeta z_0 - z_1}{\zeta - 1} + \frac{\zeta^k(z_1 - z_0)}{\zeta - 1}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.27

Considérons deux rotations r_1 et r_2 de centres respectifs (Ω_1) et (Ω_2) et d'angles θ_1 et θ_2.
Alors la fonction complexe associée à $r_1 \circ r_2$ est

$$z \mapsto \omega_1 + e^{i\theta_1}\left(e^{i\theta_2}(z - \omega_2) + \omega_2 - \omega_1\right) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega_2 + e^{i\theta_1}(\omega_2 - \omega_1) + \omega_1.$$

Rappel
Si on souhaite l'affixe du centre de rotation, il s'agit de l'unique point fixe de $r_1 \circ r_2$.

Étant de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, c'est une similitude, de rapport 1 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$, c'est donc une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
Sauf dans le cas où $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi]$, auquel cas $a = 1$, et nous sommes en présence d'une translation[11].

[11] Mais une translation est une similitude directe, qui possède 1 comme rapport et 0 comme angle.

On prouve de même que la composée de deux homothéties de rapports λ_1 et λ_2 est une homothétie de rapport $\lambda_1\lambda_2$, sauf si $\lambda_1\lambda_2 = 1$, auquel cas nous sommes en présence d'une translation.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.28

Méthode
L'angle θ et le rapport r de la similitude associée à $z \mapsto az + b$ sont donnés par la forme exponentielle de $a = re^{i\theta}$.
Et son centre en est l'unique point fixe.

1. Puisque nous avons reconnu une fonction affine de z, il s'agit bien d'une similitude directe.
Puisque $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, son rapport vaut 2 et son angle vaut $\dfrac{\pi}{3}$.
Enfin, son centre est son unique point fixe. Mais $\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - i\sqrt{3} = z \Leftrightarrow z = 1$.
Et donc la similitude en question possède pour centre $(1, 0)$ (le point d'affixe 1).

2. Travaillons plutôt avec les fonctions complexes associées à ces transformations, que nous appellerons encore r et t pour alléger les notations.
On a $t : z \mapsto z + (-1)$ et $r : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}}(z-0)+0 = iz$.
Et donc pour $z \in \mathbf{C}$,

$$(t \circ r \circ t)(z) = i(z-1) - 1 = iz - (1+i).$$

Puisque $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, il s'agit d'une similitude de rapport 1 (donc d'une rotation !) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
De plus, on a $iz - (1+i) = z \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{i-1} = -i$.
Donc $t \circ r \circ t$ est la rotation de centre $(0,-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
De même, pour $z \in \mathbf{C}$, on a

$$(r \circ t \circ r)(z) = i(iz-1) = -z - i.$$

Puisque $-1 = e^{i\pi}$, il s'agit d'une rotation d'angle π (qui est une symétrie centrale).
Son centre est alors le point d'affixe $-\frac{i}{2}$, c'est-à-dire $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

3. Soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.
Soit $y \in \mathbf{C}$ fixé. Prouvons que y possède un unique antécédent par f.
Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $f(z) = y \Leftrightarrow az + b = y \Leftrightarrow z = \dfrac{y-b}{a}$.
Et donc non seulement y possède un unique antécédent, mais en plus nous connaissons cet antécédent. Donc f réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$ et $f^{-1} : z \mapsto \dfrac{z-b}{a}$.
Si f est une translation (si $a = 1$), alors f^{-1} est encore une translation, de vecteur opposé à celui de f.
Si f possède un point fixe ω, alors $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow f^{-1}(\omega) = \omega$.
Donc ω est également le centre de f^{-1}. Le rapport de f^{-1} est $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$, qui est donc l'inverse de celui de f, et son angle est $\arg\left(\frac{1}{a}\right) = -\arg(a)$, qui est donc l'opposé de l'angle de f.
Ainsi, si f est la similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle θ, alors f^{-1} est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{\lambda}$ et d'angle $-\theta$.
Notons en particulier que la bijection réciproque d'une rotation est une rotation de même centre, et de même la bijection réciproque d'une homothétie est une homothétie de même centre.

Intuition
Le résultat est assez peu surprenant : pour «inverser f» une similitude, il suffit de tourner, par rapport au même centre, d'un angle opposé si f multipliait les longueurs par λ, il faut les diviser par λ.

Solution de l'exercice 6.29

1. Il est évident que $z = 1$ convient. Nous supposons dans la suite que $z \neq 1$.
Notons A, B, C les points d'affixes respectives $1, z, z^2$.
Alors A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (z-1) = \lambda(z^2-1)$.
Soit encore si et seulement si $\dfrac{z^2-1}{z-1} \in \mathbf{R}$.
Soit si et seulement si $z + 1 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.
Et donc la condition nécessaire et suffisante cherchée est $z \in \mathbf{R}$.

2. Laissons de côté les cas où $z = 0$ ou $z = 1$, puisqu'alors les trois sommets du triangle sont confondus.
Notons alors A, B, C les points d'affixes respectives z, z^2, z^3. Alors ABC est rectangle en B si et seulement si $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Donc si et seulement si $\dfrac{z^3-z^2}{z-z^2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \dfrac{z^2(z-1)}{z(1-z)} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow -z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 6.30

1. On a $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}+i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$. Et donc $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

2. Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.
Soit si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Traduisons ceci en termes d'affixes : ABC est équilatéral direct si et seulement si

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow c - a = -j^2(b-a) \Leftrightarrow c + bj^2 - a(1+j^2) = 0.$$

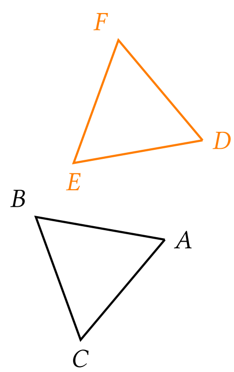


Figure 6.2– ABC est direct. DEF est indirect (donc DFE est direct).

Or, nous savons que $1 + j + j^2 = 0$ et donc $1 + j^2 = -j$.
Donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $c + bj^2 + aj = 0$, ce qui, après multiplication par j^2 est équivalent à $a + bj + cj^2 = 0$.

3. Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si il est équilatéral direct, ou si il est équilatéral indirect[12].
Mais il est équilatéral indirect si et seulement si ACB est équilatéral direct, soit si et seulement si $a + cj + bj^2 = 0$.
Et donc ABC est équilatéral si et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0 \text{ ou } a + cj + bj^2 = 0 \Leftrightarrow (a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = 0.$$

Mais on a

$$\left(a + bj + cj^2\right)\left(a + cj + bj^2\right) = a^2 + bj^3 + cj^3 + ab\left(j + j^2\right) + ac\left(j + j^2\right) + bc\left(j + j^2\right).$$

Or $j^3 = 1$, et comme précédemment, $1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow j + j^2 = -1$.
Et donc on a toujours[13] $\left(a + bj + cj^2\right)\left(a + cj + bj^2\right) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$.
Et par conséquent, ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

12 On dit parfois aussi rétrograde.

Astuce
Un produit de deux nombres est nul si et seulement si l'un de ces deux nombres est nul !

13 C'est-à-dire quels que soient les complexes a, b et c.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6.31

Notons θ un argument de a, de sorte que $a = e^{i\theta}$.
On peut alors supposer[14] que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$.
Si M_k désigne le point d'affixe $(1 + z_k)^n$, il s'agit donc de prouver que quels que soient $(k, \ell, p) \in [\![0, n-1]\!]^3$ deux à deux distincts[15] alors $\overrightarrow{M_kM_\ell}$ et $\overrightarrow{M_kM_p}$ sont colinéaires.
Ou encore que $\left(\overrightarrow{M_kM_\ell}, \overrightarrow{M_kM_p}\right) \equiv 0 \quad [\pi]$.
Mais plus simplement, en termes d'affixes, cela revient à prouver que $\dfrac{(1 + z_k)^n - (1 + z_\ell)^n}{(1 + z_k)^n - (1 + z_p)^n}$ est réel.
Ce qui signifie que les arguments de $(1 + z_k)^n - (1 + z_\ell)^n$ et $(1 + z_k)^n - (1 + z_p)^n$ sont égaux ou opposés[16] modulo 2π. Donc égaux modulo π.
Essayons donc de calculer un argument de $(1 + z_k)^n - (1 + z_\ell)^n = (1 + z_k)^n \left(1 - \left(\dfrac{1 + z_\ell}{1 + z_k}\right)^n\right)$.
Commençons par un argument de $(1 + z_k)^n$.

$$1 + z_k = 1 + e^{i\frac{\theta + k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{2n}}.$$

Et donc, suivant le signe du cosinus, un argument de $1 + z_k$ est $\dfrac{\theta + 2k\pi}{2n}$ ou $\dfrac{\theta + 2k\pi}{2n} + \pi$.
Donc un argument de $(1 + z_k)^n$ est $\dfrac{\theta}{2} + k\pi$ ou $\dfrac{\theta}{2} + (k + n)\pi$.
Ces deux nombres sont congrus à $\dfrac{\theta}{2}$ modulo π.
Poursuivons donc notre calcul, ... WAIT A MINUTE ! Nous venons de prouver que les $(1 + z_k)^n$ ont tous même argument modulo π.
Autrement dit que $\dfrac{(1 + z_k)^n}{(1 + z_\ell)^n} \in \mathbf{R}$.
Soit encore $\dfrac{(1 + z_k)^n - 0}{(1 + z_\ell)^n - 0} \in \mathbf{R}$.
Ainsi, les points O, M_k et M_ℓ sont alignés.
De même, O, M_k et M_p sont alignés, et donc M_k, M_ℓ et M_p sont alignés. Ainsi, les M_k sont alignés, et sont situés sur la droite passant par O et le point d'affixe $\dfrac{\theta}{2}$.
Quelques commentaires *: en réalité, tout le début de cette correction est inutile, le seul calcul important étant celui de l'argument de $(1 + z_k)^n$.*
Toutefois, au vu de la formulation de la question, rien ne laissait présager que la droite passant par tous les M_k passait aussi par l'origine, et donc il est assez peu probable[17] de penser directement à chercher l'argument de $(1 + z_k)^n$.
Aussi, j'ai tenu à laisser le début de cette correction, certes inutile, mais qui montre une des nombreuses[18] manières de démarrer la résolution d'un tel exercice.

14 Quitte à renuméroter les z_k, ce qui ne change rien pour la suite.

15 Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais montrer que trois points, dont deux confondus sont alignés n'a pas grand intérêt : c'est toujours vrai !

16 Deux vecteurs colinéaires peuvent avoir des sens opposés !

17 En tous cas je ne vois pas de raison «évidente» de le faire.

18 Et je ne prétends d'ailleurs pas que ce soit la plus intelligente qui soit !

7 Introduction aux polynômes et à la décomposition en éléments simples

Nous avons précédemment rencontré des identités telles que $\forall x \notin \{0,-1\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
Une telle écriture permet, entre autres, de déterminer aisément une primitive de la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$: il s'agit de $x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1) = \ln \dfrac{x}{x+1}$.
De telles décompositions apparaissent fréquemment lorsque nous considérons le quotient de deux fonctions polynomiales, et le but de ce chapitre est essentiellement de se familiariser avec les techniques permettant de trouver ces décompositions. Rien ou presque ne sera démontré ici, et toute la théorie est repoussée à un chapitre ultérieur.

Le seul but de ce chapitre est de vous donner des méthodes pratiques pour calculer ce que nous allons nommer une décomposition en éléments simples, car nous en aurons besoin prochainement pour calculer des primitives de quotients de polynômes, mais aussi car vous les utiliserez en S.I.

7.1 Polynômes

7.1.1 Définitions

La définition qui suit d'un polynôme est très provisoire, et correspond plutôt à ce que nous nommerons plus tard une fonction polynomiale. Mais nous verrons que dans ce contexte, les deux définitions sont équivalentes.

Définition 7.1 – On appelle **polynôme** toute fonction P définie sur $\mathbf{R}$ de la forme $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, avec $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit alors P est de **degré** n, et on note $\deg(P) = n$.
Par convention, on décrète que le polynôme nul[1] est de degré égal à $-\infty$.
Si P est de degré n, son coefficient en x^n (ici a_n) est appelé **coefficient dominant** de P.

[1] La fonction nulle.

Remarques. ▸ On note généralement X plutôt que x la variable dont dépend P.
Et on parlera du polynôme $X^2 + 3X + 1$ plutôt que de la fonction $x \mapsto x^2 + 3x + 1$.
▸ Le degré d'un polynôme est donc la plus grande puissance de X qui apparaît précédée d'un coefficient non nul dans l'expression de P, et ce coefficient est le coefficient dominant.
Par exemple $P(X) = -2X^3 + 3X + 1$ est de degré 3 et de coefficient dominant -2. De même, $Q(X) = X^3 + 4X^2$ est de degré 3 et de coefficient dominant 1.
Et $P(X) + 2Q(X) = 8X^2 + 3X + 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant 8.
▸ Un polynôme est de degré inférieur ou égal à 0 si et seulement si il est constant. Plus précisément, les polynômes constants non nuls sont de degré 0 et le polynôme nul est de degré $-\infty$.
▸ Toutes les puissances de X qui apparaissent sont des entiers positifs. Et donc par exemple $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ **ne sont pas des polynômes.**

Remarque
On constate sur cet exemple que le degré d'une somme peut être strictement inférieur aux degrés des deux polynômes de la somme.

Proposition 7.2 (Unicité des coefficients) : *Si $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $Q : x \mapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ sont égales*[2]*, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.*
Autrement dit deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

[2] C'est-à-dire prennent la même valeur en tout $x \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Supposons P et Q égales, et supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $a_k \neq b_k$.
Notons i le plus grand $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_i \neq b_i$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 = P(x) - Q(x) = (a_i - b_i)x^i + (a_{i-1} - b_{i-1})x^{i-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$.

Soit encore : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 = x^i \left[\underbrace{(a_i - b_i)}_{\neq 0} + \dfrac{a_{i-1} - b_{i-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_0 - b_0}{x^i}\right]$.

Si $i > 0$, alors le membre de droite tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui est absurde.
Et si $i = 0$, on obtient tout simplement $0 = a_0 - b_0 \Leftrightarrow a_0 = b_0$, contredisant la définition de i.
On en déduit donc que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$. □

Remarque. Ceci justifie donc qu'on parle **du** degré de P : il n'y a pas ambiguïté sur ce degré, qui est défini de manière unique puisqu'il n'y a qu'un seul moyen d'écrire f comme somme de termes de la forme $a_k x^k$.
Et de même, on parle donc **du** coefficient de degré k de P.

Définition 7.3 – Soit P un polynôme, et soit $a \in \mathbf{C}$. Si $P(a) = 0$, on dit que a est une **racine** de P.

Réel/complexe

Notons qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes, par exemple i est racine de $X^2 + 1$.

Il est aisé de constater que la somme de deux polynômes est encore un polynôme, et que le coefficient de degré k de $P + Q$ est la somme des coefficients de degrés k de P et Q.
De même, le produit de deux polynômes est également un polynôme.
Il faut alors travailler un peu plus pour exprimer les coefficients de $P \times Q$ en fonction de ceux de P et Q : notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_n b_n x^{2n}. \end{aligned}$$

On prouve alors que le coefficient de degré p de PQ est $\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$.

Ceci peut se prouver sans les pointillés ci-dessus, mais c'est moins agréable[3] : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

[3] Et probablement moins convaincant.

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{p} b_k x^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} a_k b_i x^{k+i} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p} \sum_{k+i=\ell} a_k b_i x^{k+i} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p} \left(\sum_{k+i=\ell} a_k b_i\right) x^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+p} \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}\right) x^\ell. \end{aligned}$$

Détails

Il s'agit d'une sommation par paquets, où on a écrit

$$I = [\![0, n]\!] \times [\![0, p]\!]$$

sous la forme $\bigcup_{\ell=0}^{p+n} I_\ell$ où

$$I_\ell = \{(k, i) \in I \mid k + i = \ell\}.$$

7.1.2 Division euclidienne des polynômes

La division euclidienne des entiers relatifs vous est familière depuis longtemps : c'est celle avec les restes que vous avez apprise au primaire[4].

[4] Et vous êtes parfois empressé d'oublier depuis !

La division de a par b est de la forme $a = bq + r$, où q est un entier appelé quotient de a par b et r est un entier tel que $0 \leqslant r < |b|$, qu'on appelle le reste de la division de a par b.
Ainsi, $151 = 11 \times 13 + 8$ est la division euclidienne de 151 par 13 : son quotient vaut 11 et son reste vaut 8.
Une telle division existe aussi pour les polynômes :

Remarque
Il s'agit aussi de la division euclidienne de 151 par 11, mais dans ce cas, le quotient vaut 13.

Théorème 7.4 : *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes avec $\deg R < \deg(B)$ tel que $A = BQ + R$.*
On dit alors que Q est le quotient de A par B et que R est le reste de la division euclidienne de A par B.
Si $R = 0$, on dit que B divise A.

Une fois n'est pas coutume, repoussons la preuve à plus tard, et essayons de comprendre comment trouver une telle division. Le principe est essentiellement le même que pour la division euclidienne des entiers, et nous allons également «poser» les divisions. Contentons nous d'un exemple commenté : la division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$.

On commence par chercher par quel monôme multiplier $X^2 - X + 2$ pour faire apparaître un polynôme dont le terme de plus haut degré est $3X^4$.
On calcule alors $3X^2 \times (X^2 - X + 2)$.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
\boxed{3X^4} & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & \boxed{3X^2} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|ccc}
(1) & 3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{7-9}
(2) & 3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & & \\ \cline{2-6}
(1)-(2) & & -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & &
\end{array}$$

On soustrait les deux lignes précédentes.

On recommence...

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & \boxed{-2X} & \\ \cline{1-5}
& \boxed{-2X^3} & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & -8X^2 & +5X & -1 & & &
\end{array}$$

Jusqu'à obtenir un polynôme de degré strictement inférieur à celui du diviseur.
On s'arrête alors ici.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
3X^4 & -5X^3 & & +X & -1 & X^2 & -X & +2 \\ \cline{6-8}
3X^4 & -3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & -2X & \boxed{-8} \\ \cline{1-5}
& -2X^3 & -6X^2 & +X & -1 & & & \\
& -2X^3 & +2X^2 & -4X & & & & \\ \cline{2-5}
& & \boxed{-8X^2} & +5X & -1 & & & \\
& & -8X^2 & +8X & -16 & & & \\ \cline{3-5}
& & & \boxed{-3X} & \boxed{+15} & & &
\end{array}$$

Le quotient est alors ici.

Et le reste est là.

La division euclidienne de $3X^4 - 5X^3 + X - 1$ par $X^2 - X + 2$ est donc

$$3X^4 - 5X^3 + X - 1 = (3X^2 - 2X - 8)(X^2 - X + 2) + (-3X + 15).$$

Son quotient est $3X^2 - 2X - 8$ et son reste est $-3X + 15$.

Corollaire 7.5 (Factorisation par les racines) – *Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ une racine de P. Alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P = (X-\alpha)Q$.*

Démonstration. Réalisons la division euclidienne de P par $X - \alpha$: il existe Q, R deux polynômes avec $\deg R < \deg(X - \alpha)$ tels que $P(X) = (X - \alpha)Q + R$.
Mais puisque $\deg(X-\alpha) = 1$, $\deg R < 1$, donc R est une constante. Notons λ cette constante.
En évaluant en $X = \alpha$, il vient $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + \lambda \Leftrightarrow 0 = \lambda$.
Et donc $P = (X - \alpha)Q$. Puisque le degré d'un produit est la somme des degrés, nécessairement $\deg Q = n - 1$. □

Notons que la division euclidienne nous permet alors de trouver Q aisément, sans avoir à résoudre de système. Par exemple, 1 est une racine évidente de $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et donc en réalisant la division euclidienne de $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ par $X - 1$, on obtient :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -2X^3 & +2X^2 & -2X & +1 & X-1 \\
\cline{6-6}
X^4 & -X^3 & & & & X^3 - X^2 + X - 1 \\
\cline{1-5}
 & -X^3 & +2X^2 & -2X & +1 & \\
 & -X^3 & +X^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & X^2 & -2X & +1 & \\
 & & X^2 & -X & & \\
\cline{3-5}
 & & & -X & +1 & \\
 & & & -X & +1 & \\
\cline{4-5}
 & & & & +0 &
\end{array}
$$

Et donc $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X - 1)(X^3 - X^2 + X - 1)$.

Corollaire 7.6 – *Un polynôme de degré $n \in \mathbf{N}^*$ possède au plus n racines .*

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 1$, prouvons $\mathscr{P}(n)$: «tout polynôme de degré n possède au plus n racines réelles».
Si P est de degré 1, alors il possède exactement une racine réelle.

> **Détails**
> L'unique racine de $aX + b$ est $-\frac{b}{a}$.

Supposons que tout polynôme de degré n possède au plus n racines, et soit P un polynôme de degré $n + 1$.
Alors soit P ne possède pas de racines réelles, auquel cas il n'y a rien à dire.
Soit P possède une racine réelle λ. Et alors il existe Q polynôme de degré n tel que $P = (X - \lambda)Q$.
Mais un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, donc les racines de P sont λ et les racines de Q.
Puisque Q possède au plus n racines réelles, P en possède au plus $n + 1$.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

> **Remarque**
> Notons que si λ est déjà une racine de Q, alors P possède au plus n racines distinctes.

Corollaire 7.7 – *Le seul polynôme qui possède une infinité de racines est le polynôme nul.*

Démonstration. Un polynôme non nul ne possède qu'un nombre fini de racines. □

Corollaire 7.8 – *Si P et Q sont deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en $n + 1$ valeurs, alors ils sont égaux.*
En particulier, deux polynômes qui coïncident en une infinité de valeurs sont égaux.

Démonstration. Soient P, Q deux polynômes de degré au plus n, et soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i)$.
Alors $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des racines de $R = P - Q$, qui est un polynôme de degré au plus n.

Possédant strictement plus de racines que son degré, c'est qu'il est nul, donc $R = 0 \Leftrightarrow P = Q$. □

En particulier, deux polynômes qui coïncident sur $\mathbf{N}$ ou sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$ sont égaux.

7.1.3 Factorisation en produit d'irréductibles

Encore une fois, donnons une définition provisoire sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Définition 7.9 – Un polynôme à coefficients réels est dit **irréductible** s'il est de degré 1 ou de degré 2 sans racines réelles (donc de discriminant strictement négatif). Autrement dit, un polynôme irréductible est un polynôme de la forme $aX + b, (a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, ou de la forme $aX^2 + bX + c$, où $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Les polynômes irréductibles sont alors les «briques élémentaires» à partir desquelles on peut former tous les polynômes :

Théorème 7.10 : *Tout polynôme se décompose de manière unique comme produit de facteurs irréductibles. Ainsi, pour tout polynôme P s'écrit*

$$P = a \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{m_j}$$

où a est un réel non nul, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, b_1, c_1, \ldots, b_q, c_q$ sont des réels, $n_1, \ldots, n_p, m_1, \ldots, m_q$ sont des entiers strictement positifs et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $b_j^2 - 4c_j < 0$.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près, et s'appelle la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

Remarques. ► Il est aisé de se convaincre que a est le coefficient dominant de P, et que les λ_i sont les racines réelles de P.
Dans le cas où $n_i > 1$, on dit que λ_i est une racine multiple de P (racine double si $n_i = 2$, racine triple si $n_i = 3$, etc).
► Ce théorème est l'analogue du théorème qui affirme que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de nombres premiers.
Les nombres premiers étaient alors définis comme les entiers qui ne s'écrivaient pas comme produit d'entiers plus petits.
Nous (re)-définirons plus tard les polynômes irréductibles comme étant les polynômes qui ne sont pas produit de deux polynômes de degré inférieur.
La définition que nous venons de donner de polynômes irréductibles cache en fait un résultat fortement non trivial, à savoir que tout polynôme à coefficients réels peut se décomposer en produit de polynômes de degré 1 ou 2.

⚠ Il n'y a pas de méthode générale pour trouver à coup sûr la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles. Par exemple, je serais bien embêté de donner la décomposition de $X^5 - 5X - 1$ en produit de facteurs irréductibles.
Bien que je puisse prouver à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que ce polynôme possède exactement trois racines, je ne sais pas calculer la valeur exacte de ces racines.
Et donc je peux dire qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a, b$ tels que
$X^5 - 5X - 1 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)(X^2 + aX + b)$, mais sans savoir calculer les valeurs exactes de ces réels.

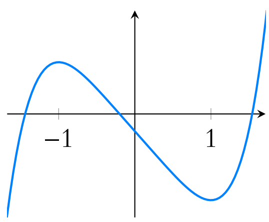


FIGURE 7.1– $x \mapsto x^5 - 5x - 1$.

Exemple 7.11

Soit $P(X) = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 4X^2$.
Alors $P(X) = 2X^2(X^3 - 2X^2 - X + 2)$. On constate alors aisément que 1 est racine évidente et donc que $P(X) = 2X^2(X - 1)(X^2 - X - 2)$.
Il ne s'agit pas encore de la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P puisque $X^2 - X - 2$ n'est pas irréductible : il s'écrit sous la forme $(X - 2)(X + 1)$.

Donc la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles est $P(X) = 2X^2(X-1)(X+1)(X-2)$.

7.2 Décomposition en éléments simples

Définition 7.12 – On appelle **fraction rationnelle** toute fonction qui, sur son ensemble de définition, est de la forme $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes.
Le degré de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est alors par définition égal à $\deg(P) - \deg(Q)$.

Les points où $\dfrac{P}{Q}$ n'est pas défini sont les racines de Q, qu'on appelle aussi les **pôles** de $\dfrac{P}{Q}$.
On parle de pôle simple pour une racine simple de Q, de pôle double pour une racine double de Q, etc.

Exemple 7.13

$\dfrac{1}{X^2+1}$ est une fraction rationnelle de degré -2.
$\dfrac{X^3+X}{(X-1)(X-2)}$ est une fraction rationnelle de degré $3-2=1$.

Dans tout ce qui suit, nous ne intéresserons qu'aux fractions rationnelles dont le degré est strictement négatif, c'est-à-dire de la forme $\dfrac{P}{Q}$, avec $\deg Q > \deg P$.
Si jamais ce n'est pas le cas on commencera par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
Plus précisément, si $P = AQ + R$ est la division euclidienne de P par Q, alors

$$\frac{P}{Q} = \frac{AQ+R}{Q} = A + \frac{R}{Q} \text{ avec } \deg R < \deg Q.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons donc $\deg P < \deg Q$.
Notons que, quitte à effectuer des simplifications, on peut supposer que P et Q n'ont pas de facteurs irréductibles communs.
Par exemple,

$$\frac{X^2+X-2}{X^3-4X^2+5X-2} = \frac{(X-1)(X+2)}{(X-2)(X-1)^2} = \frac{X+2}{(X-1)(X-2)}.$$

Il existe alors une décomposition de $\dfrac{P}{Q}$ comme somme d'éléments, dits **éléments simples**, de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ ou $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$, où X^2+aX+b est irréductible (c'est-à-dire vérifie $a^2-4b<0$).
Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a}{(X-\lambda)^m}$ sont appelées **éléments simples de première espèce** et les fractions de la forme $\dfrac{cX+d}{(X^2+aX+b)^m}$ sont appelées **éléments simples de seconde espèce.**

Une fois encore, les énoncés précis viendront plus tard, essayons plutôt de comprendre sur des exemples sous quelle forme chercher la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

La règle générale, qui est à peur près tout ce que vous devez retenir, est que les éléments simples qui apparaissent dans la décomposition ont pour dénominateurs des puissances des facteurs irréductibles de Q, avec des puissances qui n'excédent pas celles qui apparaissent dans la décomposition en facteurs irréductibles de Q.

Exemples 7.14

- $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{P}{Q}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$

En effet, le facteur $X-1$ apparaît à la puissance 1 dans la décomposition de Q, et donc il n'y aura qu'un terme en $\dfrac{1}{X-1}$ dans la décomposition de $\dfrac{P}{Q}$.
De même, $X+2$ apparaît à la puissance 2 dans Q, et donc la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ ne contient que des termes en $\dfrac{1}{X+2}$ et en $\dfrac{1}{(X+2)^2}$.

- $\dfrac{X^3-3X+1}{(X+1)^3(X+4)(X^2+1)^2}$ possède une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{(X+1)^3} + \frac{d}{X+4} + \frac{eX+f}{X^2+1} + \frac{gX+h}{(X^2+1)^2}.$$

Une fois admise l'existence d'une telle décomposition, la vraie question est «comment trouver les valeurs des coefficients $a, b, c, \dots$ dans les écritures ci-dessus ?»

Il existe plusieurs méthodes, plus ou moins efficaces suivant les cas.
Commençons par la méthode «naïve», qui fonctionne à tous les coups, mais peut conduire à des calculs laborieux : la mise au même dénominateur.

Exemple 7.15

Nous venons de dire qu'il existe des réels a, b, c tels que

$$\frac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2} &= \frac{a(X+2)^2 + b(X-1)(X+2) + c(X-1)}{(X-1)(X+2)^2}\\
&= \frac{a(X^2+4X+4) + b(X^2+X-2) + cX - c}{(X-1)(X+2)^2}\\
&= \frac{(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c)}{(X-1)(X+2)^2}.
\end{aligned}$$

Et donc pour avoir $\dfrac{X^2+2X+1}{(X-1)(X+2)^2} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+2} + \dfrac{c}{(X+2)^2}$, il suffit d'avoir

$$(a+b)X^2 + (4a+b+c)X + (4a-2b-c) = X^2+2X+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b+c=2 \\ 4a-2b-c=1 \end{cases}.$$

Système

Ce système vient de l'identification des coefficients en X^2, en X et du coefficient constant.
Puisque nous avons admis qu'une telle décomposition existe, il est sûr que ce système admet des solutions (et en fait une unique solution).

Il ne reste donc qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b+c=2 \\ 4a-2b-c=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b=1 \\ -3b+c=-2 \\ -6b-c=-3 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a+b=1 \\ -3b+c=-2 \\ -3c=1 \end{cases}$$

On trouve alors une unique solution, qui est $a=\dfrac{4}{9}$, $b=\dfrac{5}{9}$, $c=-\dfrac{1}{3}$.

Cette méthode, bien que fonctionnant toujours, peut vite s'avérer laborieuse en termes de calculs, et mener à des systèmes qui comportent de nombreuses inconnues[5].
Une autre méthode consiste à multiplier par $(X-\lambda)^m$, puis à évaluer la relation obtenue en $X=\lambda$.

[5] Et donc de gros risques d'erreurs de calcul !

Exemple 7.16

Il existe a, b, c tels que $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{(X+1)^2}$ $(\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2} = a + \frac{b(X-3)}{X+1} + \frac{c(X-3)}{(X+1)^2}.$$

En prenant alors $X=3$, il ne reste que

$$\frac{27-9-2}{(3+1)^2} = a + \frac{0}{3+1} + \frac{0}{(3+1)^2} \Leftrightarrow a = 1.$$

De même, en multipliant la relation $(\star)$ par $(X+1)^2$, il vient

$$\frac{3X^2-3X-2}{X-3} = \frac{a(X+1)^2}{X-3} + b(X+1) + c.$$

En évaluant en $X=-1$, on a donc

$$\frac{3+3-2}{-4} = \frac{0}{-4} + 0 + c \Leftrightarrow c = -1.$$

Toutefois cela ne nous permet pas d'obtenir la valeur de b, et multiplier $(\star)$ par $X+1$ ne saurait suffire. En effet, cela nous conduirait à

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)(X-3)} = \frac{a(X+1)}{X-3} + b + \frac{c}{X+1},$$

relation qui ne peut être évaluée en $X=-1$ puisqu'il reste des $X+1$ aux dénominateurs.
En revanche, s'il ne nous manque que b, nous pouvons utiliser la première méthode de mise au même dénominateur :

$$\frac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(X+1)^2 + b(X+1)(X-3) - (X-3)}{(X+1)^2(X-3)} = \frac{(1+b)X^2 + (1-2b)X + 4 - 3b}{(X+1)^2(X-3)}.$$

Et alors l'identification de n'importe quel coefficient du numérateur nous conduit à $b=2$.
Ainsi, la décomposition cherchée est $\dfrac{3X^2-3X-2}{(X+1)^2(X-3)} = \dfrac{1}{X-3} + \dfrac{2}{X+1} - \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

Remarque
Ce problème apparaît dans le cas de pôles multiples.
Cette méthode est donc particulièrement adaptée pour les pôles simples.

Une objection (tout à fait légitime) que j'entends parfois est la suivante : la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ n'est pas définie en 3, de même que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$.
Donc même après multiplication par $x-3$, elle n'est pas définie en 3, et donc que veut dire «évaluer en $X=3$» ?
Et en effet, faute de bonne définition de fraction rationnelle, il est dur de donner une réponse satisfaisante.
Mais vous pouvez dans ce cas remplacer «multiplier la relation $(\star)$ par $X-3$ puis l'évaluer en $X=3$» par «multiplier $(\star)$ par $X-3$ puis faire tendre X vers 3».
Cette fois, la fonction $x \mapsto (x+3)\dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$ est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{3\}$, et sur cet ensemble elle coïncide avec $x \mapsto \dfrac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2}$. Qui lorsque x tend vers 3, tend vers $\dfrac{3\times 3^2 - 3\times 3 - 2}{(3+1)^2}$, qui est bien la quantité que nous avions trouvée en «évaluant en $X=3$».

Remarque
Si vous ne vous êtes pas posé la question, ne lisez pas la réponse et passez à la suite.

La méthode que nous venons de décrire peut aussi fonctionner lorsque λ est une racine **complexe** d'un facteur irréductible[6] du dénominateur.

[6] Nécessairement de degré 2.

Exemple 7.17

Il existe a, b, c tels que $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{a}{X+1} + \dfrac{bX+c}{X^2+4}$ $(\star)$.
Déjà, en multipliant cette relation par $X+1$, puis en évaluant en $X=-1$, il vient $a=-2$.
D'autre part, les racines complexes de X^2+4 sont $2i$ et $-2i$.
Et donc en multipliant $(\star)$ par X^2+4, il vient

$$\frac{X^2+4X-7}{(X+1)} = \frac{-2(X^2+4)}{X+1} + bX + c.$$

Et donc en évaluant en $X = 2i$, on obtient

$$\frac{-11+8i}{1+2i} = 2bi + c.$$

Soit encore $2bi + c = \dfrac{-11+8i}{1+2i} = \dfrac{(-11+8i)(1-2i)}{5} = \dfrac{5+30i}{5} = 1+6i$.
Puisque b et c sont des réels, il vient donc $c = 1$ et $b = 3$.
Et par conséquent, $\dfrac{X^2+4X-7}{(X^2+4)(X+1)} = \dfrac{-2}{X+1} + \dfrac{3X+1}{X^2+4}$.

Une autre méthode consiste à multiplie la fraction de départ par X, puis à faire tendre X vers $+\infty$, ce qui peut faire apparaître des relations[7] simples entre les différents coefficients de la décomposition en éléments simples.

[7] Et donc permet de réduire le nombre d'inconnues.

Exemple 7.18

Il existe des réels a, b, c tels que $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{a}{X+3} + \dfrac{b}{(X-2)} + \dfrac{c}{(X-2)^2}$.
En multipliant cette relation par $X+3$ et en évaluant en $X=-3$, il vient $a=1$.
Puis en multipliant $(\star)$ par X, on obtient

$$\frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \frac{X}{X+3} + \frac{bX}{X-2} + \frac{cX}{(X-2)^2}.$$

Mais lorsque $X \to +\infty$, il vient

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{-3X^2+16X}{(X+3)(X-2)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^2\left(-3+\frac{16}{X}\right)}{X^3\left(1+\frac{3}{X}\right)\left(1-\frac{2}{X}\right)^2} = 0.$$

Et de même, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{-X}{X+3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-1}{1+\frac{3}{X}} = -1$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{bX}{X-2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{b}{1-\frac{2}{X}} = b$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{cX}{(X-2)^2} = 0$.
Et par conséquent, par identification des limites, $1+b=0 \Leftrightarrow b=-1$.
Enfin, en multipliant $(\star)$ par $(X-2)^2$, et en évaluant en $X=2$, on trouve $c = \dfrac{10}{5} = 2$.
Et donc $\dfrac{-3X+16}{(X+3)(X-2)^2} = \dfrac{1}{X+3} - \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{2}{(X-2)^2}$.

Rédaction

J'ai tout bien rédigé ici, mais nous formaliserons bientôt un fait avec lequel vous devez déjà être familier : la limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes est la limite du quotient des termes de plus haut degré.
Si vous êtes familiers avec ceci, alors il n'est pas nécessaire de détailler ce type de calcul de limite.

Et pour conclure, notons que l'évaluation de la relation de départ en n'importe quel X qui n'est pas un pôle de la fraction de départ donnera une relation liant les coefficients de la décomposition en éléments simples.

Exemple 7.19

Il existe des réels a, b et c tels que $\dfrac{2X^2+11X+1}{(X-3)(X^2+X+1)} = \dfrac{a}{X-3} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$ $(\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-3$ et en évaluant en $X=3$, il vient $a = \dfrac{52}{13} = 4$.
En multipliant $(\star)$ par X et en faisant tendre vers $+\infty$, il vient $2 = a + b \Leftrightarrow b = -2$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X = 0$, on obtient

$$-\frac{1}{3} = \frac{a}{-3} + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Nous nous contentons de ces exemples. L'important pour l'instant sera :

1. de savoir sous quelle forme se présente la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de degré négatif.
2. d'utiliser à bon escient ces différentes méthodes afin de déterminer, avec le moins de calculs possibles[8].

Un chapitre ultérieur justifiera l'existence et même l'unicité de la décomposition en éléments simples, l'étendra aux fractions rationnelles à coefficients complexes, et donnera également quelques autres astuces permettant de simplifier la détermination de la décomposition en éléments simples.

[8] Personne ne vous reprochera d'avoir fait «trop» de calculs... à condition que ceux-ci mènent au bon résultat !

Exercices du chapitre 7

Exercice 7.1 Donner la décomposition des polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles. Pour R on commencera par s'assurer qu'il s'agit bien d'un polynôme à coefficients réels, et pour S, on pourra calculer $S(2i)$. F

1) $P(X) = 2X^4 - 16X^3 + 50X^2 - 52X$
2) $Q(X) = \left(X^2-1\right)^2\left(X^2+X+1\right)^5\left(X^2-6X+9\right)^3$
3) $R(X) = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})\left(X^2+X-6\right)$ avec $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$
4) $S(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 24X + 40 \quad (\star)$

Exercice 7.2 Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2X^2-3X+2}{X(X-1)(X-2)(X-3)}$ par la méthode «naïve» de mise au même dénominateur, puis avec d'autres méthodes impliquant le moins de calcul possible. Quelle méthode préférez-vous ? F

Exercice 7.3 Du calcul et rien que du calcul PD
Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$
2) $\dfrac{1}{(X+1)^2(3-X)}$
3) $\dfrac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$
4) $\dfrac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2}$
5) $\dfrac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2}$
6) $\dfrac{X}{(X+1)^2(X^2+2X+3)}$
7) $\dfrac{X^2+X+1}{X^n}$, $n \geqslant 3$.

Exercice 7.4 Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec $\deg F < 0$, et soit α un pôle simple de F. AD

1) Exprimer la partie polaire de F relative à α (c'est-à-dire le terme de la décomposition en éléments simples de F, de dénominateur $X-\alpha$) en fonction de $P(\alpha)$ et $Q'(\alpha)$.
2) En déduire, avec le moins de calculs possibles, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10}$.

Exercice 7.5 Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles AD

$$\frac{1}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2},\ \frac{X}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}\ \text{et}\ \frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

On pourra distinguer plusieurs cas suivant la valeur de $\cos\alpha$.

Exercice 7.6 Application à l'étude de sommes AD
Déterminer les limites des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2) $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2k^2-8k-2}{(k-1)^2(k+1)^2}$
3) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}$

Exercice 7.7 Dérivée logarithmique D

Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.

1) Exprimer P' en fonction des λ_i. *Indication : on pourra commencer par regarder ce qui se passe pour de petites valeurs de* n *afin d'essayer de conjecturer une formule générale.*
2) En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
3) Retrouver ce résultat en dérivant $\ln|P|$ sur son domaine de définition.

Exercice 7.8 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{n!}{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}$. AD

Exercice 7.9 Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x\operatorname{ch}(a)+1}$. D

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 7

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.1

1. Puisque le coefficient dominant est 2, nous pouvons commencer par factoriser par 2 : $P(X) = 2(X^4 - 8X^3 + 25X^2 - 26X)$.
Il est clair que 0 est racine, donc que P se factorise par X.
Et $P(2) = 2(16 - 8 \cdot 8 + 25 \cdot 4 - 26 \cdot 2) = 2(-48 + 100 - 52) = 0$.
La division euclidienne de $X^3 - 8X^2 + 25X - 26$ par $X - 2$ nous donne alors

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -8X^2 & +25X & -26 & X-2 \\ \cline{5-5}
X^3 & -2X^2 & & & \boxed{X^2-6X+13} \\ \cline{1-4}
 & -6X^2 & +25X & -26 & \\
 & -6X^2 & +12X & & \\ \cline{2-4}
 & & 13X & -26 & \\
 & & 13X & -26 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Enfin, $X^2 - 6X + 13$ possède un discriminant strictement négatif, donc est irréductible.
Et donc la factorisation cherchée est $P(X) = 2X(X - 2)(X^2 - 6X + 13)$.

2. Le facteur $X^2 + X + 1$ est irréductible car de discriminant strictement négatif, mais $X^2 - 1$ et $X^2 - 6X + 9$ se «cassent» en produit de deux facteurs de degré 1 :

$$X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1) \text{ et } X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2.$$

Et donc $Q(X) = (X + 1)^2(X - 1)^2(X - 3)^6\left(X^2 + X + 1\right)^5$ est la factorisation de Q en produit de facteurs irréductibles.

> **Rassurez-moi !**
> Vous savez bien trouver ces factorisations sans calculer de discriminant ?

3. On a $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) = X^2 - 2(\lambda + \overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda} = X^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda) + |\lambda|^2$, qui est bien à coefficients réels, et donc R aussi.
Il s'agit d'un polynôme irréductible, car ses deux racines λ et $\overline{\lambda}$ ne sont pas réelles, et donc son discriminant ne peut pas être positif.
De plus, $X^2 + X - 6$ se factorise en $(X - 2)(X + 3)$, de sorte que la factorisation de R en produit de facteurs irréductibles est

$$R(X) = \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2\right)(X - 2)(X + 3).$$

4. On a $S(2i) = 16 + 48i - 56 - 48i + 40 = 0$.
Puisque $2i$ est racine de S, c'est une racine de l'un de ses facteurs irréductibles. Celui-ci ne peut pas être de degré 1 (puisqu'il est à coefficients réels), et donc est de la forme $X^2 + bX + c$ avec un discriminant strictement négatif.
Mais un polynôme de degré 2, à coefficients réels, et de discriminant négatif possède deux racines réelles conjuguées. Donc $-2i$ est également racine de S, qui se factorise donc par $(X - 2i)(X + 2i) = X^2 + 4$.
La division euclidienne de S par $X^2 + 4$ est alors

> **Plus généralement**
> Si on admet l'existence de la factorisation en produit de facteurs irréductibles, le même raisonnement prouve que si un polynôme à coefficients réels admet $\lambda \in \mathbf{C}$ comme racine, alors il admet aussi $\overline{\lambda}$ comme racine.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & -6X^3 & +14X^2 & -24X & +40 & X^2+4 \\ \cline{6-6}
X^4 & & +4X^2 & & & \boxed{X^2-6X+10} \\ \cline{1-5}
 & -6X^3 & +10X^2 & -24X & +40 & \\
 & -6X^3 & & -24X & & \\ \cline{2-5}
 & & 10X^2 & & +40 & \\
 & & 10X^2 & & +40 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Et $X^2 - 6X + 10$ étant irréductible, la factorisation de S en produit de facteurs irréductibles est alors $S(X) = (X^2 - 6X + 10)(X^2 + 4)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.2

La décomposition cherchée est de la forme

$$\frac{2X^2-3X+2}{X(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X-2}+\frac{d}{X-3}. \quad (\star)$$

Si on met tout ceci au même dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{a(X-1)(X-2)(X-3)+bX(X-2)(X-3)+cX(X-1)(X-3)+dX(X-1)(X-2)}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\\ =&\frac{a(X^3-6X^2+11X-6)+b(X^3-5X^2+6X)+c(X^3-4X^2+3X)+d(X^3-3X^2+2X)}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\\ =&\frac{(a+b+c+d)X^3+(-6a-5b-4c-3d)X^2+(11a+6b+3c+2d)X-6a}{X(X-1)(X-2)(X-3)}\end{aligned}$$

Et donc par identification, il vient[1]

$$\begin{cases}a+b+c+d=0\\-6a-5b-4c-3d=2\\11a+6b+3c+2d=-3\\-6a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b+c+d=\frac{1}{3}\\ 5b+4c+3d=0\\ 6b+3c+2d=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b+c+d=\frac{1}{3}\\ -c-2d=-\frac{5}{3}\\ -3c-4d=-\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=\frac{1}{2}\\ c=-2\\ d=\frac{11}{6}\end{cases}$$

[1] Dans la suite, nous résolvons le système avec un pivot.

En revanche, en multipliant $(\star)$ par X et en évaluant en 0, il vient $a=-\frac{1}{3}$.
Puis en multipliant par $X-1$ et en évaluant en $X=1$, il vient $b=\frac{1}{2}$, et sur le même principe, on obtient rapidement $c=-2$ et $d=\frac{11}{6}$.
Au final, on a donc

$$\frac{2X^2-3X+2}{X(X-1)(X-2)(X-3)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{X}+\frac{1}{2}\frac{1}{X-1}-\frac{2}{X-2}+\frac{11}{6}\frac{1}{X-3}.$$

Solution de l'exercice 7.3

1. Notons que le dénominateur est bien irréductible car son discriminant vaut $-3<0$.
Mais alors la fraction $\frac{X+1}{X^2+X+1}$ est déjà un élément simple, il n'y a donc rien à faire !

2. La décomposition cherchée est de la forme $\frac{1}{(X+1)^2(3-X)} = \frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-3}$.
En multipliant par $X-3$ et en évaluant en $X=3$, il vient $c=-\frac{1}{16}$.
En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en $X=-1$, il vient $\frac{1}{4}=b$.
Enfin, en évaluant la relation de départ en $X=0$, on obtient

$$\frac{1}{3}=a+b-\frac{c}{3} \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{48}=\frac{1}{16}.$$

Donc la décomposition cherchée est $\frac{1}{(X+1)^2(3-X)}=\frac{1}{16(X+1)}+\frac{1}{4(X+1)^2}-\frac{1}{16(X-3)}$.

3. Attention, le dénominateur n'est pas factorisé en produit de facteurs irréductibles, puisque X^2-1 possède deux racines qui sont 1 et -1.
Donc $(X^2-1)(X+1)^2=(X+1)(X-1)(X+1)^2=(X+1)^3(X-1)$.
Il existe donc a,b,c,d tels que $\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{(X+1)^3}+\frac{d}{X-1} \quad (\star)$.
En multipliant $(\star)$ par $X-1$ et en évaluant en $X=1$, il vient $\frac{1}{8}=d$.
En multipliant $(\star)$ par $(X+1)^3$ et en évaluant en $X=-1$, il vient $\frac{1}{-2}=c$.
En multipliant $(\star)$ par X et en passant à la limite lorsque $X\to+\infty$, on obtient $0=a+d \Leftrightarrow a=-\frac{1}{8}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X=0$, on a $-1=a+b+c-d \Leftrightarrow b=-1-a-c+d=-\frac{1}{4}$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}=-\frac{1}{8}\frac{1}{X+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^3}+\frac{1}{8}\frac{1}{X-1}.$$

4. Commençons par noter que $X^4 - 4X^2 = X^2(X^2-4) = X^2(X-2)(X+2)$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X} + \frac{d}{X^2} \quad (\star).$$

En multipliant $(\star)$ par X^2 et en évaluant en $X = 0$, il vient $1 = d$.
En multipliant $(\star)$ par $(X-2)$ et en évaluant en $X = 2$, il vient $2 = a$.
En multipliant $(\star)$ par $(X+2)$ et en évaluant en $X = -2$, il vient $-1 = b$.
En multipliant $(\star)$ par X par passage à la limite lorsque $X \to +\infty$, il vient $0 = a+b+c \Leftrightarrow c = -1$.
Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X+2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}.$$

5. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} \quad (\star).$$

En multipliant $(\star)$ par $X+1$ et en évaluant en $X = -1$, il vient $1 = a$.
En multipliant $(\star)$ par X en en faisant tendre X vers $+\infty$, il vient $3 = a + b \Leftrightarrow b = 2$.
En évaluant $(\star)$ en $X = 0$, on obtient $-3 = a + c + e \Leftrightarrow c + e = -4$.
En multipliant $(\star)$ par $(X^2+1)^2$, on obtient

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{X+1} = \frac{a(X^2+1)^2}{X+1} + (bX+c)(X^2+1) + dX + e \quad (\star\star).$$

Les racines complexes de X^2+1 sont i et $-i$, donc évaluons la relation $(\star\star)$ en $X = i$:

$$\frac{3i^4+i^3+4i^2-i-3}{i+1} = di + e \Leftrightarrow \frac{-4-2i}{i+1} = di + e \Leftrightarrow -3 + i = di + e.$$

Puisque d et e sont des réels, il vient donc $e = -3$ et $d = 1$.
Grâce à la relation liant c et e, on en déduit que $c = -1$.
Et donc la décomposition cherchée est

$$\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{2X-1}{X^2+1} + \frac{X-3}{(X^2+1)^2}.$$

> **Remarque**
> Évaluer en $X = -i$ fournirait en fait les mêmes équations (encore un résultat qui sera justifié plus tard...), et il n'est donc pas nécessaire de faire les 2.

6. $X^2 + 2X + 3$ est irréductible car de discriminant strictement négatif.
La décomposition cherchée est donc de la forme

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+2X+3)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+2X+3}.$$

En multipliant par $(X+1)^2$ et en évaluant en $X = -1$, on obtient $b = -\frac{1}{2}$.
En multipliant par X et en passant à la limite en $+\infty$, on obtient la relation $0 = a + c$.
En évaluant en $X = 0$, on obtient $0 = a + b + \frac{d}{3} \Leftrightarrow 3a + d = \frac{3}{2}$.
Et en évaluant en $X = 1$, on obtient $\frac{1}{24} = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c+d}{6} \Leftrightarrow 3a + c + d = 1$.
Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 3a + d = \frac{3}{2} \\ 3a + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 3a + d = \frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Et donc la décomposition en éléments simples cherchée est

$$\frac{X}{(X+1)^2(X^2+3X+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+3X+2}.$$

> **Méthode**
> Il serait bien entendu possible d'utiliser les racines complexes de X^2+2X+3. Mais celles ci ne sont pas évidentes (contrairement par exemple aux racines de X^2+1), et risquent de faire apparaître des calculs désagréables avec des racines.
> Alors qu'évaluer en deux points bien choisis (ici 0 et 1) permet de dégager des relations qui ne sont pas trop compliquées à manipuler.

7. Il n'y a pas de calcul à faire, il suffit de remarquer que

$$\frac{X^2+X+1}{X^n} = \frac{X^2}{X^n} + \frac{X}{X^n} + \frac{1}{X} = \frac{1}{X^{n-2}} + \frac{1}{X^{n-1}} + \frac{1}{X^n}$$

qui est déjà une décomposition en éléments simples.

Solution de l'exercice 7.4

1. Puisque α est racine simple de Q, $Q = (X-\alpha)R$, avec $R(\alpha) \neq 0$.
La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{Q_i}$$

où α n'est pas racine des Q_i.
En multipliant cette décomposition par $X-\alpha$ et en évaluant en α, il vient $a = \dfrac{P(\alpha)}{R(\alpha)}$.
Mais d'autre part, $Q'(X) = (X-\alpha)R' + R$ et donc $Q'(\alpha) = R(\alpha)$.
Et donc la partie polaire de F relative à α est $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(X-\alpha)}$.

2. Notons que 1 est racine de $X^3-4X^2-7X+10$, qui se factorise donc par $X-1$:

$$X^3-4X^2-7X+10 = (X-1)(X^2-3X-10) = (X-1)(X-5)(X+2).$$

Donc la décomposition cherchée est de la forme $\dfrac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10}$.
Tous les pôles étant simples, nous pouvons appliquer ce qui précède avec $P(X) = X^2+2X+5$, $Q(X) = X^3-4X^2-7X+10$ et donc $Q'(X) = 3X^2-8X-7$.
On a donc

$$\frac{X^2+2X+5}{X^3-4X^2-7X+10} = \frac{P(1)}{Q'(1)(X-1)}\frac{P(-2)}{Q'(-2)(X+2)} + \frac{P(5)}{Q'(5)(X-5)} = \frac{-2}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{5}{21}\frac{1}{X+2} + \frac{10}{7}\frac{1}{X-5}.$$

Solution de l'exercice 7.5

Notons que $X^2-2\cos(\alpha)X+1$ possède pour discriminant $\Delta = 4\cos^2\alpha - 1$, qui est strictement négatif si et seulement si $\cos(\alpha) \neq \pm 1$.

- Si $\cos\alpha = 1$, alors $X^2-2\cos(\alpha)X+1 = X^2-2X+1 = (X-1)^2$.
Or $\dfrac{1}{(X-1)^4}$ est déjà un élément simple.
Pour trouver la décomposition de $\dfrac{X}{(X-1)^4}$, on peut noter que

$$\frac{X}{(X-1)^4} = \frac{X-1+1}{(X-1)^4} = \frac{X-1}{(X-1)^4} + \frac{1}{(X-1)^4} = \frac{1}{(X-1)^3}\frac{1}{(X-1)^4}.$$

La décomposition de $\dfrac{X^2}{(X-1)^4}$ est de la forme

$$\frac{X^2}{(X-1)^4} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{(X-1)^4}.$$

En multipliant par $(X-1)^4$, et en évaluant en $X=1$, on a aisément $d=1$.
En multipliant par X et en passant à la limite en $+\infty$, il vient $0 = a$.
En évaluant en $X=0$, on obtient $0 = b-c+d \Leftrightarrow c-b = 1$.
En évaluant en $X=-1$, on obtient $\dfrac{1}{16} = \dfrac{b}{4} - \dfrac{c}{8} + \dfrac{d}{16} \Leftrightarrow 2b = c$.
Et donc il vient

$$\frac{X^2}{(X-1)^4} = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4}.$$

- Si $\cos\alpha = -1$, alors $X^2-2\cos(\alpha)X+1 = (X+1)^2$.
Comme précédemment, les deux premières fractions sont déjà des éléments simples.

Pour la troisième, il serait possible de raisonner comme dans le cas précédent.
Mais remarquons plutôt que si on remplace X par $-X$ dans la fraction du cas précédent, on obtient

$$\frac{X^2}{(-X-1)^4} = \frac{1}{(-X-1)^2}+\frac{2}{(-X-1)^3}+\frac{1}{(-X-1)^4} \Leftrightarrow \frac{X^2}{(X+1)^4} = \frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2}{(X+1)^3}+\frac{1}{(X+1)^4}$$

qui est la décomposition en éléments simples recherchée !

- **Reste le cas où** $\cos\alpha \neq \pm 1$, auquel cas $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$ est irréductible.
  Les deux premières fractions sont toujours des éléments simples...
  La dernière a une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2-2\cos(\alpha)X+1} + \frac{cX+d}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

Rappel
Un élément simple de seconde espèce est un polynôme de degré 1 sur une puissance d'un polynôme irréductible de degré 2. C'est bien ce que nous avons ici.

En évaluant cette relation en $X = 0$, il vient $0 = b + d$.
En multipliant par X et en passant à la limite lorsque $X \to +\infty$, il vient $0 = a$.
Enfin, les racines complexes de $X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1$ sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
Donc en multipliant ($\star$) par $(X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1)^2$ et en évaluant en $X = e^{i\alpha}$, il vient

$$e^{2i\alpha} = ce^{i\alpha} + d \Leftrightarrow \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = c(\cos\alpha + i\sin\alpha) + d.$$

Puisque c et d sont des réels, en identifiant les parties imaginaires, on a donc

$$c = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2\cos(\alpha).$$

Et alors $d = \cos(2\alpha) - 2\cos^2\alpha = -1$.
On en déduit donc que $b = 1$, et que la décomposition cherchée est

$$\frac{X^2}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2} = \frac{1}{X^2-2\cos(\alpha)X+1} + \frac{2\cos(\alpha)X-1}{(X^2-2\cos(\alpha)X+1)^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.6

1. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ est $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+2} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X}$.
   Et donc pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Sur le même principe, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2X^2-8X-2}{(X-1)^2(X+1)^2}$ est

$$\frac{1}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{2}{(X+1)^2}.$$

Et donc pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{2}{n^2} - 2 - \frac{2}{4} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$

3. Décomposons cette fois $\frac{X}{4X^2-1}$, nous nous préoccuperons du $(-1)^{k+1}$ en temps voulu.
La décomposition en éléments simples de $\frac{X}{4X^2-1}$ est $\frac{1}{4}\frac{1}{2X+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{2X-1}$.
Et donc il vient pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}+\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{(-1)^{i}}{2i-1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$k = i - 1$.

Solution de l'exercice 7.7

1. Pour $n = 2$, c'est facile : $P' = (X-\lambda_1)+(X-\lambda_2)$.
Pour $n = 3$, on obtient $P' = (X-\lambda_2)(X-\lambda_3)+(X-\lambda_1)(X-\lambda_3)+(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
Il semble raisonnable de conjecturer que dans le cas général, $P' = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)$.

Plus généralement, prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables, alors leur produit possède pour dérivée $\sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j$.
Pour $n = 2$, c'est la formule usuelle : $(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2'$.
Supposons le résultat vrai pour un produit de n fonctions dérivables, et soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions dérivables.
Alors $f_1f_2\cdots f_{n+1}$ est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}
(f_1\cdots f_{n+1})' &= (f_1\cdots f_n)'f_{n+1} + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j\right) f_{n+1} + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i' \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} f_j + f_1\cdots f_nf_{n+1}' \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} f_i' \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} f_j.
\end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, la formule donnée est valable pour tout produit de fonctions dérivables.
Et en particulier, $P' = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(X-\lambda_i)'}_{=1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)$.

2. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{P'}{P} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)}{\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_i}.$$

Les $X - \lambda_i$ étant les facteurs irréductibles de P, nous avons bien là la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

3. Sur son domaine de définition, qui est $\mathbf{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a $\ln|P(x)| = \prod_{i=1}^{n} \ln|x - \lambda_i|$.

Et donc en dérivant cette expression, on obtient

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_i}.$$

Rappel
La dérivée de $\ln|f|$ est $\frac{f'}{f}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.8

Puisque le dénominateur possède $0, 1, \dots, n$ comme racines simples, la décomposition cherchée est de la forme

$$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{X - i}. \qquad (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par X, puis en évaluant en $X = 0$, il vient

$$a_0 = \frac{n!}{(-1)(-2)\cdots(-n)} = \frac{n!}{(-1)^n n!} = (-1)^n.$$

Et plus généralement, en multipliant par $X - i$ puis en évaluant en $X = i$, on obtient

$$a_i = \frac{n!}{i(i-1)\cdots 1 \cdots (-1)\cdots(i-n)} = \frac{n!}{i! \times (-1)^{n-i}(n-i)!} = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}.$$

Et donc il vient

$$\frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{X-k}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 7.9

Si $a = 0$, alors $X^2 - 2\operatorname{ch}(a)X + 1 = (X-1)^2$, si bien que $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$.

Sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est alors[2]

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x-2)^{n+2}}.$$

[2] Le prouver par récurrence.

Si $a \neq 0$, alors $X^2 - 2\operatorname{ch}(a)X + 1$ a pour discriminant $\Delta = 4(\operatorname{ch}^2(a) + 1) = 4\operatorname{sh}^2(a)$, et possède pour racines e^a et e^{-a}.

Donc la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^2 - 2\operatorname{ch}(a)X + 1}$ est de la forme $\frac{\lambda}{X - e^a} + \frac{\mu}{X - e^{-a}}$.

En multipliant par $X - e^a$ et en évaluant en $X = e^a$, on a donc $\frac{1}{e^a - e^{-a}} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2\operatorname{sh}(a)}$.

Et de même, $\mu = -\frac{1}{2\operatorname{sh}(a)}$.

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\operatorname{sh}(a)}\left(\frac{1}{x - e^a} - \frac{1}{x - e^{-a}}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, sa dérivé $n^{\text{ème}}$ est donnée par

$$f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{2\operatorname{sh}(a)}\left(\frac{1}{(x-e^a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-e^{-a})^{n+1}}\right).$$

8 Calcul de primitives et d'intégrales

Une fois n'est pas coutume, nous allons utiliser dans ce chapitre des résultats que nous admettrons pour l'instant, mais démontrerons plus tard, afin de nous intéresser à l'aspect calculatoire, et à la pratique du calcul de primitives.
Cela dit, il n'y aura pas de grandes surprises, les résultats que nous admettrons momentanément ayant déjà été admis en terminale. Il s'agit essentiellement des propriétés de l'intégrale, et du théorème stipulant que toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
Il faudra malgré tout que nous y revenions plus tard dans l'année, en donnant une définition plus rigoureuse de l'intégrale[1].

[1] Qui nous permettra notamment de faire le lien avec la notion d'aire.

8.1 Rappels sur les primitives et les intégrales

8.1.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Définition 8.1 – Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

> **Remarque**
> La définition reste valable même si f n'est pas continue, mais dans ce chapitre, nous ne considérerons que des primitives de fonctions continues.

Proposition 8.2 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. Alors une fonction $G : I \to \mathbf{R}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + \lambda$).*

> **Soyons clair !**
> Le λ est une constante qui ne dépend pas de $x \in I$!

Démonstration. Il est évident qu'une fonction qui ne diffère de F que par l'ajout d'une constante possède encore f comme dérivée, et donc est une primitive de f.
Inversement, si G est une primitive de f, alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $f - f = 0$.
Donc $G - F$ est constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G - F = \lambda \Leftrightarrow G = F + \lambda$. □

Ce résultat a une conséquence immédiate : dès qu'il existe une primitive de f, il en existe une infinité.
On se gardera donc bien de parler de **la** primitive de f, mais bien **d'une** primitive de f.

Une question que l'on peut se poser est la suivante : quelles sont les fonctions qui admettent des primitives ? Autrement dit, parmi les fonctions continues, lesquelles sont des dérivées ? Une dérivée peut-elle être n'importe quelle fonction continue, ou possède-t-elle d'autres propriétés spécifiques aux dérivées ? Le théorème suivant répond très clairement à cette question :

Proposition 8.3 (Théorème fondamental de l'analyse, version 1) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une[2] primitive F sur I.

[2] Et donc une infinité.

Démonstration. Admis pour l'instant. □

Le théorème fondamental de l'analyse garantit l'existence de primitives, mais il ne dit absolument pas comment les trouver.
De manière générale, le calcul de primitives est un problème difficile, contrairement au calcul de dérivées, qui est totalement algorithmique : la connaissance des dérivées usuelles,

et des formules pour la dérivée d'une somme, d'un produit et d'une composée permettent de calculer les dérivées d'un grand nombre de fonctions.

À titre d'exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives, puisqu'elle est continue, mais pourtant il n'est pas possible d'exprimer l'une de ces primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles.

Pour la culture

C'est un théorème (très difficile) de Liouville qui garantit qu'aucune fonction obtenue à l'aide de polynômes, d'exponentielles, de logarithmes, des fonctions circulaires et de leurs réciproques à partir des opérations usuelles (somme, produit, quotient, composée) n'est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.
Donc si vous trouvez une expression «simple» pour une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$, ne cherchez pas : elle est fausse !

8.1.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 8.4 – Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Un résultat qui a été mentionné au lycée, et qui sera bientôt prouvé affirme qu'une fonction dérivable est nécessairement continue. La réciproque est fausse, et vous connaissez la valeur absolue comme contre-exemple : elle est continue en 0, mais n'y est pas dérivable. Donc :

- vous ne direz pas «une fonction continue et dérivable», alors qu'il suffit de dire «une fonction dérivable»
- vous ne prouverez pas qu'une fonction est $\mathscr{C}^1$ en prouvant qu'elle est continue et dérivable. Il faudra prouver qu'elle est dérivable, puis que sa dérivée est continue.

Il est facile de constater que les fonctions suivantes sont $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de dérivabilité, car leurs dérivées sont continues :

1. les fonctions polynomiales et les fractions rationnelles[3],
2. toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$,
3. l'exponentielle, et plus généralement toutes les $x \mapsto a^x$,
4. les logarithmes (népérien ou de base quelconque),
5. les fonctions sinus, cosinus, tangente et arc sinus, arc cosinus et arc tangente,
6. les fonction sinus, cosinus et tangente hyperbolique.

[3] Qui rappelons-le, sont les quotients de deux polynômes.

Il est également aisé de constater[4] que la somme/le produit/le quotient/la composée de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ est encore $\mathscr{C}^1$.
Prouvons-le par exemple pour le quotient : soient f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I où g ne s'annule pas.
Alors nous savons que $\dfrac{f}{g}$ est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
Mais f, f', g et g' sont continues, donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ est continue, de sorte que $\dfrac{f}{g}$ est $\mathscr{C}^1$.

[4] Et nous reviendrons bientôt dessus.

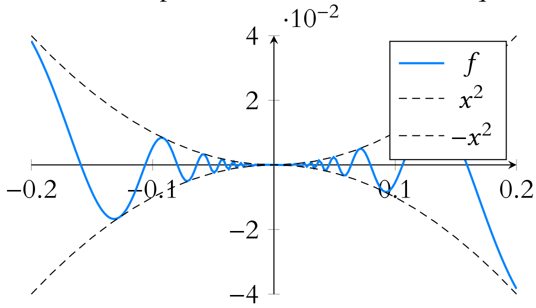
En revanche, il existe des fonctions qui sont dérivables sans être $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire à dérivée non continue.

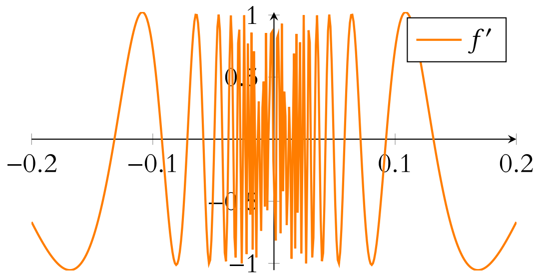
Exemple 8.5

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Nous allons prouver que f est dérivable sur $\mathbf{R}$, mais qu'elle n'y est pas $\mathscr{C}^1$.
Il est clair[5] que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, et que sa dérivée y est donnée par $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
D'autre part, pour $x \neq 0$ on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Or, $0 \leqslant \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Étant déjà dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.
On a alors $2x \sin \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\cos \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (car cos n'a pas de limite

[5] Par produit et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$.

en $\pm\infty$). Et donc $f'(x)$ n'a pas de limite en 0, et donc ne tend pas vers $f'(0)$.
Donc f' n'est pas continue en 0, de sorte que f est dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.





8.1.3 Intégrale sur un segment

La définition qui suit d'une intégrale n'est que provisoire, même s'il s'agit de celle manipulée au lycée.

Définition 8.6 – Soit f une fonction continue sur un segment I. Si F est une primitive de f, on pose, pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas de la primitive F choisie, et est appelée **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$.

Remarque
Notons que cette définition est valable même si $a \geqslant b$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver que cette quantité ne dépend pas de la primitive choisie : si F et G sont deux primitives de f, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $G = F + \lambda$.
Et donc $G(b) - G(a) = F(b) + \lambda - (F(a) + \lambda) = F(b) - F(a)$. □

Remarques. ► La variable d'intégration (notée t dans la définition ci-dessus) est une variable muette, et vous pouvez l'appeler comme bon vous chante. Par exemple, les notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^b f(\theta)\,d\theta$ et $\displaystyle\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha$ désignent toutes la même quantité.
Il y a tout de même quelques restrictions[6] :

- les bornes de l'intégrale ne peuvent pas dépendre de la variable d'intégration : $\cancel{\displaystyle\int_1^x f(x)\,dx}$ n'a pas de sens.
- la variable d'intégration n'a plus de sens en dehors de l'intégrale, et on ne peut pas utiliser comme variable d'intégration une variable déjà définie ailleurs.
  Ainsi, $\cancel{x^2\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,dx}$ n'a pas de sens, mais $x^2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ en a.

[6] Essentiellement les mêmes que pour les sommes.

► Vous utiliserez souvent les notations dt, dx ou $d\theta$ en physique pour désigner des quantités «infiniment petites», ce qui devrait vous permettre de démystifier un peu cette notation (même si pour nous autres, matheux, il ne s'agit que d'une notation et rien d'autre).
L'idée, que nous formaliserons en fin d'année[7], est qu'une intégrale est en quelques sorte une somme infinie d'aires de rectangles dont la longueur dt est infiniment petite. D'ailleurs, la notation $\int$ pour l'intégrale vient de là : Leibniz, qui a introduit cette notation, notait en fait s (comme somme), mais avec le «s long» de l'époque.
► Nous ne nous intéresserons cette année qu'à des intégrales sur un segment, c'est-à-dire entre deux bornes finies. Vous parlerez l'an prochain d'intégrales dont une des bornes est infinie, ou encore de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (qui ne rentre pas dans le cadre de la définition ci-dessus car $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est définie que sur $]0,1]$, et pas sur $[0,1]$), mais pour cette année, considérez que ces objets n'existent pas (ou du moins que vous n'avez pas le droit de les utiliser).

[7] Lorsque nous rencontrerons ce que nous appellerons les sommes de Riemann.

S long ?
Vouſ favez, ceſ ſ qui reſſemblent à deſ f et qui rendent indigeſteſ leſ texteſ écritſ en vieux françaiſ.

La définition de l'intégrale que nous donnons n'utilisant que la notion de primitive, purement analytique, nous laisserons de côté pour l'instant toute interprétation de l'intégrale comme une aire. Toutefois, vous avez déjà acquis une certaine intuition sur le sujet, il ne faudra pas vous priver de l'utiliser lorsque c'est possible.

Proposition 8.7 (Propriétés de l'intégrale) : *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:*

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
3. *pour tout* $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*
4. *si* $a \leqslant b$ *et si* $\forall t \in [a,b], f(t) \geqslant 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ *(positivité de l'intégrale).*
5. *si* $a \leqslant b$ *et si* $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ *(croissance de l'intégrale).*
6. *si* $a \leqslant b$, *alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ *(inégalité triangulaire pour les intégrales).*

⚠ Attention !
Pour appliquer cette propriété, il faut bien s'assurer que les bornes «sont dans le bon sens», c'est-à-dire que $a \leqslant b$.

Démonstration.

1. Si F (respectivement G) est une primitive de f (resp. de g), alors $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt &= [\lambda F(t) + G(t)]_a^b = \lambda F(b) + G(b) - (\lambda F(a) + G(a)) \\ &= \lambda(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\,dt.$
3. $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$
4. Soit F une primitive de f. Si $f = F'$ est positive, alors F est croissante[8] sur I, et donc

$$F(b) \geqslant F(a) \Leftrightarrow F(b) - F(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0.$$

5. Si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$. Et par le point précédent,

$$\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,dt.$$

6. Pour tout $t \in [a,b]$, $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$.
Et donc par croissance de l'intégrale[9]

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$

□

[8] Et rappelons qu'il est ici indispensable que I soit un intervalle.

[9] Qui s'applique car $a \leqslant b$.

Exemple 8.8 **Un équivalent de la série harmonique**

Pour $n \geqslant 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.
Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, f est décroissante sur $[k, k+1]$, de sorte que pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt.$$

Mais $\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt = f(k+1)(k+1-k) = f(k+1)$ et de même $\int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$.

Donc pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{k}$.
En sommant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on arrive donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Mais par la relation de Chasles, le terme médian est $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln(n)$.

Et donc on a $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$.

Soit encore $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Ceci prouve déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Mais de plus, on a $1 + \frac{1}{n\ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.$$

Interprétation

Les deux suites $(H_n)_n$ et $(\ln n)_n$ tendent vers $+\infty$ à «la même vitesse».
Nous dirons bientôt qu'elles sont équivalentes.

Théorème 8.9 (Théorème fondamental de l'analyse, version 2) : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Remarque

Cette version du théorème fondamental de l'analyse est plus forte que la version 1, mais elle nécessite tout de même de savoir que la version 1 est vraie, puisqu'elle suppose l'existence de primitives de f.

Démonstration. Soit G une primitive de f. Alors pour tout $x \in I$,
$F(x) = [G(t)]_a^x = G(x) - G(a)$, et donc la dérivée de F est $x \mapsto G'(x) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f, et on a clairement $F(a) = 0$.
Enfin, si F_1 est une autre primitive de f sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $F_1 = F + \lambda$.
Et si $F_1(a) = F(a) = 0$, alors $\lambda = 0$, de sorte que $F_1 = F$. Donc F est bien l'**unique** primitive de f qui s'annule en a. □

Ce théorème, intéressant pour des considérations théoriques ne permet pas en pratique de calculer des primitives qu'on ne saurait pas déjà calculer.
Par exemple, il permet d'affirmer qu'une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, mais ne nous aide pas réellement à calculer cette intégrale.

Remarque. Ce théorème garantit qu'une fonction de la forme $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, où f est continue est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée est f qui est continue.

Exemple 8.10

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.
Si on note $F : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, alors on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -F(x)+F(x^2).$$

Puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$, par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.
Et alors, en dérivant une composée, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

8.1.4 Primitives usuelles

Vous connaissez déjà un certain nombre de dérivées. Et par conséquent, vous connaissez déjà un certain nombre de primitives !
Le tableau suivant résume les primitives qu'il faut connaître par cœur, ainsi que les intervalles sur lesquels elles sont valables.

Fonction $x \mapsto \cdots$	Primitive $x \mapsto \cdots$	Intervalle	Fonction $x \mapsto \cdots$	Primitive $x \mapsto \cdots$	Intervalle
$x^n, n \in \mathbf{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbf{R}$	e^x	e^x	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbf{R}$
$x^n, n \in \mathbf{Z}, n \leqslant -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbf{R}_+^*$	$x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbf{R}_+^*$

Le seul point qui aurait éventuellement besoin d'être détaillé est le fait que $x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_-^*$.
En effet, pour $x < 0$, on a $\ln(|x|) = \ln(-x)$, qui se dérive en $-\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbf{R}$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[, k \in \mathbf{Z}$
$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1-\text{th}^2(x)$	$\text{th}(x)$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbf{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arccos}(x)$	$]-1,1[$

Il est plus que conseillé de les connaître sans la moindre hésitation, mais rappelons, à toutes fins utiles, qu'il est aisé de vérifier qu'une primitive est correcte : il suffit de la dériver[10].

[10] Ce qui suppose bien entendu que vous connaissiez vos formules de dérivation !

Nous savons également dériver certaines composées, ce qui nous donne encore d'autres formules de primitives :

Proposition 8.11 : *Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors*

- *une primitive de $u'u^n, n \in \mathbf{N}$ est* $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$
- *une primitive de $u'e^u$ est e^u*
- *si u ne s'annule pas sur I, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$*
- *si $u > 0$ sur I, et si $\alpha \neq -1$ alors une primitive de $u'u^\alpha$ est* $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Exemples 8.12

- Une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2}$ est $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$.
- Une primitive de $x \mapsto e^{-x-e^{-x}} = e^{-x}e^{-e^{-x}}$ est $x \mapsto e^{-e^{-x}}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$.

Proposition 8.13 : *Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et soit F une primitive de f. Alors $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax+b)$.*

Démonstration. Il suffit de dériver. □

Exemple 8.14

Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}(ax+b)$.

Par exemple, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+4x+2} = \dfrac{1}{(2x+1)^2+1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(2x+1)$.

Toutes les formules ci-dessus proviennent en fait de la formule de dérivation d'une composée. Plus généralement, nous disposons du résultat suivant :

Proposition 8.15 : *Soient u et φ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\varphi \circ u$ soit bien définie. Alors une primitive de $u' \times (\varphi' \circ u)$ est la fonction $\varphi \circ u$.*

En pratique

Cette formule est formidable lorsqu'on reconnaît une fonction de la forme $u' \times (\varphi' \circ u)$, ce qui demande de l'intuition, et ne se produit en fait pas si souvent.

Démonstration. Encore une fois, il suffit de dériver. □

Exemple 8.16

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x + x(\ln x)^2} \end{array} \right.$.

Alors on a $f(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.
Autrement dit, si $u : x \mapsto \ln(x)$ et $\varphi : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$, on a $f = u' \times (\varphi' \circ u)$, de sorte qu'une primitive de F est $\varphi \circ u : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\ln(x))$.

Enfin, ajoutons trois nouvelles primitives qu'il faudra connaître :

Proposition 8.17 :

1. *Une primitive de* $\tan$ *sur tout intervalle de la forme* $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $k \in \mathbf{Z}$ *est* $x \mapsto -\ln(|\cos x|)$.
2. *Une primitive de* th *est* $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$.
3. *Une primitive de* $\ln$ *sur* $\mathbf{R}_+^*$ *est la fonction* $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Démonstration. Les deux premières découlent du fait que $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = -\dfrac{\cos'}{\cos}$, que $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} = \dfrac{\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}}$ et qu'on sait intégrer $\dfrac{u'}{u}$.
Pour la troisième, il suffit de constater que la dérivée de $x \mapsto x\ln(x) - x$ est

$$x \mapsto x\frac{1}{x} + \ln(x) - 1 = \ln(x).$$

□

8.2 Intégrales classiques

8.2.1 Intégration des fractions rationnelles

Pour intégrer des fractions rationnelles, on utilise la décomposition en éléments simples. Les éléments simples de première espèce ne posent pas de vraies difficultés : une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n} = (x-a)^{-n}$ est

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} = \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \geqslant 2 \\ \ln|x-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Ceci permet déjà de calculer des primitives d'un certain nombre de fractions rationnelles.

Exemple 8.18

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2(x^2+x-2)}$.
Alors la décomposition en éléments simples de f est

$$f(x) = -\frac{3}{4}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{12}\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}.$$

Et donc une primitive[11] de f est $x \mapsto -\dfrac{3}{4}\ln(|x|) + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{12}\ln(|x+2|) + \dfrac{2}{3}\ln(|x-1|)$.

Détails
Les racines de x^2+x-2 sont -2 et 1.

[11] Valable sur chacun des intervalles du domaine de définition de f.

En revanche, l'intégration des éléments simples de deuxième espèce est un peu plus délicate. Il faudra faire appel à la mise sous forme canonique des polynômes de degré 2 et se souvenir que nous savons intégrer :

- $\dfrac{1}{(ax+b)^2+1}$ en $\dfrac{1}{a}\operatorname{Arctan}(ax+b)$.
- $\dfrac{u'}{u}$ en $\ln(|u|)$

Exemples 8.19

- Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+3}$.

On a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

Donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

- Cherchons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-x+1}$.

On a alors, pour x réel,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{x^2-x+1} &= \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}. \end{aligned}$$

À présent, nous sommes en mesure de calculer une primitive de chacun de ces termes, et donc une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Méthode

Pour trouver des primitives des expressions de la forme $\dfrac{dx+e}{ax^2+b+c}$, on s'arrange pour écrire cette expression comme combinaison de $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$ (qui s'intègre en $\ln(|ax^2+bx+c|)$) et de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (voir ci-dessus).

Bien qu'il soit possible[12] de donner des formules générales pour une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2+bx+c}$, il est totalement inutile de les apprendre, et mieux vaut savoir refaire des raisonnements semblables à ceux ci-dessus.

[12] Certains ouvrages disponibles dans le commerce donnent d'ailleurs ces formules, et vous avez le droit de vous apprendre si cela vous chante. Pour ma part, je m'y suis toujours refusé !

Nous ne dirons rien de l'intégration des éléments simples du type $\dfrac{ex+f}{(ax^2+bx+c)^n}$ pour $n \geqslant 2$, celle-ci sera nécessairement guidée si vous en avez besoin.

8.2.2 Intégration des polynômes trigonométriques

Pour intégrer des fonctions qui sont composées de produits de sinus et de cosinus, on commence par linéariser ces expressions (généralement en utilisant les formules de Moivre).

Exemple 8.20

Soit $f : x \mapsto \cos^3(x) + 2\sin^2(2x)\cos(3x)$. Alors

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{\cos(3x)}{4} + \frac{3}{4}\cos(x).$$

De même

$$\begin{aligned} 2\sin^2(2x)\cos(3x) &= 2\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}-2e^{3ix}-2e^{-3ix}+e^{ix}+e^{-ix}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\cos(7x)-2\cos(3x)+\cos(x)\right). \end{aligned}$$

Et donc une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{5\sin(3x)}{12} + \frac{\sin(x)}{4} - \frac{\sin(7x)}{14}.$$

8.3 Intégration par parties et changement de variable

8.3.1 Intégration par parties

⚠ Si la somme d'une primitive de f et d'une primitive de g est une primitive de $f+g$, il n'est absolument pas vrai que le produit de deux primitives soit une primitive de $f \times g$, tout simplement car la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

La formule $(uv)' = u'v + uv'$ nous permet tout de même de trouver des primitives de fonctions de la forme $u'v+uv'$, mais en pratique il est assez rare[13] de reconnaître directement des fonctions de cette forme, et nous utiliserons plutôt le résultat suivant :

[13] Et difficile.

Théorème 8.21 (Intégration par parties) : *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Démonstration. Une primitive de $u'v+uv'$ est la fonction uv. Et donc

$$\int_a^b (u'(t)v(t)+u(t)v'(t))\,dt = [u(t)v(t)]_a^b \Leftrightarrow \int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

□

Remarque. Si l'on demande aux fonctions u et v d'être de classe $\mathscr{C}^1$, c'est tout simplement pour garantir que les fonctions $u'v$ et uv' soient bien continues, ce qui (nous) est indispensable pour considérer leur intégrale.

Exemples 8.22

▸ Calculons $I = \displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,dt$.

Posons alors $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$, de sorte que $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et $u'(t) = \dfrac{1}{t}$.
Alors u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1,e]$ et donc

$$\int_1^e t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

▸ Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)\,dt$.

Alors en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \operatorname{Arctan} t$, ce qui nous donne $u(t) = t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, il vient

$$I = \int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,dt = [t\operatorname{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$
$$= \operatorname{Arctan}(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Astuce
Lorsqu'on n'a pas directement affaire à un produit, on peut toujours en faire apparaître un en notant que $v = 1 \times v$.

▸ Calculons $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt$.

Une première intégration par parties, avec $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \cos(t)$ nous donne

alors
$$I = [e^{-2t}\sin(t)]_0^\pi + 2\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt = 2\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt.$$
Procédons de nouveau à une intégration par parties, en posant cette fois $u(t) = e^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(t)$:
$$\int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\,dt = [-e^{-2t}\cos(t)]_0^\pi - 2\int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt = e^{-2\pi}+1-2\int_0^\pi e^{-2t}\cos(t)\,dt.$$
Et donc nous avons la relation
$$I = 2(e^{-2\pi}+1-2I) \Leftrightarrow 5I = 2e^{2\pi}+2 \Leftrightarrow I = \frac{2e^{-2\pi}+2}{5}.$$
► Enfin, il faut parfois ruser pour faire apparaître une intégration par parties. Par exemple,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= [\operatorname{Arctan}(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(1) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Danger !
S'il est tout à fait possible d'utiliser plusieurs fois de suite l'intégration par parties, on prendra garde, lors de la seconde intégration par parties, de ne pas dériver la fonction qu'on avait précédemment intégrée et vice-versa, faute de quoi on revient exactement à l'intégrale de départ. Ici, on a bien dérivé deux fois le terme en e^{2t}.
Si on l'avait intégré lors de la seconde intégration par parties, on en serait arrivé à la relation $I = I$, parfaitement juste, mais souvent assez peu utile.

Il faut un peu d'intuition et d'habitude pour utiliser correctement l'intégration par parties, mais donnons quelques pistes :

1. il y a souvent plusieurs manières d'écrire une fonction comme un produit, pour faire une intégration par parties, il faut savoir dériver un des facteurs (ce qui n'est à peu près jamais un problème), mais il faut aussi savoir intégrer l'autre !
2. si jamais on sait intégrer les deux facteurs qui composent le produit, il faut aussi se demander si on saura calculer l'intégrale qui apparaîtra après l'intégration par parties (le $\int u(t)v'(t)\,dt$ du théorème).

Exemple 8.23

Soit $I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$. Alors on sait intégrer x^4 et on sait dériver e^{-x^2}.
Une intégration par parties sur ce principe nous donne alors
$$I = \left[\frac{x^4}{4}e^{-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 e^{-x^2}\,dx.$$
Malheureusement, cette seconde intégrale ne semble pas plus facile à calculer, bien au contraire. Sauf à refaire une intégration par parties sur le même principe qui va faire apparaître du $x^7e^{-x^2}$, etc, on ne va jamais s'en sortir...
D'un autre côté, il n'est pas question de dériver x^3, puisqu'on ne connaît pas de primitive de e^{-x^2}...
Mais on a également $x^3e^{-x^2} = x^2 \times xe^{-x^2}$. Et cette fois, nous savons intégrer xe^{-x^2} (en $-\frac{e^{-x^2}}{2}$), et bien entendu dériver x. Alors
$$I = \left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-1}}{2} + \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^1 = -e^{-1} + \frac{1}{2}.$$

8.3.2 Changement de variable

Théorème 8.24 (Formule de changement de variable) : *Soit I un intervalle de* $\mathbf{R}$*, soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et soit f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors pour $(a,b) \in I^2$,*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

Notation

$\varphi(I)$ désigne l'ensemble des images par φ des éléments de I, c'est-à-dire

$$\varphi(I) = \{\varphi(x),\ x \in I\}.$$

Nous admettons qu'il s'agit encore d'un intervalle, ce qui est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration. Notons F une primitive de f. Alors $F \circ \varphi$ est une primitive[14] de $\varphi' \times (f \circ \varphi)$, de sorte que

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

□

[14] Il suffit de dériver pour s'en convaincre.

La formule de changement de variable peut s'utiliser dans les deux sens : pour transformer une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$ en $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, ou le contraire.
Commençons par le premier cas.

Exemple 8.25

Considérons $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,dx = 2\int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = 2\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$
Si on pose alors $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\varphi : x \mapsto e^x$, alors f est continue sur $[1, e^{-2}]$ et φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,2]$, donc le théorème de changement de variable s'applique et

$$I = 2\int_0^2 \varphi'(x) f(\varphi(x))\,dx = 2\int_1^{e^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [2\,\mathrm{Arctan}(t)]_1^{e^2} = 2\,\mathrm{Arctan}\left(e^2\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Notons que sur cet exemple, il était tout à fait possible de trouver directement une primitive de la fonction de départ, par exemple $x \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}(e^x)$.
Le théorème de changement de variable nous amène à cette même primitive, sans avoir besoin de la reconnaître dès le départ.

Remarque

Si le changement de variable fonctionnait bien ici, c'est aussi car nous avions choisi un changement de variable judicieux !
Prendre $\varphi(x) = \sin^2(2x)$ ne nous aurait pas aidé.
Donc le théorème de changement de variable dispense d'intuition... si on a l'intuition du bon changement de variable !

Plus généralement, ce premier cas du changement de variable est celui où l'on se donne la «nouvelle variable» (c'est-à-dire celle de l'intégrale à laquelle on souhaite aboutir) en fonction de l'«ancienne variable» (celle de l'intégrale de départ).
Pour le dire autrement, on suppose que l'intégrale que l'on cherche à calculer au départ est de la forme $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.
On procède alors comme suit, si x est l'«ancienne variable», et que $t = \varphi(x)$ est la nouvelle :

1. on dérive t en fonction de x : $\dfrac{dt}{dx} = \varphi'(x)$, ce qu'on note[15] $dt = \varphi'(x)\,dx$;
2. si $\varphi'(x)$ n'est pas directement un facteur de l'intégrande, on le fait apparaître en multipliant par $\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x)}$;
3. on remplace tous les $\varphi(x)$ de l'intégrale de départ par des t et en même temps le $\varphi'(x)\,dx$ par dt. **Il n'est pas question d'écrire une intégrale qui mélangerait les deux variables x et t.**
4. dans le même temps, on change les bornes a et b en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, ce qui revient à chercher quelles valeurs prend la nouvelle variable lorsque l'ancienne prenait ses valeurs extrêmes a et b.

Le plus pratique avec cette méthode est qu'elle ne nécessite pas d'expliciter la fonction f à laquelle on applique le changement de variable.

[15] Et il s'agit là uniquement d'une notation pratique, mais sans signification mathématique précise, bien que vous ayez probablement reconnu le lien avec les notations des physiciens.

Exemple 8.26

Reprenons l'exemple précédent : $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\mathrm{ch}(x)}$, en posant $t = e^x$.
Alors $dt = e^x\,dx$ et lorsque x vaut 0, $t = 1$, et lorsque x vaut 2, $t = e^2$. Ainsi, par changement de variable, on a

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} e^{-x}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{1}{t}\frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,dt = \int_1^{e^2} \frac{dt}{1 + t^2} = \dots$$

La fonction f à laquelle nous avons appliqué le changement de variable n'était pas visible directement dans l'intégrale de départ, mais elle est automatiquement apparue en cours de calcul.

Notons qu'un tel changement de variable n'a d'intérêt que si dans l'intégrale de départ, on arrive à tout exprimer en fonction de $\varphi(x)$.
Par exemple essayer de réaliser le changement de variable $t = \cos x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 x^2 e^x\,dx$ a peu de chance d'aboutir, car on ne peut pas exprimer e^x ou x^2 en fonction de $\cos x$.
Il faut un peu d'habitude pour repérer les «bons» changement de variable.

Mais ce n'est pas là[16] que réside la puissance de la formule du changement de variable, mais plutôt lorsqu'on l'utilise dans «l'autre sens», c'est-à-dire lorsque l'intégrale dont on dispose au départ est $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$.

[16] Bien que ce soit souvent un outil précieux lorsqu'on ne «devine» pas directement la bonne primitive.

Exemple 8.27

Cherchons à calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt$, en à l'aide du changement de variable $t = \cos x$.

Autrement dit, en posant $\varphi(x) = \cos(x)$, pour $x \in [0, \pi]$. On a alors $-1 = \varphi(\pi)$ et $1 = \varphi(0)$.
Et donc par le théorème de changement de variable, où ici $f : t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt &= \int_\pi^0 \sqrt{1 - \cos^2 x}\,\underbrace{(-\sin x)}_{=\varphi'(x)}\,dx = \int_0^\pi |\sin x| \sin x\,dx \\
&= \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Remarquons qu'il y avait plusieurs choix pour les bornes, nous avons ici choisi 0 et π, mais nous aurions pu prendre 2π et 3π, ou pourquoi pas -2π et 9π. Bien entendu, cela conduit au même résultat final.

Remarque

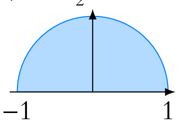
On se donne ici l'ancienne variable (t) en fonction de la nouvelle (x).

Géométriquement

Ce résultat n'a rien de surprenant, si on se rappelle que pour $y \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
&y = \sqrt{1 - x^2} \\
\Leftrightarrow &y^2 = 1 - x^2 \\
\Leftrightarrow &x^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, le graphe de $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est la moitié du cercle trigonométrique située au dessus de l'axe des abscisses.
Donc l'intégrale est la moitié de l'aire du cercle trigonométrique, donc $\frac{\pi}{2}$.



En pratique, on a rarement besoin d'expliciter φ, et connaître par cœur la formule du changement de variable n'est que de peu d'utilité.
Concrètement, pour rédiger le changement de variable ci-dessus, nous procéderions de la manière suivante.
Posons $t = \cos x$. Alors pour $x = 0$, $t = 1$ et pour $x = \pi$, $t = -1$.
La fonction cos est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donc le changement de variable est légitime.
De plus, $dt = -\sin x\,dx$. Et donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = \int_\pi^0 \sqrt{1 - \cos^2 x}(-\sin x)\,dx = \dots$$

Exemple 8.28

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{e^u+1}$ à l'aide du changement de variable $y = e^u$. Autrement dit, en posant $\varphi(u) = e^u$.
Alors $\dfrac{dy}{du} = e^u \Leftrightarrow dy = e^u\, du$. Donc il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{e^u+1} &= \int_0^1 \frac{e^u\, du}{e^u(e^u+1)}\\ &= \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)}\\ &= \int_1^e \frac{dy}{y} - \int_1^e \frac{dy}{y+1}\\ &= [\ln(y)]_1^e - [\ln(1+y)]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(e+1).\end{aligned}$$

On s'arrange pour faire apparaître $e^u\, du$.

Explication
C'est le théorème de changement de variable appliqué avec $f : y \mapsto \dfrac{1}{y(y+1)}$.

Dans des cas comme celui-ci où le changement de variable est bijectif, il est possible de «l'inverser» avant de travailler avec les «infinitésimaux» du et dy.
Ainsi, on a $y = e^u \Leftrightarrow u = \ln(y)$. Et donc $du = \dfrac{dy}{y}$, de sorte qu'en «remplaçant» directement tous les u par des $\ln(y)$ **et** le du par un $\dfrac{dy}{y}$ **et** en changeant correctement les bornes, on obtient bien $\displaystyle\int_1^e \frac{dy}{y(e^{\ln(y)}+1)} = \int_1^e \frac{dy}{y(y+1)}$.
Pour le dire autrement : nous avons appliqué le théorème de changement de variable aux fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1}{e^t+1}$ et $\varphi : x \mapsto \ln(x)$.

De manière générale, partant de $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$, si on sait qu'on souhaite réaliser le changement de variable bijectif $x = \varphi(t)$ (soit encore $t = \varphi^{-1}(x)$), comment procéderait-on pour trouver une fonction f telle que $g(t) = (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)$?
Une option serait de partir de $g = (f\circ\varphi)\varphi' \Leftrightarrow \frac{g}{\varphi'} = f\circ\varphi \Leftrightarrow f = \left(\dfrac{g}{\varphi'}\right)\circ\varphi^{-1} = \dfrac{g\circ\varphi^{-1}}{\varphi'\circ\varphi-1}$.
Or, $\dfrac{1}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}$ n'est rien d'autre que la dérivée[17] de φ^{-1}.
Autrement dit, on a $f = (g\circ\varphi^{-1})\times(\varphi^{-1})'$.
Essayez de vous convaincre sur l'exemple précédent que c'est exactement ce qu'on a fait en posant $u = \ln(y)$.

[17] Quand elle existe...

8.3.3 Application au calcul de primitives

Nous noterons dans la suite $\displaystyle\int f(t)\, dt$ pour désigner l'ensemble des primitives de la fonction f, qui, rappelons-le, diffèrent toutes d'une constante.
Par exemple, nous noterons $\displaystyle\int \ln(t)\, dt$ pour désigner toutes les fonctions de la forme $t \mapsto t\ln(t) - t + C$, $C \in \mathbf{R}$, ou encore $\displaystyle\int x^2\, dx$ pour désigner les $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.
De manière un peu abusive[18], nous écrirons $\displaystyle\int \ln(t)\, dt = t\ln(t) - t + C$, $C \in \mathbf{R}$ au lieu de $\displaystyle\int \ln(t)\, dt = \{t \mapsto t\ln(t) - t + C, C \in \mathbf{R}\}$.

[18] Mais bien pratique.

En pratique, on ne se posera pas trop de questions sur la signification de $\displaystyle\int f(t)\, dt$, et on l'utilisera comme un moyen pratique de désigner une primitive de f.
Si vous préférez ne manipuler que des intégrales avec des bornes, c'est facile : souvenez-vous qu'une primitive de f est toujours $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, avec a fixé.

Le théorème d'intégration par parties n'est pas cantonné au calcul d'intégrales, et sert aussi au calcul de primitives sous la forme suivante :

Proposition 8.29 : *Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, alors*

$$\int u'(t)v(t)\,dt = uv - \int u(t)v'(t)\,dt.$$

Exemple 8.30

$$\int x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)] - \int \sin(x)\,dx = [x\sin x] + [\cos x] = x\sin(x) + \cos(x) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Si on préfère manipuler des intégrales avec des bornes, souvenons-nous que $x \mapsto \int_0^x t\cos(t)\,dt$, est **une** primitive de $t \mapsto t\cos(t)$.
Or, lorsqu'on réalise notre intégration par parties sur le segment $[0, x]$, x étant fixé, il vient

$$\int_0^x t\cos(t)\,dt = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,dt = x\sin(x) - \underbrace{0\sin(0)}_{=\text{constante}} - \int_0^x \sin(t)\,dt.$$

Autrement dit, une primitive de $t \mapsto t\cos t$ (qui est ici notre $u'v$ du théorème) est égale à la primitive uv moins une primitive (ici celle qui s'annule en 0) de $t \mapsto \sin(t)$ (ici notre uv').
Remplacer 0 par n'importe quoi d'autre ne ferait que changer les constantes d'intégration, ce qui n'a aucune importance lorsqu'on cherche toutes les primitives et pas une[19] en particulier.

[19] Par exemple celle qui s'annulerait en π.

Il est également possible d'utiliser le théorème de changement de variable pour trouver des primitives.

Exemple 8.31

Cherchons des primitives de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ à l'aide du changement de variable $x = \cos t$.
On a, en notant que $dx = -\sin t\,dt$,

$$\int \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{Arctan}(x) + C = -\operatorname{Arctan}(\cos t) + C.$$

Là aussi, si on souhaite utiliser des intégrales usuelles : une primitive de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$ est $u \mapsto \displaystyle\int_1^u \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$.
Et alors le changement de variable $x = \cos t$ nous donne, pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\int_1^u \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\int_{\cos 1}^{\cos x} \frac{dx}{1+x^2} = [\operatorname{Arctan}(x)]_{\cos(u)}^{\cos(1)} = -\operatorname{Arctan}(\cos(u)) + \underbrace{\operatorname{Arctan}(\cos(1))}_{=\text{constante}}.$$

⚠ Attention !
Méfiance avec les noms de variables. Si t est «l'ancienne» variable d'intégration et x la «nouvelle», à aucun moment il ne faut avoir des intégrales dont les bornes s'appellent x ou t.
D'où le choix de u ici.

On n'oubliera pas de revenir à la variable de départ, qui était t, et de ne pas garder un résultat avec des x.

Dans le cas où l'on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, il faudra alors prendre garde d'utiliser un changement de variable bijectif afin d'exprimer l'ancienne variable en fonction de la première.

Exemple 8.32

Calculons une primitive sur $[-1,1]$ de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ à l'aide du changement de variable $t = \cos x$, avec $x \in [0,\pi]$.
On a alors $dt = -\sin x\, dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-t^2}\,dt &= \int \sin^2 x\,dx = \int \frac{\cos(2x)-1}{2}\,dx = -\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+C\\ &= -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2}+\frac{\sin(2\operatorname{Arccos}(t))}{4}+C = -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2}+\frac{\cos(\operatorname{Arccos} t)\sin(\operatorname{Arccos} t)}{2}+C\\ &= -\frac{\operatorname{Arccos}(t)}{2}+\frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}+C.\end{aligned}$$

Notons que puisque $\operatorname{Arccos}(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(t)$, on a également

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(t) + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C,$$

le $\frac{\pi}{2}$ étant «caché» dans la constante d'intégration.

L'idée sous-jacente au calcul qui précède est que[20] trouver une primitive de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ revient à être capable de calculer $\int_0^u \sqrt{1-t^2}\,dt$, pour tout $u \in [-1,1]$.
Mais alors nous pourrions utiliser «proprement» le théorème de changement de variable pour obtenir

$$\int_0^u \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{\operatorname{Arccos}(u)}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2}\right]_{\operatorname{Arccos}(u)}^{\pi/2} = \cdots$$

La borne fixée, que nous avons choisie ici égale à 0 n'a alors aucune importance puisque changer cette borne ne fera que changer la constante d'intégration.

[20] C'est le théorème fondamental de l'analyse !

8.4 DÉRIVATION/INTÉGRATION DES FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

Il est possible de considérer des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
Par exemple la fonction $t \mapsto te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2$.

Remarque
Notons qu'on ne parlera pas ici de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{C}$, mais seulement des fonctions dont la variable est réelle.

Définition 8.33 – Si $f : I \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{C}$, on note $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sa partie réelle et sa partie imaginaire, c'est-à-dire les deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \operatorname{Re}(f)(x) + i\operatorname{Im}(f)(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))\\ \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))\end{cases}$$

Exemple 8.34

Si $f(t) = te^{(i+1)t} + (1+2i)t^2 = te^te^{it} + (1+2i)t^2 = te^t(\cos t + i\sin t) + t^2 + 2it^2$ et donc

$$\operatorname{Re}(f) : t \mapsto te^t\cos t + t^2 \text{ et } \operatorname{Im}(f) : t \mapsto te^t\sin t + 2t^2.$$

⚠ Attention !
Pas de i dans $\operatorname{Im}(f)$: il s'agit d'une fonction à valeurs **réelles**.

8.4.1 Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbf{C}$, on note $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ les deux fonctions à valeurs réelles définies par

$$\forall x \in I,\ [\mathrm{Re}(f)](x) = \mathrm{Re}(f(x)) \text{ et } [\mathrm{Im}(f)](x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Définition 8.35 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$. On dit que f est continue (respectivement dérivable, resp. de classe $\mathscr{C}^1$) si les deux fonctions[21] $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues (resp. dérivables, resp. de classe $\mathscr{C}^1$).
Si f est dérivable, on note alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$.

[21] À valeurs réelles.

Ainsi, si f est dérivable, on a $\mathrm{Re}(f') = [\mathrm{Re}(f)]'$ et $\mathrm{Im}(f') = [\mathrm{Im}(f)]'$.

Puisque la partie réelle (resp. imaginaire) d'une somme est la somme des parties réelles (resp. imaginaires), il est facile de se convaincre que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.
En revanche, il faut travailler davantage pour prouver que d'autres formules connues dans le cas réel restent valables en complexe.

Proposition 8.36 : *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Alors :*

1. *la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$*
2. *si v ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable, et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$*

Démonstration. 1. Notons u_1, u_2 (resp. v_1, v_2) les parties réelles et imaginaires de u (resp. de v).
Alors $uv = (u_1 + iu_2) + (v_1 + iv_2) = (u_1v_1 - u_2v_2) + i(u_1v_2 + u_2v_1)$, qui se dérive en

$$\begin{aligned}(uv)' &= u_1'v_1 + u_1v_1' - u_2'v_2 - u_2v_2' + i(u_1v_2' + u_1'v_2 + u_2v_1' + u_2'v_1)\\ &= u_1'(v_1 + iv_2) + v_1'(u_1 + iu_2) + iu_2'(v_1 + iv_2) + iv_2'(u_1 + iu_2)\\ &= (u_1' + iu_2')(v_1 + iv_2) + (u_1 + iu_2)(v_1' + iv_2')\\ &= u'v + uv'.\end{aligned}$$

2. Nous pourrions de même séparer partie réelle et partie imaginaire, mais en a-t-on vraiment envie ?
Notons plutôt que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u\overline{v}}{|v|^2} = u \times \overline{v} \times \dfrac{1}{|v|^2}$.
La fonction $\dfrac{1}{|v|^2}$ est alors à valeurs réelles, et elle est dérivable car v l'est[22].
Donc par produit, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable. Mais alors $u = \left(\dfrac{u}{v}\right) \times v$ de sorte que

$$u' = \left(\frac{u}{v}\right)' v + \left(\frac{u}{v}\right) v' \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)' v = \frac{u'v - uv'}{v}$$

et donc $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

□

[22] Et qu'on peut exprimer facilement $\frac{1}{|v|^2}$ en fonction des parties réelles et imaginaires de v.

De même, si I et J sont deux intervalles de $\mathbf{R}$, si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{C}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
Il suffit pour le voir de remarquer que $\mathrm{Re}\,(g \circ f) = \mathrm{Re}(g) \circ f$, et que la même remarque vaut pour les parties imaginaires.
Il suffit alors de dériver des composées de fonctions réelles.

⚠ Attention !
Ici, f est une bien une fonction qui va de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, nous ne parlons pas de dériver des composées de fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

8.4.2 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 8.37 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbf{C}$, dérivable sur I et de dérivée f.

En particulier, pour trouver une primitive d'une fonction complexe, il suffit de déterminer une primitive de la partie réelle et une primitive de la partie imaginaire.
Le théorème fondamental de l'analyse appliqué à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ garantit que toute fonction continue f possède des primitives.
Et on prouverait sans difficultés que deux primitives de f diffèrent d'une constante[23].

[23] Complexe.

Définition 8.38 – Soit f une fonction continue sur I, soit F une primitive de f et soit $(a, b) \in I^2$. Le nombre complexe $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie, et on le note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Si F est une primitive de f, alors $\mathrm{Re}(F)$ est une primitive de $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(F)$ est une primitive de $\mathrm{Im}(f)$, de sorte que

$$\int_a^b f(t)\,dt = [\mathrm{Re}(F)](b)-[\mathrm{Re}(F)](a)+i\big([\mathrm{Im}(F)](b)-[\mathrm{Im}(F)](a)\big) = \int_a^b [\mathrm{Re}(f)](t)\,dt+i\int_a^b [\mathrm{Im}(f)](t)\,dt.$$

Le fait que la formule pour la dérivée d'un produit soit la même que pour les fonctions réelles implique que l'intégration par parties reste valable pour les fonctions à valeurs complexes.
De même pour le changement de variable, du moment que celui est réel[24] (à une variable réelle on associe un réel).

[24] De toutes façons il est hors de question d'écrire une intégrale à bornes complexes !

8.4.3 Dérivée de e^φ

Proposition 8.39 : *Soit $\varphi : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable à valeurs complexes. Alors e^φ est dérivable, et $(e^\varphi)' = \varphi' \times e^\varphi$.*

Démonstration. Notons $f = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $g = \mathrm{Im}(\varphi)$, de sorte que $\varphi = f + ig$.
On a alors, pour tout $x \in I$,

$$e^{\varphi(x)} = e^{f(x)+ig(x)} = e^{f(x)}\left(\cos(g(x)) + i\sin(g(x))\right).$$

Et donc il vient $\mathrm{Re}(e^\varphi) : x \mapsto e^{f(x)}\cos(g(x))$, qui est dérivable car produit de fonctions dérivables, et $\mathrm{Re}(e^\varphi)'(x) = f'(x)e^{f(x)}\cos(g(x)) - e^{f(x)}g'(x)\sin(g(x))$.
De même, on a $\mathrm{Im}(e^\varphi)'(x) = f'(x)e^{f(x)}\sin(g(x)) + g'(x)e^{f(x)}\cos(g(x))$.
Et donc e^φ est dérivable, avec

$$\begin{aligned}(e^\varphi)'(x) &= f'(x)e^{f(x)}\cos(g(x)) - e^{f(x)}g'(x)\sin(g(x)) + i\left(f'(x)e^{f(x)}\sin(g(x)) + g'(x)e^{f(x)}\cos(g(x))\right)\\ &= e^{f(x)}\left(f'(x) + ig'(x)\right)\left((\cos(g(x)) + i\sin(g(x))\right) = e^{f(x)}\varphi'(x)e^{ig(x)} = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 8.40 – *Pour $\alpha \in \mathbf{C}^*$, une primitive de $t \mapsto e^{\alpha t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$.*

Démonstration. Il suffit de dériver $t \mapsto e^{\alpha t}$, qui est de la forme de la proposition précédente avec $\varphi : t \mapsto \alpha t$. □

Exemple 8.41

- Une primitive de $t \mapsto e^{(1+i)t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{1+i}e^{(1+i)t}$.

► Une primitive de $t \mapsto \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ est

$$t \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}e^{ix} - \frac{1}{i}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x).$$

Remarque

Ceci n'est pas une preuve du fait que la dérivée de sin est cos, puisque ceci a été utilisé dans la preuve de la proposition précédente. Tout au plus cet exemple nous rassure quant à la cohérence de cette notation exponentielle.

Exemple 8.42 Application au calcul de primitives

Cherchons une primitive de $t \mapsto e^{2t}\sin(t)$.
Nous savons que $e^{2t}\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{2t}e^{it}) = \mathrm{Im}\left(e^{(2+i)t}\right)$.
Or, une primitive de $t \mapsto e^{(2+i)t}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2+i}e^{(2+i)t}$.
Sa partie imaginaire est donc une primitive de $t \mapsto e^{-2t}\sin(t)$.
Mais

$$\frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} = \frac{2-i}{5}e^{(2+i)t} = \frac{e^{2t}}{5}(2-i)(\cos t + i\sin t).$$

Sa partie imaginaire est donc

$$t \mapsto \frac{e^{2t}}{5}(2\sin(t) - \cos(t)).$$

Ainsi, $\displaystyle\int e^{2t}\sin(t)\,dt = \frac{e^{2t}}{5}(2\sin t - \cos t) + C,\ C \in \mathbf{R}$.

EXERCICES DU CHAPITRE 8

► Théorème fondamental de l'analyse

EXERCICE 8.1 À l'aide d'un calcul de dérivée, montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. PD

EXERCICE 8.2 **(Centrale PSI 2009)** AD
Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$.

► Calcul direct

EXERCICE 8.3 Donner sans calculs des primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I (qui est égal à $\mathbf{R}$ lorsqu'il n'est pas mentionné) : F

1) $t \mapsto 2te^{-3t^2}$
2) $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$
3) $x \mapsto \sqrt{x^4+x^2}, I = \mathbf{R}_+^*$
4) $t \mapsto \tan^2(t), I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
5) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th}(t)}, I = \mathbf{R}_-^*$
6) $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{2}{t^2}}}{t^3}, I = \mathbf{R}_+^*$
7) $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3}, I = \mathbf{R}_+^*$
8) $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
9) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(t)}, I = \mathbf{R}_+^*$
10) $t \mapsto \sqrt{e^t}$
11) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
12) $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^6}$

EXERCICE 8.4 Donner des primitives des fonctions suivantes : F

1) $x \mapsto \cos^2(2x)$
2) $x \mapsto \sin^3(x)$
3) $x \mapsto \cos(2x)\sin^2(3x)$

EXERCICE 8.5 Pour $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\, dt$. F

EXERCICE 8.6 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $t \mapsto e^{-t}\sin^2 t$. PD

EXERCICE 8.7 **Fractions rationnelles 1 : les éléments simples** PD
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x+2}$
2) $x \mapsto \dfrac{1}{(3x-2)^3}$
3) $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+4x+3}$
4) $x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x^2-4x+3}$

EXERCICE 8.8 **Fractions rationnelles 2 : la totale** AD
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3-1}$
2) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dt}{2t^2-8}$
3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\, dx$
4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}\, dx$

► Intégration par parties

EXERCICE 8.9 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties. PD

1) $\displaystyle\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\, dt$
2) $\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^2\, dt$
3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan}(x)\, dx$
4) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(t^2+\rho^2)\, dt$, où $\rho > 0$
5) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\, dt$
6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\, dt$
7) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$
8) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\, dt$

EXERCICE 8.10 Déterminer des primitives des fonctions suivantes : PD

1) $x \mapsto x\sin^3 x$ 2) $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$ 3) $x \mapsto x\,\mathrm{sh}(x)$ 4) $x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x}$

EXERCICE 8.11 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $t \mapsto te^t\cos t$. AD

► Changement de variable

EXERCICE 8.12 Calculer les intégrales suivantes en utilisant les changements de variable indiqués. AD

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt$, $x = e^t$.
2. $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$, $x = \frac{1}{t}$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$, $t = \sqrt{x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos\theta}$, $x = \sin\theta$
5. $\displaystyle\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(2\theta)\sqrt{\cos\theta}\,d\theta$, $t = \cos\theta$
6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$, $u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$

EXERCICE 8.13 Déterminer des primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable indiqué : AD

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $u = \dfrac{1}{x}$ sur $]1,+\infty[$.

2) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $u = \sqrt{1+x}$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $x = t^2$

4) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec les changements $x = \frac{1}{t}$, $x = \tan(u)$ et $x = \mathrm{sh}(v)$.

5) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $x = \cos u$

EXERCICE 8.14 Encore des fractions rationnelles AD

Dans cet exercice, nous allons voir, sur des exemples, comment intégrer des éléments simples de seconde espèce du type $x \mapsto \dfrac{\lambda x+\mu}{(ax^2+bx+c)^n}$, $n \geqslant 2$.

1) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt$, $n \geqslant 2$.

2) En utilisant le changement de variable $t = \tan y$, calculer $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$.

3) Avec le même changement de variable, calculer $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

4) À l'aide d'un changement de variable bien choisi, exprimer $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\,dx$ en fonction de I_2 et J_2, et en déduire sa valeur.

EXERCICE 8.15 On pose $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt$ et $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt$. PD

1) Montrer que ces intégrales sont bien définies.
2) Déterminer la valeur de $S + C$.
3) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $S = C$. En déduire leur valeur commune.
4) Déduire de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

EXERCICE 8.16 Fractions rationnelles trigonométriques AD

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables indiqués :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\,dx$, $t = \mathrm{ch}(x)$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^4 t}$, $x = \tan t$.

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta-2)(2+\sin\theta-\cos^2\theta)}\,d\theta$, $x = \sin\theta$

► Et sans indications ?

EXERCICE 8.17 Déterminer, par les moyens de votre choix les primitives (ou intégrales) des fonctions suivantes AD

1) $t \mapsto \text{Arctan}(t)/t^2$

2) $t \mapsto \sin(\ln t)$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{e^{2x} + e^x}$

4) $x \mapsto x \,\text{Arcsin}(x)$

5) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan^3 x}$

6) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

7) $(\star)$ $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \text{Arctan}(t)\, dt.$

EXERCICE 8.18 (Oral Mines Ponts 2010)

D

Déterminer une primitive de $x \mapsto \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^3$.

EXERCICE 8.19 (Oral Polytechnique)

D

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx$. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\text{Arctan}\, t}{1+t}\, dt$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 8

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.1

Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Alors, par le théorème fondamental de l'analyse, F est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ qui s'annule en 0.

D'autre part, la fonction $G : x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, car composée de fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ G'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Sur R ?
Il n'est pas trop difficile de constater que G est définie sur $\mathbf{R}$ car pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$-x \leqslant \sqrt{x^2+1}.$$

Donc G est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Puisque $G(0) = 0$, c'est donc l'unique primitive de f qui s'annule en 0 : c'est F.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Remarque
On pourrait prouver que F est la bijection réciproque de sh.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.2

Notons que f est π-périodique, car $\cos^2$ et $\sin^2$ le sont. Donc il suffit de déterminer f sur $[0,\pi]$.

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin^2(\pi-x) = \sin^2 x$ et $\cos^2(\pi-x) = \cos^2(x)$.

Donc il suffit de déterminer f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par le théorème fondamental de l'analyse[1], f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

[1] f est une composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2(x)}) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2(x)}) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arcsin}(\sin x) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = 2x\sin(x)\cos(x) - 2x\sin(x)\cos(x) = 0. \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, égale à $f(0)$.

Mais $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.

Un changement de variable $u = \sqrt{t}$ nous donne alors $f(0) = 2\displaystyle\int_0^1 u\operatorname{Arccos}(u)\,du$.

Et alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned} f(0) &= \left[u^2\operatorname{Arccos} u\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2-1+1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = -\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du + [\operatorname{Arcsin} u]_0^1 \\ &= -\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)\,dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{2x+\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Détails
On a procédé au changement de variable $u = \cos x$.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.3

1. À une constante près, on reconnaît une expression de la forme $u'e^u$ où $u(t) = -3t^2$: une primitive de $t \mapsto 2te^{-3t^2}$ est $t \mapsto -\dfrac{1}{3}e^{-3t^2}$.
2. Notons que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ est la dérivée de $\cos^2(x)$.
Et donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{3-\cos^2(x)}$ est $x \mapsto \ln(3-\cos^2 x)$.

Valeur absolue
Notons qu'il n'est pas nécessaire ici de mettre une valeur absolue dans le ln puisque $3-\cos^2(x) > 0$, quel que soit $x \in \mathbf{R}$.

3. On a $\sqrt{x^4+x^2} = \sqrt{x^2(x^2+1)} = x\sqrt{x^2+1}$.
Mais la dérivée de $x \mapsto x^2+1$ est $2x$, de sorte que $x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}u'(x)\,(u(x))^{1/2}$, où $u(x) = x^2+1$.
Donc une primitive en est $x \mapsto \frac{2}{3}\frac{1}{2}(u(x))^{3/2} = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3}$.

Rappel
Une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.

4. On a $\tan^2(t) = \tan^2(t)+1-1$, et nous connaissons une primitive de $1+\tan^2(t)$, donc une primitive de $\tan^2(t)$ est $t \mapsto \tan(t)-t$.
5. Puisque $\dfrac{1}{\mathrm{th}(x)} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{\mathrm{sh}'(x)}{\mathrm{sh}(x)}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$ est $x \mapsto \ln(|\mathrm{sh}(x)|)$.
Mais sur $I = \mathbf{R}_-^*$, $\mathrm{sh}(x) < 0$, et donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$ est $x \mapsto \ln(-\mathrm{sh}(x))$.
6. C'est de la forme $u'e^u$: une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-2/t^2}}{t^3}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{4}e^{-\frac{2}{t^2}}$.
7. Si $u(x) = \ln(x)$, alors $\dfrac{1}{x(\ln(x))^3} = \dfrac{u'(x)}{u(x)^3} = u'(x)(u(x))^{-3}$.
Donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{-3+1}u(x)^{-3+1} = \dfrac{-1}{2(\ln(x))^2}$.

Astuce
Plutôt que d'apprendre des formules pour les primitives de $\dfrac{u'}{u^n}$, utilisez les puissances négatives et la formule pour une primitive de $u'u^n$ (qui reste valable pour $n < 0$.)

8. Nous savons que $\dfrac{1}{\cos^2}$ est la dérivée de tan. Et donc nous sommes en présence d'une expression de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
Par conséquent, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 t\sqrt{\tan t}}$ est $t \mapsto 2\sqrt{\tan t}$.
9. On a, pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,
$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})^2} = \frac{4}{\left(e^t\left(1-e^{-2t}\right)\right)^2} = \frac{4e^{-2t}}{(1-e^{-2t})^2}.$$
Et donc[2] une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(t)}$ est $t \mapsto -\dfrac{2}{1-e^{-2t}}$.
Une autre méthode est la suivante : $\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{th}^2(t)\,\mathrm{ch}^2(t)$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\dfrac{1}{\mathrm{th}^2(t)}$.
Mais $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est la dérivée de th, de sorte qu'une primitive est $t \mapsto -\dfrac{1}{\mathrm{th}(t)}$.
Enfin, plus astucieux :
$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2}{\mathrm{sh}^2} = -\frac{\mathrm{ch}'\,\mathrm{sh}-\mathrm{ch}\,\mathrm{sh}'}{\mathrm{sh}^2}.$$
Et donc on reconnaît (chose rare !) la dérivée du quotient $-\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$, dont une primitive est $-\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}} = -\dfrac{1}{\mathrm{th}}$.

[2] On a reconnu une expression de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$.

Remarque
Cette primitive n'est pas la même que la précédente, mais on peut vérifier qu'elle en diffère par une constante (bien entendu !).

10. Il suffit de remarquer que $\sqrt{e^t} = e^{t/2}$, et donc une primitive de $t \mapsto \sqrt{e^t}$ est $t \mapsto 2e^{t/2}$.
11. On a $\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}$, et nous reconnaissons là la dérivée de $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$.
12. On a $\dfrac{t^2}{1+t^6} = \dfrac{t^2}{1+(t^3)^2}$, qui est de la forme $\frac{1}{3}\frac{u'}{1+u^2}$.
Donc une primitive de $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^6}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{3}\,\mathrm{Arctan}\,(t^3)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.4

Il s'agit à chaque fois de penser à linéariser l'expression considérée.

1. On a $\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$ et donc une primitive de $x \mapsto \cos^2(2x)$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(4x)}{8}$.
2. On a, en utilisant les formules d'Euler,
$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x).$$

Astuce
C'est la formule
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Et donc une primitive de $x \mapsto \sin^3(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)$.

3. Toujours à l'aide des formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(3x) &= \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{8}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)\left(e^{6ix}-2+e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(2e^{2ix}+2e^{-2ix}-e^{8ix}-e^{-8ix}-e^{4ix}-e^{-4ix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}\cos(4x)-\frac{1}{4}\cos(8x).\end{aligned}$$

Et donc une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin^2(3x)$ est

$$x \mapsto \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{16}\sin(4x) - \frac{1}{32}\sin(8x).$$

Solution de l'exercice 8.5

Notons tout de suite que si $p = 0$ ou $q = 0$, alors $I_{p,q} = 0$.

Si $p = q$, alors $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(pt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2pt))\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2pt)}{2p}\right]_0^{2\pi} = \pi$.

De même, si $p = -q$, alors $I_{p,q} = -I_{p,p} = -\pi$.

Si $p \neq \pm q$, alors

$$I_{p,q} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t))\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p-q)t)}{p-q} - \frac{\sin((p+q)t)}{p+q}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Trigo

$\sin a \sin b =$

$\frac{1}{2}\cos(a-b) - \cos(a+b)$.

Solution de l'exercice 8.6

On a $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ et donc $e^{-t}\sin^2 t = \dfrac{e^{-t}}{2} - \dfrac{e^{-t}\cos(2t)}{2}$.

Mais $e^{-t}\cos(2t) = e^{-t}\,\mathrm{Re}\left(e^{2it}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(2i-1)t}\right)$.

Une primitive de $e^{(2i-1)t}$ est $\dfrac{1}{2i-1}e^{(2i-1)t} = -\dfrac{1}{5}(1+2i)e^{(2i-1)t} = -\dfrac{1}{5}(1+2i)(\cos(2t)+i\sin(2t))\,e^{-t}$.

Sa partie réelle, qui est une primitive de $t \mapsto e^{-t}\cos(2t)$.

$$t \mapsto \frac{1}{5}e^{-t}\left(2\sin(2t) - \cos(2t)\right).$$

Et donc une primitive de $t \mapsto e^{-t}\sin^2(t)$ est

$$t \mapsto e^{-t}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}(\cos(2t) - 2\sin(2t))\right).$$

Solution de l'exercice 8.7

1. On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, et donc

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \mathrm{Arctan}(x-1) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

2. On a $\dfrac{1}{(3x-2)^3} = (3x-2)^{-3}$ et donc

$$\int \frac{dx}{(3x-2)^3} = \frac{1}{-2}\frac{1}{3}(3x-2)^{-2} + C = \frac{-1}{6(3x-2)^2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

3. On a $2x^2 + 4x + 3 = 2\left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 + \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2 + 1$.

Et donc

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}(x+1)\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}(x+1)\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

4. On a
$$\frac{3x+1}{2x^2-4x+3}=\frac{3}{4}\frac{4x-4}{2x^2-4x+3}+\frac{4}{2x^2-4x+3}.$$
On a déjà facilement
$$\int \frac{4x-4}{2x^2-4x+3}\,dx=\ln(2x^2-4x+3)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$
D'autre part, une mise sous forme canonique du dénominateur nous donne
$$2x^2-4x+3=2\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)=2\left((x-1)^2+\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{2}\,(x-1)\right)^2+1.$$
Et donc
$$\int \frac{1}{2x^2-4x+3}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}(x-1)\right)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$
On en déduit donc que
$$\int \frac{3x+1}{2x^2-4x+3}\,dx=\frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3)+2\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}\,(x-1)\right)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Méthode
Il s'agit de s'occuper d'abord du terme en x au numérateur, et pour cela, on fait apparaître une expression de la forme $\frac{u'}{u}$.

Valeur absolue
En général, une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$. Ici on peut se passer de la valeur absolue car $2x^2-4x+3$ est de signe constant sur $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.8

1. Notons que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Et donc la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^3-1}$ est de la forme $\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$ $(\star)$.
En multipliant cette relation par $x-1$ et en évaluant en $x=1$, il vient $a=\frac{1}{3}$.
De même, en multipliant $(\star)$ par x et en passant à la limite en $+\infty$, il vient $b+a=0\Leftrightarrow b=-\frac{1}{3}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $x=0$, on obtient $-1=-\frac{1}{3}+\frac{c}{3}$, de sorte que $c=-\frac{2}{3}$.
Et donc $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$.
On a aisément $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1}=[\ln|x-1|]_{-1}^{0}=-\ln 2$.
D'autre part, on a
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx&=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\int_{-1}^{0}\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\&=\underbrace{\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+x+1)\right]_{-1}^{0}}_{=0}+\frac{3}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\\&=2\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\&=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{0}\\&=\sqrt{3}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

On a factorisé le dénominateur par $\frac{3}{4}$.

Et donc pour conclure,
$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3-1}=-\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

2. On a $\frac{1}{2t^2-8}=\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-4}=\frac{1}{2}\frac{1}{(t-2)(t+2)}$.
Et donc la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(t-2)(t+2)}$ est de la forme $\frac{a}{t-2}+\frac{b}{t+2}$.
Il est facile[3] de constater que $a=\frac{1}{4}$ et $b=-\frac{1}{4}$, de sorte que
$$\int_3^4\frac{dt}{2t^2-8}=\frac{1}{8}\left(\int_3^4\frac{dt}{t-2}-\int_3^4\frac{dt}{t+2}\right)=\frac{1}{8}\left[\ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)\right]_3^4=\frac{1}{8}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

[3] Nous sommes en présence de deux pôles simples.

3. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{4X^2}{X^4-1}$ est $\dfrac{2}{X^2+1} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{X-1}$.
Donc une primitive est $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(x) + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.
Et donc au final $\displaystyle\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = 2\operatorname{Arctan} 3 - 2\operatorname{Arctan} 2 + \ln\frac{3}{2}$.
Un peu de trigo nous donnerait en plus $\operatorname{Arctan}(2) - \operatorname{Arctan}(3) = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}$.

Pôles
Les racines du dénominateur sont les racines 4èmes de l'unité, donc 1, i, -1 et $-i$. Ceci doit permettre de factoriser très rapidement ce dénominateur.

4. Attention : la fraction rationnelle n'est pas de degré négatif, il faut donc commencer par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
On obtient alors $X^3 - X^2 = (X+1)(X^2-2X+1) + X - 1$.
Et donc $\dfrac{X^3-X^2}{X^2-2X+1} = X+1+\dfrac{X-1}{X^2-2X+1} = X+1+\dfrac{X-1}{(X-1)^2} = X+1+\dfrac{1}{X-1}$.
On a d'une part $\displaystyle\int_2^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 = \frac{7}{2}$.
D'autre part,
$$\int_2^3 \frac{x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \int_2^3 \frac{x-1}{(x-1)^2}\,dx = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = [\ln(x-1)]_2^3 = \ln(2).$$
Et donc $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{7}{2} + \ln(2)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.9

Méthode
Dans ce genre de situation, on sait aussi bien intégrer que dériver les deux termes. On remarque que dériver ou intégrer l'exponentielle revient au même, alors que dériver le polynôme fera baisser son degré quand l'intégrer augmentera son degré, ce qui nous conduirait à une expression probablement plus compliquée que celle de départ. On choisit donc de dériver le polynôme.

1. Procédons à une intégration par parties, en posant $u(t) = t^2 - t + 1$ et $v(t) = -e^{-t}$, de sorte que $u'(t) = 2t - 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$.
Il vient alors
$$\begin{aligned}
\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\,dt &= \left[-(t^2-t+1)e^{-t}\right]_1^2 + \int_1^2 (2t-1)e^{-t}\,dt\\
&= -3e^{-2} + e^{-1} + \int_1^2 (2t-1)e^{-t}\,dt\\
&= -3e^{-2} + e^{-1} + \left[-(2t-1)e^{-t}\right]_1^2 + \int_1^2 2e^{-t}\,dt\\
&= -3e^{-2} + e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-1} + 2\left[-e^{-t}\right]_1^2\\
&= -6e^{-2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} = -8e^{-2} + 4e^{-1} = 4e^{-1}\left(1 - 2e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Nouvelle intégration par parties en dérivant toujours le polynôme.

2. En posant $u(t) = (\ln t)^2$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec $u'(t) = \dfrac{2}{t}\ln(t)$ et $v'(t) = t$, on a
$$\int_1^e t(\ln t)^2\,dt = \left[\frac{t^2(\ln t)^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e t\ln(t)\,dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e t\ln(t)\,dt.$$
Une nouvelle intégration par parties[4] donne alors
$$\int_1^e t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}.$$
Et donc $\displaystyle\int_1^e t(\ln t)^2\,dt = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$.

[4] Toujours en dérivant le ln.

3. Posons $u(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $v(x) = \operatorname{Arctan}(x)$, de sorte que u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\sqrt{3}]$, avec $u'(x) = x^2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Par intégration par parties, on a alors
$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2\operatorname{Arctan}(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan}(x)\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

Mais une division euclidienne de x^3 par $1+x^2$ nous informe que $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$.
Et donc

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - \ln(2).$$

Et donc au final,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan}(x)\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{3}.$$

4. Sur $[-1,1]$, posons $u(t) = \ln(t^2+\rho^2)$ et $v(t) = t$. Ce sont alors deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = \dfrac{2t}{t^2+\rho^2}$ et $v'(t) = 1$.
Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,dt &= \left[t\ln(t^2+\rho^2)\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= \ln(1^2+\rho^2) + \ln((-1)^2+\rho^2) - 2\int_{-1}^{1} \frac{(t^2+\rho^2)-\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 2\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\right)dt \\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 2\int_{-1}^{1} dt + 2\int_{-1}^{1}\frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\rho}\right)^2}\,dt \\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + \left[2\rho\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= 2\ln(1+\rho^2) - 4 + 4\rho\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right).
\end{aligned}$$

Astuce

On sait toujours intégrer 1 ! Ce qui ne veut pas dire que cette astuce marche à tous les coups...

5. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \sqrt{1-t^2}$, de sorte que $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \left[t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \left[\operatorname{Arcsin}(t)\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Et donc il vient

$$2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{5\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}.$$

Une autre méthode, un peu plus astucieuse est la suivante :

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} t\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\,dt.$$

Une intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}
\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\,dt &= \left[\frac{t^2}{2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{t^2}{4}\frac{-2}{t^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\,dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} + \frac{1}{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\operatorname{Arcsin}(t)]_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5\pi}{24}.
\end{aligned}$$

6. Notons I notre intégrale, et procédons à une première intégration par parties :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\,dt = \underbrace{\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin(3t)\right]_{-\pi}^{\pi/3}}_{=0} + \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt = \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt.$$

Puisque nous ne savons pas davantage calculer cette seconde intégrale, procédons à une autre intégration par parties :

> ⚠ Attention !
> Ne pas intégrer le cos, car cela nous ferait revenir à l'intégrale de départ.

$$\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\cos(3t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(3t)\right]_{-\pi}^{\pi/3} - \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}e^{2\pi} - \frac{3}{2}I.$$

Au final, on a donc

$$I = \frac{3}{4}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{2\pi}\right) - \frac{9}{4}I$$

soit encore

$$I = \frac{3}{13}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{2\pi}\right).$$

7. Il s'agit de reconnaître que $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ est la dérivée de la fonction tangente. Et donc, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \tan(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= [x\tan(x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\tan(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

8. Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \sin(\ln t)$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, e^\pi]$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t)$. Alors par intégration par parties,

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt = [t\sin(\ln t)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt = -\int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt.$$

Mais une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_1^{e^\pi}\cos(\ln t)\,dt = [t\cos(\ln t)]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = -(e^\pi+1) + \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt.$$

Au final, on a

$$\int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = 1 + e^\pi - \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt = \frac{1+e^\pi}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.10

1. Commençons par linéariser le sinus :

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x).$$

Procédons alors à des intégrations par parties :

$$\int x\sin(3x)\,dx = \left[-\frac{x}{3}\cos(3x)\right]+\frac{1}{3}\int\cos(3x)\,dx = -\frac{x}{3}\cos(3x)+\frac{1}{9}\sin(3x)+C_1,\ C_1\in\mathbf{R}.$$

Et de même,

$$\int x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]+\int\cos(x)\,dx = -x\cos(x)+\sin(x)+C_2,\ C_2\in\mathbf{R}.$$

Et par conséquent,

$$\int x\sin^3(x)\,dx = \frac{1}{12}x\cos(3x)-\frac{1}{36}\sin(3x)-\frac{3}{4}x\cos(x)+\frac{3}{4}\sin(x)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

2. Procédons à une intégration par parties en notant que $\operatorname{Arcsin}(x) = 1\times\operatorname{Arcsin}(x)$. Alors

$$\int\operatorname{Arcsin}(x)\,dx = [x\operatorname{Arcsin}(x)]-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{Arcsin}(x)-\left[-\sqrt{1-x^2}\right] = x\operatorname{Arcsin}(x)+\sqrt{1-x^2}+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

3. Dérivons x et intégrons le sh, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \operatorname{ch}(x)$, de sorte que

$$\int x\operatorname{sh}(x)\,dx = x\operatorname{ch}(x)-\int\operatorname{ch}(x)\,dx = x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Solution de l'exercice 8.11

Nous savons que $te^t\cos t = \operatorname{Re}\left(te^te^{it}\right) = \operatorname{Re}\left(te^{(1+i)t}\right)$.
Il s'agit donc de déterminer une primitive de $te^{(1+i)t}$.

Pour cela, nous pouvons procéder par intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $v(t) = \frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}$, et donc $u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{(1+i)t}$. Il vient alors

$$\int te^{(1+i)t}\,dt = [\frac{t}{1+i}e^{(1+i)t}]-\int\frac{1}{1+i}e^{(1+i)t}\,dt = \left(\frac{t}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}\right)e^{(1+i)t}.$$

Mais $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ et donc $\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{-i}{2}$.
Et par conséquent, une primitive de $t\mapsto te^t\cos t$ est

$$t\mapsto\operatorname{Re}\left(\frac{t(1-i)+i}{2}e^{(1+i)t}\right) = \frac{e^t}{2}\operatorname{Re}\left((t+(1-t)i)(\cos t+i\sin t)\right) = \frac{e^t}{2}(t\cos t+(t-1)\sin t).$$

Solution de l'exercice 8.12

1. Posons $x = e^t$. Lorsque $t = 0$, alors $x = 1$, et lorsque $t = \ln 2$, $x = 2$.
On a alors $dx = e^t\,dt = x\,dt \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Il vient donc

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt = \int_1^2\frac{x^2}{x+1}\frac{dx}{x} = \int_1^2\frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^2\frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = [x-\ln(x+1)]_1^2 = 1-\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

2. Lorsque $t = e^{-1}$, $x = e$ et vice-versa.
De plus, $t = \frac{1}{x}$, donc $dt = -\frac{dx}{x^2}$. Ainsi,

$$\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = \int_e^{e^{-1}}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_{e^{-1}}^{e}\frac{-\ln x}{x^2+1}\,dx.$$

Autrement dit, si I désigne l'intégrale de départ, nous venons de prouver que $I = -I$, et donc $I = 0$.

3. En posant $t = \sqrt{x-1}$, on a $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$. De plus, on a $t^2 = x-1 \Leftrightarrow x = t^2+1$.
Il vient donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} &= \int_1^2 \frac{2\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}}\frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+t}\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt\\
&= \left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt\\
&= \ln(3) - \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt\\
&= \ln(3) - \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1\\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\
&= \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

4. Lorsque $\theta = 0$, alors $x = 0$, et lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, alors $x = \dfrac{1}{2}$.
De plus, $dx = \cos\theta\,d\theta$. Et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{1-\sin^2\theta} = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx.$$

Mais $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$, et une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$. Et par conséquent,

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{dx}{x-1} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

5. Notons que sur l'intervalle[5] $\left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, la fonction cos est bien positive, et donc la racine carrée est bien définie.
Posons alors $t = \cos\theta$, de sorte que $dt = -\sin\theta\,d\theta$, et donc

$$\begin{aligned}
\int_{2\pi}^{5\pi/3} \sin(2\theta)\sqrt{\cos\theta}\,d\theta &= \int_{2\pi}^{5\pi/3} 2\cos\theta\sqrt{\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\\
&= \int_{1/2}^1 2t\sqrt{t}\,dt\\
&= \left[\frac{4}{5}t^2\sqrt{t}\right]_{1/2}^1\\
&= \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10}.
\end{aligned}$$

[5] Les bornes sont effectivement «à l'envers», et si vous ne l'aviez pas remarqué, ça ne change rien !

6. Notons que la fonction $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, ce qui ne serait pas le cas sur $[0,1]$ (car la racine carrée n'est pas dérivable en 0).

Procédons au changement de variable indiqué : on a alors $u^2 = \dfrac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et donc $dt = \dfrac{-4u\,du}{(1+u^2)^2}$, de sorte que

$$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{4u^2}{(1+u^2)}\,du.$$

Procédons alors à une intégration par parties, en posant $f(u) = u$ et $g(u) = -\dfrac{2}{1+u^2}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, avec $f'(u) = 1$ et $g'(u) = \dfrac{4u}{(1+u^2)^2}$, de sorte que

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \left[\frac{-2u}{1+u^2}\right]_{1/\sqrt{3}}^{1} + \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{1+u^2}\,du = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + [2\operatorname{Arctan}(u)]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.13

Dans le cas où vous n'êtes pas à l'aise avec le changement de variable sans bornes, vous pouvez toujours considérer que déterminer $\displaystyle\int f(t)\,dt$, c'est déterminer $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, où a est n'importe quel élément fixé de l'intervalle de définition de f.

Attention ! Pour la borne «du bas» de l'intégrale, on peut prendre n'importe quel nombre, du moment qu'il est dans l'ensemble de définition de notre fonction. Et donc ici on ne prendra ni 0, ni 1, ni n'importe quel nombre hors de $]1, +\infty[$.

1. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est $t \mapsto \displaystyle\int_2^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

   Posons $u = \dfrac{1}{x}$, de sorte que $x = \dfrac{1}{u}$ et donc $dx = -\dfrac{du}{u^2}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_2^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= -\int_{1/2}^{1/t} \frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\\ &= \int_{1/t}^{1/2} \frac{1}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = \int_{1/t}^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\operatorname{Arcsin}(u)]_{1/t}^{1/2}\\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

   Donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ sont les $t \mapsto -\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{t}\right) + C$, $C \in \mathbf{R}$.

   Rédaction alternative avec des intégrales «sans bornes»

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{Arcsin}(u) + C = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

2. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ est $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

   Si on pose $u = \sqrt{1+x}$, on a $du = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\,dx$ et $x = u^2 - 1$.

   Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x}{2\sqrt{1+x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{1+x}} 2(u^2-1)\,du\\ &= \left[\frac{2}{3}u^3 - 2u\right]_1^{\sqrt{1+t}}\\ &= \frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t} - 2\sqrt{1+t} + \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

   Et donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ sont les $t \mapsto \dfrac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t} - 2\sqrt{1+t} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

   Remarque On a «caché» le $\frac{4}{3}$ dans la constante d'intégration.

   Rédaction alternative, avec des intégrales «sans bornes».

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int x\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int (u^2-1)2\,du = \frac{2u^3}{3} - 2u + C = 2\sqrt{1+x}\left(\frac{1+x}{3} - 1\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

3. Notons que $t \mapsto t^2$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, et que la bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt{x}$.
   Posons donc $x = t^2$, de sorte que $dx = 2t\,dt$. Alors

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2} + \sqrt{t^6}}\,dt = \int \frac{2t}{t + t^3}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\operatorname{Arctan}(t) + C = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

4. Si on utilise le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, alors $dx = -\frac{dt}{t^2}$ et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = -\sqrt{1+t^2}+C = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C.$$

Si on utilise le changement de variable $x = \tan(u)$, alors $dx = (1+\tan^2 u)\,du$ et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u\sqrt{1+\tan^2 u}}\,du = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan^2 u}\,du.$$

Mais $1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$ et donc

$$\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan^2 u}\,du = \int \frac{1}{\cos u \tan^2 u}\,du = \int \frac{\cos u}{\sin^2 u}\,du = -\frac{1}{\sin u} + C.$$

Or, $\sin u = \tan u \cos u = \tan u \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$.

Donc $-\frac{1}{\sin u} + C = -\frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C.$

Détails
C'est encore la formule
$$\frac{1}{\cos^2 u} = 1+\tan^2 u.$$

Enfin, si on utilise le changement de variable $x = \mathrm{sh}(v)$. Alors $dx = \mathrm{ch}(v)dv = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(v)}dv$.
Et donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{ch}(v)}{\mathrm{sh}^2(v)\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(v)}} = \int \frac{dv}{\mathrm{sh}^2 v} = 4\int \frac{1}{(e^v-e^{-v})^2}\,dv = 4\int \frac{e^{-2v}}{(1+e^{-2v})^2}\,dv = -\frac{2}{1-e^{-2v}}+C.$$

Mais $x = \mathrm{sh}(v) \Leftrightarrow 2x = e^v - e^{-v} \Leftrightarrow (e^{-v})^2 + 2xe^{-v} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-v} = -x \pm \sqrt{1+x^2}$.
Puisque $e^{-v} \geqslant 0$, on a donc $e^{-v} = x - \sqrt{1+x^2}$.
Et alors $e^{-2v} = 1 - 2xe^{-v} = 1 + 2x^2 - 2x\sqrt{1+x^2}$.
Il vient alors

$$\frac{2}{e^{-2v}-1} = \frac{1}{x^2 - x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)} = -\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x} = -1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Astuce
Vous aurez bien entendu reconnu la multiplication par la quantité conjuguée afin de ne pas garder de racines au dénominateur.

Et donc $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C'$.

Remarque *: notons au passage que nous avons quasiment calculé la bijection réciproque de* sh*, puisque nous avons (presque) résolu l'équation* $\mathrm{sh}(v) = x$.

5. Commençons par noter que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ n'est définie que sur $]-1,1]$. Or la fonction $u \mapsto \cos(u)$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, dont la bijection réciproque est la fonction Arccos.
Procédons donc au changement de variable indiqué : $x = \cos u$, de sorte que $dx = -\sin u\,du$.

On a alors $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\int \sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\sin u}}\sin u\,du$.
Il va nous falloir faire un peu de trigonométrie pour aller plus loin...
L'idée est d'utiliser les formules $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$, qui, en remplaçant t par $\frac{t}{2}$, nous donnent

$$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} = 1+\cos t \text{ et } 2\sin^2\frac{t}{2} = 1 - \cos t.$$

Et donc

$$-\int\sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}}\sin u\,du = -\int\sqrt{\frac{\cos^2\frac{u}{2}}{\sin^2\frac{u}{2}}}\sin u\,du = -\int \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin u,\,du.$$

Signe
Pour $u \in]0,\pi[$, on a $0 \leqslant \frac{u}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, et donc $\sin\frac{u}{2}$ et $\cos\frac{u}{2}$ sont positifs.

Encore un peu de trigo : $\sin u = \sin\left(2\frac{u}{2}\right) = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$, et donc

$$-\int\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\sin u\,du = -\int 2\cos^2\frac{u}{2}\,du = -\int(1+\cos u)\,du = -u - \sin u + C,\ C\in\mathbf{R}.$$

Et donc enfin,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\operatorname{Arccos}(x) - \sin(\operatorname{Arccos} x) + C = -\operatorname{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Notons que le changement de variable était en fait superflu :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx &= \int \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin}(x) + C,\ C \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{1+x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.14

1. Le calcul est immédiat : une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t}{(1+t^2)^n}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$.

Et donc $I_n = \left[\dfrac{1}{1-n}\dfrac{1}{(t^2+1)^{n-1}}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

2. Procédons au changement de variable indiqué, en notant que $dt = (1+\tan^2 y)\,dy \Leftrightarrow \dfrac{dt}{1+t^2} = dy$. Alors

$$J_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 y\,dy.$$

Mais alors $\cos^2 y = \dfrac{1+\cos(2y)}{2}$ et donc

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2y)\,dy = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left[\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

3. Le même changement de variable qu'à la question précédente nous mène à

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 y)^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(y)\,dy.$$

Mais en utilisant les formules d'Euler, il vient

$$\cos^4 y = \left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i4y} + 4e^{i2y} + 6 + 4e^{-2iy} + e^{-i4y}\right) = \frac{1}{8}\cos(4y) + \frac{1}{2}\cos(2y) + \frac{3}{8}.$$

Et donc on obtient

$$J_3 = \frac{3}{8}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{32}\underbrace{\left[\sin(4y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}_{=0} + \frac{1}{4}\left[\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

4. Commençons par noter que $2x^2 - 4x + 10 = 2(x^2 - 2x + 5) = 2\left((x-1)^2 + 4\right)$.
Si nous voulons faire apparaître I_2 et J_2, il nous faut un changement de variable faisant apparaître $(u^2+1)^2$ au dénominateur. Posons donc $u = \dfrac{x-1}{2}$, de sorte que

$$\frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2} = \frac{1}{4}\frac{2x+1}{((x-1)^2+4)^2} = \frac{1}{64}\frac{2x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}$$

Remarque

C'est exactement le changement de variable que nous aurions fait pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+10}\,dx$.

et donc

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2x+1}{(2x^2-4x+10)^2}\,dx &= \frac{1}{64}\int_0^1 \frac{4u+3}{(u^2+1)^2}2\,du = \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du + \frac{3}{32}\int_0^1 \frac{du}{(u^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{16}I_2 + \frac{3}{32}J_2 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{256} + \frac{7}{128}.\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.15

1. Le seul éventuel soucis qui pourrait apparaître serait que les dénominateurs s'annulent sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Mais nous savons que

$$\cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Et sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cette quantité reste comprise entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 1.
Donc les deux intégrales sont bien définies, car intégrales de fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Il est clair que

$$S + C = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + \sin t}{\cos t + \sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. Procédons au changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, de sorte que $dx = -dx$:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}\,dx = C.$$

Et donc $S + C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2S = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow S = \frac{\pi}{4}$.

4. Procédons au changement de variable $x = \sin t$.
On a alors $dx = \cos t\,dt$ et donc

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \sqrt{1 - \sin^2 t}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \sqrt{\cos^2 t}}\,dt.$$

Mais sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geqslant 0$, de sorte que $\cos t = \sqrt{\cos^2 t}$, et donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt = S = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.16

1. Procédons au changement de variable indiqué : $t = \mathrm{ch}(x)$, de sorte que $dt = \mathrm{sh}(x)\,dx$. Alors

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(x)(1 + \mathrm{ch}(x))}\mathrm{sh}(x)\,dx = \int_1^{\mathrm{ch}(1)} \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int_1^{\mathrm{ch}(1)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt.$$

Et donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{ch}(x)}\,dx = \left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^{\mathrm{ch}(1)} = \ln\left(\frac{\mathrm{ch}(1)}{1 + \mathrm{ch}(1)}\right) + \ln(2).$$

2. Là aussi, procédons au changement de variable indiqué, $x = \tan t$, de sorte que $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.
Et alors

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 t\,dt} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 t + 1)\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^1 (x^2 + 1)\,dx.$$

Ne reste alors qu'à calculer l'intégrale d'un polynôme, ce qui est trivial :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^4 t} = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. Commençons par remarquer que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et que

$$2 + \sin\theta - \cos^2\theta = 2 + \sin\theta - 1 + \sin^2\theta = \sin^2\theta + \sin\theta + 1.$$

Procédons alors au changement de variable indiqué, en notant que $dx = \cos\theta\, d\theta$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta-2)(2+\sin\theta-\cos^2\theta)}\, d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta}{(\sin\theta-2)(\sin^2\theta+\sin\theta+1)} \cos\theta\, d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)}\, dx.\end{aligned}$$

Procédons alors à une décomposition en éléments simples : il existe a, b, c tels que

$$\frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1}.$$

Après multiplication par $(x-2)$ et évaluation en $x=2$, il vient $a = \frac{4}{7}$.
Après multiplication par x et passage à la limite $x \to +\infty$, il vient $0 = a + c \Leftrightarrow c = -\frac{2}{7}$.
Enfin, en évaluant en $x = 0$, on obtient $0 = -\frac{2}{7} + d \Leftrightarrow d = \frac{2}{7}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x}{(x-2)(x^2+x+1)}\, dx &= \frac{4}{7}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1}\, dx \\ &= \frac{4}{7}\left[\ln(|x-2|)\right]_0^1 - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{(2x+1)-2}{x^2+x+1}\, dx \\ &= -\frac{4}{7}\ln(2) - \frac{2}{7}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx + \frac{4}{7}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \left[\ln(x^2+x+1)\right]_0^1 = \ln(3)$. Et d'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx \\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Et donc[6]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{(\sin\theta-2)(2+\sin\theta-\cos^2\theta)}\, d\theta = -\frac{4}{7}\ln(2) - \frac{2}{7}\ln(3) + \frac{4\pi}{21\sqrt{3}}.$$

[6] Pousser un gros «Ouf !» de soulagement...

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.17

1. Commençons par une intégration par parties afin de nous débarrasser de l'arctangente :

$$\int \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}\, dt = \left[-\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right] + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt.$$

Nous pouvons alors procéder à une décomposition en éléments simples, qui sera de la forme

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

En multipliant par t et en évaluant en $t = 0$, il vient $a = 1$.
Puis en multipliant par t et en passant à la limite $t \to +\infty$, il vient $0 = a + b \Leftrightarrow b = -1$.
Enfin, en évaluant en $t = 1$, on obtient $\frac{1}{2} = 1 + \frac{-1+c}{2} \Leftrightarrow c = 0$.
Et donc $\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$.
Et par conséquent, $\int \frac{dt}{t(t^2+1)} = \ln(|t|) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$.
Donc une primitive de $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$ est

$$t \mapsto \ln(|t|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} = \ln\left(\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}\right) - \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}.$$

Remarque
Une telle primitive a déjà été calculée à l'exercice 8 par intégration par parties.

2. Essayons d'utiliser le changement de variable $x = \ln(t)$. On a alors $dx = \frac{1}{t}\,dt$, et donc

$$\int \sin(\ln t)\,dt = \int \sin(\ln t)e^{\ln t}\frac{1}{t}\,dt = \int \sin(x)e^x\,dx.$$

Notons alors que $\sin(x)e^x = \operatorname{Im}(e^{ix}e^x) = \operatorname{Im}(e^{(1+i)x})$.
Une primitive de $x \mapsto e^{(1+i)x}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} = \frac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x).$$

Et donc une primitive de $x \mapsto \sin(x)e^x$ est $x \mapsto \left(-\frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2}\right)e^x$.

Enfin, on a donc $\int \sin(\ln t)\,dt = \frac{t}{2}(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)) + C,\ C \in \mathbf{R}$.

3. Procédons au changement de variable $t = e^x$, de sorte que $dt = e^x\,dx$. Alors

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x\left((e^x)^2+e^x\right)} = \int \frac{1}{t(t^2+t)}\,dt = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}.$$

Procédons alors à une décomposition en éléments simples : il existe trois réels a, b, c tels que

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+1} \quad (\star).$$

En multipliant $(\star)$ par $t+1$ et en évaluant en $t = -1$, on obtient $c = 1$.
En multipliant $(\star)$ par t^2 et en évaluant en $t = 0$, on obtient $b = 1$.
Enfin, en multipliant $(\star)$ par t en en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $0 = a + c$, de sorte que $a = -1$ et donc

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+1}.$$

Et ainsi,

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)} = -\ln(|t|) - \frac{1}{t} + \ln(|t+1|) + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Et donc $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x} = -\ln(|e^x|) - \frac{1}{e^x} + \ln(|e^x+1|) + C = -x - e^{-x} + \ln(1+e^x) + C,\ C \in \mathbf{R}$.

4. Notons que la fonction intégrée n'est définie que sur $[-1, 1]$.
Commençons par une intégration par parties :

$$\int x\operatorname{Arcsin}(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsin}(x)\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calculons cette seconde intégrale à l'aide du changement de variable $x = \sin\theta$, qui réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta = \int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \theta - \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(x) - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Et donc $\displaystyle\int x\operatorname{Arcsin}(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsin}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{Arcsin}(x) + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

5. On a $\displaystyle\frac{1}{\tan^3(x)} = \frac{1+\tan^2(x)-\tan^2(x)}{\tan^3(x)} = \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Or $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)}\,dx = -\frac{1}{2\tan^2(x)} + C$ et $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin(x)| + C$.
Et donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\tan^3(x)}$ sont les $x \mapsto -\dfrac{1}{2\tan^2(x)} - \ln|\sin x| + C$.

6. Procédons au changement de variable $t = \ln(x)$, de sorte que $dt = \dfrac{dx}{x}$. Alors

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\operatorname{Arcsin}(x)]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}.$$

7. Procédons au changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, avec $dt = -\dfrac{dx}{x^2}$. On a donc

$$I = \int_2^{1/2} \left(1+x^2\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = \int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)\right)dx.$$

Et donc $\displaystyle I = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx - I \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$.
Mais $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right), dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} = 3$.
Et donc on en déduit que $I = \dfrac{3\pi}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.18

Peut-être l'avez-vous remarqué, mais pour les fonctions faisant apparaître $\sqrt{1-x^2}$, le changement de variable $x = \cos t$ est potentiellement intéressant, puisqu'il permet de faire apparaître $\sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t}$ en utilisant la relation $\cos^2 t + \sin^2 = 1$.
Puisqu'on a de la même manière $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, si on pose $x = \operatorname{ch} t$, alors $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t}$.

Essayons donc de calculer une primitive de $f : x \mapsto \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3$ à l'aide du changement de variable $x = \pm\operatorname{ch} t$.
Notons que f n'est définie que sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
On a alors

$$\int\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 dx = \int(\operatorname{ch} t + |\operatorname{sh} t|)^3 \operatorname{sh} t\,dt.$$

▸ Sur $[1+\infty[$, $\operatorname{sh} t \geqslant 0$ et donc

$$\int(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^3\,dt = \int (e^t)^3\,dt = \int e^{3t}\operatorname{sh} t\,dt = \frac{1}{2}\int\left(e^{4t}-e^{2t}\right)dt = \frac{1}{8}e^{4t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Mais il nous faut alors revenir à notre variable de départ, à savoir x.
Notons à cet effet que $e^{4t} = (e^t)^4 = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^3 = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4$.
Et de même, $e^{2t} = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$.
Et donc une primitive de f sur $[1,+\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \dfrac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$.

> **Alternative**
> Une option serait de déterminer la bijection réciproque de $\operatorname{ch}_{|\mathbf{R}_+}$, qu'on trouverait être égale à
> $$x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

▸ Sur $]-\infty,-1]$, la principale différence viendra du fait que $\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = |\operatorname{sh} t| = -\operatorname{sh} t$.
Mais il faudra aussi prendre garde au fait que ch est à valeurs dans $[1,+\infty[$, et qu'un élément x de $]-\infty,-1]$ ne saurait en aucun cas s'écrire sous la forme $x = \operatorname{ch} t$.
En revanche, nous pouvons utiliser le changement de variable $x = -\operatorname{ch} t$. On a alors $dx = -\operatorname{sh} t\,dt$.

Donc $\displaystyle\int (x+\sqrt{x^2-1})^3\,dt = \int (-\operatorname{ch} t - |\operatorname{sh} t|)^3(-\operatorname{sh} t)\,dt = \int (e^t)^3 \operatorname{sh} t\,dt$.
Et alors comme précédemment, on obtient comme primitive de f, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 8.19

Notons I l'intégrale à calculer, et réalisons le changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - x$, qui laisse invariantes les bornes de l'intégrale.
On a alors $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t} = \dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$.
Et par conséquent,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,dt = \frac{\pi\ln 2}{4} - I.$$

Et donc $I = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$.

Pour le calcul de J, procédons par intégration par parties :

$$J = \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt.$$

Un changement de variable $u = \operatorname{Arctan} t$ dans cette intégrale nous donne alors
$t = \tan u \Leftrightarrow dt = (1+\tan^2 u)\,du \Leftrightarrow du = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan u)\,du = I.$$

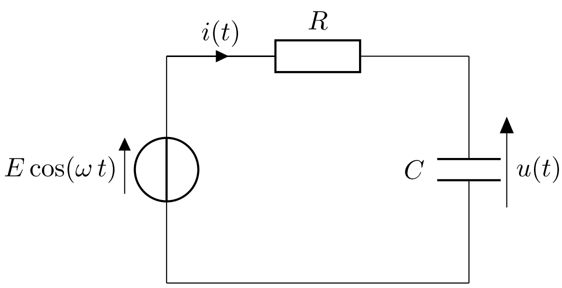
Il vient donc $J = \dfrac{\pi\ln 2}{4} - I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Équations différentielles linéaires et suites linéaires récurrentes

9

Exemple introductif : le circuit RC

Un circuit RC est un circuit formé d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C montés en série.
On ajoute un générateur de courant délivrant une tension sinusoïdale $E\cos(\omega t)$.
Sachant que le condensateur est déchargé à l'instant initial ($t = 0$), peut-on décrire l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur ?
La loi des mailles nous donne alors $u(t) + Ri(t) = E\cos(\omega t)$.
Mais aux bornes du condensateur, on a $i(t) = C\dfrac{du}{dt} = Cu'(t)$.
Et donc la tension u satisfait à l'équation $RCu'(t) + u(t) = E\cos(\omega t)$.
Cette équation suffit-elle à déterminer totalement l'évolution de u au cours du temps ?



Dans tout le chapitre, en l'absence de précisions, $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

9.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

9.1.1 Définition

Définition 9.1 – Soient a et b deux fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, c'est trouver toutes les fonctions $y : I \to \mathbf{K}$, dérivables, et telles que

$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

On parle alors d'**équation différentielle linéaire du premier ordre**.

Remarques. ►L'équation différentielle est dite linéaire, car elle ne fait intervenir que $y'(t)$ et $y(t)$, et pas leurs puissances, ou leur exponentielle, ni quoi que ce soit d'autre.
Par exemple, $y'(t)^2 + e^{y(t)}t^2 = \ln(t)$ est une équation différentielle, mais qui n'est pas linéaire[1].
Et elle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première de y (y') et pas ses dérivées secondes, troisièmes, etc.
► Une solution de $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ n'est pas seulement dérivable : elle est en plus $\mathscr{C}^1$ sur I. En effet, on a alors $y'(t) = b(t) - a(t)y(t)$, qui est continue car somme de fonctions continues.

[1] Vous reparlerez davantage de ce type d'équations en seconde année.

Exemple 9.2

$y'(t) - 2ty(t) = t^3$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
On note généralement les équations sous forme condensée : $y' - 2ty = t^3$, où il est alors sous-entendu que y est une fonction, et que t est la variable dont dépend la fonction.
Bien entendu, cette équation se note également $y' - 2xy = x^3$.

On rencontre souvent des équations sous la forme $c(t)y'(t) + d(t)y(t) = e(t) \quad (E)$.
Dans ce cas, on se ramène à une équation de la forme précédente en divisant par $c(t)$, ce qui nécessite de se placer sur un intervalle sur lequel c ne s'annule pas.
Sur un tel intervalle (E) est alors équivalente à l'équation $y'(t) + \dfrac{d(t)}{c(t)}y(t) = \dfrac{e(t)}{c(t)}$. On parle alors de la **forme normalisée** de l'équation (E).

Exemple 9.3

Considérons l'équation $ty'(t) - y(t) = \dfrac{1}{t}$.
Sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$, sur lesquels t ne s'annule pas, elle est équivalente à $y'(t) - \dfrac{1}{t}y(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

Définition 9.4 – Lorsque la fonction b est la fonction nulle, on dit que l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est une **équation homogène**.
Et de manière générale, si $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, on dit que l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ est **l'équation homogène associée à** (E). Dans la suite, nous la noterons généralement (E_0).

9.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, et soit (E_0) l'équation homogène associée.

Notons $\mathscr{S} = \{y \in \mathscr{D}(I, \mathbf{K}) : \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)\}$ l'ensemble des solutions de (E) et de même, notons $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

Notation
La notation sera en fait introduite plus tard, mais $\mathscr{D}(I, \mathbf{K})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Proposition 9.5 : *L'ensemble $\mathscr{S}_0$ contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout $(u, v) \in \mathscr{S}_0^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda u + \mu v \in \mathscr{S}_0$.*

Démonstration. Il est clair que la fonction nulle est dérivable, et que si on la note f, alors pour tout $t \in I$, $f'(t) + a(t)f(t) = 0 + 0 = 0$, donc $f \in \mathscr{S}_0$.
Soient $u, v \in \mathscr{S}_0$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda u + v$ est dérivable sur I car somme de fonctions dérivables, et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\lambda u + \mu v)'(t) + a(t)(\lambda u(t) + \mu v(t)) &= \lambda u'(t) + \mu v'(t) + \lambda a(t)u(t) + \mu a(t)v(t)\\ &= \lambda \underbrace{(u'(t) + a(t)u(t))}_{=0} + \mu \underbrace{(v'(t) + a(t)v(t))}_{=0} = 0.\end{aligned}$$

Et donc $\lambda u + \mu v$ est dans $\mathscr{S}_0$. □

Proposition 9.6 : *Soit $y_1 \in \mathscr{S}$. Alors une fonction $y \in \mathscr{D}(I, \mathbf{K})$ est solution de (E) si et seulement si $y - y_1 \in \mathscr{S}_0$, c'est-à-dire est solution de (E_0).*
Ainsi, on a $\mathscr{S} = \{y_1 + u,\ u \in \mathscr{S}_0\}$.

Autrement dit
Si y_1 est une solution particulière de (E), alors **toutes** les solutions de (E) sont la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène associée.

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbf{R})$. Alors pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}(y-y_1)'(t)+a(t)(y-y_1)(t) &= y'(t)-y_1'(t)+a(t)y(t)-a(t)y_1'(t)\\ &= y'(t)+a(t)y(t)-(y_1'(t)+a(t)y_1(t)) = y'(t)+a(t)y(t)-b(t).\end{aligned}$$

Et donc on a $y'(t)+a(t)y(t)=b(t) \Leftrightarrow (y-y_1)'(t)+a(t)(y-y_1)(t)=0$.
Et donc $y \in \mathcal{S} \Leftrightarrow y-y_1 \in \mathcal{S}_0$.
Soit encore si et seulement si il existe $u \in \mathcal{S}_0$ tel que $y-y_1=u \Leftrightarrow y=y_1+u$.
Et donc $\mathcal{S}=\{y_1+u, u \in \mathcal{S}_0\}$. □

Ce résultat est très important, puisqu'il nous dit que pour connaître toutes les solutions de (E), il suffit d'en trouver une seule, et de connaître toutes les solutions de (E_0).

9.1.3 Le principe de superposition

Lorsque le second membre se présente sous forme d'une somme de deux termes, on peut se contenter de résoudre deux équations plus simples :

Proposition 9.7 : *Soient b_1 et b_2 deux fonctions continues sur I. Soit y_1 une solution de $(E_1) : y'(t)+a(t)y(t)=b_1(t)$ et soit y_2 une solution de $(E_2) : y'(t)+a(t)y(t)=b_2(t)$.*
Alors pour tous $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1+\mu y_2$ est solution de $y'(t)+a(t)y(t)=\lambda b_1(t)+\mu b_2(t)$.

Démonstration. C'est un simple calcul : pour $t \in I$,

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'(t)+a(t)(\lambda y_1(t)+\mu y_2(t)) = \lambda(y_1'(t)+a(t)y_1(t))+\mu(y_2'(t)+a(t)y_2(t)) = \lambda b_1(t)+\mu b_2(t).$$

□

9.1.4 Solutions de l'équation homogène

Proposition 9.8 : *Soit (E_0) : $y'(t)+a(t)y(t)=0$ une équation différentielle linéaire homogène, et soit A une primitive de a sur I.*
Alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

Nbe. de solutions
Une équation homogène possède donc toujours une infinité de solutions.

Démonstration. Commençons par prouver que les fonctions de la forme $y_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ sont solutions de (E_0).
On a alors pour tout $t \in I$, $y_\lambda'(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)}$, de sorte que

$$y_\lambda'(t)+a(t)y_\lambda(t) = -\lambda a(t)e^{-A(t)}+\lambda a(t)^{-A(t)} = 0.$$

Raisonnement
Attention : à ce stade, nous avons prouvé que toutes les fonctions de la forme annoncée sont solutions, mais rien n'exclut qu'il y ait d'autres solutions.

Inversement, soit y une solution de (E_0), de sorte que $y'(t)=-a(t)y(t)$ et soit $z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$.
Alors z est dérivable sur I, et $\forall t \in I$, $z'(t) = y'(t)e^{A(t)}+y(t)a(t)e^{A(t)} = 0$.
Et donc z est constante sur I : il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$y(t)e^{A(t)} = \lambda \Leftrightarrow y(t) = \lambda e^{-A(t)}.$$

Et donc toutes les solutions de (E_0) sont bien de la forme annoncée. □

Remarque. Notons qu'un bon moyen de se souvenir du résultat, est de remarquer que l'équation $y'(t)+a(t)y(t)=0$ peut également se mettre sous la forme $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$.
Mais nous reconnaissons là la dérivée de $t \mapsto \ln(y(t))$. Donc $\ln(y)$ est une primitive de $-a$, de sorte qu'il existe $C \in \mathbf{K}$ tel que $\ln(y(t)) = -A(t)+C$.
Et donc $y(t) = e^{-A(t)+C} = \underbrace{e^C}_{=\lambda} e^{-A(t)}$.

Ce raisonnement manque tout de même cruellement de rigueur[2] ! En effet, pour diviser par $y(t)$, encore faudrait-il s'assurer que y ne s'annule pas.
Et il faudrait une valeur absolue dans le ln. Et que dire du cas où y est à valeurs complexes ?

[2] Et n'est donc en aucun cas une preuve, tout au plus un moyen de retrouver rapidement le résultat si vous l'avez oublié.

Exemples 9.9

▶ **Équations à coefficients constants**[3]
Soit $a \in \mathbf{R}^*$, et soit l'équation différentielle $(E_a)\ : y' + ay = 0$. Alors ses solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-ax}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
▶ $y' - \frac{1}{t}y = 0$, sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$.
Ici, $a(t) = -\frac{1}{t}$, de sorte qu'on peut prendre $A(t) = -\ln(|t|)$, et donc les solutions sont les $t \mapsto \lambda e^{-A(t)} = \lambda|t|$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
Mais si $I = \mathbf{R}_+^*$, alors $|t| = t$.
Et si $I = \mathbf{R}_-^*$, alors $|t| = -t$, et donc quitte à changer λ en son opposé, les solutions sont donc les $t \mapsto \lambda t$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
▶ $y' - \frac{1}{t(t+1)}y = 0$ sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I =]-1, 0[$ ou $I =]-\infty, -1[$.
Nous savons[4] que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
Et donc une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t(t+1)}$ est $t \mapsto \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|$.
Et par conséquent, les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|} = \lambda\left|\frac{t}{t+1}\right|$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
Notons que sur chacun des intervalles de résolution, $\frac{t}{t+1}$ est de signe constant, et donc une fois l'intervalle choisi, il est possible de donner une expression des solutions ne contenant pas de valeur absolue, ce qui est toujours plus agréable.

[3] Les plus fréquemment rencontrées en physique.

[4] Ou le retrouvons facilement via une décomposition en éléments simples.

9.1.5 Recherche d'une solution particulière : la méthode de variation de la constante

Revenons à présent au cas général d'une équation $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ avec second membre, et notons toujours A une primitive de a.

Grâce à la proposition 9.6 et à la proposition 9.8, il nous suffit de trouver **une** solution de (E) pour toutes les connaître. La méthode de variation de la constante permet de trouver une telle solution.
L'idée est de chercher une solution y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$, où λ n'est plus une constante, mais une fonction dérivable.

La fonction y est alors dérivable et pour tout $t \in I$, $y'(t) = \lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda a(t)e^{-A(t)}$. Et donc y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} - \cancel{\lambda(t)a(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)\lambda(t)e^{-A(t)}} = b(t)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)\\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}.\end{aligned}$$

Et donc y est solution de (E) si et seulement si λ est une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$.
Mais de telles primitives existent (c'est le théorème fondamental de l'analyse), ce qui garantit bien qu'il existe au moins une[5] solution de (E).

[5] Et donc une infinité.

Exemples 9.10

▶ Considérons l'équation $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$ sur $I = \mathbf{R}_+^*$.
Nous avons déjà prouvé que les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda t$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)t$, où λ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Alors y est solution de (E) si et seulement pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\lambda'(t)t + \cancel{\lambda(t)} - \cancel{\frac{1}{t}\lambda(t)t} = \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{t^3}.$$

On peut donc par exemple[6] prendre $\lambda(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$.

Et donc $y(t) = \dfrac{-1}{2t}$ est solution de (E).

Par conséquent, les solutions de (E) sont les fonctions qui sont sommes de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, donc ce sont les $t \mapsto \lambda t - \dfrac{1}{2t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

► Soit $(E) : y' - \dfrac{1}{t(t+1)} y = te^t$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Alors nous savons déjà que l'équation homogène associée possède pour solutions les $t \mapsto \lambda \dfrac{t}{t+1}$.

Cherchons une solution de (E) sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)\dfrac{t}{t+1}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t > 0$,

$$\lambda'(t)\frac{t}{t+1} + \cancel{\lambda(t)\frac{1}{(t+1)^2}} - \cancel{\frac{1}{t(t+1)}\frac{\lambda(t)t}{t+1}} = te^t \Leftrightarrow \lambda'(t) = (t+1)e^t.$$

Procédons alors à une intégration par parties[7] :

$$\int (t+1)e^t\,dt = [(t+1)e^t] - \int e^t\,dt = te^t.$$

Et donc une solution particulière est $t \mapsto \dfrac{t^2}{t+1}e^t$.

Et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto \dfrac{\lambda t}{t+1} + \dfrac{t^2}{t+1}e^t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

[6] Il y a toujours une infinité de fonctions λ qui conviennent, mais notre but est d'en trouver une seule, donc autant prendre la plus simple possible.

[7] Bien entendu, tous les outils dont nous disposons pour le calcul de primitives sont susceptibles de nous aider à résoudre des équations différentielles : intégration par parties, changement de variable, utilisation des complexes, etc

Terminons par un cas très particulier où on peut se passer de la variation de la constante :

Proposition 9.11 : *Soit $a \neq 0$, et soit P un polynôme. Alors il existe une solution de (E) : $y'(t) + ay(t) = P(t)$ de la forme $t \mapsto Q(t)$, avec Q un polynôme de même degré que P.*

Remarque
L'hypothèse $a \neq 0$ n'est pas vraiment contraignante, pour $a = 0$, le problème se ramène au calcul d'une primitive de P, ce que l'on sait toujours faire.

Démonstration. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n = \deg P$, et soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ un polynôme de degré au plus n.

On a alors $Q' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)b_{k+1}X^k$.

Et Q est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+1)t^k + a\sum_{k=0}^{n} b_k t^k = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k.$$

Mais deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
Donc Q est solution si et seulement si ses coefficients $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont solution du système :

$$\begin{cases} ab_0 + b_1 & = a_0 \\ ab_1 + 2b_2 & = a_1 \\ ab_2 + 3b_3 & = a_2 \\ \quad\vdots & = \vdots \\ ab_{n-1} + nb_n & = a_{n-1} \\ ab_n & = a_n \end{cases}$$

Ce système est triangulaire, et ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc il possède une unique solution.
Et donc il existe bien Q polynôme de degré n solution de (E). □

Exemple 9.12

Soit $(E) : y' + 3y = t^2 - 1$.
Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto P(t)$, avec P un polynôme de degré 2.
Notons $P(t) = at^2 + bt + c$, si bien que $P'(t) = 2at + b$.
Et donc P est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$2at + b + 3(at^2 + bt + c) = t^2 - 1 \Leftrightarrow 3at^2 + (2a + 3b)t + (b + 3c) = t^2 - 1.$$

Soit si et seulement si $\begin{cases} 3a = 1 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = -\frac{7}{27} \end{cases}$

Et donc $t \mapsto \dfrac{t^2}{3} - \dfrac{2}{9}t - \dfrac{7}{27}$ est une solution particulière de (E).
On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-3t} + \frac{t^2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{7}{27}, \lambda \in \mathbf{R}, \right\}.$$

9.1.6 Problèmes de Cauchy, ou équations avec conditions initiales

Nous venons de voir qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 possède toujours une infinité de solutions.
Pourtant, pour un système physique dont l'évolution est régie par une équation différentielle[8], il ne peut y avoir qu'une seule évolution possible, et donc une seule solution.
Ceci tient au fait qu'on connaît en général une **condition initiale**, par exemple l'état du système au temps $t = 0$.

[8] Par exemple la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Proposition 9.13 (Problème de Cauchy) : *Soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbf{K}$. Alors il existe une unique solution à l'équation $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.*

Remarque

Notons qu'on n'a pas besoin de connaître nécessairement $y(0)$, et que la connaissance de l'état du système à n'importe quel instant suffit.

Démonstration. Nous venons de voir que les solutions de (E) sont de la forme $y : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + y_1(t)$, avec $\lambda \in \mathbf{K}$ et où y_1 désigne une solution particulière de l'équation.
En particulier, on a $y(t_0) = \lambda e^{-A(t_0)} + y_1(t_0)$ et donc

$$y(t_0) = y_0 \Leftrightarrow \lambda = e^{A(t_0)} (y_0 - y_1(t_0)).$$

Et donc il existe bien une et une seule solution vérifiant $y(t_0) = y_0$. □

Les courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle (E) sont appelée **courbes intégrales de** (E).
Par exemple, les courbes intégrales de l'équation $y' - \dfrac{1}{t}y = \dfrac{1}{t^2}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ sont les courbes représentatives des $t \mapsto \lambda t - \dfrac{1}{2t}$.
Ce que nous dit le résultat ci-dessus, c'est que pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une et une seule courbe intégrale qui passe par ce point.
Et en particulier, deux courbes intégrales ne peuvent jamais se croiser.

9.1.7 Raccordement de solutions

En mettant sous forme normalisée une équation, on est parfois obligés de restreindre l'intervalle d'étude afin de ne pas effectuer de division par 0.
Par exemple, considérons l'équation $(E) : t^2y' - (2t - 1)y = t^2$, d'inconnue $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable.
Pour utiliser ce qui a été dit précédemment, nous sommes obligés de passer par la forme normalisée : $y' - \dfrac{2t-1}{t^2}y = 1$, sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_+^*$.

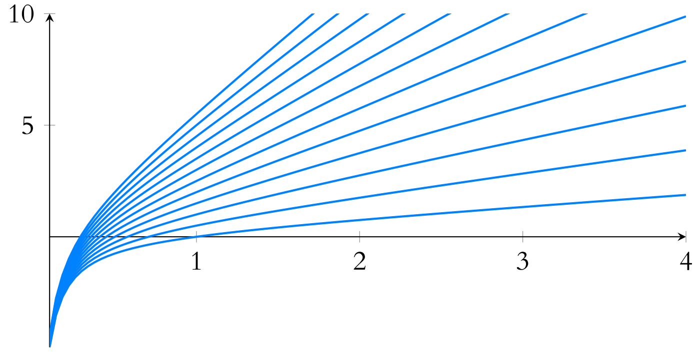


FIGURE 9.1 – Les courbes intégrales de l'équation $y' - \frac{1}{t}y = \frac{1}{t^2}$.

Sur chacun de ces intervalles, une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$ est $t \mapsto 2\ln(|t|) + \frac{1}{t} = \ln(t^2) + \frac{1}{t}$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln(t^2)+\frac{1}{t}} = \lambda t^2 e^{1/t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Une fonction $y : t \mapsto \lambda(t)t^2e^{1/t}$ est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)t^2e^{1/t} + \cancel{(2t-1)e^{1/t}\lambda(t)} - \cancel{\frac{2t-1}{t^2}t^2e^{1/t}\lambda(t)} = 1 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2}$$

Et donc $\lambda(t) = e^{-1/t}$ convient, de sorte que les solutions de (E) sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ou $I = \mathbf{R}_-^*$ sont les $t \mapsto t^2 + \lambda t^2 e^{1/t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soit à présent $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dérivable et solution de (E).
En particulier, en prenant $t = 0$ dans l'équation (E) il vient $y(0) = 0$.
De plus, y est solution de l'équation normalisée sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$. Donc il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,

λ vs. μ

Il est important de noter que rien n'oblige λ et μ à être égaux : l'un vient de la résolution de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$, l'autre de la résolution sur $\mathbf{R}_-^*$, et ces deux résolutions sont complètement disjointes et ne supposent rien de la résolution sur l'autre intervalle.

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + \lambda t^2 e^{1/t} & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \mu t^2 e^{1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

De plus, y doit être continue en 0. Il nous faut donc calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} t^2 e^{1/t}$.
Pour cela procédons au changement de variable $x = 1/t$, de sorte que

$$\lim_{t \to 0^+} t^2 e^{1/t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Et donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \left(\lambda t^2 e^{1/t} + t^2\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$
Donc déjà, le seul moyen que y soit continue en 0 est que $\lambda = 0$.
D'autre part, on a $\lim\limits_{t \to 0^-} t^2 e^{1/t} = 0$, et donc quelle que soit la valeur de μ, $\lim\limits_{t \to 0^-} \mu t^2 e^{1/t} = 0$.

Donc les solutions possibles de (E) sont parmi les $y_\mu : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ t^2 & \text{si } t > 0 \\ \mu t^2 e^{1/t} + t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ avec $\mu \in \mathbf{R}$.

Analyse/synthèse

Nous venons de procéder à l'analyse : une solution est nécessairement de cette forme.
Reste à faire la synthèse, à savoir vérifier si toutes les telles fonctions conviennent, donc sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et satisfont (E) pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Reste à vérifier si une telle fonction est bien dérivable en 0.
Il est clair que pour $h > 0$, $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$, et si $h < 0$,

$$\frac{y_\mu(h) - y_\mu(0)}{h} = \frac{\mu h^2 e^{1/h} + h^2}{h} = \mu h e^{1/h} + h e^{1/h} \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc y_μ est toujours dérivable en 0, avec $y_\mu'(0) = 0$.

Ainsi, les solutions de (E) sont exactement les y_μ, $\mu \in \mathbf{R}$.

Notons qu'on perd alors l'unicité dans le problème de Cauchy : il existe une infinité de solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ telles que $y(1) = 1$, puisque toutes les solutions de (E) le vérifient.
En revanche, il n'existe aucune solution de (E) vérifiant $y(1) = 2$.

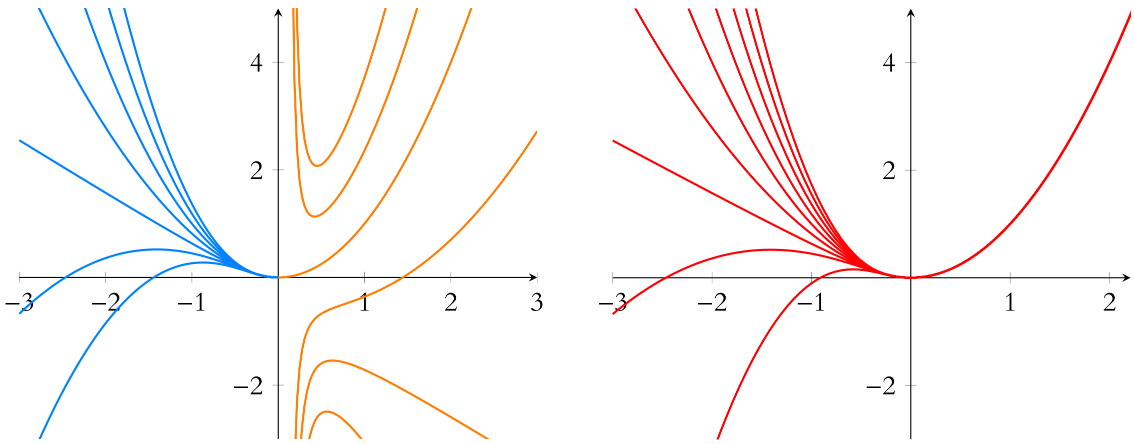


Figure 9.2 – En bleu (resp. orange) : les courbes intégrales des solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ (resp. $\mathbf{R}_+^*$). Pour raccorder ces courbes en la courbe d'une fonction dérivable, il n'y a qu'un choix possible sur $\mathbf{R}_+^*$, et tous les choix possibles sur $\mathbf{R}_-^*$.

9.2 Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Dans cette partie, nous nous intéressons maintenant à des équations différentielles du type

$$(E) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$$

où a et b sont des **constantes**, c est une fonction continue sur I.
Résoudre l'équation, c'est donc trouver toutes les fonctions deux fois dérivables[9] telles que $\forall t \in I$, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$.
Une telle équation est appelée **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.**

Notons comme précédemment que si y est solution, alors $y''(t) = c(t) - ay'(t) - by$ sera automatiquement continue[10].

[9] C'est le minimum qu'on puisse demander pour que le membre de gauche de l'équation soit bien défini.

[10] On dit alors que y est de classe $\mathscr{C}^2$.

Définition 9.14 – Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est dite **homogène** si son second membre est nul.
Si $(E) : y''(t)+ay'(t)+by(t) = c(t)$ est une **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, l'équation $(E_0) : y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ est appelée **équation homogène associée à (E).**

Définition 9.15 – On dit que le polynôme $X^2 + aX + b$ est le **polynôme caractéristique** associé à l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.

9.2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit (E) : $\quad y''(t)+ay'(t)+by(t) = c(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre, et soit (E_0) l'équation homogène associée.

Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et de même, notons $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).
Nous retrouvons alors les mêmes résultats que pour les équations d'ordre 1, et les preuves des deux propositions qui suivent sont exactement les mêmes que dans le cas des équations d'ordre 1.

Proposition 9.16 : *L'ensemble $\mathscr{S}_0$ contient la fonction nulle, et il est stable par combinaisons linéaires. Cela signifie que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathscr{S}_0^2$ et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathscr{S}_0$.*

Proposition 9.17 : *Soit $y_1 \in \mathscr{S}$. Alors une fonction y deux fois dérivable sur I est solution de (E) si et seulement si $y - y_1 \in \mathscr{S}_0$.*
Ainsi, on a $\mathscr{S} = \{y_1 + u,\ u \in \mathscr{S}_0\}$.

9.2.2 Résolution de l'équation homogène dans le cas où K = C

Notons r_1 et r_2 les deux racines[11] complexes du polynôme caractéristique de (E_0).

[11] Éventuellement confondues.

Proposition 9.18 :

- *Si $r_1 \neq r_2$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme*
$$t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$
- *Si $r_1 = r_2$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme*
$$t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Démonstration. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.
Notons alors $z : t \mapsto e^{-r_1 t} y(t)$. La fonction z est alors deux fois dérivable car produit de fonctions deux fois dérivables, et on a $y(t) = e^{r_1 t} z(t)$.
Par conséquent pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{r_1 t}\left(r_1 z(t) + z'(t)\right) \\ y''(t) &= e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2 r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)\right). \end{aligned}$$

Et donc y est solution de (E_0) si et seulement si :

$$\begin{aligned} y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + 2 r_1 z'(t) + r_1^2 z(t) + a r_1 z(t) + a z'(t) + b z(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2 r_1 + a) z'(t) + \underbrace{\left(r_1^2 + a r_1 + b\right)}_{=0} z(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{r_1 t}\left(z''(t) + (2 r_1 + a) z'(t)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z''(t) + (2 r_1 + a) z'(t) = 0. \end{aligned}$$

r_1 est racine du polynôme caractéristique.

Une exponentielle n'est jamais nulle.

Ainsi, y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (homogène et à coefficients constants)

$$f' + (2 r_1 + a) f = 0 \quad (E_0').$$

Souvenons nous que la somme des racines de l'équation caractéristique vaut $-a$. Et donc $2 r_1 + a = 0$ si et seulement si $r_1 = r_2$.

Détails
Pour le dire autrement : l'équation possède une racine double si et seulement si cette racine est $\frac{-a}{2}$.

- **Si $r_1 \neq r_2$**, alors les solutions de (E_0') sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1 + a)t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
Et donc y est solution de E si et seulement si z' est la forme $t \mapsto \lambda e^{-(2r_1+a)t}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.
Soit si et seulement si z est de la forme $\lambda e^{-(2r_1+a)t} + \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$.
Et par conséquent, en multipliant par $e^{r_1 t}$, y est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme
$$t \mapsto \lambda e^{(-a - r_1)t} + \mu e^{r_1 t} = \lambda e^{r_2 t} + \mu e^{r_1 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$
- **Si $r_1 = r_2$**. Alors $2r_1 + a = 0$, et donc y est solution de (E) si et seulement si $z'' = 0$.
Soit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que $\forall t \in I$, $z'(t) = \lambda$ et donc si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\forall t \in I$, $z(t) = \lambda t + \mu$.
Et donc après multiplication par $e^{r_1 t}$, si et seulement si $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{r_1 t}$.

□

Exemple 9.19

Les solutions de $y'' - y' - 12y = 0$ sont les

$$t \mapsto \lambda e^{4t} + \mu e^{-3t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Les solutions de $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-2t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

9.2.3 Résolution de l'équation homogène dans le cas où K = R

Théorème 9.20 :

- *Si le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*
- *Si le polynôme caractéristique possède une racine double[12] r, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{rt}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*
- *Si le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, alors les solutions de (E_0) sont de la forme $t \mapsto e^{rt}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.*

[12] Nécessairement réelle.

Démonstration. Les deux premiers cas se traitent exactement comme dans le cas complexe. Concentrons nous donc sur le dernier cas : celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, avec $\omega \neq 0$.
Soit y une solution de (E_0). Alors y peut être vue comme une fonction complexe, et donc d'après les résultats précédents, il existe deux complexes λ_1 et μ_1 tels que

$$\forall t \in I,\ y(t) = \lambda_1 e^{(r+i\omega)t} + \mu_1 e^{(r-i\omega)t}.$$

Mais y étant à valeurs réelles, elle est égale à sa partie réelle :

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{Re}(y(t)) &= \mathrm{Re}(\lambda_1)e^{rt}\cos(\omega t) - \mathrm{Im}(\lambda_1)e^{rt}\sin(\omega t) + \mathrm{Re}(\mu_1)e^{rt}\cos(-\omega t) - \mathrm{Im}(\mu_1)e^{rt}\sin(-\omega t) \\ &= (\mathrm{Re}(\lambda_1) + \mathrm{Re}(\mu_1))\, e^{rt}\cos(\omega t) + (\mathrm{Im}(\mu_1) - \mathrm{Im}(\lambda_1))\, e^{rt}\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Et donc en posant $\lambda = \mathrm{Re}(\lambda_1) + \mathrm{Re}(\mu_1) \in \mathbf{R}$ et $\mu = \mathrm{Im}(\mu_1) - \mathrm{Im}(\lambda_1)$, y est bien de la forme annoncée.

Inversement, on a $e^{rt}\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{rt}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(r+i\omega)t} + e^{(r-i\omega)t}\right)$ qui est solution de (E_0) d'après ce qui a été dit dans le cas complexe.
Et de même, $t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{(r+i\omega)t} - e^{(r-i\omega)t}\right)$ est solution de (E_0).
Et donc toutes les fonctions[13] de la forme $t \mapsto \lambda e^{rt}\cos(\omega t) + \mu e^{rt}\sin(\omega t)$ sont solutions de (E_0). □

[13] C'est une conséquence de la proposition 9.16.

Exemple 9.21

$y'' + y = 0$. Le polynôme caractéristique est $X^2 + 1 = 0$, qui possède i et $-i$ comme racines, de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

9.2.4 Recherche d'une solution particulière

Le principe de superposition reste valable pour les équations d'ordre 2, avec la même preuve que pour les équations d'ordre 1 :

Proposition 9.22 : *Soient c_1 et c_2 deux fonctions continues sur I. Soit y_1 une solution de (E_1) : $y''(t)+ay'(t)+by(t) = c_1(t)$ et soit y_2 une solution de $(E_2) : y''(t)+ay'(t)+by(t) = c_2(t)$.*
Alors pour tous $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $y''(t)+ay'(t)+by(t) = \lambda c_1(t)+\mu c_2(t)$.

Bien qu'il existe une méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2, celle-ci ne figure pas à notre programme, et nous ne saurons donc pas toujours résoudre une équation avec second membre.
Seuls certains cas particuliers sont à connaître, qui sont tous englobés par la proposition suivante (qui dépasse légèrement le cadre du programme officiel).

Proposition 9.23 : *Soit $(E) : y''(t)+ay'(t)+by(t) = c(t)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, où c est de la forme $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbf{K}$ et P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$. Alors il existe une solution de (E) sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, avec*

- $\deg Q = \deg P$ *si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique de (E).*
- $\deg Q = \deg P + 1$ *si λ est racine simple du polynôme caractéristique de (E).*
- $\deg Q = \deg P + 2$ *si λ est racine double du polynôme caractéristique de (E).*

Démonstration. Soit Q un polynôme, et soit $y : t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$. Alors pour tout $t \in I$,

$$y'(t) = Q'(t)e^{\lambda t} + Q(t)\lambda e^{\lambda t} \text{ et } y''(t) = Q''(t)e^{\lambda t} + 2Q'(t)\lambda e^{\lambda t} + Q'(t)\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Et donc y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$e^{\lambda t}\left(Q''(t) + (2\lambda+a)Q'(t) + (\lambda^2+a\lambda+b)Q(t)\right) = P(t)e^{\lambda t}.$$

Soit si et seulement si $Q'' + (2\lambda+a)Q' + (\lambda^2+a\lambda+b)Q = P$.

► Si λ n'est pas racine de X^2+aX+b, posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et cherchons une solution de la forme $t \mapsto Q(t)$, avec $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

On a alors $Q' = \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}(k+1)X^k$ et de même

$$Q'' = \sum_{k=2}^{n} b_k k(k-1)X^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} b_{k+2}(k+1)(k+2)X^k.$$

Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$(\lambda^2+a\lambda+b)b_n X^n + \left[(\lambda^2+a\lambda+b)b_{n-1} + (2\lambda+a)nb_n\right]X^{n-1}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-2}\left[(\lambda^2+a\lambda+b)b_k + (2\lambda+a)(k+1)b_{k+1} + (k+1)(k+2)b_{k+2}\right]X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} (\lambda^2+a\lambda+b)b_0 + (2\lambda+a)b_1 + 2b_2 & = a_0 \\ (\lambda^2+a\lambda+b)b_1 + (2\lambda+1)b_2 + 6b_3 & = a_1 \\ \qquad \vdots & = \vdots \\ (\lambda^2+a\lambda+b)b_{n-1} + (2\lambda+a)nb_n & = a_{n-1} \\ (\lambda^2+a\lambda+b)b_n & = a_n \end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de $n+1$ équations en les inconnues $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$, triangulaire, et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$, donc il possède une unique solution, si bien qu'il existe une[14] solution de (E) de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, avec $\deg Q = \deg P$.

► Si λ est racine simple de $X^2 + aX + b$. Alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et comme nous l'avons vu lors de la résolution de l'équation homogène, $2\lambda + a \neq 0$.
Donc y est solution de (E) si et seulement si $Q'' + (2\lambda + a)Q' = P$.
Autrement dit, si et seulement si Q' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, et de second membre P.
Mais alors comme expliqué à la proposition 9.11, il existe une solution polynomiale avec R de même degré que P.
Et alors toute primitive Q de R est un polynôme de degré $\deg P + 1$, et qui satisfait $Q'' + (2\lambda + a)Q' = P$, donc avec $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ solution de (E).

► Si λ est racine double de $X^2 + aX + b$, alors $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ et $2\lambda + a = 0$, si bien que $y : t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ est solution de (E) si et seulement si $Q'' = P$.
Mais alors toute primitive d'une primitive de P, qui est un polynôme de degré $\deg P + 2$ convient. □

Les cas particuliers qui nous intéressent (et qui sont a priori les seuls au programme) sont les suivants :

- le cas d'un second membre P polynomial qui correspond donc à $\lambda = 0$. La proposition précédente nous garantit donc l'existence d'une solution de même degré que P si 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, de degré $\deg P + 1$ si 0 est racine simple, et de degré $\deg P + 2$ si 0 est racine double.
- le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto Ae^{\lambda t}, (A, \lambda) \in \mathbf{R}^2$, qui correspond donc à celui où P est un polynôme constant. On cherchera donc une solution sous la forme $t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$, avec P de degré 0, 1 ou 2 suivant que λ n'est pas racine/est racine simple/est racine double du polynôme caractéristique.
- le cas d'un second membre de la forme $t \mapsto \lambda\cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda\sin(\omega t)$.
  Dans ce cas, on passera par les complexes, et on commencera par chercher les solutions à l'équation $y'' + ay' + b = \lambda e^{i\omega t}$, donc sous la forme $t \mapsto P(t)e^{i\omega t}$, avec P de degré 0, 1 ou 2, puis on passera à la partie réelle/imaginaire.

[14] Unique.

Astuce
Puisque toute primitive de R convient, on pourra se souvenir que celle qui s'annule en 0 (= celle dont le coefficient constant est nul) convient.
Et donc chercher des solutions sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$ avec $\deg Q = \deg P + 1$ et $Q(0) = 0$.

Astuce
Comme dans le cas précédent, on peut choisir l'unique «primitive deuxième» de P dont le coefficient constant et le coefficient de degré 1 sont nuls.

Exemples 9.24

► $y'' - 2y' + y = e^t$.
Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
Donc 1 est racine double, et donc il existe une solution sous la forme $t \mapsto \lambda t^2 e^t$.
Posons alors $y(t) = \lambda t^2 e^t$, de sorte que

$$y'(t) = \lambda(t^2 + 2t)e^t$$
$$y''(t) = \lambda(t^2 + 4t + 2)e^t.$$

On a alors $y'' - 2y' + y = e^t\lambda(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 8t + t^2) = e^t\lambda 2e^t$, qui vaut e^t si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Donc $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^t$ est une solution particulière.
► $y'' + y' - 2y = 5e^{-2t}$.
Le polynôme caractéristique est $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$, dont -2 est racine simple.
On cherche donc une solution sous la forme $y(t) = \lambda t e^{-2t}$.
On a alors

$$y'(t) = \lambda(-2t + 1)e^{-2t}$$
$$y''(t) = \lambda e^{-2t}(-2 + 4t - 2) = \lambda e^{-2t}(4t - 4).$$

Et donc $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \lambda e^{-2t}(4t - 4 + 1 - 2t - 2t) = -3\lambda e^{-2t}$, qui vaut $5e^{-2t}$

si et seulement $\lambda = -\frac{5}{3}$.
Donc une solution particulière est $t \mapsto -\frac{5t}{3}e^{-2t}$.
▸ $y'' + 4y = 3\sin(2t)$.
Cherchons donc une solution particulière de $(\widetilde{E})$: $y'' + 4y = 3e^{2it}$, il suffira ensuite d'en prendre la partie imaginaire.
Puisque $2i$ est racine simple de $X^2 + 4$, on cherche une solution sous la forme $y : t \mapsto \lambda t e^{2it}$.
On a alors $y' : t \mapsto \lambda e^{2it}(1 + 2it)$ et $y'' : t \mapsto \lambda e^{2it}(2i - 4t + 2i)$.
Et donc y est solution de $(\widetilde{E})$ si et seulement si

$$y'' + 4y = 3e^{2it} \Leftrightarrow \lambda e^{2it}(4i - 4t + 4t)\,3e^{2it} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4i} = -\frac{3}{4}i.$$

Donc $t \mapsto -\frac{3}{4}ite^{2it} = \frac{3}{4}t\,(-i\cos(2t) + \sin(2t))$ est solution de $(\widetilde{E})$.
Et alors en considérant la partie imaginaire, $t \mapsto -\frac{3}{4}t\cos(2t)$ est une solution particulière de (E).

La proposition précédent nous permet également de traiter par exemple le cas de seconds membres de la forme $e^{rt}\cos(\omega t)$, ou $e^{rt}\sin(\omega t)$ en utilisant les parties réelles/imaginaires de $e^{rt}e^{i\omega t} = e^{(r+i\omega)t}$.

Exemple 9.25

Cherchons les solutions réelles à l'équation

$$(E) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}(\cos(t) + t^2 - t).$$

Alors le polynôme caractéristique est $X^2 + 2X + 2$, dont les racines complexes sont $-1 \pm i$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$t \mapsto \lambda e^{-t}\cos(t) + \mu e^{-t}\sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Cherchons à présent une solution particulière de (E). Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution de $(E_1) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\cos(t)$ et une solution de $(E_2) : y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t^2 - t$.
▸ **Recherche d'une solution de** (E_1) : puisque $e^{-t}\cos(t) = \mathrm{Re}(3e^{(-1+i)t})$, cherchons une solution de (E_1') : $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)t}$, sa partie réelle sera alors une solution de (E_1).
Nous sommes donc dans le cadre de la proposition précédente, avec P le polynôme constant égal à 1, et $\lambda = -1 + i$ racine simple du polynôme caractéristique.
Donc nous cherchons une solution sous la forme $t \mapsto (at + b)e^{(-1+i)t}$. Et comme mentionné dans la preuve de 9.23, il est possible de supposer $b = 0$.
Soit donc $y : t \mapsto ate^{(-1+i)t}$, de sorte que

$$y'(t) = ae^{(-1+i)t}\left((-1+i)t + 1\right) \text{ et } y''(t) = ae^{(-1+i)t}\left((-1+i) + (-1+i)^2 t + -1 + i\right) = ae^{(-1+i)t}\left(-2it - 2 + 2i\right).$$

Alors y est solution de (E_1') si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$ae^{(-1+i)t}\left[-2it - 2 + 2i + 2 + 2(-1+i)t + 2t\right] = e^{(-1+i)t} \Leftrightarrow a2i = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{2}.$$

Et donc une solution de (E_1') est $t \mapsto \frac{t}{2}e^{-t}(-i\cos t + \sin(t))$, si bien qu'une solution de (E_1) est $t \mapsto \frac{te^{-t}}{2}\sin(t)$.
▸ **Recherche d'une solution de** (E_2) : ici le second membre est polynomial de degré 2, et 0 n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc nous cherchons

une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
Soit $y : t \mapsto at^2 + bt + c$, de sorte que $y'(t) = 2at + b$ et $y''(t) = 2a$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$2a + 4at + 2b + 2at^2 + 2bt + 2c = t^2 - t \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = -1 \\ 2a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

Et donc une solution de (E_2) est $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}t + 1$.

Par le principe de superposition, une solution de (E) est donc

$$t \mapsto \frac{3}{2}te^{-t}\sin t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1.$$

Et donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ t \mapsto \lambda e^{-t}\cos t + \mu e^{-t}\sin t + \frac{3}{2}te^{-t}\sin t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

9.2.5 Problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, la connaissance d'une condition initiale permet de déterminer totalement une solution.
Il y a toutefois une différence : pour choisir une solution d'une équation d'ordre 2, il faut choisir les valeurs de deux paramètres : ceux que nous avons nommés λ et μ.
Or, la seule connaissance de la valeur de $y(t_0)$ ne nous donne qu'une équation, qui ne suffit pas à elle seule à déterminer les valeurs de λ et de μ.
Pour garantir l'unicité de la solution, il faut connaître les valeurs de y et de sa dérivée en t_0.

Proposition 9.26 : *Soit $t_0 \in I$. Alors pour tous $(y_0, y_1) \in \mathbf{K}^2$, il existe une unique solution de $(E) : y'' + ay' + by = c$ vérifiant* $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

Démonstration. La preuve ne figure pas explicitement au programme, mais donnons-en les grandes lignes.
Si f est une solution particulière de E, nous savons qu'il existe deux fonctions u et v telles que l'ensemble des solutions de (E_0) soit $\{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\}$, de sorte que toute solution de (E) est de la forme $\lambda u + \mu v + f$.
Et donc

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda u(t_0) + \mu v(t_0) + f(t_0) = y_0 \\ \lambda u'(t_0) + \mu v'(t_0) + f'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Il faut alors travailler un peu pour prouver que dans tous les cas, ce système de deux équations à deux inconnues[15] possède bien une unique solution. Sans grande surprise, le cas le plus désagréable est celui où le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées. □

Détails ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$)
Si le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $u : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $v : t \mapsto e^{r_2 t}$.
S'il possède une racine double, alors $u(t) = e^{rt}$ et $v(t) = te^{rt}$.
Etc...

[15] Qui sont λ et μ.

Exemple 9.27

Reprenons l'équation $y'' - 2y' + y = e^t$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t +, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, et nous avons déterminé une solution particulière, qui est $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^t$.
Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{ t \mapsto \left(\lambda + \mu t + \frac{t^2}{2}\right) e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

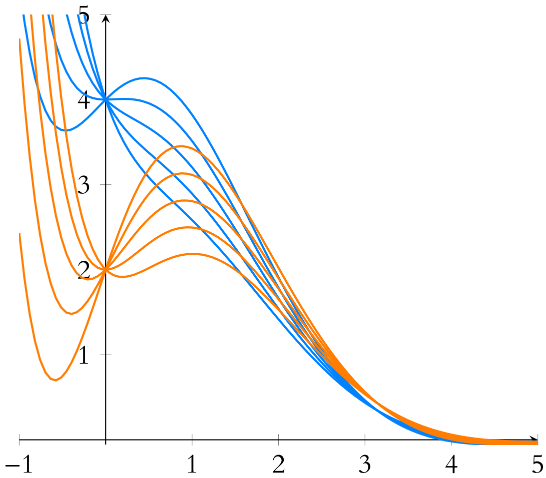
Cherchons en particulier l'unique solution y telle que $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

On a $y(0) = \lambda$, et de même, $y'(0) = \lambda + \mu$.
Et donc

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -2 \end{cases}$$

Contrairement au cas des équations d'ordre 1, les courbes intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 peuvent donc se croiser[16].
Plus précisément : pour chaque $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$, il existe une infinité de courbes intégrales passant par (t_0, y_0) : une pour chaque valeur possible de $y'(t_0)$.
En revanche, deux courbes intégrales qui passent par le même point et qui ont la même tangente en ce point sont confondues.
Par exemple, nous avons représenté ci-dessous plusieurs courbes intégrales de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 3e^{-t}(\cos(t) + 2)$ résolue précédemment.

[16] Elles peuvent même se croiser en plusieurs points.



9.3 SUITES USUELLES

On considère dans cette partie des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}$ étant égal à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{C}$.

9.3.1 Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

Définition 9.28 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{K}$.

1. Soit $q \in \mathbf{K}$. On dit que (u_n) est une **suite géométrique** de raison q si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
2. Soit $r \in \mathbf{K}$. On dit que (u_n) est une **suite arithmétique** de raison r si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 9.29 : ► *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.*
Plus généralement, pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.
► *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 q^n$.*
Plus généralement, pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

Remarque
Cette seconde formule sert notamment pour des suites qui ne démarreraient pas à u_0.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

9.3.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 9.30 – On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ pour laquelle il existe deux nombres a et b dans $\mathbf{K}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque. Notons que si $a = 1$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison b, et si $b = 0$, alors (u_n) est géométrique de raison a.

Proposition 9.31 : *Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique, à valeurs dans $\mathbf{K}$, vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.*
Soit alors ℓ l'unique solution de l'équation $\ell = a\ell + b$. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \ell + \lambda a^n$.

$a \neq 1$

Notons que le cas $a = 1$ n'a que peu d'intérêt, il s'agirait de celui d'une suite arithmétique, que l'on sait déjà traiter.

Démonstration. Posons $v_n = u_n - \ell$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(v_n + \ell) + b - \ell = av_n + \underbrace{a\ell - \ell + b}_{=0}.$$

Et donc (v_n) est géométrique de raison a : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 a^n$, de sorte que

$$u_n = v_n + \ell = \ell + v_0 a^n.$$

Remarque *: notons qu'on pourrait donner une formule pour le terme général de (u_n) : $u_n = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$, mais il n'y a aucun intérêt à l'apprendre.* □

Remarque

Il est facile de vérifier que la seule valeur de c pour laquelle la suite $(u_n + c)$ est géométrique de raison a est $c = \ell$.

Exemple 9.32

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 2$.
Alors $\ell = 5\ell - 2 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{1}{2}$.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2} + \lambda 5^n$.
En particulier, $2 = u_0 = \dfrac{1}{2} + \lambda \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{2}$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3 \times 5^n}{2}$.

Méthode

La proposition précédente garantit l'existence de λ, mais pour déterminer sa valeur, on utilisera le premier terme de la suite (il faut y voir là une sorte de condition initiale).

9.3.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 9.33 – On appelle **suite récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, avec $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Dans ce cas, le polynôme $X^2 + aX + b$ est appelé **polynôme caractéristique** de la suite (u_n).

$b \neq 0$

Notons que le cas $b = 0$ n'a pas d'intérêt, il s'agirait de celui où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, cas que l'on sait déjà traiter.

Remarque. Le cas $b = 0$ correspond à celui des suites arithmético-géométriques, que nous savons déjà traiter.

Proposition 9.34 (Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs complexes, et soit $P(X) = X^2 + aX + b$ son polynôme caractéristique*[17]*, où $b \neq 0$.*

- *Si P possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.*
- *Si P possède une racine double r, alors il existe deux complexes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$.*

[17] Ce qui implique qu'on suppose que pour tout n,
$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0.$$

Démonstration. L'idée générale est qu'une suite (v_n) qui satisfait à la même relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$, et qui en plus vérifie $v_0 = v_1 = 0$ est entièrement nulle : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = 0$.
La preuve en est aisée : $v_2 = -av_1 - bv_0 = 0$. Puis $v_3 = -av_2 - bv_1 = 0$, etc. Une récurrence facile amène au résultat.

▶ Supposons dans un premier temps que P possède deux racines distinctes r_1 et r_2.
Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, on pose alors $v_n = u_n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n &= u_{n+2} - \lambda r_1^{n+2} - \mu r_1^{n+2} + au_{n+1} + a\lambda_1 r_1^{n+1} + a\mu r_2^{n+1} + bu_n + b\lambda r_1^n + b\mu r_2^n \\ &= u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n + \lambda r_1^n(r_1^2 + ar_1 + b) + \mu r_2^n(r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Notons que ceci reste valable quel que soit le choix de λ et μ.
Peut-on alors choisir λ et μ tels que $v_0 = v_1 = 0$, et donc[18] que (v_n) soit la suite nulle ?
C'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} u_0 - \lambda - \mu = 0 \\ v_1 - \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}$$

Il s'agit alors d'un système de deux équations en les deux inconnues λ et μ, de déterminant $r_1 - r_2 \neq 0$, donc de Cramer, et qui possède une unique solution.
Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n - \lambda r_1^n - \mu r_2^n = 0 \Leftrightarrow u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

▶ Dans le cas d'une racine double[19] r, on pose $v_n = u_n - (\lambda n + \mu) r^n$. Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned} v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n &= u_{n+2} - (\lambda(n+2) + \mu) r^{n+2} + au_{n+1} - a\left(\lambda(n+1) + \mu\right) r^{n+1} + bu_n - b\left(\lambda n + \mu\right) r^n \\ &= \underbrace{u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n}_{=0} - \lambda r^n \left((n+2)r^2 + a(n+1)r + bn\right) - \mu r^n \underbrace{\left(r^2 + ar + b\right)}_{=0} \\ &= -\lambda r^n \left((r^2 + ar + b)n + r(2r + a)\right). \end{aligned}$$

Mais r étant racine de P, on a $r^2 + ar + b = 0$, et puisqu'il s'agit d'une racine double, on a[20] $r = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 2r + a = 0$, de sorte que $v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n = 0$.
Comme précédemment, on cherche alors s'il existe des valeurs de λ et μ telles que $v_0 = v_1 = 0$ (et donc $v_n = 0$ pour tout n).
Mais ceci est équivalent à $\begin{cases} \lambda = u_0 \\ (\lambda + \mu) r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = \frac{u_1}{r} - u_0 \end{cases}$.
On conclut alors comme dans le premier cas.
Notons que dans les deux cas, nous avons prouvé un peu mieux que le résultat annoncé : il existe un **unique** couple (λ, μ) tel que... □

[18] D'après ce qui a été dit au début de la preuve.

Remarque
Pour l'instant, nous n'avons vraiment parlé du déterminant que pour les systèmes de deux équations à deux inconnues complexes, mais admettons temporairement que les choses se passent de la même manière en complexe.
Et si vous n'êtes pas convaincus, prouvez à la main que ce système possède une unique solution.

[19] Notons que cette racine ne peut être nulle car $b \neq 0$ par hypothèse.
[20] Appliquer la formule bien connue donnant la racine double dans le cas où $\Delta = 0$.

$r \neq 0$
Puisque nous avons supposé que $c \neq 0$, les racines de P ne peuvent être nulles, puisque leur produit vaut c.

Proposition 9.35 (Cas où K = R) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à valeurs réelles, et soit P son polynôme caractéristique.*

- *Si P possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.*
- *Si P possède une racine double r, alors il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$.*
- *Si P possède deux racines complexes conjuguées, $\rho e^{\pm i\theta}$. Alors il existe deux réels λ, μ tels que*
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right).$$

Démonstration. Les deux premiers cas se prouvent exactement comme dans le cas complexe.
Si P possède $\rho e^{\pm i\theta}$ comme racines complexes, avec $\rho \neq 0$ et $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors[21] il existe deux complexes α et β tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta}.$$

[21] Une suite à valeurs réelles est une suite à valeurs complexes. On peut donc lui appliquer les résultats précédents.

Mais alors $u_0 = \overline{u_0} \Leftrightarrow \alpha\rho + \beta\rho = \overline{\alpha}\rho + \overline{\beta}\rho$, si bien que $\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.
De même, $u_1 = \overline{u_1} \Leftrightarrow \alpha\rho e^{i\theta} + \beta\rho e^{-i\theta} = \overline{\alpha}\rho e^{-i\theta} + \overline{\beta}\rho e^{i\theta}$.
Et donc

$$\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = (\alpha + \beta - \overline{\beta})e^{-i\theta} + \overline{\beta}e^{i\theta} \Leftrightarrow 2i\alpha \sin\theta = 2i\overline{\beta}\sin\theta.$$

Et puisque $\sin\theta \neq 0$, $\alpha = \overline{\beta}$, si bien que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \alpha\rho^n e^{in\theta} + \overline{\alpha}\rho^n e^{-in\theta} = 2\rho^n \operatorname{Re}\left(\alpha e^{in\theta}\right) = \rho^n\left(\underbrace{2\operatorname{Re}(\alpha)}_{=\lambda\in\mathbf{R}}\cos(n\theta)\underbrace{-2\operatorname{Im}(\alpha)}_{=\mu\in\mathbf{R}}\sin(n\theta)\right).$$

□

⚠ J'imagine que vous aurez reconnu la ressemblance avec les solutions de certaines équations différentielles d'ordre 2.
J'attire toutefois votre attention quant au fait que dans le cas d'une racine double r, ce sont son module et son argument (ρ et θ) qui vont intervenir dans les formules, alors que pour les équations différentielles, on s'intéressait la partie réelle et la partie imaginaire de r.

Exemples 9.36

► Soit (u_n) la suite[22] définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Alors son polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, qui possède pour racines $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En particulier, on a $u_0 = \lambda \times 1 + \mu \times 1$, de sorte que $\lambda = -\mu$.
Et on a $u_1 = 1 = \lambda\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \lambda\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \lambda\sqrt{5}$, et donc $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.
► Soit u_n vérifiant $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
Alors son polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 2$, qui possède $1 \pm i$ comme racines.
C'est-à-dire $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$.
Donc il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\lambda\cos\frac{n\pi}{4} + \mu\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

En utilisant les valeurs de u_0 et u_1, on trouve

$$\begin{cases}\lambda = 2\\ \lambda + \mu = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 2\\ \mu = -3\end{cases}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(2\cos\dfrac{n\pi}{4} - 3\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

[22] Dite de Fibonacci

Exercices du chapitre 9

Sauf mention explicite du contraire, les fonctions cherchées sont à valeurs réelles.

▸ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 9.1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués **PD**

1) $y' + y = e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$
2) $2ty'(t) - 3y(t) = t^2$, $I = \mathbf{R}_+^*$
3) $(t-1)y' - 2y = (t-1)^3$, $I =]-\infty, 1[$
4) $\sqrt{1-t^2}y' - y = 2$, $I =]-1, 1[$.
5) $xy' - 2y = x^5 \sin(x)$, $I = \mathbf{R}_-^*$
6) $y' - y = \mathrm{sh}(x)$, $I = \mathbf{R}$
7) $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 2$, $I = \mathbf{R}$
8) $(1+x^2)y' - y = 1$, $I = \mathbf{R}$
9) $y' + y\tan x = \sin(2x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 9.2 Avec des conditions initiales **PD**
Déterminer les solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

1) $y' + y = \cos(t)e^t$, $y(0) = -1$
2) $(x+1)y' + (x^2+x+1)y = x$, $y(1) = e$
3) $y' + 2xy = e^{x-x^2}$, $y(0) = 0$

Exercice 9.3 Non annulation des solutions d'une équation homogène **F**
Soit $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un, où $a : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I, et soit y_0 une solution de l'équation.
Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_0(t_0) = 0$, alors y_0 est la fonction nulle.

Exercice 9.4 Raccordement de solutions **AD**
Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbf{R}$:

1) $xy' - 2y = 2x^4$.
2) $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$
3) $x^2y' - y = (x^2-1)e^x$

Exercice 9.5 (Oral Mines PSI) **AD**
Existe-t-il des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$?

Exercice 9.6 Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) + f(t) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \quad (E)$. **AD**

▸ Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 9.7 Équations homogènes **F**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$
2) $y'' + y' + y = 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ puis $\mathbf{K} = \mathbf{R}$
3) $y'' + 4y' - 6y = 0$
4) $y'' - 4y' + ay = 0$, $a \in \mathbf{R}$.
5) $y'' + (-1+i)y' + (i-2)y = 0$
6) $y'' + 2y' + 10y = 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$

Exercice 9.8 Une équation à coefficients complexes **F**
Résoudre l'équation complexe suivante : $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$.
Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 9.9 Équations avec second membre **PD**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh}(x)$
2) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$
3) $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.
4) $y'' - y = e^x\cos(2x)$
5) $y'' + y = \sin(x)$

EXERCICE 9.10

AD

1) Résoudre $y'' + 2y' = x^2 - x + 2\operatorname{ch}(x)$.
2) Résoudre $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

EXERCICE 9.11 Équation différentielle d'Euler

AD

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, et $c : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ continue. On cherche à résoudre, sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation différentielle (linéaire, d'ordre 2, à coefficients non constants)

$$x^2y'' + axy' + by = c(x) \qquad (E).$$

1) On procède au «changement de variable $t = \ln(x)$», c'est-à-dire que pour y deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, on définit une fonction z sur $\mathbf{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$.
   a) Calculer z' et z''. Exprimer y, y' et y'' en fonction de z, z' et z''.
   b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation à coefficients constants que l'on précisera.
2) Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' + y = x^2 + x + 1$.

► Divers

EXERCICE 9.12

AD

1) Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -f(-x)$.
2) Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = f(-x) + xe^{-x}$.

EXERCICE 9.13

D

Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1.$$

EXERCICE 9.14 Changement de fonction inconnue

AD

Résoudre l'équation différentielle (non linéaire, du 1er ordre) $y' = e^{x+y}$ en posant $z = e^{-y}$.

► Suites récurrentes linéaires

EXERCICE 9.15

F

Donner les termes généraux des suites suivantes :

1) $u_0 = 7,\ u_{n+1} = 3u_n + 4$,
2) $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_{n+2} + 4u_n = 4u_{n+1}$
3) $u_0 = 1, u_1 = -1,\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
4) $u_0 = 1, u_1 = 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

EXERCICE 9.16

PD

Soit $\theta \in]0,\pi[$, et soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n$$

Déterminer le terme général de (u_n).

EXERCICE 9.17

PD

Montrer qu'une suite arithmético-géométrique (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = av_n + b$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déterminer les racines de son polynôme caractéristique.

Retrouver alors le terme général de la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{v+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$.

EXERCICE 9.18 (ENS MP)

TD

Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 9

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.1

Par facilité, nous nommerons à chaque fois (E) l'équation de l'énoncé et (E_0) l'équation homogène associée.

1. L'équation homogène est $y' + y = 0$, dont les solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière de (E) par variation de la constante, sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$, où λ est une fonction dérivable.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)e^{-x} - \cancel{\lambda(x)e^{-x}} + \cancel{\lambda(x)e^{-x}} = e^{2x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = e^{3x}.$$

Donc par exemple $\lambda(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$ convient, de sorte que $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{3}$ est solution de (E).
Et donc les solutions de (E) sont les $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{3} + \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Commençons par mettre l'équation sous forme normalisée : $y'(t) - \dfrac{3}{2t}y(t) = \dfrac{t}{2}$.
Les solutions de l'équation homogène $y'(t) - \dfrac{3}{2t}y(t) = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{3}{2}\ln(t)} = \lambda t\sqrt{t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)t\sqrt{t}$.
Alors $y'(t) = \lambda'(t)t\sqrt{t} + \lambda(t)\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$.
Et donc y est solution de l'équation si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$2t^2\sqrt{t}\lambda'(t) + \cancel{3\lambda(t)t\sqrt{t}} - \cancel{3\lambda(t)t\sqrt{t}} = t^2 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

On peut donc choisir $\lambda(t) = \sqrt{t}$, et donc une solution de l'équation de départ est $t \mapsto t^2$.
Et donc les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto t^2 + \lambda t\sqrt{t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3. L'équation sous forme normalisée est $y' - \dfrac{2}{t-1}y = (t-1)^2$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{2\ln(1-t)} = \lambda(1-t)^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)(t-1)^2$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)(t-1)^2 + \cancel{2\lambda(t)(t-1)} - \cancel{2\lambda(t)(t-1)} = (t-1)^2 \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1.$$

Et donc $\lambda(t) = t$ convient, de sorte que les solutions de (E) sont les $t \mapsto (t-1)^2(\lambda+t)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

4. On a $(E_0) : y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}y = 0$.
Or une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la fonction Arcsin, de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\mathrm{Arcsin}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Plutôt que d'appliquer la méthode de variation de la constante, notons que la fonction constante $t \mapsto -2$ est solution.
Et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto -2 + \lambda e^{\mathrm{Arcsin}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

> **Astuce**
> Le but de la méthode de variation de la constante est de trouver une solution particulière. Si on en voit une directement, il ne faut pas se priver de l'utiliser.

5. Sous forme normalisée, l'équation s'écrit $y' - \dfrac{2}{x}y = x^4\sin(x)$.
L'équation homogène est alors $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Or, une primitive de $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $x \mapsto -2\ln(-x) = -\ln(x^2)$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{\ln(x^2)} = \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Pour trouver une solution particulière, utilisons la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)x^2$.
La fonction y est alors solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)x^2 + \cancel{2x\lambda(x)} - \cancel{2x\lambda(x)} = x^4\sin(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2\sin(x).$$

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto x^2 \sin(x)$ réalisons deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\,dx &= \left[-x^2 \cos x\right] + 2\int x\cos(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2[x\sin(x)] - 2\int \sin(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C.\end{aligned}$$

Et donc une solution particulière de (E) est $x \mapsto x^2\left((2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)\right)$.
Et par conséquent, les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto x^2\left((2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + \lambda\right),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

6. L'équation homogène est $y' - y = 0$, qui possède pour solutions les $\lambda \mapsto \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)e^x + \cancel{\lambda(x)e^x} - \cancel{\lambda(x)e^x} = \operatorname{sh}(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right).$$

Et donc $\lambda(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{e^{-2x}}{2}\right)$ convient.

Par conséquent, une solution de (E) est $x \mapsto \frac{xe^x}{2} + \frac{e^{-x}}{4}$ et donc les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto e^x\left(\lambda + \frac{x}{2}\right) + \frac{e^{-x}}{4},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

7. L'équation sous forme normalisée s'écrit $y' + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{2}{(1+t^2)^2}$.

L'équation homogène est $y' + \frac{2t}{1+t^2}y = 0$.

Une primitive de $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$ est $t \mapsto \ln(1+t^2)$, de sorte que les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{1+t^2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y(t) = \frac{\lambda(t)}{1+t^2}$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\frac{\lambda'(t)}{1+t^2} - \cancel{\frac{2t\lambda(t)}{(1+t^2)^2}} + \cancel{\frac{2t\lambda(t)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = -\frac{2}{1+t^2}.$$

Et donc $\lambda(t) = 2\operatorname{Arctan}(t)$ convient, de sorte qu'une solution particulière de (E) est $y : t \mapsto \frac{2\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}$.
Et donc les solutions de (E) sont les

$$t \mapsto \frac{2\operatorname{Arctan}(t) + \lambda}{1+t^2},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

8. La forme normalisée de l'équation est $y' - \frac{1}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$.
Les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{\operatorname{Arctan}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{\operatorname{Arctan}(t)}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lambda'(t)e^{\operatorname{Arctan}(t)} + \cancel{\lambda(t)\frac{1}{1+t^2}e^{\operatorname{Arctan}(t)}} - \cancel{\lambda(t)\frac{1}{1+t^2}e^{\operatorname{Arctan}(t)}} = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2}e^{-\operatorname{Arctan}(t)}.$$

Or, une primitive de $\frac{1}{1+t^2}e^{-\operatorname{Arctan}(t)}$ est $t \mapsto -e^{-\operatorname{Arctan}(t)}$, et donc une solution particulière de (E) est $t \mapsto -e^{-\operatorname{Arctan}(t)}e^{\operatorname{Arctan}(t)} = -1$.
On en déduit que les solutions de (E) sont les

$$t \mapsto \lambda e^{\operatorname{Arctan}(t)} - 1,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Remarque

Si on remarquait dès le départ que la fonction constante égale à -1 était solution, alors il ne fallait pas se priver de l'utiliser !

9. Rappelons qu'une primitive de $t \mapsto \tan(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $t \mapsto -\ln(\cos t)$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln(\cos t)} = \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t) \cos t$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)\cos(t) - \cancel{\lambda(t)\sin(t)} + \cancel{\tan(t)\lambda(t)\cos(t)} = \sin(2t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos(t)}.$$

Mais $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, de sorte que $\lambda'(t) = 2\sin(t)$. Donc $\lambda(t) = -2\cos(t)$ convient, et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

> **Signe**
> Notons qu'il n'y a pas besoin de valeur absolue dans le logarithme car sur I, le cosinus est positif.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.2

1. Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lambda'(t)e^{-t} - \cancel{e^{-t}\lambda(t)} + \cancel{e^{-t}\lambda(t)} = \cos(t)e^{t} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \cos(t)e^{2t}.$$

Utilisons les nombres complexes pour trouver une primitive de $t \mapsto \cos(t)e^{2t} = \mathrm{Re}(e^{(2+i)t})$.
Une primitive de $t \mapsto e^{(2+i)t}$ est

$$t \mapsto \frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} = \frac{2-i}{5}e^{2t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right).$$

Donc une primitive de sa partie réelle est $t \mapsto \frac{e^{2t}}{5}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)$.
Et donc les solutions de (E) sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{e^{t}}{5}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right), \lambda \in \mathbf{R}.$$

En particulier, on a $y(0) = \lambda + \frac{2}{5}$ et donc $y(0) = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$.
Donc l'unique solution au problème de Cauchy posé est $t \mapsto \frac{1}{5}\left(-7e^{-t} + e^{t}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)\right)$.

> **Intervalle**
> Notons qu'on n'a pas vraiment le choix dans l'intervalle de résolution, puisque nous voulons que 1 en soit un élément au vu de la condition initiale.

2. Résolvons l'équation normalisée $y' + \frac{x^2+x+1}{x+1}y = \frac{x}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$.
L'équation homogène est $y' + \frac{x^2+x+1}{x+1}y = 0$.
Mais une division euclidienne nous donne $\frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$.
Une primitive de $x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$ est alors $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln(x+1)$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x+1}e^{-x^2/2}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Cherchons une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x+1}e^{-x^2/2}$ où λ est une fonction dérivable.
On a alors $y'(x) = \lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{x+1} + \lambda(x)e^{-x^2/2}\frac{-x(x+1)-1}{(x+1)^2}$.
Et donc $y'(x) + \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}y(x) = \frac{x}{x+1}$ si et seulement si

$$\lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{x+1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \lambda'(x) = xe^{x^2/2}.$$

Une solution est alors $\lambda(x) = e^{x^2/2}$, de sorte qu'une solution particulière de l'équation complète[1] est $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
Donc les solutions de l'équation complète sont les

$$x \mapsto \frac{\lambda e^{-x^2/2} + 1}{x+1}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

[1] Avec second membre.

En particulier, on a $y(1) = e \Leftrightarrow 2e = \lambda e^{-1/2} + 1 \Leftrightarrow \lambda = (2e-1)e^{1/2}$.
Et donc l'unique solution de l'équation satisfaisant à la condition initiale est

$$x \mapsto \frac{1 + (2e-1)e^{(1-x^2)/2}}{x+1}.$$

3. L'équation homogène est $y' + 2xy = 0$, qui est facile à résoudre : ses solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$.
Alors y est solution si et seulement si $\lambda'(x)e^{-x^2} = e^{x-x^2} \Leftrightarrow \lambda'(x) = e^x$.
Donc $\lambda(x) = e^x$ convient.
On en déduit que $x \mapsto e^{x-x^2}$ est une solution particulière, et donc que les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2} + e^{x-x^2},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Et donc l'unique solution telle que $y(0) = 0$ correspond à $\lambda = -1$, c'est donc $x \mapsto e^{-x^2}(e^x - 1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.3

Une solution simple consiste à remarquer qu'il y a unicité de la solution vérifiant $y(t_0) = 0$, et que la fonction nulle satisfait cette condition.
Donc si $y_0(t_0) = 0$, nécessairement y_0 est la fonction nulle.
Plus simplement, nous savons que les solutions de l'équation sont les $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a.
Donc il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in I,\ y_0(t) = \lambda_0 e^{-A(t)}$.
Et une exponentielle n'étant jamais nulle, il vient $y_0(t_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = 0$, de sorte que y_0 est la fonction nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.4

1. Une solution y de l'équation sur $\mathbf{R}$ tout entier doit toujours vérifier $y(0) = 0$.
Et sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, elle doit satisfaire l'équation normalisée (E') : $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

Sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, les solutions de l'équation homogène (E'_0) sont les $x \mapsto \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et une solution particulière est $x \mapsto x^4$.
Donc sur chacun des deux intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'ensemble des solutions de (E'_0) est $\{x \mapsto \lambda x^2 + x^4,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$.

Si y est une solution de (E) sur $\mathbf{R}$ tout entier, alors il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^2 + x^4 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \lambda_2 x^2 + x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Une telle fonction est toujours continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = 0 = y(0)$.
Et mieux, elle est toujours dérivable en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lambda x^2 + x^4}{x} = 0$ quelle que soit la valeur de λ.
Et donc, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$, $x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 + x^4 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^2 + x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution de (E). Alors nécessairement, $y(0) = 0$.
Sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, y est solution de l'équation différentielle linéaire sous forme normalisée $y' - \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}y = -\dfrac{2}{x^2+1}$.
Une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{X^2-1}{X(X^2+1)} = -\dfrac{1}{X} + \dfrac{2X}{X^2+1}$.
Et donc les solutions (sur $\mathbf{R}_+^*$ comme sur $\mathbf{R}_-^*$) de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda \dfrac{x^2+1}{x}$.
En procédant à la variation de la constante, en cherchant une solution particulière sous la

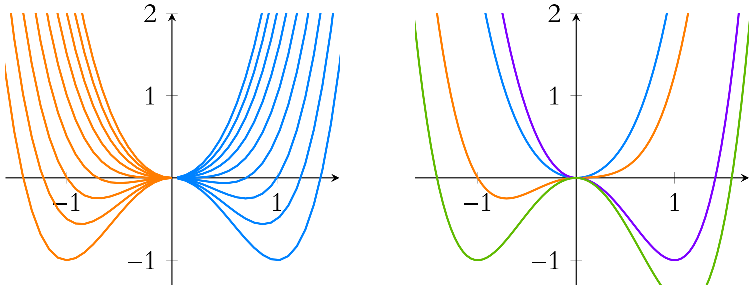


Figure 9.1 – Toute solution sur $\mathbf{R}_+^*$ se raccorde en 0 à toute solution sur $\mathbf{R}_-^*$.

forme $x \mapsto \lambda(x)\dfrac{x^2+1}{x}$, on arrive à $\lambda'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, qui s'intègre en $\lambda(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Et donc une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'ensemble des solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.

Donc il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ \lambda_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2$$

Mais une telle fonction est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Donc la seule solution possible sur $\mathbf{R}$ est $x \mapsto -x$, qui est évidemment dérivable et satisfait l'équation originelle.

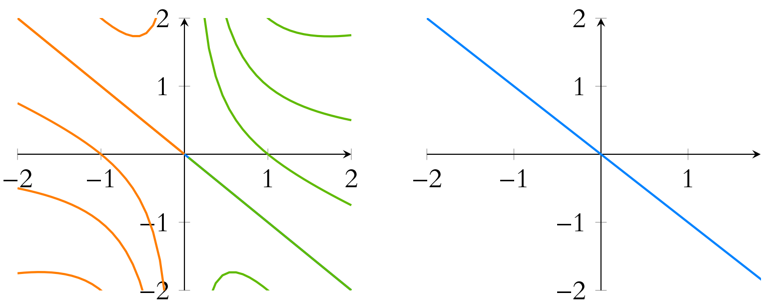


Figure 9.2 – Une seule option pour le raccord.

3. Sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-1/x}$.
Et la variation de la constante nous amène à chercher une primitive de $x \mapsto \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$.
Une telle primitive est $x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, et donc une solution particulière[2] est $x \mapsto e^x$.
Ainsi, sur $\mathbf{R}_+^*$, les solutions de l'équation sont[3] les

$$x \mapsto \lambda e^{-1/x} + e^x,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

et de même les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ sont les

$$x \mapsto \mu e^{-1/x} + e^x,\ \mu \in \mathbf{R}.$$

Donc une solution éventuelle y sur $\mathbf{R}$ vérifie

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} + e^x & \text{si } x<0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x>0 \end{cases},\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$$

[2] Sur $\mathbf{R}_+^*$, mais aussi sur $\mathbf{R}_-^*$.
[3] Somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$, et donc y admet une limite finie en 0^- si et seulement si $\lambda = 0$, et cette limite vaut alors 1.
En revanche, pour tout $\mu \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mu e^{-1/x} + e^x = 1$.

Donc toute fonction de la forme $y \mapsto y(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue en 0.

Il reste à s'assurer de la dérivabilité.
Mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$.
Donc une telle fonction est toujours dérivable en 0, et donc les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$ tout entier sont les $x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbf{R}$.

Rappel
La limite de $\frac{e^x-1}{x}$ est la dérivée de e^x en 0.

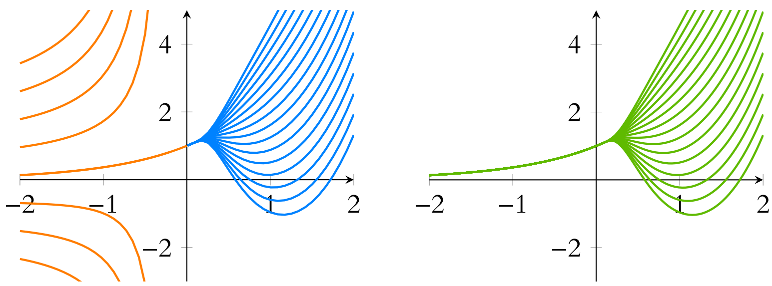


Figure 9.3 – Seule $x \mapsto e^x$ sur $\mathbf{R}_-^*$ se raccorde à une (et en fait à toutes) les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$.

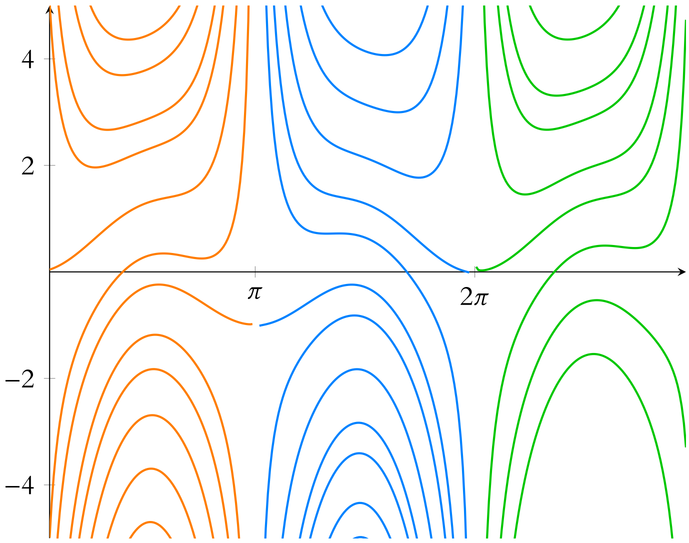
Solution de l'exercice 9.5

Commençons par mettre l'équation sous forme normalisée : $y' + y\dfrac{\cos x}{\sin x} = \sin x$, ce qui n'est valable que sur un intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|} = \dfrac{\lambda}{\sin x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, sous la forme $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\sin x}$.
Alors $y'(x) = \lambda'(x)\dfrac{1}{\sin x} - \lambda(x)\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.
Et donc on a $y'(x) + \dfrac{\cos x}{\sin x}y(x) = \sin x \Leftrightarrow \lambda'(x) = \sin^2(x)$.
Mais $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, et donc on peut prendre $\lambda(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2}$.
Soit encore $y(x) = \dfrac{x}{2\sin x} - \dfrac{\cos x}{2}$.

Et donc les solutions de l'équation sont les $x \mapsto \dfrac{x+2\lambda}{2\sin x} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$.
Une telle fonction ne peut admettre de limite finie en $k\pi$ que pour $2\lambda = k\pi \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{k\pi}{2}$.
Et de même, y ne peut avoir de limite en $(k+1)\pi$ que pour $\lambda = -\dfrac{(k+1)\pi}{2}$.
Donc quel que soit λ, y n'a pas de limite en au moins l'une des bornes de $]k\pi, -(k+1)\pi[$.

Remarque
Nous ne prouvons même pas que pour un tel λ, y admet une limite finie en $k\pi$, et nous contentons de dire qu'il s'agit d'une condition nécessaire à l'existence d'une limite.

Or, une solution sur $\mathbf{R}$, si elle existait, devrait être solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, et en particulier être continue en $k\pi$ et en $(k+1)\pi$. Nous venons de prouver que ceci n'est pas possible.



SOLUTION DE L'EXERCICE 9.6

Supposons que f soit une solution. Alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est une constante, notons la A.
Donc f satisfait l'équation différentielle $y' + y = A$, dont les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + A$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \lambda e^{-t} + A$.
D'autre part, on a alors

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda \int_0^1 e^{-x}\,dx + A.$$

Et donc nécessairement, $\lambda = 0$, de sorte que f est constante, égale à A.

Inversement, pour tout $A \in \mathbf{R}$, on a $\displaystyle\int_0^1 A\,dx = A$, et donc la fonction constante égale à A est solution de (E).
Donc les solutions de (E) sont les fonctions constantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.7

1. Puisque 1 est racine double du polynôme caractéristique, les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

2. Le polynôme caractéristique est $r^2 + r + 1$ qui possède j et $\bar{j}$ comme racines.
Donc les solutions complexes sont les $t \mapsto \lambda e^{jt} + \mu e^{\bar{j}t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$.
Pour obtenir les solutions réelles, il faut se souvenir que $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Et donc les solutions réelles sont les

$$t \mapsto e^{-t/2}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

> **Astuce**
> Ces racines se retrouvent sans calcul si vous vous souvenez que la somme des racines cubiques de l'unité est nulle.

3. Les racines (réelles) du polynôme caractéristique sont $-2 - \sqrt{10}$ et $-2 + \sqrt{10}$, donc les solutions sont les

$$t \mapsto \lambda e^{(-\sqrt{10}-2)t} + \mu e^{(\sqrt{10}-2)t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

4. Le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = 4(4 - a)$, dont le signe est celui de $4 - a$.
Si $a \leqslant 4$, alors il y a deux racines réelles qui sont $2 + \pm\sqrt{4 - a}$ et donc les solutions sont les

$$t \mapsto \lambda e^{(2+\sqrt{4-a})t} + \mu e^{(2-\sqrt{4-a})t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

En revanche, si $a > 4$, alors le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées qui sont $2 + \pm i\sqrt{a - 4}$, et donc les solutions de l'équation différentielle sont les

$$t \mapsto e^{2t}\left(\lambda \cos\left(\sqrt{4 - a}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{4 - a}t\right)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

5. Les racines complexes du polynôme caractéristique sont -1 et $2-i$, de sorte que les solution sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{(2-i)}t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

6. Le discriminant du polynôme caractéristique vaut -36, donc ses racines sont $-1 \pm 3i$.
On en déduit que les solutions complexes de l'équation sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{(-1+3i)t} + \mu e^{(-1-3i)t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Et les solutions réelles sont les

$$t \mapsto e^{-t}\left(\lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.8

Le polynôme caractéristique est $r^2 - (1-i)r - 2(1+i)$. Son discriminant est $\Delta = (1-i)^2 + 8(1+i) = 8 - 6i$.
Une racine carrée en est $\delta = 3 + i$, donc les racines en sont 2 et $-1-i$.
Donc les solutions de l'équation sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-(1+i)t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

En particulier, on a $y(0) = y'(0) = 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda - (1+i)\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{7+i}{10} \\ \mu = \dfrac{3-i}{10} \end{cases}$$

Donc la solution cherchée est

$$t \mapsto \frac{7+i}{10} e^{2t} + \frac{3-i}{10} e^{-(1+i)t}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.9

1. Le polynôme caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$, qui possède -1 comme racine double.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Puisque $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, cherchons des solutions particulières aux équations

$$(E_1) : y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{2} \text{ et } (E_2) : y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-x}}{2},$$

puis appliquons le principe de superposition.
Puisque 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution de (E_1) sous la forme $y(x) = \lambda e^x$.
On a alors $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^x}{2} \Leftrightarrow 4\lambda e^x = \dfrac{e^x}{2} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{8}$.
Donc une solution de (E_1) est $x \mapsto \dfrac{e^x}{8}$.
D'autre part, -1 étant racine double du polynôme caractéristique, il existe une solution de (E_2) sous la forme $y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}$.
y est alors solution de (E_2) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lambda(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2\lambda(-x^2 + 2x)e^{-x} + \lambda x^2 e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Et donc une solution de (E_2) est $x \mapsto -\dfrac{x^2 e^{-x}}{4}$.
Par le principe de superposition, une solution de (E) est $x \mapsto \dfrac{e^x}{8} - \dfrac{x^2 e^{-x}}{4}$, et donc les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto \left((\lambda x + \mu) - \frac{x^2}{4}\right) e^{-x} + \frac{e^x}{8},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

2. Les racines[4] de l'équation caractéristique sont $-2 \pm i$, donc l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x}\cos(x) + \mu e^{-2x}\sin(x),\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

Mais les solutions complexes sont également connues, ce sont les $x \mapsto \lambda e^{(-2+i)x} + \mu e^{(-2-i)x}$, où $(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2$.
Puisque $e^{-2x}\sin(x) = \operatorname{Im}\left(e^{(-2+i)x}\right)$, cherchons une solution particulière de $y'' + 4y + 5y = e^{(-2+i)x}$, il suffira ensuite d'en considérer la partie imaginaire.
Puisque $-2+i$ est racine simple du polynôme caractéristique, il existe une solution sous la forme $y : x \mapsto axe^{(-2+i)x}$.
On a alors $y'(x) = ae^{(-2+i)x} + a(-2+i)xe^{(-2+i)x} = ae^{(-2+i)x}(1 + (-2+i)x)$.
Et de même, $y''(x) = ae^{(-2+i)x}\left(-2+i-2+i(-2+i)^2x\right) = a\left(-4+2i+(3-4i)x\right)e^{(-2+i)x}$.
Ainsi, il vient

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = a2ie^{(-2+i)x}.$$

Et donc ceci est égal à $e^{(-2+i)x}$ si et seulement $2ai = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$.

Et dans ce cas, la partie imaginaire de $-\frac{i}{2}xe^{(-2+i)x}$ est $-\frac{e^{-2x}x\cos x}{2}$, qui est donc une solution particulière de l'équation.
Enfin, les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto e^{-2x}\left(\cos(x)\frac{\lambda - x}{2} + \mu\sin(x)\right)$$

où λ et μ sont deux réels.

Alternative *: une autre méthode est de remarquer que $e^{-2x}\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{(-2+i)x} - e^{(-2-i)x}\right)$, de chercher des solutions (complexes) aux deux équations*

$$y'' + 4y' + 5y = \frac{1}{2i}e^{(-2+i)x} \text{ et } y'' + 4y' + 5y = \frac{1}{2i}e^{(-2+i)x}$$

puis d'appliquer le principe de superposition.

3. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$.
Pour trouver une solution particulière, utilisons les complexes, en notant que

$$\cos x + \sin x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2}\left(e^{ix}(1-i) + e^{-ix}(1+i)\right).$$

Par le principe de superposition, il suffit de trouver des solutions à $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{ix}}{2}(1-i)$ et $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{-ix}}{2}(1+i)$.
Traitons en détails la première, la seconde étant du même tonneau : i n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc il existe une solution sous la forme $x \mapsto ae^{ix}$, $a \in \mathbf{C}$.
On a alors $y'(x) = iae^{ix}$ et $y''(x) = -ae^{ix}$, de sorte que

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = ae^{ix}\left(-1-3i+2\right).$$

Et donc y est solution de $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{ix}}{2}(1-i)$ si et seulement si

$$a(1-3i) = \frac{1-i}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} + \frac{i}{10}.$$

De même, on prouve que $x \mapsto \left(\frac{1}{5} - \frac{i}{10}\right)e^{-ix}$ est solution de $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{-ix}}{2}(1+i)$.
Et donc par le principe de superposition, une solution de l'équation de départ est

$$x \mapsto \frac{1}{10}\left(e^{ix}(2+i) + e^{-ix}(2-i)\right) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{\sin x}{5}.$$

Et donc enfin, les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{2\cos x}{5} - \frac{\sin x}{5},\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2.$$

[4] Conjuguées bien entendu.

Remarque
Notons que cette solution est bien à valeurs réelles.

4. Passer par les complexes, en notant que $e^x \cos(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{(1+2i)x} + e^{(1-2i)x}\right)$ et que ni $1+2i$, ni $1-2i$ ne sont racines du polynôme caractéristique.
On trouve alors pour solutions les

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \frac{e^x}{8}(\cos(2x) + \sin(2x)).$$

5. Cette fois, i et $-i$ sont racines. On trouve

$$x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.10

1. Par le principe de superposition, il suffit de résoudre

$$(E_1) : y'' + 2y' = x^2 - x,\ (E_2) : y'' + 2y' = e^x \text{ et } (E_3) : y'' + 2y = e^{-x}.$$

Si pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, y_i est une solution de (E_i), alors $y_1 + y_2 + y_3$ est une solution de notre équation complète.

► **Résolution de** (E_1) : le second membre est polynomial[5] et 0 est racine simple de X^2+2X, donc il existe une solution de (E_1) qui est un polynôme de degré 3.
Cherchons donc une solution sous la forme $y : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.
On a alors $y' : x \mapsto 3ax^2 + 2bx + c$ et $y'' : x \mapsto 6ax + 2b$.
Et donc y est solution de l'équation si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y''(x) + 2y'(x) = x^2 - x \Leftrightarrow 6ax^2 + (6a+2b)x + c + 2b = x^2 - x.$$

Par identification des coefficients, c'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 6a + 2b = -1 \\ c + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $y_1 : x \mapsto \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ convient.
► **Résolution de** (E_2) : puisque 1 n'est pas racine de $X^2 + 2X$, il suffit de chercher y_2 sous la forme $y_2 : x \mapsto \lambda e^x$.
Après calcul, $y_2 : x \mapsto \frac{e^x}{3}$ convient.

► **Résolution de** (E_3) : suivant le même principe, puisque -1 n'est pas racine de $X^2 + 2X$, on peut chercher y_3 sous la forme $x \mapsto \mu e^{-x}$, et après calculs, $y_3 : x \mapsto e^{xt}$ convient.

Donc $x \mapsto \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{e^x}{3} + e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
Puisque les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda + \mu e^{-2x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{e^x}{3} - e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

2. Cette fois le second membre est de la forme $P(x)e^x$, et 1 est racine simple du polynôme caractéristique de l'équation.
Donc on cherchera une solution sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$.
Après calculs, $x \mapsto -e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$ est une solution particulière, et les racines du polynôme caractéristique étant 1 et 2, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{-\left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right)e^x + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.11

[5] Donc de la forme $P(t)e^{0t}$.

Et d ?
Puisque d n'intervient pas dans ce système, on peut le choisir comme bon nous semble.

1.a. Par dérivation d'une composée, z est dérivable, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et donc $y'(e^t) = e^{-t}z'(t)$.
Et de même, $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$, de sorte que $y''(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t))$.

1.b. La fonction y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$e^{2t}y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = c(e^t) \Leftrightarrow z''(t) - z'(t) + az'(t) + bz(t) = c(e^t).$$

Nous sommes alors bien en présence d'une équation à coefficients constants.

2. Avec le changement de variable précédent, il s'agit donc de résoudre

$$z''(t) + z(t) = e^{2t} + e^t + 1.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
La recherche d'une solution particulière peut se faire à l'aide du principe de superposition, en notant que 2, 1 et 0 ne sont pas racines du polynôme caractéristique.
Après calcul, une solution particulière est $t \mapsto \dfrac{1}{5}e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^t + 1$.
Ne reste alors plus qu'à revenir à la fonction de départ : pour $x > 0$, on a $y(x) = z(\ln(x))$, et donc les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x) + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + 1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.12

1. Soit f une fonction satisfaisant à la condition de l'énoncé. Alors f' est dérivable puisque f l'est.
Et alors en dérivant la relation donnée, on obtient : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = f'(-x)$. Or, $f'(-x) = -f(x)$ et donc $f''(x) + f(x) = 0$.
Et donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Son polynôme caractéristique possède i et $-i$ comme racines, de sorte que f est de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

Inversement, soit f une fonction de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Alors $f'(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -f(-x) \Leftrightarrow -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = -\lambda \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} - \mu \underbrace{\sin(-x)}_{=\sin(x)} \quad (\star).$$

En particulier, en évaluant en $x = 0$, il vient $\mu = -\lambda$, et donc f est de la forme $x \mapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x))$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et inversement, il est clair qu'une fonction de cette forme vérifie $(\star)$ et donc satisfait à la condition initiale.
En résumé, les fonctions vérifiant la condition sont exactement les $x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Si f est une solution, alors en dérivant la relation de l'énoncé, il vient

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = -f'(-x) + e^{-x} - xe^{-x}.$$

Mais par hypothèse, $f'(-x) = f(x) - xe^x$, donc f vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = -f(x) + xe^x + (1-x)e^{-x}.$$

Donc f est solution de $y'' + y = xe^x + (1-x)e^{-x} \quad (E)$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Pour trouver des solutions particulières, cherchons des solutions de

$$(E_1) \quad y'' + y = (1-x)e^{-x} \text{ et } (E_2) \quad y'' + y = xe^x.$$

Cherchons des solutions sous la forme $y_1 : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ et $y_2 : (cx+d)e^x$.
On a alors $y_1'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$ et $y_1''(x) = e^{-x}(a - a + ax + b)$.
Et donc y_1 est solution de (E_1) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y_1''(x) + y_1(x) = (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}(ax + b + ax + b) = (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow 2ax + 2b = 1 - x.$$

Par identification, on a donc $2a = -1$ et $2b = 1$, de sorte que $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.
Sur le même principe, on obtient $y_2 : x \mapsto -\frac{x}{2}e^{-x}$.

Donc f est de la forme $x \mapsto \dfrac{x-1}{2}e^x - \dfrac{x}{2}e^{-x} + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x} + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x).$$

Alors $f'(x) = \dfrac{x}{2}e^x + \dfrac{x-1}{2}e^{-x} - \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$.
Et donc on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f(-x) + xe^{-x}$ si et seulement si

$$\frac{x}{2}e^x + \frac{x-1}{2}e^{-x} - \lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \frac{-x-1}{2}e^{-x} + \frac{x}{2}e^x + \lambda\cos(x) - \mu\sin(x) + xe^{-x}.$$

Soit si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$-\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \lambda\cos x - \mu\sin(x).$$

Une évaluation en 0 nous donne $\lambda = \mu$, et inversement, si $\lambda = \mu$, alors l'équation est satisfaite.
Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble[6] des fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \frac{x-1}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x} + \lambda(\cos(x) + \sin(x)),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

[6] Infini.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.13

Soit f une fonction vérifiant la relation de l'énoncé.
Commençons par noter que $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$.
Or, par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,,dt$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et ont pour dérivées respectives f et $t \mapsto tf(t)$.
Et donc la fonction $g : x \mapsto x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est donnée par :

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse s'applique de nouveau, de sorte que g' est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = f(x)$.
Et donc $f = 1 - g$ est deux fois dérivable, et

$$f''(x) = -g''(x) = -f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$, de sorte qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
Par ailleurs, $f(0) + \displaystyle\int_0^0 (0-t)f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$, et $f'(0) = -g'(0) = -\displaystyle\int_0^0 f(t)\,dt = 0$.
Donc nécessairement, $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.
Inversement, soit $f : x \mapsto \cos x$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

Synthèse
N'oublions pas la synthèse : nous avons pour l'instant uniquement procédé à l'analyse : il existe au plus une solution. Reste à voir si $f = \cos$ est solution.

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\cos(t)\,dt &= [(x-t)\sin t]_0^x + \int_0^x \sin t\,dt\\ &= 0 + [-\cos t]_0^x\\ &= 1 - \cos(x) = 1 - f(x).\end{aligned}$$

Et donc on a $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, si bien que f est solution au problème posé.
Donc l'unique fonction f continue sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$ est la fonction cos.

Alternative : soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, et notons F_1 l'unique primitive de f qui s'annule en 0, donc $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Et notons F_2 l'unique primitive de F_1 qui s'annule en 0.
Alors en procédant par intégration par parties, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= f(x) + [(x-t)F_1(t)]_0^x + \int_0^x F_1(t)\,dt \\ &= f(x) - x\underbrace{F_1(0)}_{=0} + F_2(x) + \underbrace{F_2(0)}_{=0} \\ &= F_2''(x) + F_2(x). \end{aligned}$$

Donc f est solution du problème de départ si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_2''(x) + F_2(x) = 1$.
Les solutions de cette équation différentielle sont les $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + 1$, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Comme on a de plus $F_2(0) = F_2'(0) = 0$, f est solution du problème posé si et seulement si[7] pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_2(x) = 1 - \cos(x)$.
Et donc si f est une solution du problème posé, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \cos(x)$ (la dérivée seconde de $x \mapsto 1 - \cos x$).
Et inversement, la même synthèse que précédemment prouve que $f = \cos$ est solution du problème posé.

[7] Il s'agit de trouver l'unique solution à $y'' + y = 1$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.14

On cherche donc les fonctions y dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $y'(x) = e^{x+y(x)}$.
Pour y fonction dérivable sur I, posons, conformément à l'indication de l'énoncé, $z = e^{-y}$.
Alors z est dérivable sur I, avec $z'(x) = -y'(x)e^{-y(x)}$.
Et donc y est solution de $y' = e^{x+y}$ si et seulement si

$$\forall x \in I,\ z'(x) = -e^{x+y(x)}e^{-y(x)} = -e^x.$$

Soit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $z(x) = -e^x + \lambda$.
Mais alors, on ne peut avoir $e^{-y(x)} = -e^x + \lambda$ que pour $\lambda > 0$ et $\lambda > e^x \Leftrightarrow x < \ln(\lambda)$.
Et donc les solutions de l'équation de départ sont les $x \mapsto -\ln(\lambda - e^x)$, définies sur $]-\infty, \ln(\lambda)[$, pour $\lambda > 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.15

1. $u_n = 9 \times 3^n - 2$
2. $u_n = 2^n(1-n)$
3. $u_n = -3 + \dfrac{4}{2^n}$
4. $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\dfrac{n\pi}{3} = 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.16

Le polynôme caractéristique est $r^2 - 2\cos\theta r + 1$, de discriminant $\Delta = 4(1-\cos^2\theta) = -4\sin^2\theta < 0$.
Donc les racines[8] en sont $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$. Il existe donc deux réels A et B tels que $u_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$.
Pour $n = 0$, on obtient $A = 1$, et pour $n = 1$, on a $\cos(\theta) + B\sin(\theta) = 1$, d'où

$$B = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$$

[8] Complexes.

On a donc

$$u_n = \cos(n\theta) + \tan(\theta/2)\sin(n\theta) = \frac{\cos(\theta/2)\cos(n\theta) + \sin(\theta/2)\sin(n\theta)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{\cos(\theta/2)}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.17

Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Alors $u_{n+2} = au_{n+1} + b = au_{n+1} + (u_{n+1} - au_n) = (a+1)u_{n+1} - au_n$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} - (a+1)u_{n+1} + au_n = 0$. On reconnaît bien là une relation

définissant une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son polynôme caractéristique est alors $X^2-(a+1)X+a$, de discriminant $\Delta = (a+1)^2-4a = a^2-2a+1 = (a-1)^2$.
Et donc les deux racines du polynôme caractéristique sont $r_1 = \dfrac{a+1-(a-1)}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{a+1+a-1}{2} = a$.

Remarque
Ces deux racines sont confondues si et seulement si $a = 1$, soit si et seulement si (u_n) est arithmétique.

En particulier, la suite (v_n) donnée par l'énoncé vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0.$$

Son polynôme caractéristique possède 1 et 2 comme racines. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \lambda + \mu 2^n$.
En particulier, on a $\begin{cases} v_0 = 2 = \lambda + \mu \\ v_1 = 1 = \lambda + 2\mu \end{cases}$, de sorte que $\lambda = 3$ et $\mu = -1$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = 3 - 2^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9.18

Supposons que f soit une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
Soit $x > 0$. Définissons une suite u_n en posant $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, de sorte que $u_n = f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}})(x)$.
L'équation fonctionnelle de l'énoncé, appliquée à $f^n(x)$ permet de montrer que

$$f(f(f^n(x))) = 6f^n(x) - f(f^n(x)) = 0 \Leftrightarrow u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3).$$

Donc il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = A2^n + B(-3)^n$.
Puisque $u_0 = x$ et $u_1 = f(x)$, on a

$$B = \frac{2x - f(x)}{5} \text{ et } A = \frac{3x + f(x)}{5}$$

Si $B > 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{2n+1} = A2^{2n+1} - B3^{2n+1} = -3^{2n+1}\left(B - A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ceci contredit la positivité de f, puisque $f^{2n+1}(x) = f\left(f^{2n}(x)\right)$ doit être positif strictement.
De même, si $B < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{2n} = 3^{2n}\left(B - A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ce qui n'est pas davantage possible.

On en déduit que $B = 0$, et donc $f(x) = 2x$.

Inversement[9], si f est la fonction $x \mapsto 2x$, alors f est bien à valeurs positives sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 4x = 6x - 2x.$$

Donc la seule solution est $f : x \mapsto 2x$.

[9] N'oublions pas la synthèse !

APPLICATIONS, RELATIONS

10

10.1 RETOUR SUR LA NOTION D'APPLICATION

Dans cette partie, nous poursuivons l'étude de la notion d'application entre ensembles définie au chapitre 3.

10.1.1 Image directe, image réciproque

Définition 10.1 – Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et soit $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f et on note $f(A)$ la partie de F définie par

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}.$$

Rédaction
Quand on souhaite prendre un élément dans $f(A)$, la rédaction n'est surtout pas «soit $f(x) \in f(A)$», mais «soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$».

L'image directe de A est donc l'ensemble des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent **dans** A. C'est également l'ensemble des images de tous les éléments de A.

On

Exemples 10.2

► Si $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$, alors $f(\mathbf{R}) = f([0, +\infty[) = f(]-\infty, 0]) = [1, +\infty[$ et $f(]-3, 2[) = [1, 10[$.

► $\sin(\mathbf{R}) = [-1, 1]$ et $\mathrm{Arctan}([0, +\infty[) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

► L'image de $\mathbf{R}$ par la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est $\mathbf{U}$.
En revanche, l'image de $\mathbf{C}$ par la même application est $\mathbf{C}^*$. En effet, si $z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$, alors $r \neq 0$ et donc $z = e^{\ln r + i\theta}$ est bien dans l'image de l'exponentielle.

► On a toujours $f(\emptyset) = \emptyset$, et si $A \neq \emptyset$, alors $f(A) \neq \emptyset$. En effet, dans ce cas, A contient au moins un élément x, et donc $f(A)$ contient au moins l'élément $f(x)$.

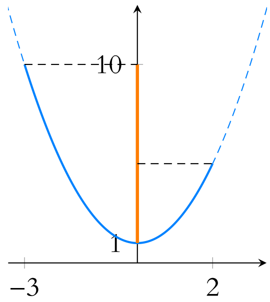


FIGURE 10.1– L'image (en orange) de $[-3, 2]$ par $x \mapsto x^2 + 1$.

Définition 10.3 – Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. On appelle alors **image de** f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble $f(E)$.
On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.

Pour le dire autrement, $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des éléments de F qui admettent au moins un antécédent par f.

⚠ Attention !
On ne peut considérer que l'image réciproque d'une partie de F (l'ensemble d'arrivée de f), et cette image réciproque est une partie de E (l'ensemble de départ).

Définition 10.4 – Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque de** B **par** f la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

⚠ La notation $f^{-1}(B)$, bien qu'étant celle que tout le monde utilise est source de confusion : la fonction s'appelle toujours f, et il n'y a pas nécessairement d'application nommée f^{-1} derrière cette notation.

Toutefois, il se peut qu'un tel f^{-1} existe[1], et alors comment savoir si $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par f ou l'image directe de B par f^{-1} ?

[1] Cf. ci-dessous, mais vous connaissez déjà la notion de bijection pour les fonctions définies sur (une partie de) $\mathbf{R}$.

Bonne nouvelle, il s'agit de la même chose comme nous le prouverons plus loin.

Exemples 10.5

Si $f : A \to \mathbf{R}$, où A est une partie de $\mathbf{R}$, alors déterminer l'image réciproque d'un singleton $\{y\}$, c'est trouver l'ensemble des solutions à l'équation $y = f(x)$.
De même, déterminer l'image réciproque d'un intervalle $[a, b]$, c'est résoudre l'inéquation $a \leqslant f(x) \leqslant b$, d'inconnue $x \in A$.

Contrairement à l'image directe, on peut avoir $f^{-1}(B) = \emptyset$ sans que B soit vide. Par exemple, pour la fonction $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a $\sin^{-1}([3, 4]) = \emptyset$.

Exercice
Prouver que $f^{-1}(B) = \emptyset$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap B = \emptyset$.

10.1.2 Restriction, prolongements

La notion de restriction a déjà été rencontrée pour les fonctions numériques, elle est encore valable pour n'importe quelle application :

Définition 10.6 – Soit $f : E \to F$ et soit A une partie de E. On appelle **restriction de f à A** l'application $f_{|A} : \left|\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$.
Autrement dit, $f_{|A}$ n'est rien d'autre que l'application f, mais vue comme une application définie sur A uniquement.

Définition 10.7 – Soit $f : E \to F$ et soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle **prolongement de f à E'** toute application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Autrement dit
Un prolongement de f à E' est toute application définie sur un ensemble E' contenant E, telle que $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$.

On prendra garde au fait qu'un prolongement de f n'est pas nécessairement unique.

Par exemple, les deux fonctions $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$ sont deux prolongement à $\mathbf{R}$ de la fonction $\mathrm{id}_{[0,+\infty[}$, puisque pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) = x$.

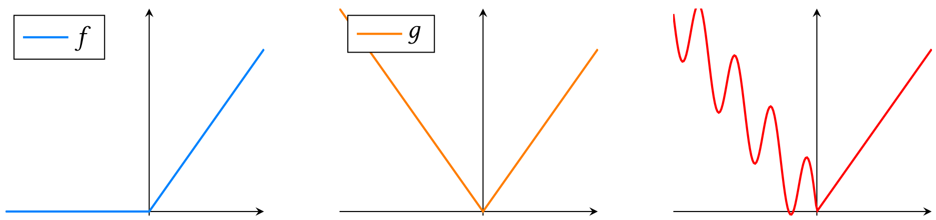


Figure 10.2 – Trois prolongements possibles de $\mathrm{id}_{[0,+\infty[}$.

Définition 10.8 – Soit $f : E \to F$, et soit B une partie de F. On dit que f **est à valeurs dans** B si $\mathrm{Im}(f) \subset B$. Soit encore si : $\forall x \in E,\ f(x) \in B$.

Exemples 10.9

La fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}\right.$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$.

L'application $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2, y^3) \end{array}\right.$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.

Définition 10.10 – Soit $f : E \to F$ et soit B une partie de F telle que f soit à valeurs dans B.
La corestriction de f à B est alors l'application $f^{|B} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

La plupart du temps on confond[2] f et $f^{|B}$, par exemple, lorsqu'on dit que Arctan réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il faudrait plutôt dire que $\text{Arctan}^{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ est une bijection, mais cette notation est inutilement lourde, et on préfère se contenter d'une phrase qui précisera quels sont les ensembles de départ et d'arrivée que l'on considère.

[2] Abusivement !

Définition 10.11 – Soit $f : E \to E$ et soit $A \subset E$. On dit que A est **stable par** f si : $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

Exemple 10.12

Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $[0, 1]$ est stable par $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.
En effet, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors par croissance de f_α, $0 = f_\alpha(0) \leqslant f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(1) = 1$.
Donc $f_\alpha(x) \in [0, 1]$.

Définition 10.13 – Soit $f : E \to F$ et soit A une partie de E stable par f. On appelle **application induite par f sur A** l'application

$$f_{|A}^{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

10.2 Injections, surjections, bijections

10.2.1 Définitions

Définition 10.14 – Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. On dit que f est **injective** (ou encore que f est une **injection**) si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

i) $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
ii) pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$
iii) tout élément de F possède **au plus** un antécédent par f.

Danger ! Cela ne veut pas dire que tout élément a un antécédent, mais qu'il ne peut pas en avoir deux distincts.

Démonstration. Il est évident que *ii)* et *iii)* sont équivalentes, puisque les antécédents d'un élément $y \in F$ par f sont les solutions de l'équation $y = f(x)$.
Prouvons donc que *i)* ⇔ *iii)*.
▸ *i)* ⇒ *iii)*. Supposons que $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
Soit alors $y \in F$, et supposons que x_1, x_2 sont deux antécédents de y par f.
Alors $f(x_1) = f(x_2)$, et donc $x_1 = x_2$.
Donc y possède au plus un antécédent par f. ▸ *iii)* ⇒ *i)* Supposons que tout élément de F possède au plus un antécédent par f.
Soient alors x, x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
Alors x et x' sont tous les deux des antécédents de $y = f(x)$, et donc sont égaux. □

Attention ! Il se peut qu'un tel antécédent n'existe pas, nous prouvons juste que s'il y en a deux, alors ce sont les mêmes.

Remarque. Puisque deux éléments de E qui sont égaux ont toujours même image, l'implication réciproque du point *i)* est toujours vraie, que f soit injective ou non.
Autrement dit, *i)* s'écrit encore $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$.

Exemples 10.15

▸ Pour tout ensemble E, id_E est injective.
En effet, si $x, y \in E$ sont tels que $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(y)$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(y) = y$.

▸ $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective, puisque $f(2) = 4 = f(-2)$.

En revanche, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective.

Méthode
Si vous trouvez deux éléments distincts de même image, vous avez tout de suite prouvé que votre application n'est pas injective.

Proposition 10.16 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et soit $f : A \to \mathbf{R}$. Si f est strictement monotone, alors elle est injective.*

⚠ Attention !
Ce résultat est faux si on se contente d'applications monotones.

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas d'une fonction strictement croissante.
Soient donc x, x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.
On ne peut avoir $x < x'$ car on aurait alors $f(x) < f(x')$.
De même, $x' < x$ impliquerait $f(x') < f(x)$.
Donc nécessairement, $x = x'$. □

Définition 10.17 – Soit f une application de E dans F. On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) si tout élément de F possède au moins un antécédent par f. Autrement dit si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Notons que cela revient à dire que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in E$ possède au moins une solution.
En particulier, puisque $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des éléments de F qui possède au moins un antécédent par f, alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exemples 10.18

▸ L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y \end{array} \right.$ est surjective.
En effet, le réel x admet pour antécédent $(0, x)$.

▸ L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^2 - 2z + 5 \end{array} \right.$ est surjective.
En effet, pour $\alpha \in \mathbf{C}$, l'équation $f(z) = \alpha \Leftrightarrow z^2 - 2z + (5 - \alpha) = 0$ possède toujours au moins une solution[3] dans $\mathbf{C}$.
En revanche, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 2x + 5 \end{array} \right.$ n'est pas surjective, car 0 n'admet pas d'antécédent : l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$ n'admet pas de solution réelle.

▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, y + z - x) \end{array} \right.$.
Pour étudier la surjectivité de f, il s'agit de déterminer si tout élément $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ possède un antécédent par f.
Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Alors $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ est un antécédent de (α, β) par f si et seulement si $f(x, y, z) = (\alpha, \beta)$ soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} x = \alpha \\ -x + y + z = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta - z + \alpha \end{cases}$$

Or, nous savons qu'un tel système possède une infinité de solutions, qui sont les $(\alpha, \alpha + \beta - z, z)$, pour $z \in \mathbf{R}$.
Et donc tout élément de $\mathbf{R}^2$ possède au moins un[4] antécédent par f, donc f est surjective.

[3] Et le plus souvent deux solutions.

[4] Et même une infinité, mais ce n'est pas important ici.

⚠ La réciproque est fausse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est injective sur $\mathbf{R}^*$, mais n'est pas monotone.

10.2.2 Comportement vis-à-vis de la composition

Proposition 10.19 : *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
3. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
4. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Autrement dit
La composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration.

1. Supposons f et g injectives. Soient $(x, y) \in E^2$ tels que
$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)).$$
Puisque g est injective, alors $f(x) = f(y)$. Et donc par injectivité de f, $x = y$. Ainsi, $g \circ f$ est injective.
2. Supposons $g \circ f$ injective, et soient $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors[5] $g(f(x)) = g(f(y))$, et donc par injectivité de $g \circ f$, $x = y$. Donc f est injective.
3. Supposons f et g surjectives, et soit $z \in G$.
Par surjectivité de g, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Et par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et donc $z = (g \circ f)(x)$.
Ainsi, x est un antécédent de z par $g \circ f$, de sorte que tout élément de G possède un antécédent par $g \circ f$, qui est donc surjective.
4. Supposons $g \circ f$ surjective.
Alors pour tout $y \in G$, il existe un élément $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Et donc en posant $z = f(x)$, il existe $z \in F$ tel que $y = g(z)$: g est surjective.

□

[5] Deux éléments égaux ont même image par g !

Remarque. Toutes ces implications ne sont en aucun cas des équivalences, et c'est d'ailleurs un bon exercice que de chercher des cas où les implications réciproques sont fausses.

10.2.3 Bijections

Définition 10.20 – Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, si tout élément de F possède un **unique** antécédent par f :
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x).$$

Explication
La surjectivité garantit l'existence d'au moins un antécédent, l'injectivité fournit alors l'unicité.

Remarque. On dit généralement que f est une bijection, ou mieux : qu'elle réalise une bijection de E sur F.
En particulier, on utilisera cette terminologie lorsque que f est injective, mais que son image n'est pas F tout entier. Dans ce cas, f n'est pas bijective, mais en revanche sa corestriction à $\operatorname{Im} f$ l'est.
Comme on ne fait généralement pas vraiment la différence entre f et $f^{|\operatorname{Im} f}$, on dit généralement que «f réalise une bijection de E sur $\operatorname{Im} f$» plutôt que $f^{|\operatorname{Im} f}$ est bijective».
Par exemple, l'exponentielle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, plutôt que $\exp^{|\mathbf{R}_+^*}$ est bijective.

Détails
Les éléments de $\operatorname{Im} f$ sont ceux qui ont toujours au moins un antécédent par f, donc si on suppose de plus f injective, ils ont toujours un **unique** antécédent par f.

Exemples 10.21

- id_E est toujours bijective : tout élément x de E est son unique antécédent par id_E.
- Le théorème de la bijection stipule que si f est continue sur $[a, b]$, strictement croissante (resp. décroissante), alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).
L'injectivité provient en fait de la stricte monotonie, et la surjectivité du théorème des valeurs intermédiaires[6].

[6] Que nous prouverons rigoureusement bientôt.

Proposition 10.22 : *Soit $f : E \to F$. Alors f est une bijection si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$.*
*Un tel g, lorsqu'il existe est unique. On l'appelle **bijection réciproque de** f, on le note f^{-1}, et il s'agit de l'application qui à tout $x \in F$ associe son unique antécédent par f.*

Démonstration. Supposons que f soit bijective. Alors tout élément $x \in F$ possède un unique antécédent par f. Notons $g(x)$ cet antécédent, définissant ainsi une application $g : F \to E$. Par définition[7], pour tout $x \in F$, on a $f(g(x)) = x = \mathrm{id}_F(x)$, et donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
D'autre part, pour $x \in E$, $f(x) \in F$ possède x comme antécédent, nécessairement unique car f est bijective, et donc $g(f(x)) = x = \mathrm{id}_E(x)$, de sorte que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

[7] $g(x)$ est un antécédent de x par f.

Inversement, supposons qu'il existe $g : F \to E$ tel que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases}$.
Puisque $g \circ f = \mathrm{id}_E$ est injective, alors par la proposition 10.19, f est injective.
De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est surjective, et donc f est surjective.
Donc f est une bijection.

Il reste à prouver l'unicité de g. Supposons donc qu'il existe deux applications g_1 et g_2 de F dans E telles que $\begin{cases} g_1 \circ f = g_2 \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{id}_F \end{cases}$.
Composons alors à droite la première relation par g_1. Il vient alors

$$g_2 \circ f \circ g_1 = \mathrm{id}_E \circ g_1 \Leftrightarrow g_2 \circ \mathrm{id}_F = g_1 \Leftrightarrow g_2 = g_1.$$

□

Remarquons que si f est bijective, alors pour $x \in E$ et $y \in F$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
En effet, $y = f(x)$ si et seulement si x est l'unique antécédent de y par f, qui est $f^{-1}(y)$.

☠ Danger !
Ceci ne vaut que si vous savez déjà f bijective. Sans ça, il est **interdit** d'écrire f^{-1}.

Corollaire 10.23 – *Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective, et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Démonstration. On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
Par la proposition précédente, ceci prouve que f^{-1} est bijective et que sa bijection réciproque est f. □

Exemple 10.24 Détermination d'une bijection réciproque

Soit f l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-3z, -x+y-z, -x+y) \end{array} \right.$.
Nous allons prouver que f est bijective, et déterminer du même coup sa bijection réciproque.

Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Alors pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$(a,b,c) = f(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = a \\ -x+y-z = b \\ -x+y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -c \\ y - 3z = a \\ z = -b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 3b + 2c \\ y = a - 3b + 3c \\ z = -b + c \end{cases}$$

Ainsi, tout élément de $\mathbf{R}^3$ possède un **unique** antécédent, donc f est bijective.
Mieux : nous avons déterminé quel est l'unique antécédent de $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ par f, donc nous connaissons f^{-1} : il s'agit de l'application

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-3b+2c, a-3b+3c, -b+c) \end{array} \right..$$

Il est bien entendu possible de vérifier qu'alors $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, mais ce n'est pas indispensable !

Proposition 10.25 : *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection de E dans G, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Démonstration. Notons que $g \circ f : E \to G$ et $f^{-1} \circ g^{-1} : G \to E$. On a alors

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Et de même,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G.$$

Et donc $g \circ f$ est bijective, de réciproque égale à $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

⚠ On prendra bien garde au fait que l'ordre change lorsqu'on passe à la bijection réciproque : la bijection réciproque de $g \circ f$ n'est pas $g^{-1} \circ f^{-1}$!
De toutes façons, si $E \neq G$, $g^{-1} \circ f^{-1}$ n'a aucun sens[8], alors que $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien définie.
Une analogie simple mais efficace : le matin vous commencez par mettre vos chaussettes (c'est f), puis vous enfilez vos chaussures (c'est g).
Le soir, pour vous déshabiller (c'est donc $(g \circ f)^{-1}$) vous commencez par enlever vos chaussures (donc g^{-1}), puis vous enlevez vos chaussettes (c'est f^{-1}). Et sûrement pas le contraire !

[8] L'espace de départ de g^{-1} n'est pas l'espace d'arrivée de f^{-1}.

Corollaire 10.26 – *Si $f : E \to E$ est bijective, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, f^n est bijective, et $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ fois}}$.*

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Définition 10.27 – Si $f : E \to E$ est bijective[9], alors pour n entier strictement négatif, on note $f^n = (f^{-1})^{|n|}$.

[9] Et seulement dans ce cas-là : bijective avec espace de départ et d'arrivée égaux. De toutes façons, sans cette seconde condition, les composées $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, etc ne sont pas définies.

Remarques. ▸ La valeur absolue est confusante : on a bien $f^{-2} = f^{-1} \circ f^{-1}$, $f^{-3} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}$, etc.
▸ On a alors, pour tous $(k, n) \in \mathbf{Z}^2$, $f^n \circ f^k = f^{n+k}$.
Prouvons à présent un fait énoncé précédemment : si $f : E \to F$ est bijective, alors l'image réciproque de $B \subset F$ par f et l'image directe de B par f^{-1} sont égales (et donc la notation $f^{-1}(B)$ ne prête pas à confusion).
Notons $A_1 = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ l'image réciproque de B par f^{-1} et $A_2 = \{f^{-1}(y),\ y \in B\}$ l'image directe de B par f^{-1}. Alors

$$x \in A_1 \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow \exists y \in B,\ f(x) = y \Leftrightarrow \exists y \in B,\ x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \in A_2.$$

Et donc on a bien $A_1 = A_2$.

10.2.4 Fonction indicatrice d'une partie

Nous définissons à présent des fonctions qui sont d'apparence assez simple, mais sont en fait assez utiles, et nous les utiliserons notamment en probabilités.

Définition 10.28 – Soit E un ensemble, et soit A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A et on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Autrement dit, un élément $x \in E$ est dans A si et seulement si $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
Notons que $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1 (et même que la valeur 0 si $A = \emptyset$), et qu'en particulier, $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
Beaucoup de propriétés ensemblistes se lisent sur les fonctions indicatrices :

Exercice
Inversement, montrer que si $f : E \to \mathbf{R}$ vérifie $f^2 = f$, alors il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ telle que $f = \mathbb{1}_A$.

Proposition 10.29 : *Soit E un ensemble, et soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Alors*
- $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$ *(c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$)*
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

Démonstration. ▶ Supposons $A \subset B$. Alors pour $x \in A$, $x \in B$, et donc $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$.
Et pour $x \in E \setminus A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0 \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
Inversement, si $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$, alors pour $x \in A$, on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$, et donc[10] nécessairement, $\mathbb{1}_B(x) = 1$, de sorte que $x \in B$.
Donc $A \subset B$.
▶ Pour $x \in E$, on a deux cas de figure :
Soit $x \in A$, et alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$.
Soit $x \notin A$, et alors $1 - \mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$.
Donc on a bien $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
▶ Soient A et B deux parties de E, et soit $x \in E$. Alors

$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A\cap B \Leftrightarrow x \in A$ **et** $x \in B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1$ **et** $\mathbb{1}_B(x) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$.

[10] $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$.

Remarque
La dernière équivalence n'est vraie que parce que $\mathbb{1}_A(x)$ et $\mathbb{1}_B(x)$ sont dans $\{0, 1\}$.

Et donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$. ▶ Nous pourrions là aussi distinguer plusieurs cas, mais notons plutôt que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ et donc

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B) = 1 - 1 + \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$

□

La proposition qui suit énonce un résultat plus simple qu'il n'y paraît, et vient formaliser l'intuition suivante : pour se donner une partie A de E il suffit, pour chaque élément x de E, de dire si on le «prend» ou non dans A.
Mais c'est exactement ce que fait la fonction indicatrice de A : pour tout $x \in E$, elle nous dit si x est dans A (lorsque $\mathbb{1}_A(x) = 1$) ou non (lorsque $\mathbb{1}_A(x) = 0$).
Et donc une partie de E est entièrement caractérisé par sa fonction indicatrice.

Proposition 10.30 : *Soit E un ensemble. Alors* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ *est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur $\mathscr{F}(E, \{0,1\})$.*

Démonstration. L'idée est assez simple : si on a une fonction φ de E dans $\{0, 1\}$, de quelle partie de E peut-elle être l'indicatrice ?
De l'ensemble des $x \in E$ tels que $\varphi(x) = 1$!
Posons donc $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E, \{0,1\}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^{-1}(\{1\}) = \{x \in E \mid \varphi(x) = 1\} \end{array} \right.$.
Prouvons alors que g est la bijection réciproque de f en prouvant que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(E,\{0,1\})}$.

Soit donc $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors

$$(g \circ f)(A) = g(\mathbb{1}_A) = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\} = A.$$

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.
Et inversement, pour $\varphi \in \mathscr{F}(E, \{0, 1\})$, et pour $x \in E$,

$$[(f \circ g)(\varphi)](x) = \mathbb{1}_{y\in E|\varphi(y)=1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(x) = 1 \\ 0 & \text{si } \varphi(x) \neq 1 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \end{cases} = \varphi(x).$$

Et donc $(f \circ g)(\varphi) = \varphi$, si bien que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(E,\{0,1\})}$.
On en déduit donc que f est bijective (et que $g = f^{-1}$). □

10.3 RELATIONS BINAIRES

En maths, nous avons régulièrement envie de comparer plusieurs éléments, soit pour dire qu'ils partagent certaines propriétés, soit au contraire pour dire qu'ils différent sur certains points et que tel élément est plus *trucmuche* que tel autre.
Par exemple que tel ensemble est plus petit que (= inclus dans) tel autre, qu'une suite tend plus rapidement vers 0 qu'une autre, que deux droites sont parallèles (= ont même direction), que deux fonctions ont même limite en $+\infty$, etc.

10.3.1 Définitions

Définition 10.31 (Relation binaire) – Soit E un ensemble non vide. On appelle **relation binaire sur** E toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.
On note alors $x \mathcal{R} y$ pour signifier que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Exemples 10.32

► L'ensemble $\mathcal{R} = \{(x, x),\ x \in E\}$ est une relation binaire sur tout ensemble E.
On a alors $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x = y$.
► La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{Z}$ par $p \mathcal{R} q$ si et seulement si p divise q est une relation binaire sur $\mathbf{Z}$.
► La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 + y = 1$ est une relation binaire.

Définition 10.33 – Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- **réflexive** si $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$
- **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- **transitive** si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$.

Exemples 10.34

► La relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$ est réflexive (tout entier se divise), elle est transitive (si a divise b et b divise c, alors a divise c). Elle n'est pas symétrique puisque 2 divise 4 mais 4 ne divise pas 2.
► La relation «être frontalier de», définie sur l'ensemble des pays est une relation symétrique, mais elle n'est pas transitive.[11]

[11] Par exemple parce que la Norvège est frontalière de la Russie, que la Russie est frontalière de la Corée du Nord, mais la Norvège n'est pas frontalière de la Corée du Nord.

10.3.2 Relations d'équivalence

Définition 10.35 – Une relation binaire $\mathcal{R}$ qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive est appelée **relation d'équivalence**.

Exemples 10.36

► Si $f : E \to F$, alors la relation $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E.
En effet, on a toujours $f(x) = f(x)$, donc $x \mathcal{R} x$.
Si $x \mathcal{R} y$, alors $f(y) = f(x)$, et donc $y \mathcal{R} x$.
Et si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $f(x) = f(y) = f(z)$, et donc en particulier, $f(x) = f(z)$, de sorte que $x \mathcal{R} z$.

Remarque
Nous utilisons ici le fait que, sur n'importe quel ensemble, l'égalité est elle-même une relation d'équivalence !

► Si $\alpha \neq 0$, alors la relation $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \ [\alpha]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.
Rappelons que $x \equiv y \ [\alpha]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = x + k\alpha$
En effet, on a toujours $x \equiv x \ [\alpha]$.
Si $x \equiv y \ [\alpha]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = x + k\alpha \Leftrightarrow x = y + \underbrace{(-k)}_{\in \mathbf{Z}} \alpha$, et donc $y \equiv x \ [\alpha]$.
Enfin, si $x \equiv y \ [\alpha]$ et $y \equiv z \ [\alpha]$, alors il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que $y = x + k_1\alpha$ et $z = y + k_2\alpha$, de sorte que $z = x + (k_1 + k_2)\alpha$ et donc $z \equiv x \ [\alpha]$.
► De même, la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.
► Sur l'ensemble $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites à valeurs réelles, on définit une relation $\sim$ par $(u_n) \sim (v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
Alors $(u_n) \sim (u_n)$ puisque la suite nulle tend vers 0.
Si $(u_n) \sim (v_n)$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ de sorte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Donc $\sim$ est symétrique.
Enfin, si $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$, alors on à la fois $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n - w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par somme de limites $u_n - w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $(u_n) \sim (w_n)$.
Donc $\sim$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Définition 10.37 – Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E et si $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence de x pour** $\sim$ et on note $\mathrm{cl}(x)$ ou $\overline{x}$ (ou encore $\dot{x}$) l'ensemble défini par $\mathrm{cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid x \sim y\}$.

Exemples 10.38

► Pour la relation de congruence modulo 2 sur $\mathbf{Z}$, alors la classe d'équivalence de $n \in \mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers de même parité que n.
En effet, si n est pair, $n = 2p$, alors

$$\overline{n} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k+n\} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2(k+p)\} = \{m \in \mathbf{Z} \mid \exists \ell \in \mathbf{Z}, m = 2\ell\} = \{2\ell, \ell \in \mathbf{Z}\}$$

est l'ensemble des entiers pairs.
On prouve sur le même principe que si n est impair, alors $\overline{n}$ est l'ensemble des entiers impairs.
► Pour la relation d'équivalence définie sur $\mathbf{R}$ par $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, alors la classe d'équivalence de $x \neq 0$ est $\{x, -x\}$, et la classe d'équivalence de 0 est $\{0\}$.
► Pour la relation $\sim$ précédemment introduite sur $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on prouve facilement que si une suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors la classe d'équivalence de (u_n) est l'ensemble des suites de limite ℓ.
En effet, si $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc $\left\{(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell\right\} \subset \overline{(u_n)}$.
Et inversement, si $(v_n) \in \overline{(u_n)}$, alors $v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - 0 = \ell$$

et donc $\overline{(u_n)} \subset \left\{(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell\right\}$.

C'est en revanche plus compliqué pour les suites de limite infinie, puisque $u_n = n$ et $v_n = n^2$ tendent toutes deux vers $+\infty$, mais leur différence ne tend pas vers 0. Donc elles ne sont pas dans la même classe d'équivalence.
Et c'est sans compter sur toutes les classes d'équivalence de suites divergentes, par exemple qu'y a-t-il dans la classe d'équivalence de $((-1)^n)_n$?

Proposition 10.39 : *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Alors :*

1. *Pour tout $x \in E$, $\mathrm{cl}(x) \neq \emptyset$.*
2. *Pour $(x, y) \in E^2$, on a soit $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$, soit $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \emptyset$*
3. *$\displaystyle\bigcup_{x\in E} \mathrm{cl}(x) = E$.*

Autrement dit, l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

En français Deux classes d'équivalence sont soit égales, soit disjointes.

Rappel On appelle partition de E toute famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont l'union vaut E tout entier.

Démonstration. 1. On a toujours $x \in \mathrm{cl}(x)$ car $x \sim x$, donc $\mathrm{cl}(x) \neq \emptyset$.

2. Soient $x, y \in E$ tels que $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) \neq \emptyset$, et montrons que $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.
   Soit $z \in \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y)$. Alors $x \sim z$ et $y \sim z$.
   Par symétrie, on a donc $z \sim y$ et par transitivité, $x \sim y$.
   En particulier, si $u \in \mathrm{cl}(x)$, alors $x \sim u$ et donc $u \sim x$. Puisque de plus $x \sim y$, par transitivité, $u \sim y$ et donc $y \sim u$, de sorte que $u \in \mathrm{cl}(y)$.
   Ainsi, nous venons de prouver que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$.
   On prouve de la même manière l'inclusion réciproque $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x)$ et donc $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.

Remarque Nous avons prouvé au passage que si $x \sim y$, alors $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.

3. Puisque les classes d'équivalence sont incluses dans E par définition, on a $\displaystyle\bigcup_{x\in E} \mathrm{cl}(x) \subset E$.
   Inversement, si $y \in E$, alors $y \in \mathrm{cl}(y)$ et donc $y \in \displaystyle\bigcup_{x\in E} \mathrm{cl}(x)$.
   Et donc par double inclusion, on a bien $E = \displaystyle\bigcup_{x\in E} \mathrm{cl}(x)$.

□

Exemple 10.40

Pour la relation de congruence modulo 2, il y a deux classes d'équivalence, qui sont $\bar{0}$, l'ensemble des entiers pairs, et $\bar{1}$, l'ensemble des entiers impairs.
Ces deux ensembles sont disjoints, non vides, et leur union est bien $\mathbf{Z}$ tout entier.

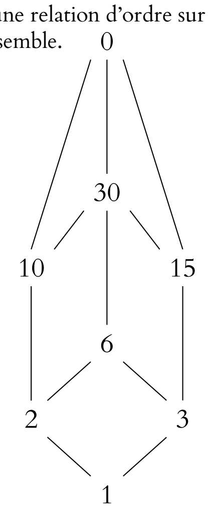
10.3.3 Relations d'ordre

Définition 10.41 – Une relation binaire $\preccurlyeq$ qui est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique est appelée **relation d'ordre**.
On dit alors que le couple[12] $(E, \preccurlyeq)$ est un **ensemble ordonné.**

[12] Formé d'un ensemble et d'une relation d'ordre sur cet ensemble.

Exemples 10.42

► Si E est un ensemble, la relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
En effet, on a toujours $A \subset A$. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
Et enfin, si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.
► Sur $\mathbf{N}$ la relation de divisibilité : $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}, b = ka$ est une relation d'ordre.
En effet, on a toujours $a = 1a$, de sorte que $a \mid a$.
Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que $a = k_1 b$ et $b = k_2 a$, donc $a = k_1 k_2 a$. Ce qui implique que $k_1 k_2 = 1$, et donc $k_1 = k_2 = 1$, donc $a = b$. Donc la relation est antisymétrique.
Enfin, si $a \mid b$ et $b \mid c$, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que $b = k_1 a$ et $c = k_2 b$, de sorte que $c = (k_1 k_2)a$, et donc $a \mid c$: la relation est transitive.
En revanche, la relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$: $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, b = ka$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique : on a $1 \mid -1$ et $-1 \mid 1$ alors que $1 \neq -1$.
► Si E est un ensemble et si $(F, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit une



Un moyen de représenter les relations de divisibilité sur quelques entiers.
Un trait indique que deux éléments sont comparables, celui du bas divisant celui du haut.

relation d'ordre (encore notée $\preccurlyeq$) sur $\mathscr{F}(E,F)$ par

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \preccurlyeq g(x).$$

Si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E, on note souvent $x \prec y$ pour signifier que $x \preccurlyeq y$ **et** $x \neq y$. Cette relation binaire est encore transitive, mais ce n'est plus une relation d'ordre, notamment du fait qu'elle n'est pas réflexive : on n'a jamais $x \prec x$.

Exemple 10.43 Ordre lexicographique

Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit une relation d'ordre sur E^2 par

$$(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \prec x_2 \textbf{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \preccurlyeq y_2 \end{cases}$$

Alors $\preceq$ est une relation d'ordre sur E^2, qu'on appelle ordre lexicographique. En effet :

- Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a toujours $(x,y) \preceq (x,y)$.
- Si $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2) \preceq (x_3,y_3)$.
  Alors soit $x_1 \prec x_2$, et puisque $x_2 \preccurlyeq x_3$, nécessairement, $x_1 \prec x_3$, de sorte que $(x_1,y_1) \preceq (x_3,y_3)$.
  Soit $x_1 = x_2$, et alors $y_1 \preccurlyeq y_2$. Mais alors deux nouveaux cas se présentent :
  — soit $x_2 \prec x_3$, et alors $x_1 \prec x_3$, de sorte que $(x_1,y_1) \preceq (x_3,y_3)$.
  — soit $x_2 = x_3$ et $y_2 \preccurlyeq y_3$, de sorte que $x_1 = x_2 = x_3$ et $y_1 \preccurlyeq y_2 \preccurlyeq y_3$, et donc $(x_1,y_1) \preceq (x_3,y_3)$.
  Dans tous les cas $\preceq$ est transitive.
- Enfin, si $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$ et $(x_2,y_2) \preceq (x_1,y_1)$, Alors, puisque $(x_1,y_1) \preceq (x_2,y_2)$, soit $x_1 \prec x_2$, soit $x_1 = x_2$ et $y_1 \preccurlyeq y_2$.
  Mais $x_1 \prec x_2$ n'est pas possible puisque $(x_2,y_2) \preceq (x_1,y_1)$.
  Donc $x_1 = x_2$. Et alors on a à la fois $y_1 \preccurlyeq y_2$ et $y_2 \preccurlyeq y_1$, donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$, $y_1 = y_2$, et donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.
  Donc $\preceq$ est antisymétrique, et donc est une relation d'ordre.

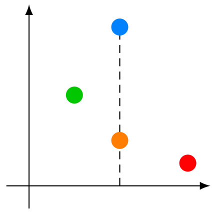


FIGURE 10.3– Pour l'ordre lexicographique sur $\mathbf{R}^2$, on a

● $\preceq$ ● $\preceq$ ● $\preceq$ ●

Notons que sur le même principe, il est possible de définir une relation d'ordre sur $\mathbf{C}$, en comparant d'abord les parties réelles, puis les parties imaginaires. Malheureusement, cette relation se comporte très mal vis-à-vis des opérations (surtout de la multiplication), et n'est d'aucun intérêt pour faire des calculs, raison pour laquelle on ne l'utilise jamais.

Remarque

Cette relation se généralise sans grande difficulté à E^n. Remarquons que c'est exactement l'ordre qu'on utilise dans un dictionnaire (d'où le nom) : on compare les premières lettres, si elles sont égales on compare les deuxièmes, etc.

Définition 10.44 – Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \to F$ est dite **croissante** (resp. **décroissante**) si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \preccurlyeq y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(y) \quad (\text{resp. } f(y) \preccurlyeq f(x)).$$

Exemples 10.45

▶ Soit E un ensemble, et soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$.

Alors on sait que pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow f(B) \subset f(A)$.
Donc f est décroissante pour la relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$.
▶ Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, et soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
Alors la relation $\preccurlyeq$ définie sur $[a,b]$ par $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall t \in [a,b], f(t) \preccurlyeq g(t)$ est une relation d'ordre sur E.
L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \end{array} \right.$ est croissante de $(E, \preccurlyeq)$ dans $\mathbf{R}$ muni de son

ordre usuel : c'est précisément ce que nous avons appelé la croissance de l'intégrale.

Attention !
La croissance de l'intégrale n'est pas une équivalence, on peut avoir

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

sans avoir $f \leqslant g$.

Définition 10.46 – Une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est dite **totale** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. On parle alors d'ensemble totalement ordonné.
On parle alors d'**ordre total.** Dans le cas contraire, on dit que $\preccurlyeq$ est un **ordre partiel**, et que $(E, \preccurlyeq)$ est partiellement ordonné.

Exemples 10.47

► La relation d'ordre lexicographique $\preceq$ sur $\mathbf{R}^2$ est un ordre total. En effet,soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbf{R}^2$.
Alors soit $x_1 < x_2$, auquel cas $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, soit $x_2 < x_1$ auquel cas $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$, soit $x_1 = x_2$.
Mais dans ce cas, on aura soit $y_1 \leqslant y_2$ et donc $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, soit $y_2 < y_1$ auquel cas $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.
► Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion est un ordre partiel dès que E possède au moins deux éléments, car si x et y sont deux éléments distincts de E, on n'a ni $\{x\} \subset \{y\}$, ni $\{y\} \subset \{x\}$.
► La relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$ est un ordre partiel car on n'a ni $2|3$, ni $3|2$.
► Même si $(F, \preccurlyeq)$ est totalement ordonné, l'ordre $\preccurlyeq$ défini précédemment sur $\mathscr{F}(E, F)$ n'est pas total dès que E contient plus de deux éléments.
Par exemple, $\mathscr{F}([0, 1], \mathbf{R})$ n'est pas totalement ordonné : deux fonctions f et g dont les graphes se croisent ne sont pas comparables, au sens où on n'a ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$.

Plus généralement
Si E est muni d'une relation d'ordre total, l'ordre lexicographique sur E^n est aussi total.

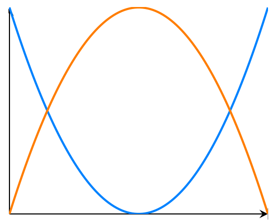


Figure 10.4– Deux fonctions non comparables de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Aucune des deux n'est toujours au-dessus de l'autre.

Définition 10.48 – Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, soit $A \subset E$ et soit $a \in A$.

1. On dit que a est **le plus grand élément de** A (ou le **maximum** de A) si $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq a$. On note alors $a = \max(A)$.
2. On dit que a est **le plus petit élément de** A (ou le **minimum** de A) si $\forall x \in A$, $a \preccurlyeq x$. On note alors $a = \min(A)$.

Remarques. ► Un plus grand élément, s'il en existe un, est nécessairement unique. En effet, supposons que a et b soient tous deux le plus grand élément de A.
Alors on a $a \preccurlyeq b$ (car b est le maximum de A) et $b \preccurlyeq a$ (car a est le maximum de A).
Par antisymétrie, cela implique que $a = b$.
► Toute partie d'un ensemble ordonné n'a pas forcément de plus grand (resp. plus petit) élément. Par exemple, pour l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$, $]0, 1[$ n'a ni plus grand ni plus petit élément, de même que $\mathbf{R}$ tout entier.
► Si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels, alors on note $\max(a_1, \dots, a_n)$ au lieu de $\max\{a_1, \dots, a_n\}$ le plus grand élément de $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Remarque
Ceci justifie bien qu'on dise **le** plus grand élément et pas **un** plus grand élément.

Exemples 10.49

► Un ordre sur E est total si et seulement si $\forall (a, b) \in E^2$, $\{a, b\}$ possède un plus grand élément.
► Un ensemble fini E, totalement ordonné, possède toujours un plus grand élément.
On peut le prouver par récurrence sur $n = \mathrm{Card}(E)$.
Pour $n = 2$, ça découle de la définition d'ordre total. Et dans le cas général, on prouve aisément que si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $\max\{\max\{a_1, \dots, a_{n-1}\}, a_n\}$ est égal à $\max E$.
► L'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(E), \subset)$ possède un plus grand élément, qui est E.
En effet, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $A \subset E$.

De même, il possède $\emptyset$ comme plus petit élément puisque pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $\emptyset \subset A$.

Définition 10.50 – Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, soit A une partie de E et soit $a \in E$. On dit que a est :

- un **majorant** de A si $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq a$
- un **minorant** de A si $\forall x \in A,\ a \preccurlyeq x$.

Si A possède (au moins) un majorant, on dit qu'elle est majorée, et si elle possède au moins un minorant, on dit qu'elle est minorée.

Remarque

À la différence d'un plus grand (resp. petit) élément, un majorant (resp. minorant) n'a pas besoin de faire partie de A.
D'ailleurs, si $a \in A$ est un majorant de A si et seulement si c'est le plus grand élément de A.

⚠ Contrairement au plus petit élément, un majorant n'est pas nécessairement unique.

Exemples 10.51

- Pour l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$, 1 est un majorant de $]0,1[$. Tout réel supérieur ou égal à 1, est également un majorant de $]0,1[$.
- Pour la relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$, tout multiple de 6 est un majorant de $\{2,3\}$.
- Un majorant de A qui appartient à A est le plus grand élément de A.

Proposition 10.52 : *Toute partie non vide de* $\mathbf{N}$ *possède un plus petit*[13] *élément.*

[13] Au sens de la relation d'ordre usuelle.

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbf{N}$ ne possédant pas de plus petit élément. Prouvons alors que $A = \emptyset$.
Pour cela, prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $n \notin A$.
Il est clair que $0 \notin A$ car ce serait nécessairement le plus petit élément de A.
Supposons donc que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $k \notin A$.
Alors on ne peut pas avoir $n+1 \in A$, car ce serait nécessairement le plus petit élément de A.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \notin A$, et donc $A = \emptyset$.
Par contraposée[14], toute partie non vide $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément. $\square$

[14] Nous venons de prouver que A ne possède pas de min $\Rightarrow A = \emptyset$.
La contraposée est donc $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ possède un minimum.

Cette propriété est assez caractéristique de $\mathbf{N}$, et n'est par exemple plus vraie pour une partie non vide de $\mathbf{Z}$.

Juste pour la culture : notons que dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé un raisonnement par récurrence, dont la validité ne sera pas prouvée, puisqu'en général on inclut le principe de récurrence dans les axiomes définissant $\mathbf{N}$.
Mais notons que la proposition précédente est en fait équivalente au principe de récurrence (et donc dans une définition axiomatique de $\mathbf{N}$, on peut remplacer le principe de récurrence par le fait que toute partie non vide de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément).
En effet, supposons la propriété précédente vraie, et soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition logique dépendant d'un entier n telle qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

- $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie.
- pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$

Notons $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0 \textbf{ et } (\textbf{non}\, \mathscr{P}(n))\}$.
Nous souhaitons donc prouver que A est vide, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $A \neq \emptyset$.
Alors A possède un plus petit élément n_1, qui est donc nécessairement supérieur ou égal à n_0, et même supérieur strict à n_0 puisque $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie par hypothèse.
La proposition $\mathscr{P}(n_1 - 1)$ ne peut alors pas être vraie, puisque $\mathscr{P}(n_1 - 1) \Rightarrow \mathscr{P}(n_1)$.
Donc $n_1 - 1 \in A$, contredisant le fait que n_1 est le plus petit élément de A.
On en déduit que $A = \emptyset$ et donc pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Rappelons que nous avons alors prouvé dans le chapitre 3 que les principes de récurrence double et récurrence forte découlent directement du principe de récurrence simple.

Proposition 10.53 : *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbf{N}$ *possède un plus grand élément.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$. Si $A = \{0\}$, il n'y a rien à dire. Supposons donc que A contient des éléments non nuls.
Soit alors $B = \{n \in \mathbf{N},\ \forall a \in A,\ a \leqslant n\}$ l'ensemble des majorants entiers de A.
Alors B est non vide par hypothèse, et donc possède un plus petit élément b. Ce minimum est alors non nul, faute de quoi on aurait : $\forall n \in A$, $n \leqslant 0$, et donc $n = 0$: A serait réduit à $\{0\}$.
Montrons alors que $b \in A$, ce qui prouvera le résultat, car alors b sera un majorant de A, dans A.
Puisque $b - 1 \notin B$, et donc $b - 1$ n'est pas un majorant de A : il existe $a \in A$ tel que $a > b - 1 \Leftrightarrow a \geqslant b$.
Mais un tel a vérifie $a \leqslant b$. Donc $a = b$, et donc $b \in A$.
Ainsi, A possède un majorant qui est dans A, c'est le plus grand élément de A. □

Corollaire 10.54 – *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbf{Z}$ *possède un plus grand élément.*

Démonstration. Soit $A \subset \mathbf{Z}$ non vide et majorée.
Alors soit $A \cap \mathbf{N} \neq \emptyset$, auquel cas elle possède un plus grand élément, qui est le plus grand élément de A.
Soit $A \cap \mathbf{N} = \emptyset$. Mais alors $-A = \{-a,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, qui contient un plus petit élément b. Alors $-b$ est le plus grand élément de A. □

Détails
Un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif.

Sur le même principe, on prouve qu'une partie non vide et minorée de $\mathbf{Z}$ a toujours un plus petit élément.

10.4 Introduction à la notion de cardinal

Cette partie n'est pas essentielle pour l'instant, même si elle sera plus tard à la base de tout notre chapitre de dénombrement.
Si nous choisissons de l'aborder dès maintenant, c'est essentiellement pour illustrer la notion de bijection : deux ensembles sont en bijection si et seulement à chaque élément de l'un correspond un unique élément de l'autre.

10.4.1 Ensembles finis

Définition 10.55 – Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$.
Si un tel n n'existe pas, on dit que E est **infini**.

L'intuition derrière cette définition est qu'un ensemble fini est un ensemble dont on peut «compter» les éléments.
C'est exactement ce que fait une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E : elle établit une correspondance entre les nombres de 1 à n et les éléments de E, telle qu'à chaque nombre correspond un unique élément de E et vice-versa.
Notons qu'il existe une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ si et seulement si[15] il existe une bijection $\psi : E \to [\![1, n]\!]$.
On dira souvent que E et $[\![1, n]\!]$ «sont en bijection» pour désigner n'importe laquelle de ces deux assertions.

[15] Penser à la bijection réciproque.

Exemple 10.56

L'ensemble des élèves de MP2I est fini : on peut les numéroter à l'aide des éléments de $[\![1, 48]\!]$.
Et il y a plein de manières de le faire : je peux prendre l'ordre alphabétique, votre classement au dernier DS, etc.

S'il existe une bijection $[\![1,n]\!] \to E$, alors n doit moralement être égal au nombre d'éléments de E, et donc doit être unique. Le lemme suivant a pour but de prouver cette unicité.

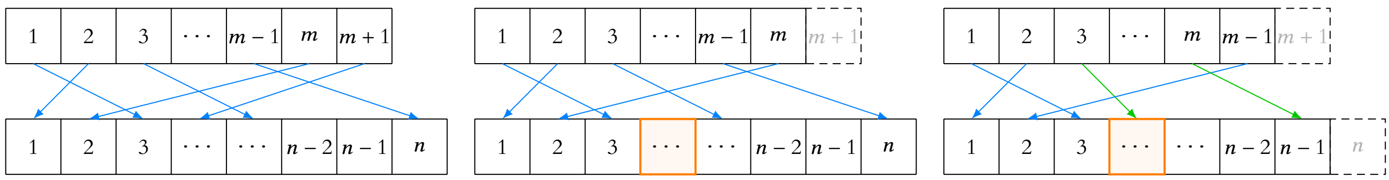
Lemme 10.57. Soient $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Alors il existe une injection $[\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ si et seulement si $m \leqslant n$.

Démonstration. Si $m \leqslant n$, il est clair que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & k \end{array} \right.$ est une injection.
Pour la réciproque, raisonnons par récurrence sur m, en prouvant la propriété $\mathscr{P}(m)$: «s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, alors $m \leqslant n$.»
Pour $m = 1$, la proposition est évidemment vraie, puisqu'un élément $n \in \mathbf{N}^*$ est supérieur ou égal à 1.
Supposons donc $\mathscr{P}(m)$ vraie, et supposons qu'il existe une injection f de $[\![1,m+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
Notons qu'on ne peut avoir $n = 1$, car alors on aurait $f(1) = f(2) = 1$, contredisant l'injectivité de f.
Alors, pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $f(k) \neq f(m+1)$.

Soit alors $g : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,m]\!] & \longrightarrow & [\![1,n-1]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} f(k) & \text{si } f(k) < f(m+1) \\ f(k)-1 & \text{si } f(k) > f(m+1) \end{cases} \end{array} \right.$

Alors g est injective. En voici la preuve en image :

Un dessin ?
Je vois venir la question : «quand est-ce qu'un dessin est une preuve ?». La réponse est simple : quand c'est moi qui le fais !



Au départ f est une injection, donc deux éléments distincts pointent sur deux cases distinctes.

On «libère» la case $f(m+1)$ vers laquelle plus rien ne pointe.

Toutes les flèches qui arrivaient à droite de la case libérée sont décalées d'un rang vers la gauche. Il n'y a donc toujours pas deux flèches qui pointent vers la même case : g est une injection.

Notez bien que si jamais $f(m+1) = n$, alors g n'est rien d'autre que la restriction de f à $[\![1,m]\!]$: $\forall k \in [\![1,m-1]\!]$, $g(k) = f(k)$ (autrement dit, on n'a rien décalé, on a juste supprimé la dernière flèche).

Comme je sens qu'un dessin vous convainc moyennement, écrivons les détails.
Soient donc $k,\ell \in [\![1,m]\!]$ tels que $g(k) = g(\ell)$ Distinguons trois cas :

- si $f(k) < f(m+1)$ et $f(\ell) < f(m+1)$, alors $g(k) = f(k)$ et $g(\ell) = f(\ell)$.
  On a donc $f(k) = f(\ell)$, et par injectivité de f, alors $k = \ell$.
- Si $f(k) < f(m+1)$ et $f(\ell) > f(m+1)$, alors $g(k) = f(k) < f(m+1)$ et $g(k) = f(k) - 1 > f(m+1) - 1 \geqslant f(m+1)$.
  Comme nous avons supposé $g(k) = g(\ell)$, ce cas est impossible.
  De la même manière, on ne peut avoir $f(\ell) < f(m+1)$ et $f(k) > f(m+1)$.
- Si $f(k)$ et $f(\ell)$ sont tous les deux supérieurs[16] à $f(m+1)$, alors $g(k) = f(k) - 1$ et $g(\ell) = f(\ell) - 1$.
  Ces deux quantités étant égales par hypothèse, $f(k) = f(\ell)$ et donc par injectivité de f, nécessairement $\ell = k$.

[16] Strictement puisqu'ils ne peuvent être égaux à $f(m+1)$.

Conclusion : dans tous les cas, $g(k) = g(\ell)$ implique $k = \ell$, g est injective.
Au final, nous avons donc prouvé qu'il existe une injection de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n-1]\!]$.
Donc par hypothèse de récurrence, $m \leqslant n-1$ et donc $m+1 \leqslant n$. Ainsi, $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence $\mathscr{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbf{N}^*$. □

Heureux ?
Vous êtes vraiment plus convaincus par cette preuve que par le dessin ? Pas moi !

Proposition 10.58 : *Soient $(m,n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Alors il existe une bijection de $[\![1,m]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ si et seulement si $m = n$.*

Démonstration. Si $m = n$, il est évident que $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$ convient.
Inversement, si $f : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ est bijective, alors f est injective, donc $m \leqslant n$.
Mais $f^{-1} : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ est injective également, et donc $n \leqslant m$. □

Corollaire 10.59 – *Si E est un ensemble fini non vide, il existe un unique $n \in \mathbf{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$.*
Cet entier n est appelé le cardinal de E, et on le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$.
Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est nul.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux entiers non nuls m et n et deux bijections $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ et $\psi : [\![1,m]\!] \to E$.
Alors $\psi^{-1} \circ \varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ est une bijection, et donc $m = n$. □

⚠ Si n est unique, la bijection n'est l'est pas[17].
Si $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ et $\psi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ sont deux bijections, alors $\varphi \circ \psi$ est une bijection[18] de $[\![1,n]\!]$ sur E.
Composer par une telle bijection revient à changer le «numéro» qu'on attribue à chaque élément de E.

[17] Sauf si $n = 1$.

[18] Par exemple $k \mapsto n+1-k$.

Proposition 10.60 : *Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ avec $a < b$. Alors $[\![a,b]\!]$ est de cardinal $b-a+1$.*

Démonstration. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [\![1, b-a+1]\!] & \longrightarrow & [\![a,b]\!] \\ k & \longmapsto & k+a-1 \end{array} \right.$.
Alors φ est injective car strictement croissante et surjective car si $\ell \in [\![a,b]\!]$, alors

$$\ell = \underbrace{\ell - a + 1}_{\in [\![1, b-a+1]\!]} + a - 1 = \varphi(\ell - a + 1).$$

Donc φ est bijective. □

Nous nous contentons pour l'instant de cette définition du cardinal, et continuons à nous en tenir à l'intuition pour la plupart des propriétés usuelles du cardinal (par exemple, une partie A d'un ensemble fini E est elle-même finie, avec $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$), mais nous reviendrons sur cette notion plus tard dans l'année.

10.4.2 Équipotence (Hors programme)

Définition 10.61 – Deux ensembles E et F sont dits **équipotents**[19] s'il existe une bijection $E \to F$.

[19] Le terme est un peu tombé en désuétude, on dire plutôt que E et F sont en bijection.

L'idée est que deux ensembles qui sont en bijection sont sensiblement de la même taille, puisqu'à tout élément de l'un correspond un unique élément de l'autre.

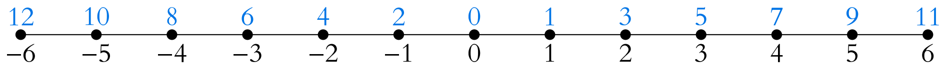
Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les ensembles ne se résument pas aux ensembles finis vs. les ensembles infinis : deux ensembles infinis ne sont pas forcément équipotents.

Exemples 10.62

- $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$ sont équipotents[20].
  En effet, l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ est une bijection.
- $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont équipotents. En effet, $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $\quad n \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.
  est une bijection.

[20] Et donc ont «autant d'éléments». Même si ceci est un peu dérangeant, puisque $\mathbf{N}^*$ a «un élément de moins» que $\mathbf{N}$.

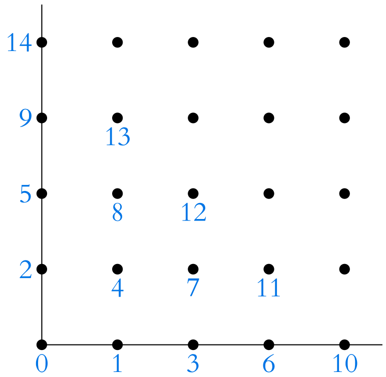
Intuition
Un ensemble est en bijection avec $\mathbf{N}$ si on peut «numéroter» ses éléments à l'aide des entiers naturels.
C'est le cas de $\mathbf{Z}$ comme le montre la figure ci-contre.



► Plus surprenant, $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{N}$ sont équipotents. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{N}\times\mathbf{N} &\to \mathbf{N} \\ (p,q) &\mapsto \frac{(p+q+1)(p+q)}{2}+p \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (difficile), donc $\varphi^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ est une



bijection.

► On peut en revanche prouver que $\mathbf{R}$ n'est pas équipotent à $\mathbf{N}$.

Il est assez facile de prouver que :

1. tout ensemble est équipotent à lui-même;
2. si E est équipotent à F, alors F est équipotent à E;
3. si E est équipotent à F et si F est équipotent à G, alors E est équipotent à G.

Nous sommes donc tentés de dire que l'équipotence est une relation d'équivalence. Mais sur quel ensemble ? Sur l'ensemble de tous les ensembles ? Le problème est qu'un tel ensemble n'existe pas.
En effet, supposons que l'ensemble X de tous les ensembles soit un ensemble.
Soit alors $A = \{E \in X \mid E \notin E\}$, qui est donc bien un ensemble[21], et donc un élément de X.
On a alors deux cas de figure possibles :

- soit $A \in A$, auquel cas, par définition de A, on a $A \notin A$, ce qui est absurde.
- soit $A \notin A$, auquel cas $A \in A$, ce qui est également absurde.

Donc il ne peut pas exister d'ensemble de tous les ensembles (c'est le *paradoxe de Russel*).

[21] Car partie de X.

Bref, l'équipotence a toutes les propriétés d'une relation d'équivalence, mais on n'a pas le droit de dire que c'en est une.
Notons que la classe d'équivalence d'un ensemble E, si elle existait, ne serait rien d'autre que l'ensemble des ensembles équipotents à E. Autrement dit, de même «taille» que E.
Pour E fini, la classe de E contiendrait tous les ensembles de même cardinal que E.
La classe de $\mathbf{N}$ contiendrait $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, mais pas $\mathbf{R}$.
La classe de $\mathbf{R}$ contiendrait $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}^2$.
Une notion plus rigoureusement définie, mais qu'il faut interpréter comme ces classes d'équivalence est la notion de cardinal[22].
L'énoncé suivant permet de prouver l'existence d'une infinité de cardinaux infinis.

[22] Mais il faut un cours avancé de théorie des ensembles pour bien l'appréhender, ce qui dépasse largement le programme de prépa.

Proposition 10.63 (Théorème de Cantor) : *Quel que soit l'ensemble E, il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un ensemble E et une surjection $f : E \to \mathscr{P}(E)$.
Soit alors $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$.
Alors A ne peut pas posséder d'antécédent par f. En effet, s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$, alors :

- soit $x \in A$, et donc $x \in f(x)$, donc $x \notin A$: absurde.
- soit $x \notin A$, et donc $x \notin f(x)$, donc $x \in A$: absurde.

$\square$

Corollaire 10.64 – *Pour tout ensemble E, E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents.*

Démonstration. Puisqu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$, il n'existe pas non plus de bijection. $\square$

Ceci permet donc de construire des ensembles de plus en plus «grands» : $\mathbf{N}$, $\mathscr{P}(\mathbf{N})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbf{N}))$, etc, chacun étant «strictement plus grand[23]» que le précédent.

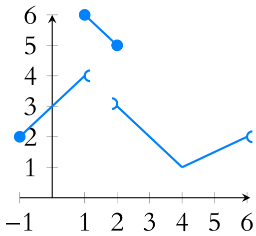
[23] Gardons à l'esprit que nous parlons d'ensembles infinis.

EXERCICES DU CHAPITRE 10

▶ Généralités sur les applications

EXERCICE 10.1 **Lecture graphique** F

Soit f la fonction définie sur $[-1, 6[$ dont le graphe est ci-contre.
Déterminer



1) $f([-1, 6[)$
2) $f([1, 2[)$
3) $f^{-1}([0, 6])$
4) $f^{-1}([-2, 6[)$
5) $f^{-1}([4, 5])$
6) $f^{-1}(]2, 3])$

EXERCICE 10.2 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^2 + z + 1 \end{array} \right.$. PD

1) Déterminer $f(\mathbf{C})$, $f(\mathbf{C}^*)$ et $f(\mathbf{R})$.
2) Déterminer $f^{-1}(\mathbf{C})$, $f^{-1}(\mathbf{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbf{R})$.

EXERCICE 10.3 Soit E un ensemble. Pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on pose $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. PD

1) Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
2) Montrer que pour $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a : $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ et $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

EXERCICE 10.4 Soit $f : E \to F$. Prouver que : AD

1) Pour tout $A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ et pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2) Pour tout $A, A' \in \mathscr{P}(E)$, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ et $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
3) Pour tout $B, B' \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

▶ Injections, surjections, bijections

EXERCICE 10.5 Soit $f : E \to F$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes : F

1. «f n'est pas injective»
2. «f n'est pas surjective»
3. «tout élément de F admet au moins deux antécédents par f»

EXERCICE 10.6 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? F

1) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$
2) $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x - y, y) \end{array} \right.$
3) $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, y - x) \end{array} \right.$
4) $i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + z, y, -x - 4y + z) \end{array} \right.$

EXERCICE 10.7 Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| \neq 1$. Montrer que $f_a : z \mapsto \dfrac{z + a}{\bar{a}z + 1}$ réalise une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$, et déterminer sa bijection réciproque. PD

EXERCICE 10.8 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$. f est-elle injective ? Surjective ? Mêmes questions en changeant espace de départ et d'arrivée en $\mathbf{C}^2$. PD

EXERCICE 10.9 Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n + 1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ PD

1) Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. Que vaut $f \circ g$?
2) Les applications f et g sont-elle bijectives ?

EXERCICE 10.10 Soit E un ensemble non vide, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$. AD

On note $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array} \right.$.

1) Déterminer $\operatorname{Im}\psi$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit surjective.
2) Soit $B \in \operatorname{Im}\psi$. Déterminer $\psi^{-1}(\{B\})$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit injective.

Exercice 10.11 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$. PD

Exercice 10.12 Soit E un ensemble, et soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. AD
Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 10.13 **Vrai ou faux** AD
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1) Si f est surjective, f réalise une bijection de E sur F.
2) f réalise une bijection de E sur $f(E)$
3) Si f est injective, alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
4) Si f est injective et g surjective, alors $g \circ f$ est bijective.
5) Si $(g \circ f)^3$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.
6) $g \circ f$ est injective si et seulement si f et g sont injectives.
7) Si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.
8) $f(A) = B \Leftrightarrow f^{-1}(B) = A$.
9) Si f est injective, alors $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
10) $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Exercice 10.14 Soient E, F, G trois ensembles non vides et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. AD
1) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 10.15 Déterminer toutes les injections $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$. AD

Exercice 10.16 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$. D

Exercice 10.17 Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E. D
On considère l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}\right.$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (respectivement surjective, resp. bijective).

Exercice 10.18 **(Oral Polytechnique 2017)** TD
Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$.

► Relations binaires

Exercice 10.19 Sur $\mathbf{Z}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall (a,b) \in \mathbf{Z}^2$, $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$. PD
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbf{Z}$.

Exercice 10.20 On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbf{N}$ en posant $p \preccurlyeq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}, q = p^n$. PD
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 10.21 Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il existe sur E une relation $\mathcal{R}$ qui soit à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$? PD
Si on suppose de plus que la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale, que dire de E ?

Exercice 10.22 Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{C}$ par $z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. F
Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 10.23 AD
1) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer le cardinal des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.

Exercice 10.24 Soit E un ensemble, et soit $A \in \mathcal{P}(E)$. PD
On définit alors une relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.
1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2) Prouver que l'application ψ qui à un élément X de $\mathcal{P}(A)$ associe sa classe d'équivalence pour $\sim$ est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.25 Soit E un ensemble non vide, et soit $F = \mathbf{R}^E$. PD
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur F de la manière suivante : pour $(f,g) \in F^2$, $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \leqslant g(x)$.
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur F. À quelle condition est-ce un ordre total ?

Exercice 10.26 Sur $E = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}$, on définit une relation $\preccurlyeq$ par : PD

$$\forall (z,z') \in E^2,\ z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow (|z| < |z'|) \textbf{ ou } (|z| = |z'| \textbf{ et } \operatorname{Re}(z) \leqslant \operatorname{Re}(z')).$$

Montrer que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 10.27 Soit E un ensemble non vide et soit $A \subset \mathscr{P}(E)$ une partition de E. D
Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que A soit l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.28 Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. Montrer que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion. AD

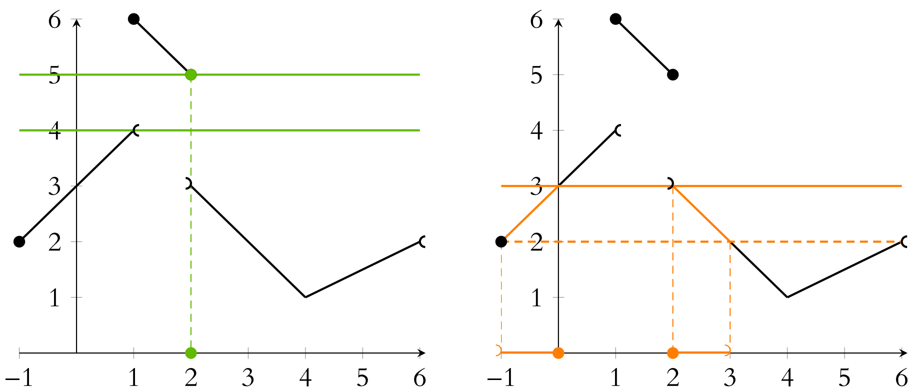
Exercice 10.29 Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini. D

Exercice 10.30 Soit $E = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la relation $\sim$ définie sur E par $f \sim g$ si et seulement si il existe un intervalle ouvert I contenant α tel que $f_{|I} = g_{|I}$ est une relation d'équivalence sur E. D

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 10

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.1

1. Notons que $f([-1,6[)$ est l'image de tout l'ensemble de départ, c'est ce que nous avons appelé $\mathrm{Im}(f)$.
Il s'agit donc de l'ensemble des valeurs prises par la fonction, c'est $[1,4[\cup[5,6]$.
2. Il s'agit cette fois de trouver l'ensemble des valeurs atteintes par f sur $[1,2[$, c'est $]5,6]$.
3. Il s'agit de trouver tous les antécédents par f des réels de $[0,6]$, c'est $f^{-1}([0,6]) = [-1,6[$.
4. Puisque f ne prend pas de valeurs entre -2 et 1, on a $f^{-1}([0,6[) = [-1,6[\setminus\{1\}$.
5. Remarquons qu'il s'agit de trouver les x tels que $f(x) \in [4,5]$, c'est-à-dire de résoudre $4 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
Graphiquement, il faut donc trouver tous les $x \in [-1,6[$ dont l'image «tombe» entre les droites d'équations $y = 4$ et $y = 5$.
Ce n'est le cas que pour $x = 2$, et donc $f^{-1}([4,5]) = \{2\}$.
6. Sur le même principe, en cherchant les nombres x d'image entre 2 et 3, on trouve $f^{-1}(]2,3]) =]-1,0] \cup [2,3[$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 10.2

1. Rappelons que $f(\mathbf{C}) = \mathrm{Im}\, f$ est l'ensemble des complexes[1] qui possèdent au moins un antécédent par f.
Mais pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, l'équation $f(z) = \alpha$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, est une équation polynomiale de degré 2, qui possède donc au moins une solution. Et donc α possède au moins un antécédent par f, et donc est dans $f(\mathbf{C})$.
Ainsi, $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

   $f(\mathbf{C}^*)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}$ qui possèdent au moins un antécédent **non nul** par f.
Puisque $\mathrm{Im}\, f = \mathbf{C}$ et que $f(0) = 1$, le seul complexe susceptible de ne pas avoir d'antécédent non nul est 1.
Or les antécédents de 1 par f sont 0 et -1. Puisque $-1 \in \mathbf{C}^*$, $1 = f(-1) \in f(\mathbf{C}^*)$, et donc $f(\mathbf{C}^*) = \mathbf{C}$.

   Enfin, $f(\mathbf{R})$ est l'ensemble des complexes qui ont au moins un antécédent réel par f.

   Notons que si $z \in \mathbf{R}$, alors $f(z) \in \mathbf{R}$, si bien que $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.
Et pour $\alpha \in \mathbf{R}$, l'équation $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x^2 + x + (1-\alpha) = 0$ possède au moins une solution $x \in \mathbf{R}$ si et seulement si son discriminant est positif ou nul, soit si et seulement si $1 - 4(1-\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}$.
Et donc $f(\mathbf{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.
2. On a $f^{-1}(\mathbf{C}) = \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$.

[1] Ici l'espace d'arrivée de f.

Autrement dit
f est surjective.

Autrement dit
La restriction de f à $\mathbf{C}^*$ est encore surjective.

Plus généralement
Pour $f : E \to F$, on a toujours $f^{-1}(F) = E$.

Les seuls complexes dont l'image est nulle sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $\bar{j}$.
Et donc $f^{-1}(\mathbf{C}^*) = \mathbf{C} \setminus \{j, \bar{j}\}$.

On a $f^{-1}(\mathbf{R}) = \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) \in \mathbf{R}\}$.
Soit alors $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique (avec $a, b \in \mathbf{R}$).
Alors $f(z) \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z^2 + z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^2 + z) = 0$.
Mais $\mathrm{Im}(z^2 + z) = \mathrm{Im}(z^2) + \mathrm{Im}(z) = 2ab + b$.
Et donc $z \in f^{-1}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow 2ab + b = 0 \Leftrightarrow b(2a + 1) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ **ou** $a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}$.
Donc $f^{-1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.3

1. 1ère **méthode** : pour montrer que deux applications sont égales, il faut montrer qu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, et qu'elles coïncident en tout point de leur ensemble de départ.
Ici, les ensembles de départ et d'arrivée sur E et $\{0, 1\}$.
Soit donc $x \in E$.
   - ►Si $x \in A \cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$, et puisque $x \in A$ et $x \in B$, $\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x) = 0$.
   Donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = (\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2$.
   - ►Si $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A\Delta B$, et donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$. Mais $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$, donc $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = 1^2 = 1$.
   - ►Si $x \in B \setminus A$. Alors de même $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 1$ et $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = (-1)^2 = 1$.
   - ►Enfin, si $x \notin A \cup B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = 0$ et $(\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2 = 0^2 = 0$.

   Donc dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = (\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x))^2$, donc $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

   2ème **méthode** : il est également possible de se débrouiller avec les propriétés des indicatrices déjà vues en cours.
On a $A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$. Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta B} &= \mathbb{1}_{A\cup B}\mathbb{1}_{\overline{A\cap B}} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) \\ &= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B^2 + \mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2 \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.\end{aligned}$$

   Astuce
   Une indicatrice est toujours égale à son propre carré car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$.

2. Puisque nous disposons d'une bijection entre les parties de E et leurs fonctions indicatrices, pour prouver que deux parties de E sont égales, il s'agit de prouver qu'elles ont les mêmes fonctions indicatrices.
On a donc

$$\mathbb{1}_{\overline{A}\Delta\overline{B}} = (\mathbb{1}_{\overline{A}} - \mathbb{1}_{\overline{B}})^2 = (1 - \mathbb{1}_A - (1 - \mathbb{1}_B))^2 = (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A)^2 = \mathbb{1}_{A\Delta B}.$$

   Et donc $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.

   De même

$$\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = (\mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap B})^2 = (\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2. = \mathbb{1}_A^2(\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2 = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}.$$

   Pour le second point[2], il suffit de développer les indicatrices des deux membres :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{B\Delta C})^2 = \left(\mathbb{1}_A - (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C)^2\right)^2 = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C + 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2 \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

   On obtient la même chose en développant $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$.
Et puisque deux parties de E qui ont la même fonction indicatrice sont égales, on en déduit l'égalité voulue.

[2] Que l'on appelle l'associativité de la différence symétrique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.4

1. Soit A une partie de E, et soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$.
Mais c'est exactement la définition de $x \in f^{-1}(f(A))$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ et on a donc bien l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$
Alors, par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.
Mais puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a donc $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$.
Ainsi, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Remarque *: il est facile de se convaincre que ces inclusions ne sont pas toujours des égalités.*

Méthode
Une bonne habitude, sans que ce soit une obligation est de noter x les éléments de l'espace de départ et y ceux de l'espace d'arrivée. En effet, nous sommes bien plus habitués à $y = f(x)$ qu'à $x = f(y)$.

2. Soient A, A' deux parties de E.
Le plus simple est de travailler directement avec des équivalences : soit $y \in F$. Alors

$$y \in f(A \cup A') \Leftrightarrow \exists x \in A \cup A', y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x) \textbf{ ou } \exists x \in A', y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A) \textbf{ ou } y \in f(A') \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A').$$

Et donc $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
Soit $y \in f(A \cap A')$. Alors il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
Et en particulier, $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même, $x \in A'$ donc $y = f(x) \in f(A')$.
Ainsi, $y \in f(A) \cap f(A')$, donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Remarque
Là encore, l'inclusion n'est pas nécessairement une égalité.

3. Soient B et B' deux parties de F.
Raisonnons directement par équivalence plutôt que par double inclusion : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \textbf{ ou } f(x) \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \textbf{ ou } fx \in f^{-1}(B') \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On a donc directement l'égalité $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
Et de même, en remplaçant les unions par des intersections[3], on prouve que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

[3] Et donc les **ou** par des **et**.

Solution de l'exercice 10.5

1. Rappelons que f est injective si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La négation de cette proposition est donc

$$\exists (x, y) \in E^2,\ x \neq y \textbf{ et } f(x) = f(y).$$

2. La proposition f est surjective s'écrit

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Sa négation est donc

$$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) \neq y.$$

Ce qui signifie encore qu'il existe un élément de F qui n'admet pas d'antécédent par f.

3. $\forall z \in F,\ \exists (x, y) \in E^2, (x \neq y) \textbf{ et } f(x) = f(y) = z.$

Solution de l'exercice 10.6

1. $f(0, 0) = 0 = f(1, -1)$, donc f n'est pas injective.
En revanche, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x, 0) = x$, donc x possède au moins un antécédent par f : f est surjective.
Étant injective et surjective, elle est bijective.
2. Soient (x, y) et (x', y') deux couples de réels tels que $f(x, y) = f(x', y')$. Alors $(x, x - y, y) = (x', x' - y', y')$ et donc en particulier, $x = x'$ et $y = y'$. Donc $(x, y) = (x', y')$: f est injective.
Montrons qu'elle n'est pas surjective, et que $(0, 1, 0)$ ne peut admettre d'antécédent.
Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, -1, 0)$. Alors $(x, x - y, y) = (0, 1, 0)$, de sorte que $x = y = 0$ et $x - y = 1$, ce qui est impossible.
Nous avons donc exhibé un élément de $\mathbf{R}^3$ qui n'admet pas d'antécédent par f : elle n'est pas surjective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.7

Commençons par remarquer qu'il n'est pas forcément évident sur la définition qu'il s'agisse là d'une application qui, sur $\mathbf{U}$, prend ses valeurs dans $\mathbf{U}$. Pour le vérifier, considérons $z \in \mathbf{U}$, et prouvons que $f_a(z) \in \mathbf{U}$.
On a alors

$$|f_a(z)| = f_a(z)\overline{f_a(z)} = \frac{(z+a)(\overline{z}+\overline{a})}{(\overline{a}z+1)(a\overline{z}+A)} = \frac{|z|^2+a\overline{z}+z\overline{a}+|a|^2}{|az|^2+a\overline{z}+\overline{a}z+1} = \frac{1+a\overline{z}+z\overline{a}+|a|^2}{|a|^2+a\overline{z}+\overline{a}z+1} = 1.$$

Donc f_a est bien à valeurs dans $\mathbf{U}$.
Soit à présent $y \in \mathbf{U}$, et cherchons à résoudre l'équation $y = \dfrac{a+z}{\overline{a}z+1}$.
Après calculs[4], on obtient $z = \dfrac{y-a}{1-\overline{a}y}$.
Donc la bijection réciproque de f_a est f_{-a}.

Domaine de déf.
Notons que si l'on demande à ce que $|a| \neq 1$, c'est seulement pour s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble de définition.

[4] Rien de bien méchant, multipliez tout par le dénominateur, puis isolez z en fonction de y.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.8

Quel que soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a $f(x,y) = f(y,x)$, donc clairement, f n'est pas injective, par exemple car $f(1,0) = f(0,1)$.

Soit $(s,p) \in \mathbf{R}^2$. Un couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $f(x,y) = (s,p)$ si et seulement si $\begin{cases} x+y=z \\ xy=p \end{cases}$
Mais nous savons qu'un couple (x,y) est solution d'un tel système si et seulement si $\{x,y\}$ est l'ensemble des solutions de $X^2 - sX + p = 0$.
Or, si $s^2 - 4p < 0$, cette équation n'admet pas de solution réelle.
Donc par exemple $(0,1)$ ne possède pas d'antécédent par f, qui n'est donc pas surjective.

En revanche, si on remplace $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{C}^2$, puisque toute équation polynomiale de degré 2 possède au moins une solution, tout couple $(s,p) \in \mathbf{C}^2$ possède au moins un antécédent par f, et donc f est surjective.
En revanche, elle n'est toujours pas injective, pour les mêmes raisons que dans le cas réel.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.9

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $f(n) = n+1 \neq 0$ et donc $g(f(n)) = (n+1)-1 = n$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$.

   De même, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $g(n) = n-1$ et donc $f(g(n)) = n$.
   En revanche, pour $n = 0$, on a $g(n) = 0$ et donc $f(g(n)) = 1$.
   Ainsi, $(f \circ g) : n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.
2. L'application f n'est pas bijective, car son image est $\mathbf{N}^*$ et non $\mathbf{N}$, elle n'est donc pas surjective (bien qu'elle soit injective).
L'application g n'est quant à elle pas injective car $g(1) = g(0) = 0$. En revanche, elle est surjective.

Remarque
Cet exemple montre bien que pour que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ soient bijections réciproques l'une de l'autre, on ne peut pas se contenter de prouver que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, il faut bien avoir également $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.10

1. Rappelons que $\operatorname{Im}\psi = \{\psi(X), X \in \mathscr{P}(E)\}$.
Il est clair que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $\psi(X) = X \cap A \subset A$, donc déjà $\operatorname{Im}\psi \subset \mathscr{P}(A)$.

   Inversement, si Y est une partie de A, alors $Y = Y \cap A = \psi(Y) \in \operatorname{Im}\psi$.
   Et donc $\mathscr{P}(A) \subset \operatorname{Im}\psi$, si bien que par double inclusion, $\mathscr{P}(A) = \operatorname{Im}\psi$.
2. Soit donc $B \in \mathscr{P}(A)$.
Alors $\psi^{-1}(\{B\}) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid \psi(X) \in \{B\}\} = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \cap X = B\}$.

   Prouvons alors que cet ensemble est égal à $\left\{B \cup Y,\ Y \in \mathscr{P}(\overline{A})\right\}$.
   Si $X \cap A = B$, posons $Y = X \setminus A = X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.
   On a alors
   $$X = X \cap (A \cup \overline{A}) = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = B \cup Y.$$
   Inversement, si $X = B \cup Y$, pour $Y \in \mathscr{P}(\overline{A})$, alors
   $$X \cap A = (B \cap A) \cup (Y \cap A) = B \cup \emptyset = B.$$

Remarque
Il n'existe pas de méthode générale pour déterminer l'image d'une application, donc ce type de question est potentiellement difficile, et il faudra un peu d'intuition, et probablement de tatônnements.

Méthode
Tout élément qui s'écrit sous la forme $\psi(\clubsuit)$, où $\clubsuit$ est n'importe quel élément de l'espace de départ de ψ est dans l'image de ψ. C'est même la définition de l'image !

Ainsi, nous avons entièrement décrit $\psi^{-1}(\{B\})$, qui est l'ensemble des antécédents de B par ψ.
Par définition, ψ est alors injective si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{P}(A)$, $\psi^{-1}(\{B\})$ est de cardinal au plus 1.
C'est le cas si et seulement si $\mathscr{P}(\overline{A})$ contient au plus un élément, donc si et seulement si $\overline{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = E$.

Commentaire : plus simplement : si $A = E$, alors $\psi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ est injective.
Et si $A \neq E$, alors $\emptyset$ et $\overline{A} \neq \emptyset$ ont même image $(\emptyset)$ par ψ, donc ψ n'est pas injective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.11

► $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f injective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Alors pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, si bien que $x \in f^{-1}(f(A))$.
Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Inversement, soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A) = \{f(y), y \in A\}$, si bien qu'il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$.
Mais f étant injective, $x = y \in A$, et donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Donc par double inclusion, $A = f^{-1}(f(A))$.

Remarque
L'injectivité ne nous a pas été utile pour cette inclusion.

► $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
Soient alors $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$, et donc $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
Mais $f(\{x\}) = \{f(y), y \in \{x\}\} = \{f(x)\}$.
Et donc $f(y) = f(x) \in f(\{x\})$, si bien que $y \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Donc nécessairement, $y = x$.
Ceci prouve donc que f est injective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.12

Raisonnons par double implication.
► Supposons que f soit injective.
Alors pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(f(f(x)))$ et donc $x = (f \circ f)(x)$.
Autrement dit, $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Et donc f est bijective, et $f^{-1} = f$: f est une involution.
Et en particulier, f est surjective.

► Inversement, supposons f surjective.
Soit alors $y \in E$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et alors $(f \circ f)(y) = (f \circ f \circ f)(x) = f(x) = y$.
Donc $f \circ f = \mathrm{id}_E$, si bien que $f \circ f$ est injective, et donc f est injective.

⚠ Attention !
Sans la surjectivité de f, on peut juste affirmer que pour tout $y \in \operatorname{Im} f$,
$$(f \circ f)(y) = y$$
mais cela ne suffit pas à prouver que $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Et donc au final f est injective si et seulement si elle est surjective[5].

[5] Et donc si et seulement si elle est bijective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.13

1. **Faux.** Une application surjective n'est pas nécessairement injective.
Par exemple $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est surjective mais non bijective.
2. **Faux.** Dès que f n'est pas injective (et nous venons de voir un exemple de telle fonction), elle ne peut être bijective, même si on restreint l'ensemble d'arrivée.

   Notons qu'il faut bien comprendre que lorsqu'on dit que f réalise une bijection de E sur $f(E)$, cela signifie en fait que $f^{|f(E)}$ réalise est bijective. Soit encore que tout élément de $f(E)$ possède un unique antécédent par f.
   Par définition, tout élément de $f(E)$ possède un antécédent par f, en revanche l'unicité n'est pas assurée si f n'est pas injective, puisque cela signifie précisément qu'il existe deux élément de même image (donc un élément de $f(E)$ possédant deux antécédents).
3. **Vrai.** Par définition de l'image, tout élément de $f(E)$ possède au moins un antécédent par f. Si de plus on suppose f injective, alors un tel antécédent est unique, et donc f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
4. **Faux** Prenons pour f la fonction Arctan : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et pour g l'identité de $\mathbf{R}$. Alors f est injective (car strictement croissante), g est surjective (car bijective), mais $g \circ f = \operatorname{Arctan}$ n'est pas bijective.

5. **Vrai.** On a $(g \circ f)^3 = g \circ (f \circ g \circ f \circ g \circ f)$ qui est surjective (car bijective), et donc g est surjective.
De même, $(g \circ f)^3 = (g \circ f \circ g \circ f \circ g) \circ f$ est injective (car bijective), donc f es injective.
6. **Faux.** Nous savons que si f et g sont injectives, alors leur composée l'est. En revanche, la réciproque est fausse.
Par exemple on peut prendre $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $f = \text{Arctan}$ et $g = \tan$.
Alors $g \circ f = \text{id}_\mathbf{R}$ est évidemment injective, pourtant g ne l'est pas, puisqu'elle est périodique.
Plus simplement, on peut considérer $E = \{1\}$, $F = \{2, 3\}$, f l'application qui à 1 associe 2 et g la fonction constante[6] égale à 1 sur F.
Alors $g \circ f = \text{id}$, mais g n'est pas injective.
7. **Vrai.** Nous venons de voir qu'une inclusion est déjà vraie, prouvons l'inclusion réciproque.
Soit $y \in B$. Alors, par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et donc, par définition, un tel x est dans $f^{-1}(B)$.
On a alors $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Et donc $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
8. **Faux.** Si f désigne la fonction carré. Alors $f(\{2\}) = \{4\}$, mais $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.
9. **Vrai.** Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$.
Alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
Supposons par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Mais par injectivité de f, $x = x'$, ce qui est impossible puisque $x \in \overline{A}$ et $x' \in A$.
Donc $y \notin f(A) \Leftrightarrow y \in \overline{f(A)}$.
10. **Vrai.** On a
$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

[6] En fait, l'unique application de F dans E.

Remarque
En revanche, si f n'est pas surjective, cette proposition est fausse dès que B contient un élément qui n'est pas dans l'image de f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.14

Pour les deux questions, nous donnons deux solutions : l'une n'utilisant que les définitions du cours, l'autre utilisant des propriétés sur l'injectivité/la surjectivité d'une composée.

1. Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.
Première méthode : soit $y \in F$. Alors par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$.
Mais par injectivité de g, puisque $g(f(x)) = g(y)$, alors $y = f(x)$.
Donc y possède un antécédent par f, et donc f est surjective.

Seconde méthode : puisque $g \circ f$ est surjective, g est surjective.
Et étant injective par hypothèse, elle est bijective, et donc admet une bijection réciproque g^{-1}.
Mais alors $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est surjective car composée de deux surjections[7].
2. Supposons $g \circ f$ injective et f surjective
Première méthode : soient y_1, y_2 deux éléments de F tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Alors par surjectivité de f, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Mais alors $g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2))$, de sorte que par injectivité de $g \circ f$, $x_1 = x_2$.
Et donc $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.
Ainsi, on a prouvé que $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, donc g est injective.

Seconde méthode : puisque $g \circ f$ est injective, f est injective.
Étant surjective par hypothèse, elle est donc bijective et admet donc une bijection réciproque f^{-1}.
Et alors $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective car composée de deux injections.

[7] g^{-1} est bijective, donc en particulier injective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.15

Il est clair que $\text{id}_\mathbf{N}$ est une solution, montrons que c'est la seule.
Soit donc $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une injection telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$.
Alors $f(0) \leqslant 0$, donc $f(0) = 0$.
De même, $f(1) \leqslant 1$, donc $f(1) \in \{0, 1\}$. Mais on ne peut avoir $f(1) = 0 = f(0)$, car cela contredirait l'injectivité de f. Donc $f(1) = 1$.
Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.
La récurrence est largement initialisée.
Supposons donc que pour tout $k \leqslant n$, $f(k) = k$.

Alors $f(n+1) \leqslant n+1$, donc $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$.
Mais on ne peut avoir $f(n+1) = \ell$, avec $\ell \in [\![0, n]\!]$, car alors on aurait $f(n+1) = \ell = f(\ell)$, contredisant l'injectivité de f.
Donc $f(n+1) = n+1$, et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.

Solution de l'exercice 10.16

Procédons par double implication.
▶ Supposons dans un premier temps que f soit bijective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Soit alors $y \in \overline{f(A)}$. Alors y admet un unique antécédent par f, qui est $x = f^{-1}(y)$. Nécessairement, x ne peut être dans A, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(A)$.
Donc $x \in \overline{A}$, et par conséquent, $y = f(x) \in f\left(\overline{A}\right)$. Ceci prouve donc déjà que $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.
De même, soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Alors l'unique antécédent de y est $x = f^{-1}(y)$, qui par hypothèse est dans $\overline{A}$.
Donc f ne peut pas être l'image d'un élément de A, car cet élément serait nécessairement $x \notin A$.
Donc $y \in \overline{f(A)}$, de sorte que $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
Par double inclusion, on a donc $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
▶ Inversement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
En particulier, pour $A = \emptyset$, on obtient

$$f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

Donc déjà, f est surjective.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Soit alors $A = \{x\}$, de sorte que $f(A)$ est le singleton $\{f(x)\}$.
Alors $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)} = F \setminus \{f(x)\}$.
Puisque $f(y) = f(x) \notin F \setminus \{f(x)\}$, on en déduit que $f(y) \notin f\left(\overline{A}\right)$.
Et donc y, qui est un antécédent de $f(y)$, ne peut appartenir à $\overline{A}$, et donc appartient à A.
Mais A ne contient qu'un élément, qui est x, de sorte que $y = x$.
Et donc f est injective, et par conséquent bijective.

> **☠ Danger !**
> On touche là aux limites de la notation $\overline{A}$ pour le complémentaire : l'ensemble dans lequel on prend le complémentaire doit être clair, car il n'est pas écrit.
> Ici, c'est E lorsqu'on parle de A (qui est inclus dans E), mais F lorsqu'on parle de $f(A)$ (qui est inclus dans F).

> **Remarque**
> Avez-vous remarqué qu'il n'y a aucun besoin de raisonner par l'absurde ici ?

Solution de l'exercice 10.17

Supposons que f soit injective. Alors $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A, \overline{A} \cap \overline{B} \cap A\right) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$.
Et donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
En passant au complémentaire, cela nous donne $A \cup B = \overline{\emptyset} = E$.

Inversement, supposons que $A \cup B \neq E$, et soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$, et donc f n'est pas injective.
Ainsi, f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Supposons à présent f surjective, et soit $x \in A$. Alors $(\{x\}, \emptyset) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ possède un antécédent par f : il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$.
Soit encore $\begin{cases} X \cap A = \{x\} \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}$.
Alors $x \in X$, et puisque $X \cap B = \emptyset$, alors $x \notin B$.
Ainsi, nous venons de prouver que $x \in A \Rightarrow x \notin B$, et donc $A \cap B = \emptyset$.
Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et montrons que f est surjective.
Soit donc $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, et soit $X = A_1 \cup B_1 \in \mathscr{P}(E)$.
Alors

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((A_1 \cup B_1) \cap A, (A_1 \cup B_1) \cap B) = ((A_1 \cap A) \cup (B_1 \cap A), (A_1 \cap B) \cup (B_1 \cap B)).$$

Mais puisque $B_1 \subset B$ et que $A \cap B = \emptyset$, $B_1 \cap A = \emptyset$. Et puisque $A_1 \subset A$, $A_1 \cap A = A_1$.
Et de même, $A_1 \cap B = \emptyset$ et $B_1 \cap B = B_1$.
Et donc $f(X) = (A_1, B_1)$, de sorte que (A_1, B_1) possède un antécédent par f.
Ceci étant vrai pour tout élément de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, f est surjective.

Et par conséquent, f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, donc si et seulement si $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}$, soit si et seulement si (A, B) forme une partition de E, ou que l'une des deux est vide et l'autre égale à E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.18

Il est évident que id convient.

Soit f une application de $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ vérifiant la condition requise.
Alors $(\mathrm{id} + f + f^2) \circ f = 3\mathrm{id}$ est injective.
Et donc f est injective.
Montrons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$.
On a $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$.
Or, chacun des entiers $f(1)$, $f^2(1)$ et $f^3(1)$ est supérieur ou égal à 1, et donc ils sont nécessairement tous trois égaux à 1.
Et en particulier, $f(1) = 1$, ce qui initialise la récurrence.

> **Rappel**
> Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Supposons que pour tout $n \leqslant k$, $f(n) = n$.
Alors $f(k+1) + f^2(k+1) + f^3(k+1) = 3(k+1)$.
Puisque f est injective, et que $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(k) = k$, $f(k+1) \geqslant k+1$.
Et donc, toujours par injectivité de f, $f(f(k+1)) \geqslant k+1$ et $f(f(f(k+1))) \geqslant k+1$.
Par conséquent, on doit avoir $f(k+1) = k+1$, $f(f(k+1)) = k+1$ et $f(f(f(k+1))) = k+1$.
Et puisque $f(k+1) = k+1$, nous venons de prouver l'hérédité.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$, et donc $f = \mathrm{id}$.

Ainsi, $f = \mathrm{id}$ est la seule application vérifiant la relation demandée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.19

Soit $a \in \mathbf{Z}$. Alors $a^3 - a^3 = 0 = a - a$, si bien que $a \mathcal{R} a$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $a, b \mathcal{R}$, soit encore $a^3 - b^3 = a - b$.
Alors $b^3 - a^3 = b - a$, et donc $b \mathcal{R} a$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Enfin, soient $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$.
Alors $a^3 - b^3 = a - b$ et $b^3 - c^3 = b - c$.
Donc en sommant terme à terme ces égalités, $a^3 - c^3 = a - c$, et donc $a \mathcal{R} c$.
Donc R est transitive, donc est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.

Soit $a \in \mathbf{Z}$. Par définition, $\mathrm{cl}(a) = \{b \in \mathbf{Z} \mid a \mathcal{R} b\} = \{b \in \mathbf{Z} \mid a^3 - b^3 = a - b\}$.
Soit donc $b \in \mathbf{Z}$. On a alors

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 = a - b &\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a - b \\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \textbf{ ou } a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \textbf{ ou } b^2 + ab + (a^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Notons qu'on retrouve déjà le fait que a est dans la classe de a.
Notons que l'équation $b^2 + ab + (a^2 - 1) = 0$ est polynomiale de degré 2, donc elle ne possède pas de solution réelle lorsque $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 \leqslant 0$.
Donc déjà si[8] $|a| \geqslant 2$.

[8] N'oublions pas que a est un entier.

Pour $a = 0$, on a donc $b \in \mathrm{cl}(a)$ si et seulement si $(b = a = 0)$ **ou** $(b^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow b \in \{-1, 0, 1\}$.
Donc $\mathrm{cl}(0) = \{-1, 0, 1\}$.
Sans calculs supplémentaires, on en déduit que $\mathrm{cl}(1) = \mathrm{cl}(-1) = \{-1, 0, 1\}$. En effet, deux classes d'équivalence sont égales ou disjointes.
Donc si $a \mathcal{R} b$, alors $a \in \mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b)$, et donc $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.20

► **Réflexivité** : puisque pour tout $p \in \mathbf{N}$, $p = p^1$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
► **Antisymétrie** : soient $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$.
Alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $q = p^n$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p = q^m$.
Et donc $p = (p^n)^m = p^{nm}$.

> **⚠ Attention !**
> m et n n'ont aucune raison d'être égaux !

Si $p = 0$, alors $q = 0$, et donc $p = q$.
Si $p = 1$, alors $q = p^n = 1$, donc $p = q$.
Si $p \notin \{0, 1\}$, alors $1 = p^{mn-1}$, de sorte que $mn - 1 = 0 \Leftrightarrow mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$. Et donc une fois de plus, $p = q$.
Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
▶ **Transitivité** : supposons à présent que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq r$. Alors il existe deux entiers n et m tels que $q = p^n$ et $r = q^m$. Et donc $r = (p^n)^m = p^{nm}$, de sorte que $p \preccurlyeq r$. Et donc la relation $\preccurlyeq$ est transitive.
Ainsi, nous avons bien une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$.

Cet ordre n'est pas total, car on n'a ni $2 \preccurlyeq 3$ (car 3 n'est pas une puissance de 2), ni $3 \preccurlyeq 2$ (car 2 n'est pas une puissance de 3).

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.21

Soient x, y deux éléments de E tels que $x\mathscr{R}y$. Alors par réflexivité[9]Qui provient du fait qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. de $\mathscr{R}$, $y\mathscr{R}x$.
Mais puisque $\mathscr{R}$ est antisymétrique[10], on a donc $x = y$.
Et donc les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ sont toutes des singletons.

Si on suppose de plus que $\mathscr{R}$ est total, soient alors x et y deux éléments de E. On a alors soit $x\mathscr{R}y$, soit $y\mathscr{R}x$.
Mais alors d'après ce qui précède, $x = y$. Et donc E ne possède qu'un seul élément.
Et inversement, sur un singleton, il n'existe qu'une relation d'équivalence[11], qui est alors une relation d'ordre total.

[9] 5mm

[10] Car relation d'ordre.

[11] Et même une seule relation réflexive : c'est $\mathscr{R} = E \times E$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.22

Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $|z| = |z|$, donc $\mathscr{R}$ est réflexive.
Si $|z_1| = |z_2|$ et $|z_2| = |z_3|$, alors $|z_1| = |z_3|$, donc $\mathscr{R}$ est transitive.
Enfin, il est évident que $|z| = |z'| \Leftrightarrow |z'| = |z|$, et donc $\mathscr{R}$ est symétrique.
Ainsi, nous sommes bien en présence d'une relation d'équivalence.

Soit $z_1 \in \mathbf{C}$, et soit $r = |z_1|$ le module de z.
Alors la classe d'équivalence de z_1 est $\{z \in \mathbf{C}, |z| = r\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à distance r de l'origine : c'est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r.
Notons que le cas de la classe d'équivalence de 0 est un peu particulier : elle ne contient que 0, ce qui peut être vu comme un cercle de rayon 0.

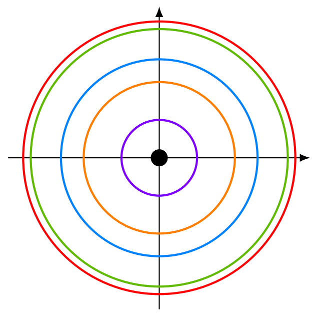


FIGURE 10.1– Les classes qu'équivalence sont disjointes, et forment une partition de $\mathbf{C}$ (bien que toutes ne tiennent pas dans la marge...)

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.23

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $xe^x = xe^x$, et donc $\mathscr{R}$ est réflexive.
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x\mathscr{R}y$. Alors $xe^y = ye^x$ et donc $ye^x = xe^y$, donc $\mathscr{R}$ est symétrique.
Enfin, soient $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Alors $xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y}$, et de même $ye^{-y} = ze^{-z}$. Et donc $xe^{-x} = ze^{-z} \Leftrightarrow xe^z = ze^x$, de sorte que $x\mathscr{R}z$.
Par conséquent, $\mathscr{R}$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence.
2. Notons que comme mentionné précédemment, on a $x\mathscr{R}y$ si et seulement si x et y ont la même image par $f : t \mapsto te^{-t}$.
La classe d'équivalence de x est donc l'ensemble des réels ayant même image par f que x.
Étudions rapidement la fonction f : elle est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $f' : t \mapsto (1 - t)e^{-t}$, et donc son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

L'image de f est donc $]-\infty, e^{-1}]$, et il est facile de constater que tous les éléments de $]-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\}$ possèdent un unique antécédent par f et que ceux de $]0, e^{-1}[$ possèdent deux antécédents[12] par f.
Et donc les classes d'équivalences de $\mathscr{R}$ sont de cardinal 1 ou 2.

Plus précisément : la classe d'un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ est de cardinal 2, les autres sont de cardinal 1.

[12] Un dans $]0, 1[$ et un dans $]1, +\infty[$.

Solution de l'exercice 10.24

1. ▸ **Réflexivité** : soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Alors $X \cap X = X \cap X$.
▸ **Symétrie** : soient X et Y deux parties de E telles que $X \sim Y$. Alors $X \cap A = Y \cap A \Leftrightarrow Y \cap A = X \cap A \Leftrightarrow Y \sim X$.
▸ **Transitivité** : soient XY et Z trois parties de E telles que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Alors $X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$, et donc en particulier $X \cap A = Z \cap A$: $\sim$ est transitive.

2. Notons F l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.
Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & F \\ B & \longmapsto & \mathrm{cl}(B) \end{array} \right.$, qui à une partie de A associe sa classe d'équivalence.
Alors f est surjective. En effet, si $X \in \mathscr{P}(E)$, notons alors $B = A \cap X$, qui est une partie de A, pour laquelle $A \cap B = B = A \cap X$.
On a donc $B \sim X$, de sorte que la classe d'équivalence de B (c'est à dire $f(B)$) n'est autre que celle de X. Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est dans l'image de f.

Prouvons à présent que f est injective : soient B, B' deux parties de A telles que $f(B) = f(B')$, c'est-à-dire telles que $\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(B')$, soit encore telles que $B \sim B'$.
Alors $B \cap A = B' \cap A$. Mais $B \subset A$, donc $B \cap A = B$, et de même $B' \cap A = B'$.
Et donc $B = B'$: f est injective.

Ainsi, f réalise une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble[13] des classes d'équivalence de $\sim$.

Remarque
Une partie de A est en particulier une partie de E.

[13] Appelé quotient de $\mathscr{P}(E)$ par $\sim$, et noté $E/\sim$.

Solution de l'exercice 10.25

Soit $f : E \to \mathbf{R}$ un élément de F.
Alors $\forall x \in E$, $f(x) \leqslant f(x)$, donc $f \preccurlyeq f$. Ainsi $\preccurlyeq$ est réflexive.
Soient $f, g \in F$ tels que $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq f$.
Alors pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, donc $f(x) = g(x)$, si bien que $f = g$. Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
Soient enfin $f, g, h \in F$ tels que $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq h$.
Alors pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant h(x)$, si bien que $f(x) \leqslant h(x)$.
Et donc $f \preccurlyeq h$ si bien que $\preccurlyeq$ est transitive.
Donc $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur F.

Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors il s'agit d'une relation d'ordre total puisque pour tous $f, g \in F$, on a soit $f(x) \leqslant g(x)$, et alors $f \preccurlyeq g$, soit $g(x) \leqslant f(x)$ et alors $g \preccurlyeq f$.
En revanche, si E contient au moins deux éléments distincts x et y, notons alors $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 & \text{si } t = y \\ -1 & \text{si } t \notin \{x, y\} \end{cases} \end{array} \right.$ et notons $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t = x \\ 0 & \text{si } t = y \\ -1 & \text{si } t \notin \{x, y\} \end{cases} \end{array} \right.$
Alors on n'a pas $f \preccurlyeq g$ car $g(y) < f(y)$, et on n'a pas $g \preccurlyeq f$ car $f(x) < g(x)$.
Et donc f et g ne sont pas comparable, donc $\preccurlyeq$ n'est pas un ordre total.

Solution de l'exercice 10.27

Procédons par analyse-synthèse.
Si une telle relation d'équivalence $\sim$ existe, c'est-à-dire telle que $A = \{\mathrm{cl}(x),\ x \in E\}$.
Alors pour tous $(x, y) \in E^2$, $x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \Leftrightarrow \exists X \in A,\ \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) = X$.
Et inversement, s'il existe $X \in A$ tel que $\{x, y\} \subset X$, alors il existe $z \in E$ tel que $\mathrm{cl}(z) = X$, et donc $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(z) = X$ et de même $\mathrm{cl}(y) = X$.
Donc $x \sim y$.

Notons qu'on a utilisé ici le fait que deux éléments sont en relation si et seulement si ils ont la même classe d'équivalence.

Inversement, définissons une relation $\sim$ sur E en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in A, \{x, y\} \subset X.$$

Prouvons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, et que l'ensemble de ses classes d'équivalence est A.
Soit $x \in E$. Puisque A est une partition de E, $\bigcup_{X \in A} X = E$, et donc en particulier, $x \in \bigcup_{X \in A} X$.

Donc il existe $X \in A$ tel que $x \in X$. Et donc $\{x, x\} = \{x\} \subset X$, si bien que $x \sim x$. Donc $\sim$ est réflexive.
Il est évident que $\sim$ est symétrique puisque $\{x, y\} = \{y, x\}$.
Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$.
Alors il existe $X_1, X_2 \in A$ tels que $\{x, y\} \subset X_1$ et $\{y, z\} \subset X_2$.
Mais alors $\{y\} \subset X_1 \cap X_2$, si bien que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.
Et donc par définition d'une partition, $X_1 = X_2$. Et donc $\{x, z\} \subset \{x, y\} \cup \{y, z\} \subset X_1$.
Donc $x \sim z$, si bien que $\sim$ est transitive.
Et donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur E.

Reste à prouver que $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.
Soit $X \in A$. Alors puisque[14] $X \neq \emptyset$, et donc il existe $x \in E$ tel que $x \in X$.
Mais alors pour tout $y \in E$, $x \sim y \Leftrightarrow \exists Y \in A,\ \{x, y\} \subset Y$.
Mais un tel Y contient x, et donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et donc $X = Y$. Et par conséquent, $y \in \mathrm{cl}(x) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \in X$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $X = \mathrm{cl}(x)$.
Donc déjà, tous les éléments de A sont des classes d'équivalence de $\sim$, si bien que $A \subset \{\mathrm{cl}(x),\ x \in E\}$.
Inversement, soit $x \in E$, prouvons que $\mathrm{cl}(x) \in A$.
Mais comme précédemment, il existe $X \in A$ tel que $x \in X$, et alors $\mathrm{cl}(x) = X$.
Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est un élément de A, et donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} \subset A$.
Par double inclusion, on a donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.

[14] C'est encore dans la définition de partition.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.28

Supposons que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ possède un plus grand élément A.

Soit $z \in E$. Puisque E contient au moins deux éléments, $\{z\} \neq E$.
Et donc $\{z\} \subset A$, si bien que $z \in A$.
Et donc $\forall z \in E$, $z \in A$, de sorte que $A = E$, ce qui est absurde.
On en déduit $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion.

Remarque
E est alors un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$, c'est-à-dire une partie de E qui n'est pas égale à E tout entier.

Remarque : notons que l'hypothèse que E contient deux éléments est indispensable : si $E = \{a\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, E\}$, si bien que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\} = \{\emptyset\}$, qui possède un plus grand élément.

Évidemment
Dans un ensemble ordonné, un singleton possède toujours un plus grand et un plus petit élément.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.29

Raisonnons par l'absurde, et supposons que E soit infini.
On définit alors une suite par :

$$x_0 = \min E,\ x_1 = \min E \setminus \{x_0\},\ x_2 = \min E \setminus \{x_0, x_1\}$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \min E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
Notons que cette suite est bien définie, puisqu'à chaque étape, E étant infini, on a bien $E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ qui est non vide, et donc admet un plus petit élément.
Soit alors $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
Alors A ne peut pas admettre de plus grand élément.
En effet, la suite (x_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \min E \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ et $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donc $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$.
Mieux, elle est strictement croissante, au sens où $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$, mais $x_{n+1} \neq x_n$ (puisque $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$).

Autrement dit
x_0 est le plus petit élément de E, x_1 le «deuxième» plus petit, etc.

Supposons alors que A possède un plus grand élément a. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n_0} = a$. Et alors, $a < x_{n_0+1}$ (par stricte croissance de la suite), mais $x_{n_0+1} \preccurlyeq a$ (par définition d'un plus grand élément).
Ceci n'est pas possible. On en déduit donc que E est infini.

***Remarques** : le fait que E soit infini a en fait ici été utilisé pour dire qu'à chaque étape, $E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est non vide. Si E était fini, on pourrait faire de même, mais au bout d'un certain nombre d'étapes (égal au cardinal de E), il n'y aurait plus rien dans $E \setminus \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$, et donc on ne pourrait pas aller plus loin.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.30

Soit $f \in E$. Alors pour tout intervalle ouvert I contenant α (et il existe bien de tels intervalles[15]), on a $f_{|I} = f_{|I}$.
Donc $f \sim f$: la relation $\sim$ est réflexive.

Soient f, g deux éléments de E tels que $f \sim g$. Alors soit I intervalle ouvert contenant α tel que $f_{|I} = g_{|I}$. Alors $g_{|I} = f_{|I}$, donc $g \sim f$, de sorte que $\sim$ est symétrique.

Soient enfin f, g, h trois fonctions de E telles que $f \sim g$ et $g \sim h$.
Alors il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2, contenant α tels que $f_{|I_1} = g_{|I_2}$ et $g_{|I_2} = h_{|I_3}$.
On pourrait prouver que $I_3 = I_1 \cap I_2$ est encore un intervalle ouvert, contenant α, et tel que $f_{|I_3} = h_{|I_3}$.
Mais le point fastidieux est de prouver que l'intersection de deux intervalles ouverts est encore un intervalle ouvert. En effet, rappelons qu'un intervalle ouvert peut être de l'une des 4 formes suivantes : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ ou $\mathbf{R}$. Donc il nous faut distinguer de nombreux cas.

Notons plus simplement qu'il existe a et b dans I_1 tels que $a < \alpha < b$, et de même, il existe c et d dans I_2 tels que $c < \alpha < d$.
Et alors $J =]\max(a, c), \min(b, d)[$ est un intervalle ouvert, inclus dans $I_1 \cap I_2$. Et donc pour tout $x \in J$,

$$f_{|J}(x) = f_{|I_1}(x) = g_{|I_1}(x) = g_{|J}(x).$$

Et de même, $g_{|J}(x) = h_{|J}(x)$, de sorte que $f_{|J}(x) = h_{|J}(x)$.
Ainsi, $f_{|J} = h_{|J}$, et donc $f \sim h$. On en déduit que $\sim$ est transitive, et donc est bien une relation d'équivalence.

[15] Par exemple $\mathbf{R}$ tout entier ou $]\alpha - 1, \alpha + 1[$.

⚠ Attention !
Toute la difficulté vient du fait que I_1 et I_2 ne sont pas nécessairement les mêmes, dans la définition de $\sim$, l'intervalle I dépend du choix de (f, g).

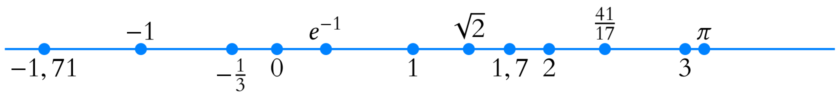
Remarque
Le fait que $\alpha \in I_1 \cap I_2$ est évident.

11

Nombres réels

Nous étudions dans ce chapitre quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels. Mais au fait, qu'est-ce qu'un nombre réel ?
Les manipulant depuis quelques années, vous avez déjà une assez bonne idée de ce qu'est $\mathbf{R}$, ne serait-ce que géométriquement : c'est l'ensemble des abscisses des points d'une droite horizontale[1] :

[1] Ou de toute droite non verticale.



Vous savez déjà que $\mathbf{R}$ est muni d'une addition, d'une multiplication, qu'il y a une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$, et qu'il y a certaines compatibilités entre ces différentes structures.
Par exemple la distributivité de l'addition par rapport au produit : $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ ou encore la sommation d'inégalités : $(a \leqslant b)$ **et** $(c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$.

Pourtant, il nous faudrait donner une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel.
Un nombre naturel, c'est facile : $\mathbf{N}$ c'est l'ensemble des nombres que vous pouvez compter avec vos doigts[2] : $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Bien entendu ceci n'est pas très rigoureux, mais passons ceci sous silence.
Partant des entiers naturels, il est assez facile de construire l'ensemble des entiers relatifs : il suffit d'ajouter un signe (négatif ou positif) aux entiers naturels. Donc $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
Un nombre rationnel, ce n'est rien d'autre qu'un couple d'entiers relatifs : un numérateur et un dénominateur (forcément non nul). Il y a quelques précautions à prendre, puisque deux couples d'entiers peuvent représenter la même fraction, par exemple : $\dfrac{4}{11} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{-12}{-33}$.

[2] Plus éventuellement ceux d'autres personnes.

Donc jusqu'à $\mathbf{Q}$, tout va bien. Pourquoi vouloir alors faire plus ? Pourquoi ne pas travailler uniquement en manipulant des rationnels ?
Un des inconvénients de $\mathbf{Q}$, c'est qu'il n'existe pas de rationnel[3] dont le carré vaut 2.
Est-ce vraiment si problématique ? Par exemple, il n'existe pas de réel dont le carré vaut -1, et on arrive à s'en accommoder.
C'est un peu plus gênant pour $\sqrt{2}$, puisqu'il s'agit de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. Rester dans les rationnels, c'est donc s'interdire de mesurer la diagonale de ce carré (mais aussi le périmètre du cercle trigonométrique).

[3] Autrement dit, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Nous ne rentrerons pas dans les détails[4] de la construction de $\mathbf{R}$, mais l'idée principale est qu'un nombre réel x «coupe en deux» l'ensemble des rationnels : il y a ceux qui sont plus petits que x et ceux qui sont plus grands que x.
Un nombre réel est alors une partition de $\mathbf{Q}$ en deux ensembles A et B tels que tout élément de A soit plus petit que tout élément de B.
Notons qu'il faut ruser un peu, et qu'on ne peut définir $\sqrt{2}$ comme étant la partition (A, B) où $A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant \sqrt{2}\}$: $\sqrt{2}$ ne peut pas être défini à partir de $\sqrt{2}$, on se mord la queue !
En revanche, cette même partition est définie par $A = \{x \in \mathbf{Q}, x \leqslant 0$ **ou** $x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0$ **et** $x^2 \geqslant 2\}$.
Une fois les réels définis ainsi, il resterait à définir ce qu'est la somme de deux réels, ce qu'est leur produit, ce qu'est la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, et vérifier que toutes ces opérations ont bien les propriétés qu'on leur connaît. Tout ceci est fastidieux, et nous n'en dirons rien, et admettrons donc que $\mathbf{R}$ existe et possède bien les propriétés qu'on lui connaît déjà.

[4] Non pas que ce soit intéressant, mais c'est difficile et hors-programme.

Pour la culture

La construction de $\mathbf{R}$ proposée ici n'en est qu'une parmi d'autres possibles (bien qu'on montre que toutes jouissent bien des mêmes propriétés). Une autre très classique construit les nombres réels comme classes d'équivalence d'une relation d'équivalence définie sur un ensemble de suites à valeurs rationnelles.

11.1 La relation d'ordre sur R

11.1.1 Borne supérieure dans un ensemble ordonné

Définition 11.1 – Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et soit $a \in E$. On dit que a est :

- la **borne supérieure de** A si a est le plus petit des majorants de A. On note alors $a = \sup(A)$.
- la **borne inférieure de** A si a est le plus grand des minorants de A. On note alors $a = \inf(A)$.

Remarques. ► Pour le dire avec des quantificateurs : a est la borne supérieure de A si

$$a = \min\{x \in E \mid x \text{ majorant de } A\} = \min\{x \in E \mid \forall y \in A,\ y \preccurlyeq x\}.$$

Ou encore

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \preccurlyeq a \text{ (c'est-à-dire } a \text{ est un majorant de } A) \\ \forall x \in E,\ \underbrace{(\forall y \in A \Rightarrow y \preccurlyeq x)}_{y \text{ majorant de } A} \Rightarrow a \preccurlyeq x \text{ (c'est-à-dire } a \text{ est plus petit que tout majorant de } A) \end{cases}.$$

► La terminologie le laisse penser, mais une telle borne supérieure, **si elle existe** est unique, car c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants, et qu'un tel plus petit élément est unique. Idem pour la borne inférieure.
► Une borne supérieure (resp. inférieure) ne peut exister que pour un ensemble majoré (resp. minoré) faute de quoi l'ensemble des majorants (resp. minorants) est vide, et donc ne contient pas de plus grand (resp. petit) élément.

Exemple 11.2

► Dans $(\mathbf{N}, |)$, $\sup\{2,3\} = 6$. En effet, les majorants de $\{2,3\}$ sont les nombres divisibles par 2 et par 3, donc les multiples de 6. Et donc si a est un majorant de $\{2,3\}$, alors $6|a$.
► Une partie peut être majorée sans avoir de borne supérieure.
Par exemple dans l'ensemble ordonné $(\mathbf{R} \setminus \{1\})$, $A = [0,1[$ est majoré (par 2 par exemple), mais ne possède pas de borne supérieure.
En effet, l'ensemble des majorants de A est $]1, +\infty[$, qui ne possède pas de plus petit élément.
Vous allez me dire que je l'ai un peu fait exprès, la borne supérieure de $[0,1[$ devant être égale à 1. En effet, mais nous verrons bientôt que des exemples moins triviaux existent, par exemple dans $\mathbf{Q}$, $\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \preccurlyeq 2\}$ est majoré mais n'admet pas de borne supérieure.

Théorème 11.3 : *Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).*

Démonstration. Par définition, $\max A$ est un majorant de A. Il s'agit donc de prouver que $\max A$ est le plus petit des majorants de A.
Soit donc M un majorant de A. Puisque $\max A \in A$, on a donc $\max A \preccurlyeq M$.
Et donc $\max A$ est bien le plus petit des majorants de A : A possède une borne supérieure, qui est donc égale à $\max A$. □

Remarque. Inversement, il est aisé de constater que si $\sup(A)$ existe, et appartient à A, alors il s'agit d'un majorant de A, dans A, et donc du plus grand élément de A.

11.1.2 Bornes supérieures dans $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$ on dispose de la relation d'ordre $\leqslant$ usuelle.
Nous admettrons qu'on dispose alors de la propriété suivante[5] :

[5] Qui fait cruellement défaut à $\mathbb{Q}$.

Théorème 11.4 : *Toute partie **non vide et majorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Corollaire 11.5 – *Toute partie **non vide et minorée** de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, et soit $B = -A = \{-a,\ a \in A\}$.
Alors B est non vide, et un réel m est un minorant de A, si et seulement si $-m$ est un majorant de B, donc B est majorée et possède une borne supérieure b.
Alors, si m est un minorant de A, $-m$ est un majorant de B, donc $-m \geqslant b$.
Et donc $m \leqslant -b$: $-b$ est le plus grand des minorants de A, c'est donc sa borne inférieure. □

Exemple 11.6 **$\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure**

Notons que cette propriété de la borne supérieure n'était pas vraie dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 \leqslant 2\}$ ne possède pas de borne supérieure **dans $\mathbb{Q}$**.
En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $b \in \mathbb{Q}$ qui soit le plus petit des majorants de A.
Nous allons en fait construire un autre majorant de A, strictement plus petit que b.
Posons $c = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{b}$, qui est encore un rationnel.
On a alors $c^2 - 2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{1}{b^2} - 1 = \left(\dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{b}\right)^2 \geqslant 0$, on a $c^2 \geqslant 2$.
Donc pour tout $x \in A$, si $x^2 \leqslant 2 \leqslant c^2$, si bien que $x \leqslant c$.
Donc c est un majorant de A.
D'autre part $\left(\dfrac{2}{c}\right)^2 \leqslant 2$, donc $\dfrac{2}{c} \in A$, et donc $b \geqslant \dfrac{2}{c} \Leftrightarrow bc \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{b^2}{2} + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow b^2 \geqslant 2$.
Mais b^2 ne peut pas être égal à 2 (il n'y a pas de rationnel dont le carré serait égal à 2), donc $b^2 > 2 \Leftrightarrow c > \dfrac{2}{b} \Leftrightarrow c - \dfrac{2}{b} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{b} > 0 \Leftrightarrow b - c > 0 \Leftrightarrow c < b$.
Donc c est un majorant de A, strictement inférieur à b, ce qui contredit la définition de borne supérieure.
Conclusion : A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 11.7 (Caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure) :
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors un réel m est la borne supérieure de A si et seulement si

1. *m est un majorant de A*
2. *$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m - \varepsilon < a \leqslant m$.*

Remarque
Notons que l'inégalité $a \leqslant m$ découle directement du fait que m est un majorant de A.

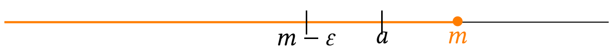


FIGURE 11.1 – L'idée est simple : un nombre strictement inférieur à m (qui est donc de la forme $m - \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$) n'est plus un majorant de A.

Démonstration. Soit $m = \sup(A)$. Par définition m est un majorant[6] de A.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $m - \varepsilon < m$, et que m est le plus petit des majorants de A, $m - \varepsilon$

[6] C'est même le plus petit d'entre eux.

n'est plus un majorant de A.
Et donc il existe $a \in A$ tel que $m-\varepsilon < a$.
Pour la réciproque, supposons qu'on dispose d'un réel m satisfaisant aux deux conditions, et prouvons qu'il s'agit nécessairement de $\sup(A)$. Puisque m est un majorant $m \geqslant \sup(A)$. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $m > \sup(A)$. Soit alors $\varepsilon = m - \sup(A) > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que

$$m - \varepsilon < a \leqslant m \Leftrightarrow \sup(A) < a \leqslant m.$$

Ceci contredit le fait que $\sup(A)$ soit un majorant de A.
Donc $m = \sup(A)$. □

Sur le même principe[7], on prouve que :

[7] En changeant le sens des inégalités.

Proposition 11.8 : *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$. Alors un réel m est la borne inférieure de A si et seulement si :*

1. *m est un minorant de A*
2. *$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ m \leqslant a < m + \varepsilon$.*

Exemple 11.9

Avec ces caractérisations, il est facile[8] de constater que $[0,1[$ possède 1 comme borne supérieure : soit $\varepsilon > 0$.

► Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors $1-\varepsilon \leqslant 0$, et donc il existe bien $x \in [0,1[$, par exemple $x = \dfrac{1}{2}$ tel que $1-\varepsilon < x \leqslant 1$.

► Si $\varepsilon < 1$, soit $x = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors $x \in [0,1[$, et $1 - \varepsilon < x \leqslant 1$.

Donc $1 = \sup[0,1[$.

[8] Mais en réalité, ce n'était pas très dur non plus en se servant de la définition (plus petit des majorants).

Exemple 11.10

Soit $A = \left\{3 - \frac{2}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Alors A est une partie non vide et majorée[9] de $\mathbf{R}$, donc elle admet une borne supérieure.
Prouvons que $\sup A = 3$. Nous venons de dire que 3 est un majorant de A.
Soit à présent $\varepsilon > 0$. Prouvons que $2-\varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $3 - \dfrac{2}{n^2} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \dfrac{2}{n^2} \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$.

Donc si on note $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}} \right\rfloor$, alors $3 - \dfrac{2}{n_0^2} > 3 - \varepsilon$.

Donc nous venons de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $3 - \varepsilon < a \leqslant 3$.
C'est bien la caractérisation de $\sup A = 3$.

[9] Par 3.

11.1.3 Propriété d'Archimède

Proposition 11.11 : *L'ensemble $\mathbf{R}$ est archimédien, ce qui signifie que*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N},\ nx \geqslant y.$$

Histoire
L'énoncé originel d'Archimède est assez parlant : «Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.»

Démonstration. Soit $x > 0$. Il s'agit donc de prouver que $A_x = \{nx,\ n \in \mathbf{N}\}$ n'est pas un ensemble majoré.
En effet, dire que A_x n'est pas majoré signifie qu'il n'admet pas de majorant, soit encore que pour tout $y \in \mathbf{R}$, y n'est pas un majorant de A_x.
Soit encore : $\forall y \in \mathbf{R}, \exists u \in A_x, u \geqslant y$.

Et donc $\forall y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $nx \geqslant y$. Raisonnons par l'absurde, et supposons A_x majoré. Alors A_x admet une borne supérieure $a > 0$. Donc pour $n \in \mathbf{N}$, $nx \leqslant a$. Mais aussi $(n+1)x \leqslant a$. Soit encore $nx \leqslant a - x$. Ceci étant vrai pour tout n, $a - x$ est donc également un majorant de A_x, ce qui contredit la définition de borne supérieure.
Ainsi, A_x n'est pas majoré : pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $nx \geqslant y$. □

Plus loin

L'énoncé qui se profile en filigrane ici est bien connu : une suite géométrique de raison strictement plus grande que 1 prend des valeurs arbitrairement grandes, ce qui voudra bientôt dire qu'elle tend vers $+\infty$.

> **Corollaire 11.12 –** *Soit $x > 1$. Alors $\forall y \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $x^n \geqslant y$.*

Démonstration. Puisque $x > 1$, en posant $h = x - 1$, on a $h > 0$. Et donc par la formule du binôme, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$x^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant 1 + nh.$$

Mais pour $y \in \mathbf{R}$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $nh \geqslant y - 1$, et donc $x^n \geqslant y$. □

Remarque. On pourrait sûrement s'en tirer bien plus facilement à l'aide de logarithmes et d'exponentielles, en remarquant que $x^n \geqslant y \Leftrightarrow n \ln x \geqslant \ln y$, et utiliser ensuite le fait que $\mathbf{R}$ est archimédien et $\ln x > 0$.
C'est vrai. Mais en réalité, nous sommes en train de reprouver les fondements de l'analyse, et il est fort probable que la définition et/ou les propriétés de l'exponentielle et du logarithme dépendent en fait de cette propriété qui a toujours du vous sembler évidente et à propos de laquelle vous ne vous étiez jamais questionné.

Nous sommes alors désormais en mesure de justifier la définition de la partie entière, dont nous avions admis précédemment qu'elle était bien définie.

> **Corollaire 11.13 –** *Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note alors $n = \lfloor x \rfloor$.*

Démonstration. Soit $A = \{k \in \mathbf{Z},\ k \leqslant x\}$.
S'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, alors c'est nécessairement le plus grand élément de A.
En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n' \in A$ tel que $n' > n$.
Alors $n' - n \geqslant 1 \Leftrightarrow n + 1 \leqslant n'$. Et donc $n + 1 \leqslant n' \leqslant x$, ce qui est absurde.
Puisqu'un plus grand élément, quand il existe, est unique, cela prouve qu'il existe au plus un seul tel n.
Passons à présent à l'existence. Nous allons prouver que A est une partie non vide et majorée de $\mathbf{Z}$, elle aura alors automatiquement un plus grand élément.
► Si $x > 0$, $0 \in A$, qui est donc non vide. Et $\mathbf{R}$ étant archimédien, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant x$. Et alors un tel n majore tous les éléments de A.
► Si $x \leqslant 0$, alors 0 majore A, et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant -x \Leftrightarrow -n \leqslant x$, de sorte que $-n \in A$, et donc A est non vide. Dans les deux cas, A est non vide et majorée, et donc admet un plus grand élément n, qui est donc tel que $n \leqslant x < n+1$ (car $n + 1 \notin A$). □

Remarque

Bien qu'il semble absolument évident que A soit majoré, essayez de le prouver sans utiliser la partie entière (et donc sans aucun argument du type «l'entier juste après ...»), vous allez voir que ce n'est finalement pas si simple...

Notons que ceci ne fait que justifier la définition de la partie entière, mais que ça ne change en rien ses propriétés étudiées plus tôt dans l'année.
Sur le même principe, on pourrait prouver que pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n - 1 < x \leqslant n$, ce réel étant noté $\lceil x \rceil$. Nous ne l'utiliserons en pratique jamais.

11.1.4 Intervalles de R

Revenons à présent sur un résultat admis en début d'année : la classification des intervalles de $\mathbf{R}$. On rappelle qu'un intervalle de $\mathbf{R}$ est une partie I de $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow [x, y] \subset I$$

où l'on note $[x, y] = \{t \in \mathbf{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$.
Encore plus simple si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$, $[x, y] \subset I$.
En effet, si $x > y$, $[x, y] = \{t \in \mathbf{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} = \emptyset$.

Dans la suite, on considère un intervalle **non vide**[10] I et $x \in I$.

[10] Il ne vous aura pas échappé que $\emptyset$ satisfait la définition d'intervalle.

- si I n'est pas majoré, alors pour tout $y \geqslant x$, $\exists a \in I, a \geqslant y$.
  Donc $y \in [x, a] \subset I$, et donc $y \in I$. Par conséquent[11], $[x, +\infty[\subset I$.
- si I est majoré, il possède une borne supérieure b. Par définition d'une borne supérieure il est clair que $I \cap]b, +\infty[= \emptyset$. Distinguons encore deux cas.
  — si $b \in I$, c'est-à-dire si I possède un plus grand élément. Alors $[x, b] \subset I$. Donc $I \cap [x, +\infty[= \underbrace{(I \cap [x, b])}_{=[x,b]} \cup \underbrace{(I \cap]b, +\infty[)}_{=\emptyset} = [x, b]$.
  — si $b \notin I$, alors pour tout $y \in [x, b[$, il existe $t \in I$ tel que $t > y$. Et donc $[x, t] \subset I$, de sorte que $y \in [x, t] \subset I$.
  Ainsi, $[x, b[\subset I$, et donc $I \cap [x, +\infty[= [x, b[$.

Le même type de raisonnement avec des bornes inférieures prouve que $I \cap] - \infty, x]$ est soit égal à $] - \infty, x]$ tout entier, soit à $]a, x]$, soit à $[a, x]$, où a désigne l'éventuelle[12] borne inférieure de I.
Et donc $I = (I \cap] - \infty, x]) \cup (I \cap [x, +\infty[)$ est de l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{R},] - \infty, b],] - \infty, b[, \ ]a, b[,]a, b], [a, b], [a, b[,]a, +\infty[, [a, +\infty[.$$

		I majoré, $b = \sup I$		I non majoré
		$b \in I$	$b \notin I$	
I minoré	$a \in I$	$[a, b]$	$[a, b[$	$[a, +\infty[$
$a = \inf I$	$a \notin I$	$]a, b]$	$]a, b[$	$]a, +\infty[$
I non minoré		$] - \infty, b]$	$] - \infty, b[$	$\mathbf{R}$

[11] Car ce qui précède est vrai pour tout $y \geqslant x$.

[12] I.e. quand elle existe.

11.2 APPROXIMATIONS D'UN RÉEL

Proposition 11.14 : *Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $n \in \mathbf{N}$. On appelle approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près le nombre $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.*
On a alors $r_n \leqslant x < r_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Démonstration. Immédiat d'après les propriétés de la partie entière puisque $10^n r_n \leqslant 10^n x < 10^n r_n + 1$. □

Ne nous attardons pas là-dessus, vous savez très bien ce que ça signifie. Notons simplement que $r_n + \dfrac{1}{10^n}$ est l'approximation par excès à 10^{-n} près.

11.2.1 Parties denses

Proposition 11.15 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors il y a équivalence entre :*
i) tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient un élément de A
ii) entre deux réels distincts, il y a un élément de A. Soit encore

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, (x < y) \Rightarrow (\exists a \in A, x \leqslant a \leqslant y).$$

*Une partie A de $\mathbf{R}$ qui a ces propriétés est dite **dense** dans $\mathbf{R}$.*

Remarque
Notons qu'un intervalle ouvert de I ne peut pas être réduit à un point. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on travaille ici avec des intervalles **ouverts**.
En effet, les singletons sont des intervalles (non ouverts) qui contiennent un seul élément (mais ce sont les seuls, avec l'ensemble vide, à ne pas contenir une infinité d'éléments).

Démonstration. Soit $A \in \mathbf{R}$. Si $i)$ est vérifiée, soient alors $x < y$ deux réels. Alors l'intervalle ouvert $]x, y[$ contient au moins un élément de A.

Supposons à présent que $ii)$ est vérifiée, et soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Soient alors $x < y$ deux éléments de I. Alors il existe un élément a de A dans $[x, y]$. Mais I étant un intervalle, $[x, y] \subset I$, et donc $a \in I$. □

Exemple 11.16

On rappelle qu'un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{n}{10^k}$, $(n,k) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est dense dans $\mathbf{R}$. En effet, soit $I =]a,b[$ un intervalle ouvert avec $a < b$.
Notons alors $\ell = b - a$ la longueur de I et soit $n = \lfloor \log_{10} \ell \rfloor - 1 \in \mathbf{Z}$.
Soit alors $d = 10^n\left(\lfloor 10^{-n}a\rfloor + 1\right)$, qui est un nombre décimal. Montrons qu'il est dans $]a,b[$.
Par définition de la partie entière, on a $10^{-n}a - 1 < \lfloor 10^{-n}a\rfloor \leqslant 10^{-n}a$ et donc

$$10^{-n}a < \lfloor 10^{-n}a\rfloor + 1 \leqslant 10^{-n}a + 1 \Rightarrow a < d \leqslant a + 10^n.$$

Mais $n + 1 \leqslant \log_{10}\ell \Rightarrow n \leqslant \log_{10}\ell - 1 \Rightarrow 10^n \leqslant \frac{\ell}{10} < \ell$.
Et donc $d < a + \ell = a + b - a = b$.
Nous avons donc bien prouvé que $d \in [a,b]$.

Intuition — d est l'approximation décimale **par excès** de a à 10^{-n} près, l'idée étant que pour n suffisamment grand, d est bien dans $]a,b[$.

Proposition 11.17 (Densité de Q) : *L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Nous venons de prouver que l'ensemble $\mathbf{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$.
Mais $\mathbf{D}$ est inclus dans $\mathbf{Q}$.
Et donc dans tout intervalle ouvert non vide se trouve au moins un décimal, et donc au moins un rationnel. □

Ceci signifie qu'il y a vraiment des rationnels partout : entre deux réels distincts se trouve toujours au moins un rationnel.
Mieux : entre deux réels a et b, avec $a < b$ se trouvent toujours au moins deux rationnels. En effet, il y en a au moins un dans $\left]a, \frac{a+b}{2}\right[$ et au moins un dans $\left]\frac{a+b}{2}, b\right[$, ces deux rationnels étant alors nécessairement distincts.
Mais de la même manière, si on coupe $]a,b[$ en n petits intervalles[13] disjoints, on prouve alors que $]a,b[$ contient au moins n rationnels.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que $]a,b[$ contient une infinité de rationnels.

[13] De même longueur ou non.

Corollaire 11.18 (Densité de l'ensemble des irrationnels) – *L'ensemble $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration. Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Alors $]a+\sqrt{2}, b+\sqrt{2}[$ n'est pas vide non plus, et donc par densité de $\mathbf{Q}$, contient au moins un nombre rationnel r.
Le réel $r - \sqrt{2}$ est alors irrationnel. En effet, s'il était rationnel, on aurait alors
$\sqrt{2} = \underbrace{-\left(r-\sqrt{2}\right)}_{\in\mathbf{Q}} + \underbrace{r}_{\in\mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Donc $r - \sqrt{2}$ est un irrationnel, qui se trouve précisément dans l'intervalle $]a,b[$.
Et donc ainsi, tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ contient au moins un irrationnel. □

Plus généralement — Le même raisonnement pourrait être tenu avec n'importe quel irrationnel (par exemple π^2), $\sqrt{2}$ n'est en rien plus important que les autres irrationnels (si ce n'est que son irrationalité est facile à prouver).

11.3 Droite numérique achevée

Définition 11.19 – On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble défini par $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$.

Pour l'instant $-\infty$ et $+\infty$ ne sont que deux symboles, auxquels on n'a donné aucune signification particulière. Tout juste sait-on que ce ne sont pas deux nombres réels.
On décide de prolonger la relation d'ordre usuelle à $\overline{\mathbf{R}}$ en décrétant que :

$$\forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ -\infty \leqslant x \text{ et } \forall x \in \overline{\mathbf{R}},\ x \leqslant +\infty.$$

En particulier — $-\infty \leqslant +\infty$.

On a ainsi une relation d'ordre totale sur $\overline{\mathbf{R}}$, et on pourrait prouver[14] que toute partie non vide de $\overline{\mathbf{R}}$ (et donc également toute partie non vide de $\mathbf{R}$) possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}$.
En effet, si $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ est non vide. Si $+\infty \in A$, alors $+\infty$ est le seul majorant de A, donc égal à $\sup A$.
Si $+\infty \notin A$, alors $A \cap \mathbf{R}_+$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$.
Soit elle est majorée, et donc possède une borne supérieure (pour la relation d'ordre de $\mathbf{R}$) $m \in \mathbf{R}$, qui est donc aussi le plus petit des majorants dans $\overline{\mathbf{R}}$ de A. Donc m est la borne supérieure de A pour la relation d'ordre sur $\overline{\mathbf{R}}$.
Soit elle n'est pas majorée dans $\mathbf{R}$, auquel cas $+\infty$ est le seul majorant (dans $\overline{\mathbf{R}}$) de A, et donc c'est la borne supérieure de A dans $\mathbf{R}$.

[14] Mais c'est hors programme.

On prolonge également partiellement l'addition de $\mathbf{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x + (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x + (+\infty) = +\infty,\ -\infty + (-\infty) = -\infty,\ +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Notons qu'on ne donne pas de valeur à la somme $+\infty + (-\infty)$, en cohérence avec le fait qu'il s'agit d'une forme indéterminée lorsqu'on manipule des limites.
De même, on étend partiellement le produit en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \times (+\infty) = +\infty \text{ et } x \times (-\infty) = -\infty,\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*,\ x \times (+\infty) = -\infty \text{ et } x \times (-\infty) = +\infty$$

et de même,

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty, (-\infty) \times (+\infty) = -\infty,\ (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

Notons que tout ceci et en accord avec les règles bien connues[15] sur les sommes et produits de limites. Nous ne donnons pas de valeur à $0 \times \pm\infty$, qui sont des formes indéterminées.

[15] Et bientôt prouvées.

On peut alors étendre la notion d'intervalle de $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

Définition 11.20 – Une partie $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ est un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$ si

$$\forall (x, y) \in I^2,\ [x, y] = \{t \in \overline{\mathbf{R}} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I.$$

Exemple 11.21

$[0, 1[$, $]1, +\infty[$ et $[1, +\infty]$ sont des intervalles de $\overline{\mathbf{R}}$.

Proposition 11.22 : *Soit I un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$. Alors il est de l'une des formes $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, b]$ ou $[a, b[$ où $a = \inf I$ et $b = \sup I$, ces bornes supérieures et inférieures étant prises dans $\overline{\mathbf{R}}$ (où elles existent toujours).*

Démonstration. Notons donc $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Alors :

- Si $a \in I$ et $b \in I$. Alors pour tout $x \in I$, on a $a \leqslant x \leqslant b$, et donc $[a, b] \subset I$.
  Inversement, soit $x \in I$. Alors $x \leqslant a$, car a majore I, et $x \geqslant b$ car b minore I, donc $x \in [a, b]$.
  Ainsi, $I \subset [a, b]$, et donc $I = [a, b]$.
- Si $a \in I$ et $b \notin I$. Montrons alors que $I = [a, b[$.
  Si $x \in I$, alors $x \geqslant a$ (car a minore I) et $x \leqslant b$. Puisque de plus $x \neq b$, on a $x < b$. Et donc $x \in [a, b[$.
  Inversement, soit $x \in [a, b[$. Alors il existe $x' \in I$ tel que $x < x' < b$, faute de quoi x serait le plus grand élément de I, qui n'existe pas puisque $b \notin I$.
  Et donc $a \leqslant x \leqslant x'$, de sorte que $x \in [a, x'] \subset I$ car I est un intervalle.
  Par double inclusion, on a donc $I = [a, b[$.
- Les deux autres cas se traitent de la même manière.

□

Il est alors facile de retrouver la liste des intervalles de $\mathbf{R}$: si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, alors c'est aussi un intervalle de $\overline{\mathbf{R}}$.
Donc de l'une des formes indiquées précédemment. Il suffit alors de remarquer que $I = I \cap \mathbf{R}$ pour retrouver les neuf types d'intervalles de $\mathbf{R}$.

EXERCICES DU CHAPITRE 11

EXERCICE 11.1 Soient A, B deux parties de $\mathbf{R}$, non vides, avec B majorée et $A \subset B$. PD
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

EXERCICE 11.2 Montrer que les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures : PD

1) $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$ 2) $B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, n \leqslant p\right\}$ 3) $C = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$

EXERCICE 11.3 Un cas particulier du théorème de Knaster-Tarski AD
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Le but de l'exercice est de prouver que f admet un point fixe.

1) On pose $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. Prouver que A est non vide et majorée.
2) Soit $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0,1]$, puis que $c \leqslant f(c)$.
3) Prouver que $f(c) \in A$. Conclure.

EXERCICE 11.4 Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$. AD

1) Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2) Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leqslant \inf(A \cap B)$. Est-ce toujours une égalité ?
3) On pose $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est minorée et que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

EXERCICE 11.5 Parties adjacentes de R D
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B, b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, b admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

EXERCICE 11.6 Soit A une partie majorée de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup A$. AD
Montrer que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

EXERCICE 11.7 Endomorphismes croissants de $(\mathbf{R}, +)$ AD
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On pose $\alpha = f(1)$.

1) Déterminer $f(0)$.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha n$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = \alpha n$.
4) Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha r$.
5) Soit $x \in \mathbf{R}$.
   a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), à valeurs rationnelles, de limite x, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
   b) On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$.
6) Déterminer toutes les applications croissantes $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

EXERCICE 11.8 Un critère de densité AD
Soit A une partie de $\mathbf{R}$ telle que :

i) $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists (a,b) \in A^2, a < x < b$ ii) $\forall (a,b) \in A^2,\ \frac{a+b}{2} \in A.$

Prouver que A est dense dans $\mathbf{R}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 11

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.1

Soit $M = \sup(B)$. Alors M est un majorant de B, et donc de A, qui est donc une partie majorée de $\mathbf{R}$.
Elle admet donc une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.
Mais M étant un majorant de A, $\sup(A) \leqslant M$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.2

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{1} \leqslant 2$.
Donc déjà A est bornée, et étant non vide, admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Puisque $2 \in A$, c'est un majorant de A qui est dans A : c'est le plus grand élément de A, et donc sa borne supérieure.
Prouvons que $-1 = \inf(A)$. Nous savons déjà qu'il s'agit d'un minorant de A.
Utilisons la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{1}{2n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.
Alors $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} = -1 + \dfrac{1}{2n+2} < -1 + \varepsilon$.
Et donc nous venons de prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $-1 \leqslant a < -1 + \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $-1 = \inf(A)$.

2. Pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} < 1$, et donc B est bornée.
Elle est évidemment non vide, donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Montrons que $1 = \sup(A)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{p} > 1 - \varepsilon$.
Et puisque 1 est un majorant de B, nous venons de prouver qu'il existe $b \in B$ tel que $1 - \varepsilon < b \leqslant 1$, et donc $\sup B = 1$.

Puisque $0 \in B$, et que nous avons déjà prouvé que 0 est un minorant de B, 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$, donc C est majorée.
Et pour tout $\varepsilon > 0$, si n est tel que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, alors $1 - \varepsilon < \underbrace{(-1)^{2n}\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)}_{\in C} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant$ $(-1)^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < -1 + \varepsilon$.
Et donc comme pour les questions précédentes, on en conclut que $\inf C = -1$ et $\sup C = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.3

1. La partie A est non vide puisque f étant à valeurs dans $[0,1]$, on a $f(0) \leqslant 0$ et donc $0 \in A$.
De plus elle est évidemment majorée par 1.

2. Puisque 1 est un majorant de A, nécessairement[1] $c \leqslant 1$.
Et puisque $0 \in A$, $c \geqslant 0$ (la borne supérieure est un majorant de A, donc plus grande que tout élément de A).
Donc déjà, $c \in [0,1]$, de sorte que $f(c)$ est bien défini.
Soit x un élément de A. Alors $x \leqslant c$, et donc par croissance de f, $f(x) \leqslant f(c)$.
Et donc pour tout $x \in A$, $x \leqslant f(x) \leqslant f(c)$, si bien que $f(c)$ est un majorant de A. Et donc[2] $c \leqslant f(c)$.

3. Puisque $c \leqslant f(c)$, par croissance de f, $f(c) \leqslant f(f(c))$. Et donc $f(c) \in A$. Mais alors $f(c) \leqslant c$, puisque c est un majorant de A. Et donc par double inégalité, $f(c) = c$, donc c est un point fixe de f.

[1] La borne supérieure est le plus petit des majorants.

[2] Encore une fois : la borne sup. est le plus petit des majorants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.4

1. Soit $m = \min(\inf A, \inf B)$, et soit alors $x \in A \cup B$.
► Si $x \in A$, alors $x \geqslant \inf A \geqslant m$.
► Si $x \in B$, alors $x \geqslant \inf B \geqslant m$.

Donc m est un minorant de $A \cup B$, de sorte que $\inf(A \cup B)$ existe, et $\inf(A \cup B) \geqslant m$.

Considérons à présent M un minorant $A \cup B$.
Alors il s'agit d'un minorant de A, et donc[3] $M \leqslant \inf(A)$.
Et de même il s'agit d'un minorant de B, donc $M \leqslant \inf(B)$.
Et donc $M \leqslant m$.
On en déduit que m est plus grand que tout minorant de $A \cup B$: c'est le plus grand minorant de $A \cup B$, à savoir $\inf(A \cup B)$.

[3] $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

2. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, et donc $x \geqslant \inf(A)$ et $x \in B$ donc $x \geqslant \inf B$.
Par conséquent, $x \geqslant \max(\inf A, \inf B)$
Ainsi, $A \cap B$ est minorée par $\max(\inf A, \inf B)$, et en particulier est minorée et possède une borne inférieure.
Cette borne inférieure étant le plus grand des minorants, on a donc $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$.
Il ne s'agit pas toujours d'une égalité, comme le prouve l'exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, car alors $\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 2$ et $\max(\inf A, \inf B) = 1$.

Logique !
Être plus grand que deux nombres c'est être plus grand que le maximum des deux.

3. Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
Et donc $x \geqslant \inf(A) + \inf(B)$. Donc $A + B$ est minorée, par $\inf(A) + \inf(B)$, et donc possède une borne supérieure, qui est donc[4] supérieure ou égale à $\inf(A) + \inf(B)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\inf(A) \leqslant a < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leqslant b < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et donc si on pose $x = a + b \in A + B$ tel que $\inf(A) + \inf(B) \leqslant a + b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$.
On reconnaît alors la caractérisation d'une borne inférieure : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

[4] Encore une fois : la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Solution de l'exercice 11.5

Puisque B est non vide, il existe au moins un élément dans B, qui est alors un majorant de A. Donc A est majorée, non vide par hypothèse, et par conséquent admet une borne supérieure.
De même, tout élément de A est un minorant de B, qui admet donc une borne inférieure.

On a alors, $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.
Et donc, tout élément a de A est un minorant de B.
Mais par définition, $\inf B$ est le plus grand des minorants de B, donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant \inf B$.
Et donc $\inf B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit des minorants de A, donc $\sup A \leqslant \inf B$.

Remarque
À ce stade, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse impliquant des ε, et uniquement le fait que tout élément de A est plus petit que tout élément de B.

Prouvons à présent que l'inégalité que nous venons d'obtenir ne peut être stricte, et supposons par l'absurde que $\sup(A) < \inf(B)$, et soit alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$.
Alors, $\exists (a, b) \in A \times B$ tels que $b - a < \varepsilon \Leftrightarrow b < a + \varepsilon$. Mais alors

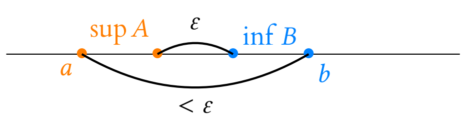


Figure 11.1 – On ne peut avoir $\sup A < \inf B$.

$$\inf(B) \leqslant b < a + \varepsilon \leqslant \sup(A) + \varepsilon = \inf(B).$$

Ceci est absurde, donc $\sup(A) = \inf(B)$.

Solution de l'exercice 11.6

On a déjà $A \setminus \{x\} \subset A$, donc si $y \in A \setminus \{x\}$, alors $y \leqslant \sup A$.
Donc $A \setminus \{x\}$ est borné, et $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup A$.

Par ailleurs, $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de $A \setminus \{x\}$. Si on avait $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$, alors x serait un majorant de A tout entier, puisque $x \leqslant x$ et pour tout $y \in A \setminus \{x\}$, $y \leqslant \sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$.
Donc x serait le plus grand élément de A, et donc $x = \sup(A)$.

Rappel
Un plus grand élément, lorsqu'il existe, est toujours une borne supérieure.

Ceci est contraire à l'hypothèse de l'énoncé, donc $x < \sup(A \setminus \{x\})$.
Et donc $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit de ces majorant $\sup(A) \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$ et donc $\sup(A) = \sup(A \setminus \{x\})$.

Solution de l'exercice 11.7

1. On a doit avoir, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$.
Et donc $f(0) = 0$.

2. On a déjà $f(0) = 0 = 0\alpha$ et $f(1) = \alpha$.
Il vient ensuite $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.
La récurrence est largement initialisée. Supposons donc que $f(n) = n\alpha$.
Alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, le résultat a déjà été prouvé.
Soit donc n un entier négatif.
Alors $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$.
Et donc $f(n) = -f(-n)$. Mais $-n \in \mathbf{N}$, et donc d'après la question précédente, $f(-n) = -n\alpha$.
Et donc $f(n) = n\alpha$.

4. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Alors $f(2r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.
Puis $f(2r) = f(r + 2r) = f(r) + f(2r) = f(r) + 2f(r) = 3f(r)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(kr) = kf(r)$.
Et donc en particulier, $f(p) = f(qr) = qf(r)$. Puisque $p \in \mathbf{Z}$, nous savons que $f(p) = \alpha p$, et donc $f(r) = \dfrac{1}{q} f(p) = \alpha \dfrac{p}{q} = \alpha r$.

5.a. Nous pourrions prendre pour a_n l'approximation décimale par défaut de x, et pour b_n son approximation décimale par excès. Mais il nous faudrait alors prouver qu'elles convergent vers x. Ce n'est pas bien dur, mais essayons autre chose.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors l'intervalle ouvert $\left]x - \dfrac{1}{n}, x\right[$ contient au moins un rationnel. Choisissons-en un, et appelons-le a_n.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \dfrac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, nécessairement $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. De même, en choisissant b_n rationnel dans $\left]x, x + \dfrac{1}{n}\right[$, on construit une suite de rationnels, supérieure à x, de limite x.

5.b. Si f est croissante, alors on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) \leqslant f(x) \leqslant f(b_n)$.
Mais a_n et b_n étant rationnels, on peut leur appliquer le résultat de la question 4 : $f(a_n) = \alpha a_n$ et $f(b_n) = \alpha b_n$.
Donc $\alpha a_n \leqslant f(x) \leqslant \alpha b_n$.
En passant à la limite, il vient donc $f(x) = \alpha x$.

6. Nous venons de prouver qu'une telle fonction est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

> ⚠ Attention !
> Ne pas oublier la synthèse !

Inversement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \alpha x$ vérifie bien

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$$

et elle est croissante si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.
Donc les fonctions cherchées sont les $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

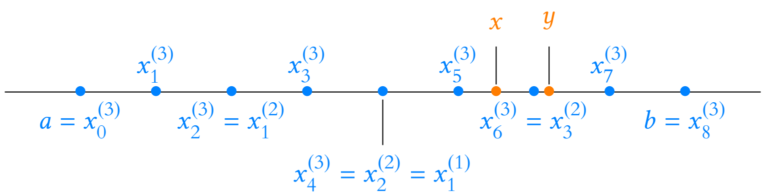
Solution de l'exercice 11.8

Notons que la seconde hypothèse signifie que A est «stable par milieux» : la moyenne de deux éléments de A est encore dans A.
Soit donc A une telle partie, et soient $x < y$ deux réels distincts. On souhaite prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $a \in I =]x, y[$.
Soient a, b deux éléments de A tels que $a < x < y < b$, et posons $y_1 = \frac{a+b}{2}$.
Il y a alors trois cas de figure :

- soit $y_1 \in]x, y[$, auquel cas on a bien élément de A dans I.
- soit $y_1 > y$. Dans ce cas, on peut poser $y_2 = \frac{a+y_1}{2} = \frac{3a+b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

— soit $y_1 < x$. Dans ce cas on peut pose $y_2 = \frac{y_1+b}{2} = \frac{a+3b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

Mais que faire dans les deux derniers cas si y_2 n'est pas là où on l'attend ?
En considérant des milieux successifs, il est facile de prouver[5] que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$, $x_k^{(n)} = a + k\dfrac{b-a}{2^n} \in A$.
Autrement dit, les points $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ partagent le segment $[a, b]$ en 2^n segments de même longueur.
Et alors si n est tel que $\frac{b-a}{2^n} < y - x$, alors nécessairement, l'un au moins des $x_k^{(n)}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ est dans $]x, y[$.
Ceci prouve donc qu'entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de A, et donc que A est dense dans $\mathbf{R}$.



[5] En réalité, il est facile de s'en convaincre, bien plus désagréable de l'écrire...

Détails
Je vous laisse le soin d'essayer d'écrire les détails, mais il n'est pas trop dur d'obtenir une formule (avec une partie entière) pour obtenir un tel k.

Suites numériques 12

12.1 Généralités sur les suites réelles

Définition 12.1 – Une **suite réelle** est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. On note généralement u_n au lieu de $u(n)$.
Et de même, on note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ au lieu de u.

Il faut bien comprendre que la distinction entre u_n et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la même qu'entre une fonction f et $f(x)$, l'image d'un nombre x par f.
Ainsi, u_n désigne un réel[1], quand $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ désigne la suite, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n).

[1] Donc un **nombre**.

Il est aussi possible considérer des suites définies à partir d'un certain rang n_0, c'est-à-dire dont l'ensemble de départ est $\mathbf{N} \setminus [\![0, n_0 - 1]\!]$.
Par exemple, si on pose $u_n = n^2 \ln(n)$ et $v_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$, alors u_n n'est défini que pour $n \geqslant 1$ et v_n n'est défini que pour $n \geqslant 2$.
Dans ce cas on note la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ pour bien marquer le fait qu'elle n'est pas définie sur $\mathbf{N}$ tout entier.

Définition 12.2 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **constante** si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **stationnaire** si il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_{n+1} = u_n$.

Une suite stationnaire est donc une suite qui est constante **à partir d'un certain rang.**

Alternative
Une récurrence facile prouve qu'une suite est constante si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$.
Et de même pour les suites stationnaires : à partir d'un certain rang, tous les termes sont égaux.

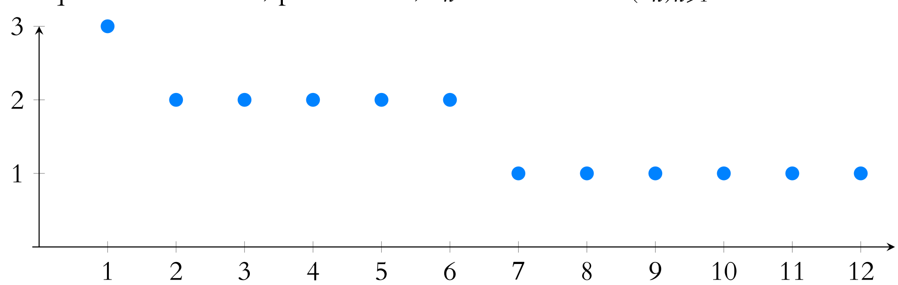
Exemples 12.3

▸ Toute suite décroissante (u_n) d'entiers naturels est stationnaire.
En effet, soit $A = \{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Alors A est une partie non vide de $\mathbf{N}$.
Elle contient donc un plus petit élément : $\exists k \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, u_k \leqslant u_n$.
Et alors pour $n \geqslant k$, on a à la fois $u_n \leqslant u_k$ par décroissance de la suite, et $u_k \leqslant u_n$ par ce qui précède. Donc $u_n = u_k$: la suite est stationnaire.

Corollaire
Il n'existe pas de suite d'entiers **naturels** strictement décroissante.

▸ Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \left\lfloor \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n+1})} + 1 \right\rfloor$.

Pour $\ln(\sqrt{n+1}) > 1$, on a $1 \leqslant \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n+1})} < 2$ et donc $u_n = 1$.
Mais, $\ln(\sqrt{n+1}) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > e \Leftrightarrow n+1 > e^2 \Leftrightarrow n > e^2 - 1$.
Puisque $e^2 - 1 \simeq 7.39$, pour $n \geqslant 8$, $u_n = 1$. Et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est stationnaire[2].



[2] Et dans la définition de suite stationnaire, on peut prendre ici $n_1 = 8$. Ou $n_1 = 9$. Ou $n_1 = 100$...

Définition 12.4 – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite, et pour tout $n \geqslant n_0$, soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition faisant intervenir la suite (u_n).
On dit que (u_n) vérifie $\mathscr{P}(n)$ **à partir d'un certain rang**, s'il existe $N \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.

Alternative
Il revient au même de dire que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie sauf pour un nombre fini de valeurs.

Par exemple, une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.
On peut également considérer des suites croissantes à partir d'un certain rang (c'est $\mathscr{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$), ou encore positives à partir d'un certain rang (c'est $\mathscr{P}(n) : u_n \geqslant 0$).
Notons que cette appellation n'a d'intérêt que si la valeur du N à partir duquel la proposition est vraie est sans importance, mais qu'il suffit de savoir qu'il existe.
Cela permet souvent d'écarter à peu de frais un nombre fini de valeurs problématiques. De toutes façons, la plupart des notions qui suivent, et en particulier tout ce qui touche à la notion de limite ne dépend pas des premiers termes de la suite.
Par exemple, si on pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas monotone, puisque $u_2 > u_1$, mais $u_4 < u_3$.
En revanche, on a $u_{n+1} < u_n$ dès que $n \geqslant 3$, et donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
On peut donc par exemple lui appliquer le théorème de la limite monotone et prouver qu'elle converge.

12.1.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 12.5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_n$ est :

1. **majorée** s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$.
   Un réel M tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant M$ est appelé un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. **minorée** s'il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant m$. Un tel réel m est appelé un minorant de la suite (u_n).
3. **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit s'il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Autrement dit
Une suite est majorée si l'application $u : n \mapsto u_n$ est majorée.
Ou encore si son ensemble image (qui est $\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$) est une partie majorée de $\mathbf{R}$.

⚠ Un majorant/minorant est une **constante**, qui ne dépend donc pas de n.

Par exemple, si $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, on a, pour tout entier n, $u_n \leqslant n$, mais ceci ne prouve sûrement pas que la suite (u_n) est majorée.
En revanche, si on se souvient[3] que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$, alors il vient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n \leqslant n^2 \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bien majorée et que 1 en est un majorant.

[3] Ce qui se retrouve par une simple étude de fonction.

Terminologie
On ne parle pas **du** majorant, mais bien d'**un** majorant, car si une suite est majorée, elle possède toujours une infinité de majorants.
Par exemple ici, (u_n) est également majorée par 2, par π, par e^{100}, etc

Proposition 12.6 : *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.*
Soit encore si et seulement si il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée, et soient M et m deux réels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
Soit alors $M_1 = \max(|M|, |m|) \geqslant 0$.
Alors on a $M \leqslant |M| \leqslant M_1$ et $m \geqslant -|m| \geqslant -M_1$, de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ -M_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant M_1.$$

Inversement, s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, alors $-M \leqslant u_n \leqslant M$, de sorte que (u_n) est à la fois majorée[4] et minorée[5] et donc bornée. □

[5] par $-M$.
[4] Par M.

12.1.2 Suites monotones

Puisqu'une suite est une application de l'ensemble ordonné $(\mathbf{N}, \leqslant)$ vers l'ensemble ordonné $(\mathbf{R}, \leqslant)$, nous avons déjà donné la définition de suite croissante : une suite (u_n) est croissante si et seulement si

$$\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2,\ m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n.$$

Toutefois, cette définition n'est pas forcément la plus facile à manipuler, et ce n'est pas la caractérisation des suites croissantes rencontrée au lycée.
Rassurons-nous, il s'agit bien de la même notion comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 12.7 : *Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. Alors (u_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.*

Démonstration. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n+1 \geqslant n$ et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Inversement, si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors pour m, n deux entiers avec $m \geqslant n$,

$$u_m = u_{(m-1)+1} \geqslant u_{m-1} \geqslant u_{m-2} \geqslant \cdots \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Et donc (u_n) est croissante. □

Pointillés ?
Une récurrence (finie) serait probablement plus rigoureuse, mais vous avez compris l'idée.

Définition 12.8 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est dite :

- **croissante** si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- **décroissante** si $\forall n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante.

Remarque
Une suite peut être à la fois croissante et décroissante, mais c'est le cas si et seulement si elle est constante.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut notamment étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si ce signe est toujours positif, (u_n) est croissante (car $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$), s'il est toujours négatif, (u_n) est décroissante, et si ce signe n'est pas constant[6], alors (u_n) n'est pas monotone.

[6] C'est-à-dire s'il dépend de la valeur de n.

Proposition 12.9 : *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite **à valeurs strictement positives**. Alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$).*

Démonstration. Il s'agit seulement de remarquer que $u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
Notons que ceci ne vaut plus si u_n n'est pas positif, car il faut alors changer le sens de l'inégalité ! □

Remarque
En réalité, ceci s'adapte assez bien aux suites à termes négatifs : il suffit de changer le sens des inégalités. Par contre, plus rien ne fonctionne pour les suites qui ne sont pas de signe constant.

Ceci nous fournit donc une autre méthode pour étudier la monotonie des suites à termes positifs.
On préférera cette méthode à la précédente pour les suites dont le terme général contient un produit ou une factorielle, c'est-à-dire lorsque le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie.
Au contraire, pour les suites faisant apparaître une somme, cette méthode a peu de chances d'aboutir.

Exemple 12.10

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
Alors il est clair que la suite (u_n) est à termes positifs, et on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2(n+1))!\ (n!)^2}{((n+1)!)^2\ (2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 2\frac{2n+1}{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1.$$

Et donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Définition 12.11 – Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
On dit que (u_n) est **strictement monotone** si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Notons qu'en particulier, une suite strictement croissante est croissante.
Les méthodes ci-dessus s'adaptent sans difficulté aux suites strictement monotones : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante si et seulement si pour tout n, $u_{n+1} > u_n$, et dans le cas d'une suite positive, si et seulement si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

12.2 LIMITE D'UNE SUITE

12.2.1 Suites convergentes

Définition 12.12 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge vers un réel** ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

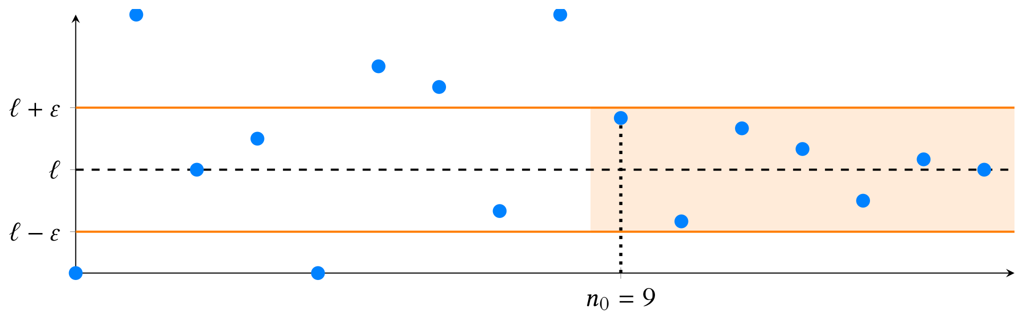
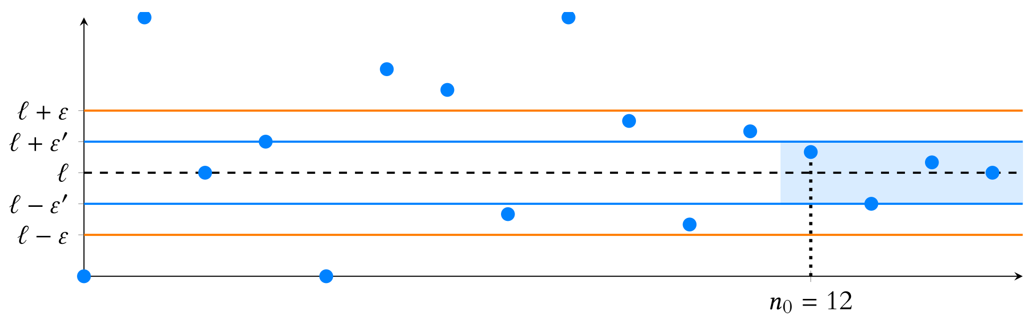


FIGURE 12.1 – La suite (u_n) converge vers ℓ : pour $n \geqslant n_0$, u_n est dans la «bande» $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

Remarques.

- Intuitivement, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, l'écart entre u_n et ℓ est inférieur à ε.
- Il n'y a pas unicité de n_0 : dans le cas de la suite dessinée ci-dessus, $n_0 = 10$ convient également, et plus généralement, tout $n_0 \geqslant 9$ convient.
- Il se peut que pour (un ou plusieurs) $n < n_0$, on ait également $|u_n - \ell| < \varepsilon$. C'est par exemple ici le cas pour $n = 7$. L'essentiel n'est donc pas de trouver un terme u_n suffisamment proche de ε, mais de trouver à partir de quel rang **tous les termes** qui suivent sont suffisamment proches de ℓ.
- La valeur de n_0 dépend de ε : si ε diminue, il faudra augmenter la valeur de n_0. Par exemple, sur le dessin ci-dessous[7], avec $\varepsilon' < \varepsilon$, il faut prendre $n_0 \geqslant 12$.
- Il est quasi-immédiat que $u_n \to \ell$ si et seulement si $u_n - \ell \to 0$.
En effet, dans la définition de la convergence, il s'agit de noter que $|u_n - \ell| = |(u_n - \ell) - 0|$.

[7] Avec la même suite que précédemment.



On peut prendre dans la définition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ou $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, cela conduit à la même notion de convergence.
En effet, le fait que les inégalités larges impliquent les inégalités strictes est évident.
Et inversement, supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Prenons alors $\varepsilon > 0$. En appliquant la définition précédente à $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Et donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Moralité

Ne vous souciez pas trop de savoir si il nous faut $< \varepsilon$ ou $\leqslant \varepsilon$ dans la définition, c'est la même chose, et on peut utiliser indifféremment l'un ou l'autre.
En revanche, c'est bien un pour tout $\varepsilon > 0$, et surtout pas pour $\varepsilon \geqslant 0$: si la proposition est vraie pour $\varepsilon = 0$, alors la suite (u_n) est stationnaire : à partir d'un certain rang, tous ses termes sont nuls.

La proposition qui suit vient traduire un principe général : les premiers[8] termes d'une suite ne changent pas son éventuelle limite.
En effet, la limite ne regarde que ce qui se passe «pour n suffisamment grand».
Et donc on peut toujours changer un nombre fini de termes d'une suite sans en changer la limite éventuelle.

[8] Les deux premiers, les 100 premiers ou les 10^100 premiers.

Proposition 12.13 (Indifférence des premiers termes) : *Si deux suites (u_n) et (v_n) sont égales à partir d'un certain rang, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. Puisque (u_n) et (v_n) sont égales à partir d'un certain rang, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $u_n = v_n$.
Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et soit $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Soit alors $n_1 = \max(n_0, N)$, et soit $n \geqslant n_1$. Alors

$$|v_n - \ell| = |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Nous venons de prouver que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Et donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. La réciproque se prouve exactement de la même manière. □

La conséquence est que la plupart des théorèmes qui vont suivre restent vrais si leurs hypothèses sont satisfaites à partir d'un certain rang seulement.
Par exemple pour le théorème de la limite monotone[9], si on a une suite qui n'est que croissante à partir d'un certain rang, alors le théorème s'applique tout de même.

[9] Que vous connaissez déjà : il dit qu'une suite croissante et majorée converge.

Proposition 12.14 (Unicité de la limite) : *Si (u_n) converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit, si une suite converge, c'est vers un unique réel.*
Ce réel est alors appelé **la limite de la suite** *(u_n) et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou bien $\ell = \lim u_n$, ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Remarque

Notons que pour une suite, il n'est pas vraiment nécessaire de préciser vers quoi tend vers n : il tend nécessairement vers $+\infty$.

Démonstration. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que (u_n) converge à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2.
Supposons par l'absurde que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$.
Alors[10] il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
De même, il existe un entier $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Alors pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Or, on a $\ell_1 - \ell_2 = \ell_1 - u_n + (u_n - \ell_2)$ de sorte que par l'inégalité triangulaire,

$$|\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Soit encore $|\ell_1 - \ell_2| < \dfrac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$. □

[10] Car (u_n) converge vers ℓ_1.

Définition 12.15 – S'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite **convergente**. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente**.

Exemple 12.16

La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente.
En effet, supposons par l'absurde qu'elle converge vers ℓ, et choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la convergence : il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$.
Mais alors, par l'inégalité triangulaire, on a

$$|u_{n_0} - u_{n_0+1}| = |(u_{n_0} - \ell) + (\ell - u_{n_0+1})| < |u_{n_0} - \ell| + |u_{n_0+1} - \ell| \leqslant 1.$$

Or, la différence de deux termes consécutifs de (u_n) vaut toujours ± 2, et donc on arrive à $2 \leqslant 1$, ce qui est absurde.

⚠ Il est hors de question d'utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir prouvé la convergence de la suite (soit par un calcul direct de la limite, soit à l'aide d'un des théorèmes d'existence ci-après).
Cette notation n'aura du sens que dans le cas d'une suite convergente[11], ce qui n'est pas le cas de toutes les suites.
Et notamment, la négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ n'est pas $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \neq 1$.
Il existe des suites qui n'ont pas de limite !

[11] Ou éventuellement des limites égales à $\pm\infty$ que nous allons définir dans un instant.

Proposition 12.17 : *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, et soit $\ell = \lim u_n$.
Alors[12] il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. Et par conséquent, pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1.$$

Posons alors $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |\ell| + 1)$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, il y a alors deux cas de figure :

- soit $n \geqslant n_0$, auquel cas $|u_n| \leqslant |\ell| + 1 \leqslant M$;
- soit $n < n_0$, auquel cas, par définition de M, $|u_n| \leqslant M$.

Ainsi, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$, et donc (u_n) est bornée. □

[12] En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de limite.

Remarque
Cette preuve montre qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

⚠ La réciproque est archi-fausse, comme le prouve la suite de terme général $(-1)^n$.

12.2.2 Limites infinies

Définition 12.18 – On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **tend vers** $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A.$$

Ceci signifie que quel que soit le réel A qu'on se fixe, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont plus grands que A.

Exemple 12.19

La suite $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$. En effet, soit $A \geqslant 0$.

- si $A \leqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant A$, donc on peut prendre $n_0 = 0$.
- si $A > 0$, soit $n_0 = \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 1$. Alors $n_0 \geqslant \sqrt{A}$, et donc pour $n \geqslant n_0$, il vient $u_n \geqslant \sqrt{A}^2 \geqslant A$.

Proposition 12.20 : *Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est minorée*[13].

[13] Mais n'est évidemment pas majorée.

Démonstration. Soit $A = 1$. Alors $\exists n \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$.
Notons alors $m = \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}, 1)$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant 1 \geqslant m$.
Et pour $n < n_0$, $u_n \geqslant \min(u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}) \geqslant m$. Et donc m est un minorant de (u_n). □

Définition 12.21 – On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < B.$$

Notons qu'en particulier, une suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée[14] (resp. minorée) et donc qu'elle n'est pas convergente.
On prendra donc bien garde au fait qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ est une suite divergente !
D'ailleurs, on dit souvent que (u_n) diverge vers $\pm\infty$.
Une suite convergente est donc une suite qui admet une limite **finie.**

[14] Car elle prend des valeurs plus grandes que n'importe quel réel.

Proposition 12.22 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors (u_n) est majorée.*

⚠ On n'utilisera la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ que pour une suite (u_n) dont on sait qu'elle admet une limite (finie ou non).
Par exemple, si $u_n = (-1)^n n$, alors la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ne veut rien dire !

12.2.3 Notion de voisinage

Bien que différentes, vous constatez que les notions de limites finies et infinies ont certaines caractéristiques en commun.
Il existe en fait un vocabulaire qui permet d'unifier ces deux définitions : celui de voisinage.

Définition 12.23 – Soit $x \in \overline{\mathbf{R}}$. On appelle **voisinage de** x tout ensemble de réels de la forme :

1. $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, si x est un réel.
2. $]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbf{R}$ si $x = +\infty$
3. $]-\infty, B[$, avec $B \in \mathbf{R}$ si $x = -\infty$.

On note alors $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 12.24 : *Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage V de ℓ, alors, à partir d'un certain rang, (u_n) est à valeurs dans V. Soit encore*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in V.$$

Démonstration. C'est une simple combinaison des définitions de voisinage et de limite (finie ou infinie). □

On dit parfois que (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ pour dire que (u_n) est convergente, ou tend vers $\pm\infty$.
Ainsi, toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. En revanche, ce n'est pas le cas de $(-(1)^n)_n$.

12.3 Opérations sur les limites ou l'art de découper les ε

12.3.1 Somme de limites

Une première observation : une suite (u_n) tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si $(u_n - \ell)$ tend vers 0. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ |u_n - \ell - 0| < \varepsilon.$$

Ce sont donc bien les même définitions.

Lemme 12.25. Soit (u_n) une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Démonstration. Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.
Et donc après multiplication par $|\lambda|$, on a, pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda\ell| < \varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda\ell| < \varepsilon$.
Et donc $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Pour le sens réciproque, il suffit d'appliquer le sens direct avec (λu_n) et $\frac{1}{\lambda}$ en lieu et place de (u_n) et λ. □

Lemme 12.26. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limite nulle. Alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_2$, $|v_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$, de sorte que pour $n \geqslant n_0$, on a à la fois $n \geqslant n_1$ et $n \geqslant n_2$, et donc

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc ceci prouve bien que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

> **Proposition 12.27 :** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda u_n + \mu v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.*

Démonstration. Nous allons prouver que $\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda\ell_1 + \mu\ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est équivalent au résultat annoncé.
Commençons par noter que $\lambda(u_n - \ell_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, la suite[15] de terme général λ est bornée et $u_n - \ell_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la proposition 12.33 s'applique.
De même, $\mu(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc par le lemme 12.26, $\lambda(u_n - \ell_1) + \mu(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

[15] Constante !

Remarque. Notons en particulier que ceci prouve que la somme de deux suites convergentes est convergente.
Nous n'énoncerons aucun résultat concernant les sommes de suites divergentes, et pour cause : la somme de deux suites divergentes peut converger comme elle peut diverger.
Par exemple, $n + (1 - n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors que c'est la somme de deux suites divergentes, et $n + ((-1)^n - n)$ diverge, bien qu'également somme de deux suites divergentes.
En revanche, il est toujours vrai que la somme d'une suite convergente et d'une suite convergente soit divergente.
Par exemple, supposons que (u_n) tende vers une limite finie ℓ et que (v_n) diverge. Supposons par l'absurde que $(u_n + v_n)$ converge vers une limite ℓ'. _ Alors $v_n = (u_n + v_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' - \ell$, contredisant la divergence de (v_n).

Proposition 12.28 : *Si (u_n) est minorée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $m \leqslant u_n$.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $v_n > A - m$.
Et alors, pour $n \geqslant n_0$, $u_n + v_n > m + A - m \geqslant A$.
Et donc $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Corollaire 12.29 – *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$, et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer qu'une suite convergente ou qui tend vers $+\infty$ est minorée. □

Sur le même principe, on prouve que :

Proposition 12.30 : *Soit (u_n) une suite majorée. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Corollaire 12.31 – *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Notons qu'on ne dit rien de la somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite qui tend vers $-\infty$, tout bonnement car il s'agit[16] d'une forme indéterminée.
Ce qui veut dire qu'il n'existe pas de règle générale, mais que vous devrez vous débrouiller au cas par cas !

[16] Toujours.

Exemples 12.32

- Si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to -\infty$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = 1 - n$. Alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to 1$.
- Si $u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to -\infty$ et $(u_n + v_n)$ diverge.

Une manière pratique de synthétiser tout cela : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, et si $\ell_1 + \ell_2$ est défini dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$.

12.3.2 Produit et quotient de limites

Commençons par une proposition qui sert très souvent :

Proposition 12.33 : *Le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tend vers 0.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0 et soit (v_n) une suite bornée. Notons M un réel tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|v_n| \leqslant M$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, il vient $|u_n v_n| \leqslant |u_n| \cdot |v_n| < \dfrac{\varepsilon}{M} M \leqslant \varepsilon$.
Et donc ceci prouve bien que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n v_n| < \varepsilon$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$. □

Détails
C'est la **définition** de $u_n \to 0$, où on a pris $\frac{\varepsilon}{M}$ au lieu d'ε (ce qui est toujours possible puisque la propriété est vraie **pour tout** nombre positif).

Proposition 12.34 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.*

Démonstration. On a $u_nv_n = u_n(v_n - \ell_2) + u_n\ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + (u_n - \ell_1)\ell_2 + \ell_1\ell_2$.
Puisque (u_n) est convergente, elle est bornée, et donc la proposition 12.33 s'applique : $u_n(v_n - \ell_2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, $u_n - \ell_1 \to 0$ et la suite constante égale à ℓ_2 est bornée, et donc $(u_n - \ell_1)\ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par somme de limites,

$$u_nv_n = \underbrace{u_n(v_n - \ell_2)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{(u_n - \ell_1)\ell_2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \ell_1\ell_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2.$$

□

Lemme 12.35. Soient (u_n) et (v_n) deux suites, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (v_n) minorée à partir d'un certain rang par un réel $m > 0$. Alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_nv_n \geqslant mv_n$.
Soit donc $A > 0$. Alors $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $v_n \geqslant \dfrac{A}{m}$.
Et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_nv_n \geqslant mv_n \geqslant m\frac{A}{m} \geqslant A$.
Et donc $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Corollaire 12.36 – *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors à partir d'un certain rang, elle est plus grande que 1.
Et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$, et donc $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$.
Donc dans les deux cas, le lemme précédent s'applique. □

De même, on prouve que

Proposition 12.37 :
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to +\infty$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell > 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*
- *Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, avec $\ell < 0$, et si $v_n \to -\infty$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Comme pour le cas des sommes de limites, si $u_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbf{R}}$ et si $v_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, alors si $\ell_1\ell_2$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $u_nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1\ell_2$.

Proposition 12.38 : *Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel $\ell \neq 0$. Alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$, de sorte que $\dfrac{1}{u_n}$ est bien défini.*
On a alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$ car $\ell \neq 0$. Par définition d'une limite, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Prenons un tel n_0.
Alors, pour $n \geqslant n_0$, d'après l'inégalité triangulaire renversée,

$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \geqslant |\ell| - |u_n - \ell| \geqslant |\ell| - \varepsilon \geqslant \frac{|\ell|}{2} > 0.$$

En particulier[17], $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$.

On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|}$.
En utilisant la minoration de $|u_n|$ que nous venons de prouver, il vient donc :

$$0 \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{|u_n|\,|\ell|} \leqslant \frac{|u_n - \ell|}{\frac{|\ell|}{2}|\ell|} \leqslant 2\frac{|u_n - \ell|}{|\ell|^2}.$$

Or, $\dfrac{|u_n - \ell|}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \frac{|\ell|^2\varepsilon}{2}$.
Et alors pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| < \varepsilon$.
Par conséquent $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$. □

[17] Un nombre est nul si et seulement si sa valeur absolue est nulle.

Corollaire 12.39 – *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, avec $\ell_2 \neq 0$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n\dfrac{1}{v_n}$, et d'utiliser les résultats vus précédemment pour l'inverse et le produit de limites. □

L'inverse d'une suite de limite nulle n'a pas toujours de limite, comme le prouve le cas de la suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, qui tend bien vers 0 car produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.
Mais $\dfrac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'admet pas de limite[18].
En revanche, on dispose de résultats pour les suites de signe constant.

[18] Considérer les suites des termes d'ordre pair et d'ordre impair pour s'en convaincre.

Proposition 12.40 : *Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs (resp. négatifs), et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$).

Démonstration. Supposons (u_n) strictement positive, et soit $A > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{A}$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{u_n} \geqslant A$. Et par conséquent, $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Le cas d'une suite strictement négative se traite de la même manière en considérant $A < 0$. □

Remarque
Notons qu'en particulier, cette proposition s'applique si $u_n \to +\infty$ ou si $u_n \to -\infty$. Mais aussi à des suites sans limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, comme $(-2)^n$.

Proposition 12.41 : *Soit (u_n) une suite telle que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Commençons par noter que $\dfrac{1}{u_n}$ est bien définie, au moins pour n suffisamment grand. En effet, par définition d'une limite infinie, et en prenant $A = 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \geqslant 1$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$.

Considérons à présent $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Et donc en passant à l'inverse, pour $n \geqslant n_1$, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$.

Ceci prouve que $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

12.3.3 Tableau récapitulatif

Les tableaux suivants récapitulent les principaux résultats sur les limites :

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbf{R}$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $+\infty$	$\ell \in \mathbf{R}$ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	**F. I.**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Remarquons que ceci nous donne également la limite de λu_n en fonction de celle de u_n (il suffit de prendre (v_n) constante égale à λ).
Seul le cas $\lambda = 0$ ne figure pas dans ce tableau, mais je suis à peu près sûr que vous savez trouver la limite de $0 \times u_n$...

12.3.4 Limites et inégalités

Le lemme qui suit sera largement généralisé dans le chapitre sur la continuité.

Lemme 12.42. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire renversée, $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Et donc, pour $n \geqslant n_0$, $||u_n| - |\ell|| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$. □

⚠ La réciproque est complètement fausse, par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, mais (u_n) est divergente.
La réciproque est toutefois vraie dans un cas particulier : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 12.43 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Remarque
Ce résultat reste valable si l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang.

⚠ Ce résultat suppose déjà que l'on sait les suites convergentes. Il ne peut en aucun cas suffire à prouver l'existence d'une limite !
Par exemple, bien que pour tout entier n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, il n'est pas question d'écrire qu'alors $-1 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \leqslant 1$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ ne veut rien dire !

Détails
Ici, -1 et 1 sont vus comme deux suites constantes, donc convergentes.

Démonstration. Par différence de limites, $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 - \ell_1$.
Et donc $|v_n - u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell_2 - \ell_1|$.
Or puisque $u_n \leqslant v_n$, $v_n - u_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n - u_n| = v_n - u_n$.
Et donc par unicité de la limite de $v_n - u_n$, il vient $|\ell_2 - \ell_1| = \ell_2 - \ell_1$, de sorte que $\ell_2 - \ell_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ell_1 \leqslant \ell_2$. □

⚠ Il n'existe pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : si $u_n < v_n$, la seule chose que l'on puisse affirmer[19], qui découle directement de la proposition précédente, c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Il se peut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, mais ce n'est pas toujours le cas.
Par exemple, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, mais pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

[19] Sous réserve que ces suites convergent.

Lemme 12.44. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque
Notons que ceci prouve directement que (u_n) converge, ce qui n'était pas dans les hypothèses.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|v_n - 0| \leqslant \varepsilon$.
Mais $v_n \geqslant 0$, de sorte que $|v_n| = v_n$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\underbrace{|u_n|}_{=u_n} \leqslant \varepsilon$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Théorème 12.45 (Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites telles que :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Remarque
Notons que ce résultat englobe le lemme précédent : il suffit de prendre $u_n = 0$ et $\ell = 0$.

Démonstration. On a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$.
Mais $w_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc par le lemme précédent, $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que $v_n = u_n + (v_n - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + 0 = \ell$. □

Exemple 12.46

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2+k}{2k+n^3}$.
Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{3n^2+1}{2n+n^3} \leqslant \dfrac{3n^2+k}{n^3+2k} \leqslant \dfrac{3n^2+n}{n^3+2}$.
En sommant pour k allant de 1 à n, il vient

$$n\frac{3n^2+1}{n^3+2n} \leqslant u_n \leqslant n\frac{3n^2+n}{n^3+2}.$$

Or, $\dfrac{3n^3+n}{n^3+2} = \dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Et de même, $\dfrac{3n^3+n^2}{n^3+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.

Méthode
Rappelons que pour majorer une fraction (positive), il suffit de majorer son numérateur et de minorer son dénominateur.

Proposition 12.47 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Nous ne prouvons que le point 1), la preuve de 2) étant similaire.
Soit $A \in \mathbf{R}$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$.
Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant A$.
Et ainsi, nous venons de prouver que $\forall A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \geqslant A$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

12.3.5 Limites usuelles

Proposition 12.48 (Limite d'une suite géométrique) : *Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :*

1. *si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$*
2. *si $q \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$*
3. *si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.*
4. *si $q < -1$, alors la suite $(q^n)_n$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.*

Démonstration.

1. Si $q > 1$, alors nous avons prouvé[20] que pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{R}$ tel que $q^n \geq A$.
Puisque de plus (q^n) est croissante, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $q^n \geqslant q^{n_0} \geqslant A$.
Et donc ceci prouve que
$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0, q^n \geqslant A.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q \in]-1,1[$, alors pour tout n, $0 \leqslant |q^n| \leqslant |q|^n$.
Mais $\dfrac{1}{|q|} > 1$, et donc par le point précédent, $\dfrac{1}{|q|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc $|q|^n = \dfrac{1}{\frac{1}{|q|^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $q = 1$, il n'y a rien à dire.
4. Enfin, si $q < -1$, alors $q^{2n} = (q^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $q^2 > 1$.
Donc (q^n) n'est pas majorée, et donc ne peut converger, ni tendre vers $-\infty$.
Et de même, $q^{2n+1} = q\left(q^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, de sorte que (q^n) n'est pas minorée, et donc ne tend pas vers $+\infty$.
Et donc (q^n) n'a pas de limite dans $\overline{\mathbf{R}}$.

□

[20] Juste après le fait que $\mathbf{R}$ soit archimédien.

Il est très simple de constater que $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc que pour $x \in \mathbf{R} \setminus [-1,1]$, le calcul de l'éventuelle limite de $\dfrac{x^n}{n!}$ fait apparaître une forme indéterminée.

Proposition 12.49 : *Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Posons alors $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc en particulier, à partir d'un certain rang n_0, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, et donc $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n|$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.
Et donc par le théorème des gendarmes $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Ce résultat signifie que $n!$ tend vers $+\infty$ «plus rapidement» que toute suite géométrique.
Nous donnerons bientôt d'autres résultats allant dans ce sens, avec l'idée de comparer les vitesse de convergence des suites.

12.4 Théorèmes d'existence de limite

Tous les théorèmes précédemment rencontrés[21] ne s'appliquent que lorsqu'on sait que certaines suites admettent des limites.
Dans cette partie, nous prouvons deux grands théorèmes qui ne nécessitent pas de savoir qu'une limite existe, mais prouvent bien son existence.
Ce qui permet ensuite, par exemple, un passage à la limite dans des inégalités, afin de déterminer la valeur de la limite en question.

[21] À l'exception du théorème des gendarmes.

12.4.1 Le théorème de la limite monotone

Théorème 12.50 (Théorème de la limite monotone) :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante. Alors :*
   - *si (u_n) est majorée, elle converge, et sa limite est* $\sup\{u_n, n\in\mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante. Alors :*
   - *si (u_n) est minorée, elle converge, et sa limite est* $\inf\{u_n, n\in\mathbf{N}\}$
   - *si (u_n) n'est pas minorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Traitons le cas d'une suite croissante, celui d'une suite décroissante s'en déduit en changeant le sens des inégalités.

► **Supposons (u_n) majorée.**

Notons alors $\ell = \sup\{u_n,\ n\in\mathbf{N}\}$, et considérons $\varepsilon > 0$ fixé.
Alors, d'après la caractérisation epsilonesque d'une borne supérieure, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $\ell-\varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant \ell$.
Et donc par croissance de (u_n), pour $n\geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant \ell-\varepsilon$.
D'autre part, (u_n) étant majorée[22] par ℓ, il vient donc, pour tout $n\geqslant n_0$,

$$\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \Rightarrow -\varepsilon \leqslant u_n-\ell \leqslant 0 \Rightarrow |u_n-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Et donc nous avons prouvé que $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$, et donc (u_n) converge vers ℓ.

Remarque
Notons que ce sup existe bien puisque nous considérons une partie non vide et majorée de **R**.

[22] Par définition, ℓ est le plus petit majorant de la suite.

► **Supposons (u_n) non majorée.**

Soit $A\in\mathbf{R}$. Alors A n'est pas un majorant de (u_n), et donc il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $u_{n_0}\geqslant A$.
Et par croissance de (u_n), pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n\geqslant u_{n_0}\geqslant A$.
Nous avons donc prouvé que $\forall A\in\mathbf{R},\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant n_0 \Rightarrow u_n\geqslant A$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Notons que pour les suites monotones, cela traite tous les cas de figure : une suite croissante est soit convergente, soit diverge vers $+\infty$. Il n'y a pas d'autres cas possibles ! Notons également qu'il s'agit là d'une théorème d'existence, qui permet souvent de prouver qu'une limite existe, mais rarement de la calculer (sauf dans les cas où on connaît la valeur de $\sup\{u_n,\ n\in\mathbf{N}\}$).

Exemple 12.51

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n\geqslant 1,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

Alors pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}-u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$.

Donc (u_n) est croissante.

Prouvons par récurrence sur n que $\forall n\geqslant 1,\ u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$.

Pour $n=1$, c'est trivial. Supposons donc que $u_n\leqslant 2-\frac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} \leqslant 2-\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $u_n\leqslant 2-\frac{1}{n}$, et en particulier, $u_n\leqslant 2$, de sorte que (u_n) est majorée.
Étant croissante, par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Notons que tout ce que nous savons au sujet de sa limite est qu'elle est inférieure ou

égale à 2. Mais les calculs que nous venons de faire ne nous permettent pas de la calculer.

Remarque

Mais nous avons déjà rencontré cette limite : elle vaut $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Enfin, remarquons que ceci nous dit que si une suite croissante converge vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$ puisque $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est un majorant de la suite (u_n).
Et de même, une suite décroissante convergente est toujours supérieure ou égale à sa limite.

12.4.2 Suites adjacentes

Définition 12.52 – Deux suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si

1. l'une est croissante
2. l'autre est décroissante
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Proposition 12.53 : *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*
Plus précisément : si (a_n) et (b_n) sont adjacentes, que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante, alors leur limite commune ℓ vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $a_m \leqslant \ell \leqslant b_n$.

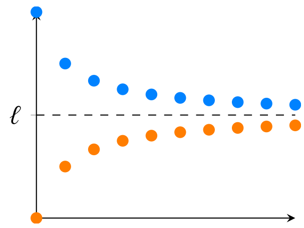


FIGURE 12.2– Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Démonstration. Puisque $(a_n - b_n)$ est convergente, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $-M \leqslant a_n - b_n \leqslant M$.
D'autre part, (b_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant b_0$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n + (a_n - b_n) \leqslant b_0 + M$.
Ceci prouve donc que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, et puisqu'elle est croissante, elle est donc convergente. Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On prouve sur le même principe que (b_n) est décroissante et minorée, donc qu'elle converge vers un réel ℓ_2.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = \ell_1 - \ell_2$.
Et donc, par unicité de la limite de $(a_n - b_n)$, $\ell_1 - \ell_2 = 0 \Leftrightarrow \ell_1 = \ell_2$.
Notons donc ℓ cette limite commune aux deux suites. En vertu de la remarque suivant le théorème 12.50, on a, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $a_m \leqslant \ell$ car (a_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ell \leqslant b_n$ car (b_n) est décroissante. □

Exemple 12.54

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

Alors $v_n - u_n = \dfrac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$, donc $(u_n)_n$ est croissante.

Enfin, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{1-n}{(n+1)!}$, qui est négatif pour $n \geqslant 1$.
Et donc $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Par conséquent, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et convergent vers une même limite.
Nous prouverons plus tard que cette limite commune aux deux suites vaut e.

12.5 SUITES EXTRAITES

Définition 12.55 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On appelle **suite extraite de** (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une application **strictement croissante.**

Pour bien comprendre cette définition, un peu mystérieuse au premier abord, essayons de bien comprendre ce que représente la fonction[23] φ.
Une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ n'est rien d'autre qu'une suite strictement croissante d'entiers. Elle va donc prendre comme valeurs certains entiers, et pas d'autres.
Par exemple $\varphi(0) = 2, \varphi(1) = 3, \varphi(2) = 5, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 11, \varphi(5) = 13, \dots$.
Étant strictement croissante, elle ne peut pas «revenir en arrière», et donc ne prendra jamais les valeurs $0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots$.
Et alors la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite dont les premiers termes sont

$$u_{\varphi(0)} = u_2, u_{\varphi(1)} = u_3, u_{\varphi(2)} = u_5, u_{\varphi(3)} = u_7, u_{\varphi(4)} = u_{11}, \dots$$

C'est donc la suite $(u_n)_n$, à laquelle on a «enlevé» certains termes.

[23] φ est généralement appelée une **extractrice**.

Question subsidiaire — Avez-vous reconnu cette suite ? C'est la suite des nombres premiers !

Exemples 12.56

- La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de (u_n) : on a ici pris $\varphi(n) = n + 1$.
- Les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Détails — La suite $(u_{2n})_n$ est la suite des termes d'ordre pair de (u_n), ses premiers termes sont u_0, u_2, u_4, u_6, ... De même, $(u_{2n+1})_n$ est formée des termes d'ordre impair de (u_n).

Lemme 12.57. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n.
Puisque $\varphi(0) \in \mathbf{N}$, $\varphi(0) \geqslant 0$, donc la récurrence est initialisée.
Supposons que $\varphi(n) \geqslant n$. Alors, par stricte croissance de φ, $\varphi(n + 1) > \varphi(n) \geqslant n$.
Or $\varphi(n + 1)$ est un entier : s'il est supérieur strictement à n, il est donc supérieur ou égal à $n + 1$.
Et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. □

Astuce — Quand on écrit $u_n \to \ell$, avec $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, il s'agit là d'un moyen pratique d'écrire que (u_n) est soit convergente vers un réel ℓ, soit tend vers $+\infty$, soit tend vers $-\infty$.

Proposition 12.58 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend également vers ℓ.*

Démonstration. Soit V un voisinage de ℓ. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in V$.
En particulier, si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice, alors pour $n \geqslant n_0$, on a $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_0) \geqslant n_0$, et donc $u_{\varphi(n)} \in V$.
Ceci étant vrai quel que soit le voisinage V de ℓ, on a bien prouvé que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Ce résultat permet notamment de prouver qu'une suite n'a pas de limite[24] : il suffit d'en trouver une suite extraite qui n'a pas de limite, ou encore deux suites extraites qui ont des limites différentes.

[24] Finie ou infinie.

Exemples 12.59

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n$.
Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à 1, donc si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, celle-ci vaut nécessairement 1.
De même, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à -1, donc $u_n \not\to 1$.
Et donc on en déduit que (u_n) n'admet pas de limite.
- Soit $v_n = \cos(\pi\sqrt{n})$. Alors $v_{n^2} = \cos\left(\pi\sqrt{n^2}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$.
Donc la suite extraite $(v_{n^2})_{n\geqslant 0}$ ne possède pas de limite[25], donc (v_n) n'en possède pas non plus.

[25] Ni finie ni infinie.

Proposition 12.60 : *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite[26] dans $\overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ ont une **même** limite.*

[26] Finie ou infinie.

⚠ L'exemple de la suite de terme général $(-1)^n$ prouve qu'il faut bien que les deux suites des termes d'ordre pairs et d'ordre impair aient la même limite, et qu'il ne suffit pas qu'elles possèdent chacune une limite.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé l'une des deux implications : si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, puisqu'il s'agit de deux suites extraites de (u_n).

Passons à la réciproque et supposons qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.
Soit alors V un voisinage de ℓ. Puisque $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_{2n} \in V$.
De même, il existe n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $u_{2n+1} \in V$.
Et donc en posant $N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$, alors pour $n \geqslant N$, $u_n \in V$. En effet, soit $n \geqslant N$. Alors

- Si n est pair, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p$. Puisque $n \geqslant N \geqslant 2n_0$, on a donc $p \geqslant n_0$ et donc $u_n = u_{2p} \in V$.
- Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Puisque $n \geqslant N \geqslant 2n_1 + 1$, on a donc $p \geqslant n_1$ et donc $u_n = u_{2p+1} \in V$.

Ceci étant vrai pour tout voisinage V de ℓ, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

□

Nous savons déjà qu'une suite convergente est bornée, et que la réciproque est fausse, comme le prouve le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.
En revanche, les suites bornées possèdent la propriété suivante :

Théorème 12.61 (de Bolzano-Weierstrass) : *De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.*
Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est une suite bornée, alors il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée, et soient $a < b$ tels que (u_n) prenne ses valeurs dans $[a, b]$.
Le preuve qui suit est appelée «preuve par dichotomie» : nous allons couper en deux l'intervalle $[a, b]$ une infinité de fois.
Plus précisément : construisons par récurrence deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que le segment $[a_n, b_n]$ contienne toujours une infinité de termes de la suite (u_n).
Commençons par poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et posons $\varphi(0) = 0$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, notons alors $\mathscr{P}(n)$ la (grosse) propriété suivante :

- $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont bien définis;
- $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est croissante et $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est décroissante;
- $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
- $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite, c'es-à-dire que $\{k \in \mathbf{N} \mid a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ est infini.

Il est évident que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie.
Coupons en deux le segment $[a_n, b_n]$ en son milieu, de sorte qu'on obtient les segments $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$.
Alors l'un au moins de ces deux segments contient une infinité de termes de la suite (u_n).
► Si $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite, posons $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.
► Sinon posons $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Alors dans les deux cas, on a $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$, ainsi que

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vrai, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vrai, si bien qu'on a construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $(a_n)_n$ croissante, $(b_n)_n$

Détails
Quand on parle d'une infinité de termes de la suite, on ne veut pas dire une infinité de valeurs (après tout, (u_n) pourrait être constante), mais on veut dire par là qu'il existe une infinité d'entiers k pour lesquels u_k est dans l'intervalle considéré.

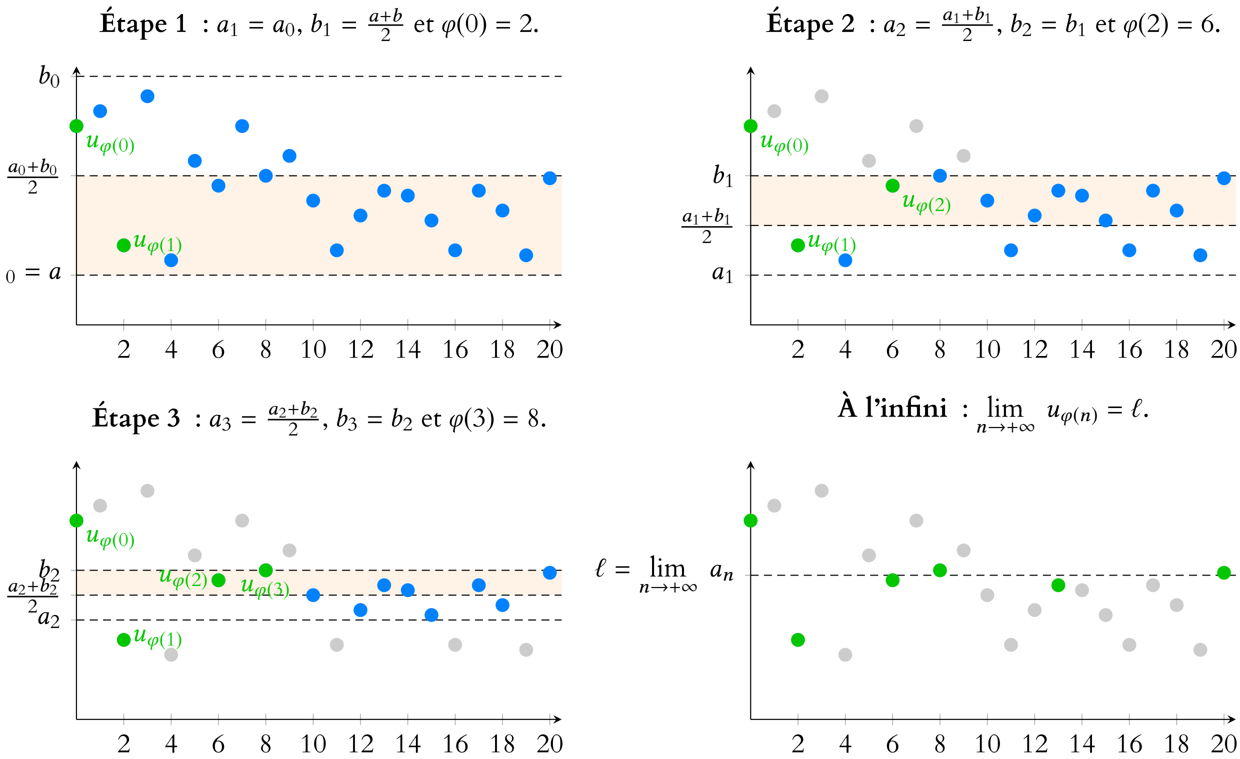
décroissante et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc ces deux suites convergent vers une même limite ℓ.

Construisons alors une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de la manière suivante :

- $\varphi(0) = 0$
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid k > \varphi(n) \textbf{ et } a_{n+1} \leqslant u_k \leqslant b_{n+1}\}$. Notons que ce minimum est bien défini puisqu'il s'agit d'une partie non vide[27] de $\mathbf{N}$.

Alors par construction, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc φ est bien une extractrice.
Et par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$, si bien que par le théorème des gendarmes, $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ.
Et donc nous avons bien une suite extraite de (u_n) qui converge. □

[27] Précisément car nous avons tout fait pour que $[a_n, b_n]$ contienne une infinité de termes de (u_n).



Remarques. Notons qu'il peut exister plusieurs suites extraites de (u_n) qui convergent, et que celles-ci n'ont pas forcément la même limite.
Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, puisque constantes, mais l'une tend vers 1 et l'autre vers -1.
Enfin, remarquons qu'extraire une suite d'une suite (u_n), c'est composer **à droite** l'application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, par une extractrice $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pour obtenir $u \circ \varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & u_{\varphi(n)} \end{array} \right.$
En particulier, si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite d'une suite (u_n), pour extraire une suite de cette suite extraite, il faudra recomposer à droite par une autre extractrice $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, et on obtiendra alors la suite $(u_{(\varphi\circ\psi)(n)})$, et sûrement pas $(u_{\psi(\varphi(n))})$.
Une bonne raison en est que l'image de $\psi \circ \varphi$ n'a pas de raison d'être incluse dans celle de φ, et que donc les $u_{\psi(\varphi(n))}$ ne font pas forcément partie des $u_{\varphi(n)}$.
Par exemple, si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est la fonction $n \mapsto 2n$, alors $(u_{\varphi(n)})$ est la suite des termes d'indices pairs de (u_n) à savoir $u_0, u_2, u_4, u_6, \dots$.
Si $\psi : n \mapsto 2n+1$, alors $u_{(\varphi\circ\psi)(n)} = u_{4n+2}$, de sorte que $(u_{(\varphi\circ\psi)(n)})$ est la suite formée des termes u_2, u_6, u_{10}, etc, qui est bien extraite de (u_{2n}).
En revanche, $u_{(\psi\circ\varphi)(n)} = u_{4n+1}$, et donc $(u_{(\psi\circ\varphi)(n)})$ est la suite formée des termes u_1, u_5, u_9, etc, qui n'a aucun terme commun avec (u_{2n}), et donc n'en est sûrement pas extraite.

12.6 Caractérisations séquentielles de la borne supérieure et de la densité

12.6.1 Borne supérieure/inférieure

Proposition 12.62 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure) : *Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.*

1. *Si A est majorée, soit $M \in \mathbf{R}$. Alors M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A et qu'il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers M.*
2. *A n'est pas majorée si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui tend vers $+\infty$.*

Remarque
Un tel élément existe : c'est la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Démonstration. 1. Supposons que $M = \sup A$. Alors M est un majorant de A, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons u_n un élément de A tel que $M - \dfrac{1}{n} < u_n \leqslant M$.
Et alors en passant à la limite on prouve que (u_n) converge et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
Donc il existe bien une suite à valeurs dans A de limite M.

Inversement, supposons que M soit un majorant de A et qu'il existe une suite (u_n) à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$.
Si m est un majorant de A, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant m$, si bien que par passage à la limite, $M \leqslant m$.
Et donc M est le plus petit des majorants de A, et donc $M \sup A$.

2. Supposons que A ne soit pas majorée.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $a \in A$ tel que $a \geqslant n$.
Appelons alors u_n un tel élément, de sorte qu'on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in A$ et $u_n \geqslant n$.
Alors nécessairement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Inversement, s'il existe une suite (u_n) à valeurs dans A et de limite $+\infty$, montrons que A ne peut pas être majorée.
En effet, pour $B \in \mathbf{R}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\underbrace{u_N}_{\in A} \geqslant B + 1 > B$, et donc B n'est pas un majorant de A.

□

Ces résultats s'étendent sans difficultés aux bornes inférieures :

Proposition 12.63 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure) : *Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$, et soit $m \in A$. Alors*

1. *M est la borne inférieure de A si et seulement si m est un minorant de A et qu'il existe une suite à valeur dans A qui tend vers m.*
2. *A n'est pas minorée si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui tend vers $-\infty$.*

Exemple 12.64

Considérons $A = \left\{ \dfrac{2}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$.
Notons $u_n = \dfrac{2}{n} + (-1)^n$.
Alors il est facile de constater que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Donc -1 est un minorant de A. Puisque de plus, la suite $(u_{2n+1})_{n\geqslant 1}$, clairement à valeurs dans A, tend vers -1, $-1 = \inf A$.
Et d'autre part, $2 = u_2 \in A$ est un majorant de A, dans A : c'est le plus grand élément de A, et donc sa borne supérieure.

12.6.2 Caractérisation séquentielle de la densité

Proposition 12.65 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors A est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Démonstration. Commençons par supposer A dense dans $\mathbf{R}$, et soit $x \in \mathbf{R}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $A \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\neq \emptyset$.
Choisissons alors x_n un élément de $A \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n}$ et donc par le théorème des gendarmes, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Donc il existe bien une suite à valeurs dans A qui converge vers x.

Inversement, supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x.
Soit alors I un intervalle ouvert non vide, et soient $a < b$ deux éléments de I.
Alors il existe une suite (x_n) à valeurs dans A, qui converge vers $\frac{a+b}{2}$.
Posons $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|x_n - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant \frac{a+b}{2} + \varepsilon.$$

Soit encore, pour $n \geqslant n_0$, $a \leqslant x_n \leqslant b$. Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $x_n \in [a, b] \subset I$.
Donc I contient bien un élément[28] de A. □

[28] Et même une infinité.

12.7 Extension aux suites complexes

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des suites réelles, mais il ne coûte pas plus cher de considérer des suites à valeurs complexes.

Définition 12.66 – Une suite complexe est une application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

Se donner une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ revient à se donner les deux suites réelles $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$.
Notons que $\mathbf{C}$ n'étant pas muni d'une relation d'ordre naturel, la notion de croissance/décroissance d'une suite complexe n'a pas de sens.
De même, on ne parlera pas de suite complexe majorée ou minorée.
En revanche, la notion de suite bornée a bien un sens : il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Définition 12.67 – Une suite complexe (u_n) est dite **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a toujours

$$|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|,\ |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \text{ et } |u_n| \leqslant \sqrt{2}\max(|\mathrm{Re}\, u_n|, |\mathrm{Im}\, u_n|)$$

une suite complexe est bornée si et seulement si les deux suites[29] $(\mathrm{Re}\, u_n)_n$ et $(\mathrm{Im}\, u_n)_n$ sont bornées.

[29] réelles.

12.7.1 Convergence des suites complexes

Définition 12.68 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\ell \in \mathbf{C}$. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Déjà vu ?
Cette définition semble être exactement la même que pour les suites réelles. Il y a tout de même une subtilité : ici on considère un module et plus une valeur absolue.

Comme pour les suites réelles, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si la suite[30] de terme général $|u_n - \ell|$ tend vers 0.

[30] réelle.

Notons qu'une suite réelle peut être vue comme une suite complexe[31], et qu'elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}$ en tant que suite complexe si et seulement si elle converge vers ℓ en tant que suite réelle.
Pour les suites complexes, on ne parlera pas de limite infinie, puisqu'il s'agit d'une notion dont la définition fait appel à la relation d'ordre, spécifique à $\mathbf{R}$.
En revanche, tous les résultats prouvés sur les sommes, produits et quotients[32] de limites finies restent valables pour les suites complexes, sans changer les preuves données dans le cas réel.
Le fait qu'une suite convergente soit bornée, ou que le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle tende vers 0 restent également valables.
On prouve également que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$ avec la même preuve[33] que dans le cas réel.

[31] Un réel est un complexe de partie imaginaire nulle.

[32] Dont le dénominateur a une limite non nulle.

[33] Via l'inégalité triangulaire renversée.

En revanche, tout ce qui utilise la relation d'ordre tombe à l'eau dans le cas complexe, notamment :

- les résultats sur l'inverse d'une suite de limite nulle
- le théorème de la limite monotone
- le théorème des gendarmes
- la notion de suites adjacentes
- ...

On dispose en revanche de deux résultats supplémentaires :

Proposition 12.69 : *Soit (u_n) une suite complexe, et soit $\ell \in \mathbf{C}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si* $\begin{cases} \mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$

Démonstration. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Souvenons-nous que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
Et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| = |\mathrm{Re}(u_n - \ell)| \leqslant \underbrace{|u_n - \ell|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

de sorte que $\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$.
On prouve de la même manière que $\mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\underbrace{\mathrm{Re}(u_n - \ell)^2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\mathrm{Im}(u_n - \ell)^2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}}.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Corollaire 12.70 – *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\overline{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.*

Démonstration.

$$\overline{u_n} = \mathrm{Re}(u_n) - i\,\mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) - i\,\mathrm{Im}(\ell) = \overline{\ell}$$

□

Profitons-en pour revenir rapidement sur les limites de suites géométriques complexes :

Proposition 12.71 : *Soit $q \in \mathbf{C}$. Alors :*

1. *si $|q| > 1$, alors (q^n) diverge.*
2. *si $|q| < 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*
3. *si $q \in \mathbf{U} \setminus \{1\}$, alors (q^n) diverge.*

Démonstration. ▶ Si $|q| > 1$, alors $|q^n| = |q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si bien que (q^n) ne peut pas[34] converger.
▶ Si $|q| < 1$, alors $|q^n| = |q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ puisque $|q| \in [0, 1[$.
On en déduit donc que $|q^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, soit encore que $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
▶ Si $q \in \mathbf{U} \setminus \{-1, 1\}$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$, non congru à 0 modulo π, tel que $q = e^{i\alpha}$.
Et alors il a été prouvé en TD que $(\cos(n\alpha))_n$ diverge.
Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(n\alpha) = \mathrm{Re}(e^{in\alpha}) = \mathrm{Re}(q^n)$.
Donc (q^n) ne peut pas converger.
Et dans le cas où $q = -1$, alors on a toujours $(-1)^n$ qui diverge. □

[34] Si $q^n \to \ell$, alors $|q^n| \to |\ell|$.

12.7.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

La notion de suite extraite a toujours du sens pour une suite complexe, et une suite extraite d'une suite convergente est toujours convergente.
Le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable pour des suites complexes, mais il faut alors adapter la démonstration du cas réel.

Théorème 12.72 : *De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite complexe bornée. Notons $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$.
Puisque (u_n) est bornée, il en est de même de (a_n) et (b_n), qui sont des suites réelles.
En particulier, on peut[35] extraire une suite convergente de (a_n) : il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et un réel a tels que $a_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
On pourrait de même extraire $(b_{\psi(n)})_n$ une suite convergente de (b_n), mais alors rien n'oblige φ et ψ à prendre des valeurs communes.
Par exemple, si $(a_{\varphi(n)})_n$ est la suite des termes d'indice pair de (a_n) et que $(b_{\psi(n)})_n$ est la suite des termes d'indice impair de (b_n), comment extraire une suite convergente de (u_n) à l'aide de φ et de ψ ?
L'idée est d'aller extraire une suite convergente non pas directement de $(b_n)_n$, mais de $(b_{\varphi(n)})_n$.
En effet, $(b_{\varphi(n)})_n$ est bornée car (b_n) l'est, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass **réel**, on peut en extraire une suite convergente.
Autrement dit, il existe $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(b_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge vers un réel b.
Notons que $\varphi \circ \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante car composée de deux fonctions strictement croissantes.
La suite $(a_{(\varphi\circ\psi)(n)})_n$ converge vers a car il s'agit d'une suite extraite de $(a_{\varphi(n)})_n$.
Et donc $u_{(\varphi\circ\psi)(n)} = a_{(\varphi\circ\psi)(n)} + ib_{(\varphi\circ\psi)(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + ib \in \mathbf{C}$.
Nous avons donc bien extrait une suite convergente de $(u_n)_n$. □

[35] C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.

Autrement dit
Lorsqu'on a extrait $(a_{\varphi(n)})$, on n'a gardé que certains indices $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ...
Extraire de nouveau, c'est ne garder que certains de ces indices déjà «sélectionnés».

⚠ Attention !
Comme mentionné plus haut, extraire, c'est **composer à droite** par une extractrice.

12.8 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

On a souvent tendance à penser que si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction définie sur une partie I de $\mathbf{R}$, alors la donnée d'un premier terme u_0 définit de manière unique et non ambigüe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Mais considérons le cas de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1} \end{cases}$

Alors on a $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{1}{2-1} = 1$, $u_3 = \dfrac{1}{1-1} = ??$

Ainsi, u_n n'est pas défini pour $n = 3$, et par conséquent n'est pas défini pour $n \geqslant 3$.
Ce n'est bien entendu pas le seul cas susceptible de poser problème, puisque $u_0 = \frac{3}{2}$ nous mène alors à $u_1 = 2$, et donc cette fois c'est u_4 qui n'est pas défini, etc.

Pour éviter que de tels soucis se produisent, il faut être capable de garantir qu'à chaque étape, u_n est dans l'ensemble de définition de f.
Afin de garantir ceci quel que soit $u_0 \in I$, on peut demander à I d'être stable par f, c'est-à-dire de vérifier $f(I) \subset I$ (soit encore : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$).

Exemple 12.73

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}$.
Alors l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x - \frac{2}{9}}$ est $\left[\frac{2}{9}, +\infty\right[$, qui n'est pas stable par f.
Donc on ne peut pas choisir n'importe quoi comme premier terme.

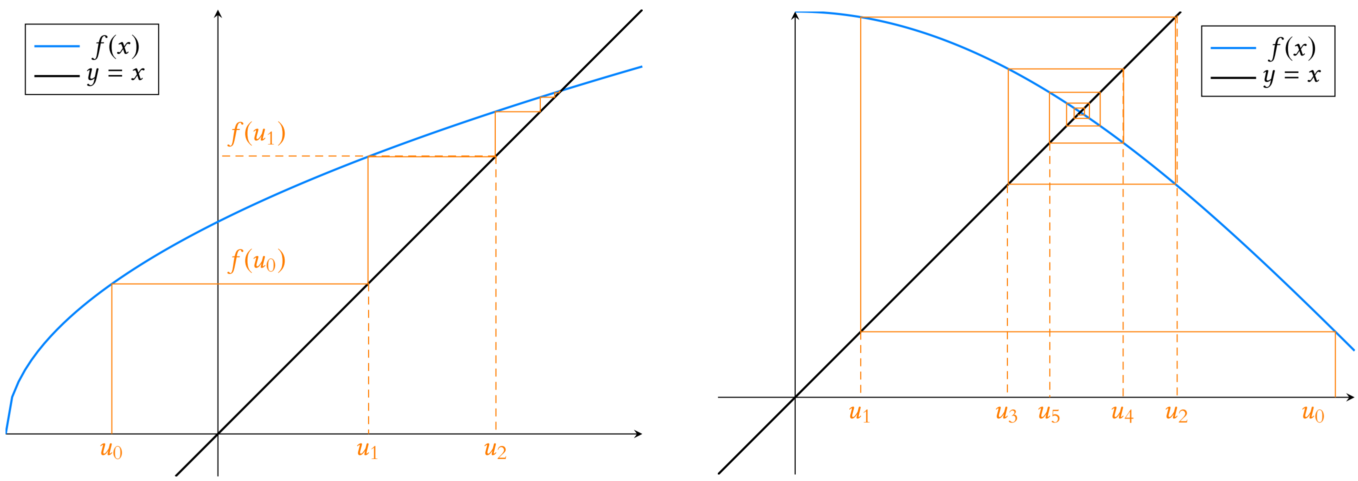
En revanche, f est croissante, et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.
Donc pour $x \geqslant \frac{1}{3}$, $f(x) \geqslant \frac{1}{3}$, de sorte que $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$ est stable par f.
Donc quel que soit le choix du premier terme $u_0 \geqslant \frac{1}{3}$, $(u_n)_n$ est bien définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}$.

Bien entendu, si f est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, alors $\mathbf{R}$ est stable par f.

Proposition 12.74 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ avec I une partie de $\mathbf{R}$ stable par f.
Alors pour tout $\alpha \in I$, il existe une unique suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

12.8.1 Représentation graphique et monotonie

Les termes de la suite peuvent être tracés successivement en utilisant des projections sur la première bissectrice parallèlement aux axes.



La monotonie de (u_n) n'est pas directement liée à celle de f.

Proposition 12.75 : *Soit $f : I \to I$, soit $u_0 \in I$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. *si $\forall x \in I$, $f(x) \geqslant x$, alors (u_n) est croissante. Et si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant x$, alors $(u_n)_n$ est décroissante.*
2. *si f est croissante, alors $(u_n)_n$ est monotone. Sa monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$.*
3. *si f est décroissante, alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones, de monotonies contraires.*

Autrement dit

Si la fonction $g : x \mapsto x - f(x)$ est de signe constant, alors $(u_n)_n$ est monotone.

Démonstration. 1) Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, donc (u_n) est croissante.
De même si $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant x$, $(u_n)_n$ est décroissante.

2) Supposons f croissante. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$.
Donc si $u_1 \geqslant u_0 \Leftrightarrow u_1 - u_0 \geqslant 0$, alors $(u_n)_n$ est croissante, et si $u_1 \leqslant u_0$, alors $(u_n)_n$ est décroissante.

3) Supposons à présent f décroissante. Alors $f \circ f$ est croissante, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = f(f(u_n)) = (f \circ f)(u_n)$.
Donc (u_{2n}) est monotone, et sur le même principe, $(u_{2n+1})_n$ est monotone.
Si $u_0 \leqslant u_2$, alors (u_{2n}) est croissante. Et alors par décroissance de f, $u_1 \geqslant u_3$, si bien que $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.
De même, si $u_0 \geqslant u_2$, alors $(u_{2n})n$ est décroissante, et $(u_{2n+1})_n$ est croissante. □

Exemples 12.76

► Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
Alors $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ est définie sur $[-2, +\infty[$, qui est un intervalle stable par f.
De plus, f y est croissante, donc (u_n) est monotone.
Puisque $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$, la suite (u_n) est croissante.

► Soit (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.
Alors une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{2x+1}$ prouve qu'elle est décroissante[36] sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.

Par ailleurs, on a $f(1) = 1$, donc 1 est un point fixe de f.
Donc pour $x \leqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$ et vice-versa.
On a donc $f([0,1]) \subset [1, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) \subset [0, 1]$.
Donc $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont tous deux stables par $f \circ f$, qui rappelons-le, est croissante.
De plus, $f \circ f : x \mapsto \dfrac{5x+4}{4x+5}$, et on montre alors que $x \mapsto f \circ f(x) - x$ est positive sur $[0, 1]$, négative sur $[1, +\infty[$, et que 1 est le seul point fixe de $f \circ f$.

Donc si $u_0 \in [0,1]$, alors $u_2 = f \circ f(u_0) \geqslant u_0$, de sorte que la suite (u_{2n}) est croissante.
Et donc par ce qui précède, (u_{2n+1}) est décroissante.
Et si $u_0 \in [1, +\infty[$, $u_2 \leqslant u_1$, donc (u_{2n}) est décroissante, donc (u_{2n+1}) est croissante.

[36] Faire une étude de dérivée.

12.9 CONVERGENCE

Si f est **continue**, et si (u_n) (définie comme précédemment par $u_{n+1} = f(u_n)$) converge vers une limite ℓ, alors, par continuité de f, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.
Mais $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et donc par unicité de la limite $\ell = f(\ell)$, de sorte que ℓ est un point fixe

de f.

⚠ Il ne s'agit sûrement pas d'un résultat qui prouve l'existence d'une limite ! Mais il restreint le champ des possibles : **si** une limite existe, **alors** cette limite est un point fixe de f.
Mais il peut ne pas y avoir de points fixes, y en avoir plusieurs, ou encore (u_n) peut diverger !
Toutefois, si on a l'existence et l'unicité d'un point fixe[37], ainsi qu'un argument permettant de prouver la convergence (et je pense notamment au théorème de la limite monotone), alors la limite est nécessairement **le** point fixe de f.
Bien entendu, ceci ne suffit plus si f possède plusieurs points fixes.

[37] Ce qui se fait souvent en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Exemple 12.77

Soit $u_0 = 1$, et soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
Notons donc $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. Alors $[1, 2]$ est stable par f. Et f est décroissante, donc (u_{2n}) et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. Puisque $u_2 = \dfrac{3}{2} \geqslant u_0$, (u_{2n}) est croissante, et donc (u_{2n+1}) est décroissante.
Étant tous les deux bornées[38], par le théorème de la limite monotone, elles convergent. Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, de sorte que $\ell_1, \ell_2 \in [1, 2]$.
Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n})$, et que $f \circ f$ est continue, ℓ_1 est un point fixe de $f \circ f$.
Mais $x \in [1, 2]$ est un point fixe de f si et seulement si

$$x = (f \circ f)(x) \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{x}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x = 1 + 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \in [1, 2]$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \notin [1, 2]$.
Donc $\ell_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sur le même principe, ℓ_2 est également un point fixe de $(f \circ f)$, et donc est égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Et alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[38] Elles sont à valeurs dans $[1, 2]$.

Remarque
Notons que ceci justifie sans calculs qu'un tel point fixe existe.

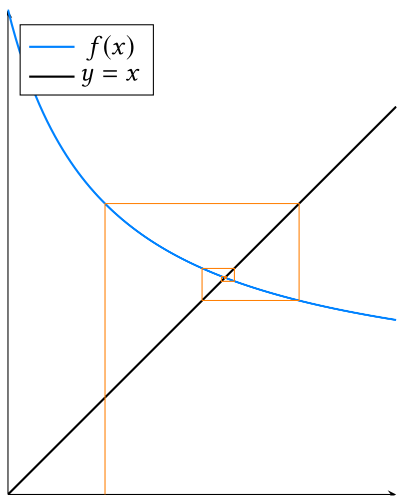


FIGURE 12.3 – $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Exemples 12.78

Reprenons les exemples précédents :
▸ la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ est croissante.
De plus, ℓ est un point fixe de $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$ si et seulement si

$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \Rightarrow \ell^2 = 2 + \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0.$$

On trouve alors deux solutions qui sont 2 et -1 : la première est clairement un point fixe de f, la seconde ne l'est clairement pas.
Donc si (u_n) possède une limite, cette limite vaut 2.
Or, $[0, 2]$ est stable par f, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, 2]$.
Donc (u_n) est croissante et majorée, donc elle converge, et sa limite étant un point fixe de f, c'est 2.

▸ $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.
Si $u_0 \in [0, 1]$, alors nous savons que (u_{2n}) est croissante, et qu'elle est majorée par 1 (car $[0, 1]$ est stable par $f \circ f$).
Donc elle converge, et alors sa limite est un point fixe de $f \circ f$. Or, 1 est le seul point fixe de $f \circ f$.
De même, (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 1 car $[1, +\infty[$ est stable par $f \circ f$ et que $u_1 \in [1, +\infty[$.
Donc elle converge, elle aussi vers un point fixe de $f \circ f$, qui est donc 1.
Ainsi, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite**, et donc (u_n) converge vers 1.
On prouve le même résultat si $u_0 \geqslant 1$.

EXERCICES DU CHAPITRE 12

▸ Convergence des suites

EXERCICE 12.1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. F
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

EXERCICE 12.2 Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soient a et b deux réels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$. PD
Montrer que si $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a+b$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

EXERCICE 12.3 Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire. PD
Que dire alors de la limite de (u_n) ?

EXERCICE 12.4 Théorème des segments emboîtés PD
Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbf{R}$ et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

EXERCICE 12.5 Vrai ou Faux ? PD
Toutes les suites considérées ici sont réelles.

1) toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2) le produit de deux suites minorées est minorée.
3) une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.
4) si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > \alpha > 0$ et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
5) toute suite convergente est minorée.
6) une suite strictement croissante et minorée tend vers $+\infty$.
7) soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
8) Soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
9) $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

EXERCICE 12.6 Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par : PD

1) $\dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$
2) $\sqrt{n}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$
3) $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$
4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+2kn\sin(k)}{2n^4+n^2\ln(k)}$
6) $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, $a, b \in \mathbf{R}_+^*$

EXERCICE 12.7 Quelques séries de Riemann PD

1) Soit $\alpha \geqslant 2$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, et en déduire que (u_n) converge.
2) On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{2n} - v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

EXERCICE 12.8 PD

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
2) Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge, et calculer sa limite.

EXERCICE 12.9 Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$. AD

1) Prouver que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

2) En calculant de deux manières la somme $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right)$, montrer que $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 12.10 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. **AD**

1) Montrer que (u_n) est convergente, et que sa limite ℓ est dans le segment $[0, 1]$.
2) Montrer que pour tout n, $u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 12.11 Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$. **AD**

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n. Même question pour v_{n+1}.
2) En déduire que si l'une des deux suites (u_n) et (v_n) converge, alors l'autre aussi.
3) Prouver alors que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice 12.12 **AD**

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^n = \cos(x)$, d'inconnue $x \in [0, 1]$ possède une unique solution, que l'on notera x_n.
2) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, et le cas échéant, préciser sa limite.

Exercice 12.13 Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. **AD**

1) Étudier la convergence de la suite (u_n).
2) On pose $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge.
3) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 12.14 **Règle de d'Alembert** **AD**

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1) On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > \frac{1+\ell}{2}u_n$.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) On suppose que $\ell < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3) Donner des exemples de suites (u_n) pour lesquelles $\ell = 1$, qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers $+\infty$.

Exercice 12.15 **Suites sous-additives et lemme de Fekete (Oral ENS)** **TD**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $\forall (m, n) \in \mathbf{N}^2$, $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.
Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \inf\left\{\frac{u_n}{n}, n \geqslant 1\right\}$ si ℓ existe et vers $-\infty$ sinon.

▸ Suites adjacentes

Exercice 12.16 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$. **PD**

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et en déduire la limite de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 12.17 Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 12.18 **Critère des séries alternées** **AD**

Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

1) Étudier les monotonies de (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
2) En déduire que (S_n) converge.

EXERCICE 12.19 Moyenne arithmético-géométrique AD

Soient $a > b$ deux réels positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite qu'on ne cherchera pas à calculer.

► Suites complexes

EXERCICE 12.20 Soit $(z_n)_n$ une suite à valeurs complexes vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n - 3\overline{z_n}}{2}$. F

Donner l'expression de z_n en fonction de n, et étudier la convergence de la suite (z_n).

EXERCICE 12.21 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $z_n = e^{i\ln n}$. Montrer que (z_n) diverge. AD

► Suites extraites

EXERCICE 12.22 Soit $(u_n)_n$ une suite (réelle ou complexe). Parmi les suites suivantes, toutes extraites de (u_n), trouver celles qui sont extraites d'une autre : F

$$(u_{2n})_n,\ (u_{3n})_n,\ (u_{6n})_n,\ (u_{6^n})_n,\ (u_{6^{n+1}})_n,\ (u_{2^{n+1}})_n,\ (u_{3\times 2^n})_n.$$

EXERCICE 12.23 Soit (u_n) une suite telle que les trois suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge. AD

EXERCICE 12.24 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Autrement dit, u_n est la partie fractionnaire de $\sqrt{n}$. D

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.
2) Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite (finie ou infinie).
3) Déterminer, pour $(a, b) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^*$, $a \leqslant b$, la limite de $u_{n^2b^2+2na}$.
4) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers x.
5) Prouver que $\left\{\sqrt{n} - \sqrt{m},\ (m, n) \in \mathbf{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

EXERCICE 12.25 Soit $\alpha \not\equiv 0 \quad [\pi]$. AD

1) Montrer que si $(\sin(n\alpha))_n$ converge, alors $(\cos(n\alpha))_n$ converge également, et donner une relation entre leurs deux limites.
2) En déduire que $(\sin(n\alpha))_n$ et $(\cos(n\alpha))_n$ divergent.

EXERCICE 12.26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{nu_n}}{n+1}$. AD

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 12.27 Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n - (-1)^n}$. AD

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

EXERCICE 12.28 Oral ENS TD

1) Soit (u_n) une suite bornée. On suppose qu'il existe un réel ℓ telle que toute suite convergente extraite de (u_n) possède ℓ pour limite. Montrer que (u_n) est convergente.
2) Soit (v_n) une suite bornée telle que $v_n + \dfrac{v_{2n}}{2}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que (v_n) est convergente.

▶ Bornes supérieures

EXERCICE 12.29 Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants : PD

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1},\ n \in \mathbf{N} \right\},\ B = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \right\},\ C = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}},\ (m,n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

▶ Suites récurrentes

EXERCICE 12.30 Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ vérifiant $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. PD

EXERCICE 12.31 **Méthode de Héron** AD

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

1) Justifier que si (u_n) converge, c'est vers $\sqrt{a}$.
2) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{a}|$. En déduire que (u_n) converge.
3) Retrouver ce résultat à l'aide d'outils du cours.
4) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire une expression du terme général de (v_n).
5) Prouver que si $a \geqslant \sqrt{a}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant 2a v_0^{2^n}$.
   Quel intérêt cette majoration peut-elle avoir si on souhaite utiliser (u_n) pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ avec une précision $\varepsilon > 0$ fixée à l'avance ?

EXERCICE 12.32 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que $u_0 \in]0, e^{-1}[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n}{\ln u_n}$. PD
Montrer que (u_n) est bien définie, qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 12.33 Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |a| < 1$, et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 - u_n}$. AD
Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| < 1$. Étudier alors la limite de la suite (u_n).

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 12

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.1

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
On prouve de même que $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

> **Danger !**
> On ne sait pas encore que (u_n) et (v_n) convergent.
> Il est hors de question d'utiliser alors les limites de ces suites avant d'avoir prouvé leur existence !

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.2

Là encore, l'erreur à ne pas commettre serait de supposer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ existent : rien ne permet de garantir a priori que ces suites sont convergentes !

Première option : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant b$ et donc $-v_n \geqslant -b$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n + v_n - b \leqslant \underbrace{u_n + v_n - v_n}_{=u_n} \leqslant a.$$

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n - b = a + b - b = a$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
On a alors $v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a + b - a = b$.

> **Remarque**
> Ce qui garantit ici la convergence de (v_n) c'est que la somme de deux suites convergentes est convergente (résultat prouvé en cours).

Deuxième option : en «epsilonant».
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n + v_n > a + b - \varepsilon$.
Et puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant b \Leftrightarrow -v_n \geqslant -b$, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_n + v_n - v_n > a + b - \varepsilon + b = a - \varepsilon.$$

Et donc pour tout $n \geqslant n_0$, $a - \varepsilon < u_n \leqslant a$, si bien que $|u_n - a| < \varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Et alors $v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a + b - a = b$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.3

Il est évident qu'une suite stationnaire[1], est convergente.
Inversement, soit $(u_n)_n$ une suite convergente d'entiers, et notons ℓ sa limite.
Soit alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Par définition de la convergence Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Et alors pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|u_n - u_{n_0}| = |(u_n - \ell) + (\ell - u_{n_0})| \leqslant |u_n - \ell| + |u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, $u_n - u_{n_0} \in \mathbf{Z}$ et $|u_n - u_{n_0}| < 1$.
On en déduit[2] que $u_n - u_{n_0} = 0$, et donc $u_n = u_{n_0}$. Et donc (u_n) est stationnaire.

[1] À valeurs entières ou non.

> **Méthode**
> Dans la définition de suite convergente, la condition est valable **pour tout** $\varepsilon > 0$. On peut donc le choisir comme bon nous chante !

[2] Bien entendu, si on ne suppose plus la suite à valeurs d... re n'est plus

> **Remarque**
> Notons au passage que ceci prouve un résultat assez intuitif : $\ell = u_{n_0} \in \mathbf{Z}$.
> Mais on ne peut pas partir du principe que $\ell \in \mathbf{Z}$ pour prouver le résultat. Ou alors il faut le justifier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.4

Notons que la décroissance au sens de l'inclusion signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

En particulier, $a_{n+1} \geqslant a_n$, et donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.
De même, la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
Enfin, l'hypothèse faite sur la longueur des segments est que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.
Et donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite ℓ. On a alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, et donc $\ell \in [a_n, b_n]$, de sorte que $\ell \in \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$.
Inversement, si $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
Et donc par passage à la limite, $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, de sorte que $x = \ell$.

Ceci prouve donc que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}[a_n, b_n] \subset \{\ell\}$.
Et donc par double inclusion, $\bigcap_{n\in\mathbf{N}}[a_n, b_n] = \{\ell\}$, qui est donc bien un singleton.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.5

1. **Faux.** La suite de terme général $1 + \dfrac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0, et tend vers 1.
2. **Faux.** Posons $u_n = -1$ et $v_n = n$. Alors (u_n) est minorée, puisque constante, et (v_n) est minorée, puisqu'elle tend vers $+\infty$.
Pourtant $u_n v_n = -n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et donc ne saurait être minorée.
3. **Vrai.** C'est du cours.
4. **Vrai.** En effet, on a $\ell \geqslant \alpha > 0$.
5. **Vrai.** Nous savons que toute suite convergente est même bornée.
6. **Faux.** Toute suite croissante est minorée par son premier terme. Mais nous savons qu'il existe des suites strictement croissantes convergentes, par exemple $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
7. **Vrai.** Nous pourrions utiliser la racine carrée, mais nous n'avons pour l'instant rien prouvé au sujet des limites des racines.
Notons plutôt que puisque $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, alors à partir d'un certain rang n_0, $0 \leqslant u_n^4 \leqslant 1$.
On a alors nécessairement
8. **Faux.** Par exemple $u_n = (-1)^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.6

1. Posons $u_n = \dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$. Alors $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci peut sembler évident, mais n'a pas encore été prouvé avec les outils à notre disposition cette année...
Soit donc $A > 0$. Alors pour $n \geqslant \lfloor A^2 \rfloor + 1$, on a $n^2 \geqslant A$ et donc $\sqrt{n} \geqslant A$. Donc $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$, et donc $\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor = 0$. Et donc $n \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque
Pas de forme indéterminée ici : on a la suite nulle !

3. Nous savons que $0 \leqslant \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc comme à la question 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} = 0$.
4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Et donc en sommant ces inégalités, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On en déduit par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Par l'inégalité triangulaire,
$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{n^2 + 2nk\sin k}{2n^4 + n^2\ln(k)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+2n^2}{2n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2}{2n^4} \leqslant \frac{3n^3}{2n^4}.$$
Donc par le théorème des gendarmes, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. Distinguons plusieurs cas. Il est clair que si $a = b$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
► Si $a < b$, alors le terme «le plus fort» est b^n. Donc factorisons numérateur et dénominateur par b^n :
$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n}{b^n}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$
► De même, si $a > b$, en factorisant par a^n, il vient $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Détails
Puisque $a < b$, $0 \leqslant \frac{a}{b} < 1$, donc
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.7

1. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant ces inégalités, on a donc, pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Or, cette dernière somme est une somme télescopique, qui vaut $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.

On en déduit que $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + 1 \leqslant 2$.

D'autre part, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, de sorte que (u_n) est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Remarque

Notons au passage que sa limite est alors inférieure ou égale à 2, le majorant obtenu précédemment.

2. On a

$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Puisque (v_n) est croissante, par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie ℓ, soit elle tend vers $+\infty$.

Or, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors la suite extraite $(v_{2n})_n$ converge également vers ℓ.

Et donc $v_{2n} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais puisque $v_{2n} - v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$, en passant à la limite, il vient $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde.

On en déduit donc que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Croissance

La croissance de (v_n) se prouve de la même manière que celle de (u_n) à la question précédente, mais elle est assez intuitive : pour passer de v_n à v_{n+1}, il faut ajouter $\frac{1}{n+1} \geqslant 0$, donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.8

1. Étudions la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ sur $\mathbf{R}_+$.

Elle est dérivable, avec $f'(x) = 1 - x - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1-x^2-1}{1+x} = \dfrac{-x^2}{1+x} \leqslant 0$.

Donc f est décroissante, avec $f(0) = 0$, de sorte que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, et donc $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

De même, une étude de $x \mapsto \ln(1+x) - x$ prouve que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

D'après ce qui précède, on a

$$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leqslant n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant n\frac{1}{n}$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

On en déduit[3], que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$.

[3] Car la fonction exponentielle est continue en 1.

2. On a $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Par la question 1, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

De même,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
On en déduit alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1/2} = \sqrt{e}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.9

1. Une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.
Et alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, de sorte que (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle est convergente.
Notons ℓ sa limite. Alors $\dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$.
Mais d'autre part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $n+1 \geqslant n_0$, et donc $|u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$.
Ainsi, on a nécessairement $\ell = \dfrac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$, et donc $\ell = 0$.

Remarque
Ceci est trivial lorsqu'on dispose de résultats sur les suites extraites, mais la preuve que nous en donnons ici prouve qu'il n'est pas indispensable de disposer de résultats généraux pour étudier certaines suite extraites.

2. D'une part, en reconnaissant une somme télescopique, on a

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$

Et d'autre part, en notant que pour $k \geqslant 1$, $u_k^2 = \dfrac{u_{k-1}^2}{1+u_{k-1}^2}$, et donc

$$\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1+u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1.$$

Et donc $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$.
Donc $\dfrac{1}{nu_n^2} = S_n + \dfrac{1}{nu_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit donc que $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.10

1. Étudions la monotonie de (u_n) : on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&\leqslant -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&\leqslant -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Détails
Pour tout $k \leqslant n$,
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et on prend bien soin de changer le sens de l'inégalité en raison de la présence du signe $-$.

On en déduit donc que (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est clairement positive, elle est minorée[4] et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
Puisque de plus on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1}_{=1}$, alors, par passage à la limite dans l'inégalité, il vient $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

[4] Par 0.

2. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &< \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Relation de Chasles.

En passant à la limite dans cette inégalité, il vient donc $\ell \leqslant \frac{\ell}{2}$.
Soit encore $\ell \leqslant 0$, mais $\ell \in [0,1]$, donc nécessairement, $\ell = 0$.

Rappel
Si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} \to \ell$ car il s'agit d'une suite extraite de (u_n).

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.11

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors par les formules d'addition, on a

$$u_{n+1} = \cos(n\alpha + \alpha) = u_n\cos(\alpha) - v_n\sin(\alpha) \text{ et } v_{n+1} = \sin(n\alpha+\alpha) = u_n\sin(\alpha) + v_n\cos(\alpha).$$

2. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Alors en utilisant $v_n = \dfrac{u_n\cos(\alpha) - u_{n+1}}{\sin(\alpha)}$ il vient $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell(\cos(\alpha)-1)}{\sin(\alpha)}$.
Et de même, si (v_n) converge vers un réel ℓ', alors $u_n = \dfrac{v_{n+1} - v_n\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell'(1-\cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}$.

Remarque
Puisque α n'est pas nul modulo π, $\sin(\alpha) \neq 0$.

3. Supposons par l'absurde que l'une de ces deux suites converge.
Alors par la question précédente, l'autre aussi, et leurs limites respectives sont liées par les relations $\ell' = \ell\dfrac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$ et $\ell = \ell'\dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.
On a donc $\ell' = \ell'\dfrac{(1-\cos(\alpha))^2}{\sin^2(\alpha)}$.
Soit encore $\ell'\left(1 + \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right) = 0$.
Et donc nécessairement, $\ell' = 1$, et donc $\ell = 1$. Or, on a toujours $u_n^2 + v_n^2 = 1$, ce qui par passage à la limite nous donne $\ell^2 + \ell'^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$, ce qui est absurde.
On en déduit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.12

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $f_n : \left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n - \cos(x) \end{array}\right.$
Alors f_n est continue[5] sur $[0,1]$, strictement croissante car somme de deux fonctions qui le sont[6], et on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 - \cos(1) > 0$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

[5] Car dérivable.
[6] $-\cos$ est strictement croissante sur $[0,\pi]$.

2. Notons que $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - \cos(x_n)$.
Mais $\cos(x_n) = x_n^n$, donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$.
Or, f_n est strictement croissante, et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, donc on en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$.
Ainsi, la suite (x_n) est croissante. Étant majorée (par 1), elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
Supposons que $\ell < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$, si bien que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui n'est pas possible puisque pour $x \in [0,1]$, $\underbrace{\cos(1)}_{>0} \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

On en déduit donc que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Rappel
Puisque f_{n+1} est strictement croissante, pour $a, b \in [0,1]$,
$$a \leqslant b \Leftrightarrow f_{n+1}(a) \leqslant f_{n+1}(b).$$

⚠ On n'en déduit pas que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = \cos(1)$, ce qui serait absurde[7].
En effet, 1^∞ est une forme indéterminée, et donc même si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on n'a pas $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

[7] Puisque $\cos(1) \in]0,1[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.13

1. On a, en notant que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{1}{4} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

La suite (u_n) étant positive, on a donc (u_n) décroissante. Étant positive, elle est minorée, donc converge par le théorème de la limite monotone.

2. Sur le même principe, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+2n+4} < 1.$$

Et donc (v_n) est décroissante, et minorée, donc elle converge.

3. Notons ℓ la limite de (u_n).
Si on avait $\ell > 0$, alors (v_n) tendrait vers $+\infty$, ce qui n'est pas le cas, puisqu'il s'agit d'une suite convergente.
Et donc nécessairement, $\ell = 0$.

> **Remarque**
> Étant limite d'une suite positive, on a nécessairement $\ell \geqslant 0$.

Alternative : $u_n = \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}}$.
Mais $\frac{v_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.14

1. Il s'agit donc de prouver qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1+\ell}{2}$.
Posons $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$.
Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1+\ell}{2}$, et donc $u_{n+1} \geqslant \frac{1+\ell}{2} u_n$.
Une récurrence rapide sur n prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, on a

$$u_n \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Mais puisque $\frac{1+\ell}{2} > 1$, $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

> **Remarque**
> Le même résultat reste valable si $\ell = +\infty$.

Alternative : une fois qu'on a $u_{n+1} \geqslant \frac{1+\ell}{2} u_n$, il est clair que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie, nécessairement strictement positive car supérieure à u_{n_0}, soit elle diverge vers $+\infty$.
Mais si elle convergeait vers $L > 0$, alors on aurait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{L}{L} = 1 \neq \ell$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Sur le même principe, on prouve que pour n suffisamment grand, u_n est inférieur au terme général d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et donc de limite nulle.
Plus précisément, posons $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$, et en particulier, $u_{n+1} \leqslant \frac{1+\ell}{2} u_n$.
Une récurrence aisée prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Les deux questions précédentes ne tirent aucune conclusion lorsque $\ell = 1$. Et pour cause :
   - si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

►si $u_n = n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

►enfin, si (u_n) est constante, égale à 2, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et évidemment, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.15

Notons qu'une récurrence immédiate prouve que pour tout $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $u_{kn} \leqslant ku_n$.
Commençons par supposer que ℓ existe, et soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition d'une borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\ell \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{n_0} < \ell + \varepsilon$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $n = qn_0 + r$ la division euclidienne de n par n_0, avec $r \in [\![0, n_0 - 1]\!]$.
On a donc

$$u_n = u_{qn_0+r} \leqslant u_{qn_0} + u_r \leqslant qu_{n_0} + u_r.$$

Et donc $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{q}{n}u_{n_0} + \dfrac{u_r}{n} \leqslant \left(\ell - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\dfrac{qn_0}{n} + \dfrac{u_r}{n}$.
De plus, $\dfrac{qn_0}{n} = \dfrac{n-r}{n} = 1 - \dfrac{r}{n}$.
Donc $\dfrac{u_n}{n} < \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \dfrac{r}{n}\right) + \dfrac{u_r}{n}$.
Notons alors $M = \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}\}$, qui est bien défini puisque plus grand élément d'un ensemble fini.
Alors $\dfrac{u_r}{n} \leqslant \dfrac{M}{n}$.
Donc $\ell \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n}$.
Or, le terme de droite tend vers $\ell + \varepsilon$, donc pour n suffisamment grand[8], on a $\left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n} \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Et donc $\ell \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell + \varepsilon$.
C'est donc la définition de $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

> **Remarque**
> Même si la notation que nous employons ne le fait pas clairement apparaître, r dépend de n. Et donc il n'est pas directement possible d'affirmer que $\frac{u_r}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
> En revanche, maintenant, M est une constante, et donc $\dfrac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[8] C'est-à-dire qu'il existe un n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$...

Supposons à présent que ℓ n'existe pas, c'est-à-dire que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ n'est pas majorée.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant A$.
Et alors le même raisonnement que précédemment, avec les mêmes notations, on prouve que pour tout n, $\frac{u_n}{n} \leqslant A + \dfrac{M}{n}$.
Et puisque $\dfrac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{M}{n} \leqslant 1$.
Et donc pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant A + 1$, et donc $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.16

1. Notons qu'il n'est pas forcément immédiat de savoir quelle suite sera croissante, et laquelle sera décroissante. Mais :

   —il n'y a pas besoin de le savoir, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nous donnera sa monotonie.

   —si l'une des deux est clairement plus grand que l'autre (et c'est ici le cas de u_n), c'est forcément celle qui est décroissante !

   Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}\\ &= \frac{2\sqrt{n+1} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

   Or, on a $2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \geqslant 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 \geqslant 4n^2 + 4n$, ce qui est toujours le cas.
   Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, et donc (u_n) est décroissante.

De même, on prouve que (v_n) est croissante puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} \\
&= \frac{1 + 2n + 2 - 2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Mais $2n + 3 \geqslant 2\sqrt{n+2} \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 \geqslant 4n + 8 \Leftrightarrow 4n^2 + 8n + 1 \geqslant 0$, ce qui est vrai.
Enfin, on a

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2\frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 2\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc les deux suites sont adjacentes, et par conséquent tendent vers une même limite $\ell \in \mathbf{R}$.

Supposons par l'absurde que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ possède une limite finie ℓ_1.

Alors, $2\sqrt{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 - \ell$, ce qui est impossible puisque $2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ne possède pas de limite finie.
Puisqu'il s'agit d'une suite croissante, elle tend vers $+\infty$.

> **Plus simplement**
> Il a été dit en cours que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est toujours divergente.

Solution de l'exercice 12.17

Nous allons montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On a

$$u_{n+1} = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1}\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ car } \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

De même, on a, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$, donc $2\tan(x) = (1-\tan^2(x))\tan(2x)$.

En particulier, si $|x| < \dfrac{\pi}{4}$, alors $\tan(2x) \geqslant 2\tan(x)$.

Donc pour $x = \dfrac{\theta}{2^{n+1}}$, $2\tan\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

En multipliant par 2^n, il vient $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est décroissante.

Enfin, $u_n = \theta\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

Et de même, en utilisant le fait que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$$

alors on a $v_n = \theta\dfrac{\tan\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

Et donc $v_n - u_n \to 0$. On en déduit que les suites sont adjacentes, et nous connaissons déjà leur limite commune : c'est θ.

> **Rappel**
> Il est classique que
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Solution de l'exercice 12.18

1. On a $S_{2n+2} - S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$.
Donc (S_{2n}) est décroissante.
De même, on prouver que (S_{2n+1}) est croissante.

> **⚠ Attention !**
> Le terme de (u_{2n}) qui suit u_{2n} n'est sûrement pas u_{2n+1}, qui n'est pas un terme de (u_{2n}), mais $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$.

2. On a $S_{2n+1} - S2n = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers **une même limite.**
Ceci implique alors que (S_n) converge.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.19

Prouvons par récurrence que $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
Pour $n = 0$, on a $a_1 = \dfrac{a+b}{2} \leqslant a = a_0$ et $b_1 = \sqrt{ab} \geqslant b = b_0$.
Et il est classique[9] que $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{a+b}{2}$, si bien que $b_1 \leqslant a_1$.

[9] Cela découle d'une identité remarquable : $4ab \leqslant (a+b)^2$ car $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Supposons donc $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
Alors $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leqslant a_{n+1}$ car $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.
De même, $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}a_{n+1}} \geqslant b_{n+1}$ car $a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$.
Enfin, toujours à l'aide de $\sqrt{uv} \leqslant \dfrac{u+v}{2}$, $\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ soit encore $b_{n+2} \leqslant a_{n+2}$.
Et donc on a bien $b_{n+1} \leqslant b_{n+2} \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$, si bien que la propriété est héréditaire.
Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

Ainsi, (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante.
Puisque (a_n) est minorée par $b_0 = b$ et (b_n) est majorée par $a_0 = a$, par le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent.
Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell 1+\ell_2}{2}$.
Et donc par unicité de la limite[10], $\ell_1 = \dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}$, si bien que $\ell_1 = \ell_2$.
Donc (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

[10] On a également $a_{n+1} \to \ell_1$.

Commentaire *: cette limite commune aux deux suites (notons la $M(a,b)$ est appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.*
On peut prouver qu'elle a les propriétés qu'on attend pour une moyenne, par exemple que $M(a,a) = a$ et que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$, mais on ne sait pas l'exprimer facilement[11] à l'aide de a et b.

[11] Il existe tout de même des formules à base d'intégrales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.20

Notons $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{a_n + ib_n - 3a_n + 3ib_n}{2} = \frac{-2a_n + 4ib_n}{2} = -a_n + 2ib_n.$$

Et donc[12] $a_{n+1} = -a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = (-1)^n a_0$ et $b_n = 2^n b_0$.
Ces deux suites[13] sont donc convergentes si et seulement si $a_0 = b_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z_0 = 0$, auquel cas (z_n) est la suite nulle, qui converge vers 0.

[12] Par identification des parties réelles et imaginaires.
[13] Géométriques.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.21

Supposons par l'absurde que (z_n) converge vers un complexe ℓ.
Notons que ce complexe sera nécessairement de module 1 puisque les z_n le sont. En effet, si $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a+ib$, $\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $\mathrm{Im}(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$, de sorte que

$$|z_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(a_n)^2 + \mathrm{Im}(b_n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a^2+b^2} = |\ell|.$$

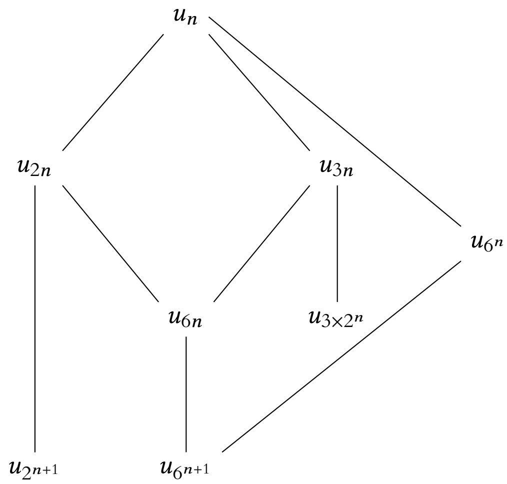
Et donc si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_n| = 1$, alors $|\ell| = 1$.
Mais (z_{2n}) converge également vers ℓ.
Or $z_{2n} = e^{i\ln(2)+i\ln(n)} = e^{i\ln(2)}z_n$.
Et donc $\ell = e^{i\ln(2)}\ell \Leftrightarrow e^{i\ln(2)} = 1 \Leftrightarrow \ln(2) \equiv 0 \ [2\pi]$.
Mais $\dfrac{\ln(2)}{2\pi} \in]0,1[$ ne peut être entier, ce qui est absurde.

Détails
Nous avons ici utilisé le fait que $\ell \neq 0$, ce qui découle du fait que $|\ell| = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.22

Le dessin suivant représente les liens entre les différentes suites : un trait entre deux suites signifiant que celle du bas est extraite de celle du haut.

La relation «être extraite de» étant transitive, certaines flèches sont implicites et ne sont donc pas dessinées (par exemple, $(u_{6^{n+1}})$ est extraite de (u_{2n}).
Je vous laisse le soin de chercher les extractrices si vous en éprouvez le besoin.



SOLUTION DE L'EXERCICE 12.23

Nous savons que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite**, alors (u_n) converge.
Malheureusement, ici nous ne savons rien des limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), si ce n'est qu'elles existent.
Prouvons qu'elles sont égales.
Notons $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et $\ell_3 = \lim_{n\to+\infty} u_{3n}$.
Alors la suite (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{3n}).
Étant extraite de (u_{2n}), elle converge vers ℓ_1. Mais étant extraite de (u_{3n}), elle converge vers ℓ_3. Et par unicité de sa limite, on a donc $\ell_1 = \ell_3$.
De même, la suite (u_{6n+3}) est à la fois extraite de (u_{2n+1}) (la suite des termes d'ordre impair) et de (u_{6n}). Donc par le même raisonnement, $\ell_2 = \ell_3$.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$, et donc que (u_n) converge vers $\ell_1 = \ell_2$.

Détails
Un multiple de 6 est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 3.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.24

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Alors f est dérivable sur $[0,1]$, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
En particulier, il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Puisque $n^2 \leqslant n^2+n < (n+1)^2$, on a $n \leqslant \sqrt{n^2+n} < n+1$, et donc $\lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor = n$.
Et donc $u_{n^2+n} = \sqrt{n^2+n} - n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$.
Utilisons alors le résultat préliminaire :

$$u_{n^2+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$.
Donc si (u_n) possède une limite, celle-ci vaut nécessairement $\dfrac{1}{2}$.
Or, on a $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor = 0$.
Autrement dit, il existe également une suite extraite de (u_n) qui converge vers 0, contredisant le fait que la limite[14] de (u_n) ne peut que valoir $\dfrac{1}{2}$.
Et donc (u_n) ne possède pas de limite.

Détails
La suite extraite en question est $(u_{\varphi(n)})$, avec $\varphi(n) = n^2+n$.

[14] Si elle existe !

3. On a $b^2n^2 \leqslant b^2n^2 + 2an < \underbrace{b^2n^2 + 2bn + 1}_{=(bn+1)^2}$, de sorte que $bn \leqslant \sqrt{n^2b^2 + 2an} < bn + 1$.

Et donc $u_{n^2b^2+2an} = \sqrt{n^2b^2 + 2an} - bn = bn\left(\sqrt{1 + \frac{2a}{nb^2}} - 1\right)$.

Utilisons encore une fois la première question :

$$u_{n^2b^2+2an} = \frac{\sqrt{1+\frac{2a}{nb^2}}-1}{\frac{2a}{nb^2}} \frac{2a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{2a}{b} = \frac{a}{b}.$$

4. Si x est rationnel, c'est facile : il suffit d'utiliser la question précédente : il existe deux entiers a et b avec $a \leqslant b$ tels que $x = \frac{a}{b}$, et alors la suite $(u_{n^2b^2+2an})_n$ fait l'affaire.

En revanche, la situation est plus complexe dans le cas où x est irrationnel.
Nous allons utiliser à la fois la densité des rationnels dans $\mathbf{R}$ et la question précédente qui permet d'approcher un rationnel par des éléments de (u_n).

> **Remarque**
> Une telle suite existe par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, ou plus précisément, de $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Commençons par fixer une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de rationnels de $[0, 1]$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|\alpha_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$.
Puisqu'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers α_1, il existe donc un entier n_1 tel que $|u_{n_1} - \alpha_1| \leqslant 1$. Posons alors $\varphi(1) = n_1$.
Par l'inégalité triangulaire, on a alors $|u_{\varphi(1)} - x| \leqslant |u_{n_1} - \alpha_1| + |\alpha_1 - x| \leqslant 2$.
On définit alors les $\varphi(k)$ de proche en proche de la manière suivante : supposons $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$ déjà définis.
Notons $\alpha_k = \frac{a_k}{b_k}$, avec $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$.
Par la question précédente, la suite $(u_{n^2b_k^2+2a_kn})_n$ converge vers α_k.
Et en particulier, il existe n_k tel que pour $n \geqslant n_k$, $|u_{n^2b_k^2+2a_kn} - \alpha_k| \leqslant \frac{1}{k}$.
On pose alors $N_k = \max(\varphi(k-1), n_k)$ et $\varphi(k) = N_k^2b_k^2 + 2a_kN_k$.
Alors, par l'inégalité triangulaire, il vient

> **Détails**
> La valeur exacte que l'on choisit pour $\varphi(k)$ n'a pas vraiment d'importance, du moment qu'elle est strictement plus grande que $\varphi(k-1)$ et qu'elle est de la forme $n^2b_k^2 + 2a_kn$ (pour qu'il s'agisse bien d'un terme de la suite extraite de limite α_k que nous venons de considérer).

$$|u_{\varphi(k)} - x| \leqslant |u_{\varphi(k)} - \alpha_k| + |\alpha_k - x| \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2k}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_{\varphi(k)} - x| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)} = x$.
Nous avons donc bien construit une suite extraite de (u_n) dont la limite vaut x.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Nous allons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tels que $|\sqrt{n} - \sqrt{m}| < \varepsilon$. Ceci suffira bien à prouver la densité annoncée, puisque si $a < b$ sont deux réels distincts, $x = \frac{a+b}{2}$ et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, il existera bien un couple $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $\left|\frac{a+b}{2} - (\sqrt{n} - \sqrt{m})\right| < \frac{b-a}{2}$, et donc $a < \sqrt{n} - \sqrt{m} < b$.

Soit donc $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$.
► Supposons dans un premier temps $x \leqslant 0$. Alors $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.
Et donc par la question précédente, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\left|x - \lfloor x \rfloor - \left(\sqrt{N} - \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor\right)\right| < \varepsilon$.
Soit encore $\left|x - \left(\sqrt{N} - \left(\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor\right)\right)\right| < \varepsilon$.
Mais $\lfloor x \rfloor \leqslant 0$, si bien que $M = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$.
Et donc $\left|x - \left(\sqrt{N} - \sqrt{M^2}\right)\right| < \varepsilon$.

► Dans le cas où $x \geqslant 0$, il faut être un peu plus subtil car le M du raisonnement ci-dessus peut être négatif si N n'est pas assez grand. Plus précisément : c'est le cas $\sqrt{N} < x$.
Mais nous savons qu'il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x - \lfloor x \rfloor$.
Or toute extractrice tend vers $+\infty$. Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|x - \lfloor x \rfloor - u_{\varphi(n)}| < \varepsilon$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et $\varphi(n) \geqslant x^2$.
Notons alors $N = \varphi(n)$. Alors comme précédemment,

> **Détails**
> L'existence d'un tel n est garantie par le fait que $\varphi(n) \to +\infty$.

$$\left|x - \lfloor x \rfloor - \sqrt{N} + \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor\right| < \varepsilon$$

soit encore $\left|x - \left(\sqrt{N} - \left(\left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor\right)\right)\right| < \varepsilon$.
Et là encore, $M = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$, et donc $\left|x - \left(\sqrt{N} - \sqrt{M^2}\right)\right| < \varepsilon$, qui est bien ce que l'on cherchait.

Commentaire : nous avons prouvé un résultat plus fort que souhaité, à savoir que $\{\sqrt{n} - m, (m,n) \in \mathbf{N}^2\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.25

1. Supposons que $\sin(n\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Alors $\sin((n+1)\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Mais $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha + \alpha) = \sin(n\alpha)\cos(\alpha) + \cos(n\alpha)\sin(\alpha)$.
Puisque $\sin(\alpha) \neq 0$, on a donc $\cos(n\alpha) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha)\cos(\alpha)}{\sin\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

2. Notons $\ell' = \ell\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ la limite de $(\cos(n\alpha))_n$.
Comme à la question 1, on a

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(n\alpha) = \frac{\cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Et donc $\ell = \ell'\dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} = -\ell\left(\dfrac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}\right)^2$.
Donc $\ell\left(1 + \left(\dfrac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow \ell = 0$.
Par ailleurs, on a $\cos(n\alpha)^2 + \sin(n\alpha)^2 = 1$, ce qui en passant à la limite nous donne $\ell^2 + \ell'^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$.
Ceci est impossible, et c'est donc que $(\sin(n\alpha))_n$ diverge.
La suite $(\cos(n\alpha))$ diverge aussi, puisque le calcul ci-dessus prouve que si elle converge, alors $(\sin(n\alpha))_n$ converge aussi, ce qui n'est pas le cas.

> **Détails**
> La suite (u_{n+1}) est toujours une suite extraite de (u_n), et donc dans le cas où (u_n) converge, (u_{n+1}) converge également, et a la même limite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.26

Commençons par noter qu'une récurrence rapide prouve que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
On a alors, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)u_{n+1} = \sqrt{nu_n}$.
Posons donc $v_n = nu_n$, de sorte que $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
Autrement dit, on a $\ln(v_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln(v_n)$, de sorte que $(\ln(v_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(v_n) = \dfrac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}$, de sorte que $v_n = e^{\frac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $u_n = \dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.27

Notons qu'il n'est pas totalement évident que (u_n) soit bien définie, et il faut pour cela s'assurer que pour tout n, $u_n^2 + u_n + (-1)^n$ est bien positif, afin que sa racine soit définie.

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n \geqslant 1$.
La récurrence est initialisée grâce à l'hypothèse faite sur u_0.
Supposons alors $u_n \geqslant 1$. Alors

$$u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2 \geqslant 1.$$

Et donc u_{n+1} est bien défini et par croissance de la fonction racine, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \geqslant 1$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.

> **$(-1)^n$**
> Notons que si n est pair, on peut faire bien mieux que la majoration que nous venons de donner, mais peu importe, l'essentiel étant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$.

Mais alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2$.
Et donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{u_n^2} \geqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$. Notons que nécessairement, $\ell \geqslant 1$, puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.
Alors les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent également vers ℓ.
Or nous savons que $u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n} + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\ell^2+\ell+1}$.
Or, $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et donc par unicité de la limite, $\ell = \sqrt{\ell^2+\ell+1}$.
Soit encore $\ell^2 = \ell^2 + \ell + 1 \Leftrightarrow \ell = -1$, ce qui est impossible.
Donc forcément, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.28

1. Il est évident que si (u_n) converge, alors sa limite vaut ℓ.
Raisonnons par l'absurde, et supposons (u_n) non convergente.
Alors $\forall L \in \mathbf{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists n \geqslant N, |u_n - L| > \varepsilon$.
Et en particulier, un tel ε existe lorsque $L = \ell$.
Et alors, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
Construisons alors une extractrice φ de la manière suivante :
$\varphi(0) = \min\{k \in \mathbf{N}, |u_k - \ell| > \varepsilon\}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k \geqslant \varphi(n) \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$.
Autrement dit, $(u_{\varphi(n)})$ est la suite formée des termes de (u_n) tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
Alors cette suite extraite est encore bornée, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ telle que $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge.
Comme il s'agit d'une suite extraite de (u_n), sa limite est nécessairement ℓ, ce qui est impossible puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell| > \varepsilon$.
Et donc (u_n) est convergente.

> **Détails**
> En effet, nous venons de dire que pour tout N, il existe un $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$. S'il n'existait qu'un nombre fini de tels termes, cette propriété ne serait pas vérifiée pour N plus grand que tous ces termes.

2. Il semble légitime d'utiliser la première question.
Considérons une suite $(v_{\varphi(n)})$ extraite de (v_n), que l'on suppose convergente, de limite α.
Notons alors $w_n = v_n + \dfrac{v_{2n}}{2}$, de sorte que $w_n \to \ell$.
Alors $w_{\varphi(n)} = v_{\varphi(n)} + \dfrac{v_{2\varphi(n)}}{2}$.
Donc $v_{2\varphi(n)} = 2(w_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2(\ell - \alpha)$.
Et $(v_{2\varphi(n)})$ est bien une suite extraite de (v_n), de sorte que nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de (v_n) de limite $\alpha_1 = 2(\ell - \alpha)$.

> **⚠ Attention !**
> $(v_{2\varphi(n)})$ n'est pas (en général) une suite extraite de $(v_{\varphi(n)})$. Donc nous ne pouvons rien dire de sa convergence.

Mais alors le procédé peut être itéré : il existe une suite extraite de (v_n) de limite $\alpha_2 = 2(\ell - \alpha_1)$.
Et ainsi de suite : la suite définie par $\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} = 2(\ell - \alpha_n) \end{cases}$ est formée de limites de suite extraites de (v_n).
Mais il s'agit là d'une suite arithmético-géométrique de raison -2, dont nous savons donc trouver le terme général.
Le point fixe de $x \mapsto 2(\ell - x)$ est $x = \frac{2\ell}{3}$, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = (-2)^n\left(\alpha_0 - \dfrac{2\ell}{3}\right) + \dfrac{2\ell}{3}$.
Mais une telle suite n'est bornée que si $\alpha_0 = \dfrac{2\ell}{3}$.

Or si (v_n) est à valeurs dans $[-M, M]$, toute suite extraite de (v_n) est encore à valeurs dans $[-M, M]$, et en particulier, si elle converge, alors sa limite se doit d'être dans $[-M, M]$.
Et donc en particulier, (α_n) est bornée.
On en déduit que $\alpha = \alpha_0 = \frac{2\ell}{3}$.
Nous venons ainsi de prouver que toute suite extraite de (v_n) convergente doit avoir $\frac{2\ell}{3}$ pour limite.
Par la question 1, on en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\ell}{3}$.

> **Remarque**
> Il était de toutes façons prévisible que si u_n possédait une limite ℓ', celle-ci devait vérifier
> $$\ell = \ell' + \frac{\ell'}{2} \Leftrightarrow \ell' = \frac{2\ell}{3}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.29

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$, et donc 1 est un majorant de A.
De plus, si on pose $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$, alors (u_n) est une suite d'éléments de A, qui tend vers 1, et donc $1 = \sup A$.
De même, il est facile de constater que -1 est un minorant de A et que $-\dfrac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, et donc $-1 = \inf A$.

2. Il est évident que 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.
D'autre part, il est classique que $2pq \leqslant p^2+q^2$, et donc $\dfrac{pq}{p^2+q^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, avec égalité si et seulement si $p=q$.
Et donc $\dfrac{1}{2}$ est le plus grand élément de B, et donc sa borne supérieure.

3. Il est clair que C est minorée par 0, et si on pose $c_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$, alors (c_n) est une suite à valeurs dans C qui tend vers 0, et donc $0 = \inf C$.
D'autre part, pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m+3^{m+n}} \leqslant \dfrac{2^n}{1+3^n}$.
Or, $1+3^{n+1} \geqslant 2(1+3^n)$, de sorte que

$$\frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}} = \frac{2\cdot 2^n}{1+3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{1+3^n}.$$

Donc la suite de terme général $\dfrac{2^n}{1+3^n}$ est décroissante et donc, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\dfrac{2^n}{1+3^n} \leqslant \dfrac{2^0}{1+3^0} = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $(m,n)\in\mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m+3^{n+m}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, de sorte que $\dfrac{1}{2} = \max C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.30

Soit (u_n) une telle suite. Une récurrence rapide nous informe que pour tout $n\in\mathbf{N}$, u_n est du signe de u_0.

▶ Si $u_0 \geqslant 0$. Alors $\forall n\in\mathbf{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n^2} \leqslant 1$.
Et donc (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
Et alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$, si bien que par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2} \Leftrightarrow \ell = 0$.

▶ Si $u_0 < 0$, alors la suite $(-u_n)$ vérifie la même relation de récurrence, mais possède un premier terme positif, donc tend vers 0.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.31

1. Puisque (u_n) est évidemment à valeurs positives, sa limite ℓ, si elle existe, est nécessairement positive ou nulle.
Elle ne peut être nulle, car on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{u_n} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$, ce qui est absurde puisque $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right)$, si bien que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell+\dfrac{a}{\ell}\right)$.
Et donc $2\ell = \ell + \dfrac{a}{\ell}$, soit encore $\ell = \dfrac{a}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = a$, et donc[15] $\ell = \sqrt{a}$.

[15] Car $\ell \geqslant 0$.

2. Soit $n\in\mathbf{N}$. Alors

$$|u_{n+1}-\sqrt{a}| = \left|\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}\right| = \frac{1}{2u_n}\left|u_n^2+a-2u_n\sqrt{a}\right| = \frac{1}{2u_n}\left|(u_n-\sqrt{a})^2\right| = \frac{|u_n-\sqrt{a}|}{2}\frac{|u_n-\sqrt{a}|}{u_n} \leqslant \frac{|u_n-\sqrt{a}|}{2}.$$

Notons que pour affirmer que $|u_n-\sqrt{a}| < |u_n|$, il nous faut savoir que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$, ce qui peut se prouver par récurrence, ou en notant que $\left[\sqrt{a},+\infty\right[$ est stable par f (voir question suivante).

Une récurrence facile prouve que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $|u_n-\sqrt{a}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0-\sqrt{a}|$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\sqrt{a}| = 0$, si bien que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.

3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$.
Alors $\mathbf{R}_+^*$ est stable par f, de sorte que f est bien définie.
De plus, la dérivée de f est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a}{x^2}\right) = \dfrac{x^2-a}{2x^2}$, de sorte que f possède un minimum en $\sqrt{a}$, et ce minimum vaut $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

Et donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant \sqrt{a}$. En particulier, $[\sqrt{a}, +\infty[$ est stable par f.

Pour $x \geqslant \sqrt{a}$, on a $f(x) - x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} - x\right) = \dfrac{a - x^2}{2x} \leqslant 0$.
Et donc pour tout $x \in [\sqrt{a}, +\infty[$, $f(x) \leqslant x$.
On en déduit que (u_n) est décroissante. Étant minorée par $\sqrt{a}$, elle converge[16]
Et par continuité de f, sa limite est alors un point fixe de f. Le même calcul qu'à la question 1 nous dit alors que ce point fixe vaut $\sqrt{a}$.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.

[16] C'est le théorème de la limite monotone.

4. On a, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2}{\frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{a})^2} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2 = v_n^2.$$

5. Une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0^{2^n}$.
Et alors $u_n - \sqrt{a} = (u_n + \sqrt{a})v_0^{2^n}$.
Mais (u_n) est décroissante si bien que $u_n + \sqrt{a} \leqslant a + \sqrt{a} \leqslant 2a$.
Et donc $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant 2av_0^{2^n}$.

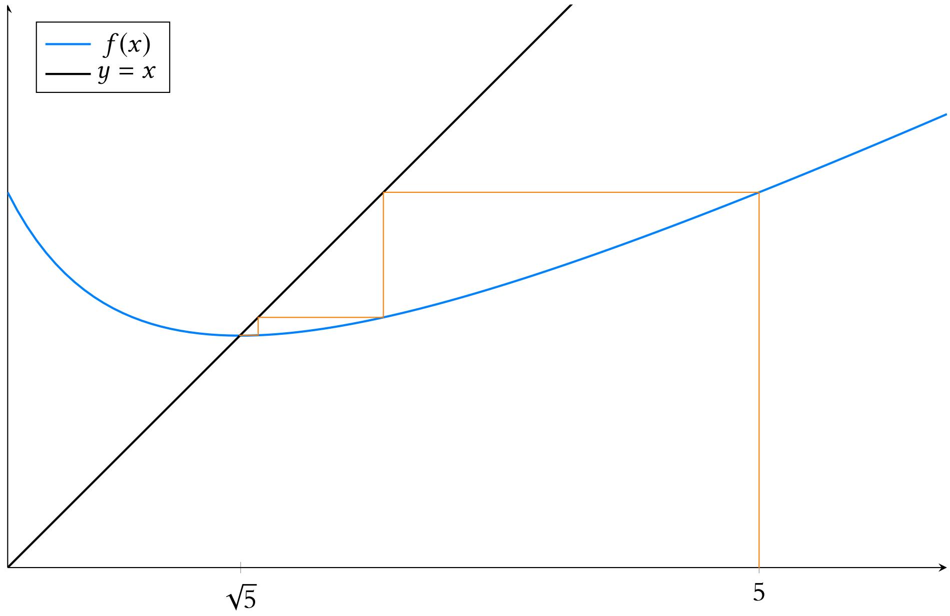


FIGURE 12.1 – Le cas $a = 5$. On constate que la convergence est très rapide.

Cette majoration est intéressante puisque $v_0 \in [0, 1[$, si bien que $v_0^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, $v_0^{2^n}$ doit tendre «rapidement» vers 0.
Pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ avec une précision $\varepsilon > 0$ fixée, on peut commencer par chercher une valeur de n pour laquelle $v_0^{2^n} < \dfrac{\varepsilon}{2a}$.
Une fois un tel n obtenu, cela nous donne le nombre de termes de (u_n) qu'il nous faut calculer pour être certain d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près.
En effet, pour n comme ci-dessus, on a donc $|u_n - \sqrt{a}| < 2av_0^{2^n} \leqslant \varepsilon$.

Remarque : pour une suite convergente (u_n) de limite ℓ, nous savons toujours que «pour n assez grand», u_n est une approximation de ℓ. Mais que signifie concrètement le «n assez grand» ? Est-ce que $n = 10$ suffit, ou faut-il $n = 10^{10^{10}}$ (auquel cas mon ordinateur risque de ne pas pouvoir calculer u_n...) ?
Pour un calcul satisfaisant de la valeur approchée d'une quantité, une limite ne suffit plus, il faut en plus un contrôle effectif de l'erreur afin d'avoir des garanties sur la qualité de l'approximation.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.32

Soit donc $f : x \mapsto x\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouvons alors que $I =]0, e^{-1}[$ est stable par f.
Pour $x \in I$, on a $\ln(x) < -1$. Donc $-1 < \dfrac{1}{\ln(x)} < 0$, et donc $0 < 1 + \dfrac{1}{\ln x} < 1$.
Si bien que $0 < f(x) < x < e^{-1}$, et donc I est stable par f, ce qui légitime le fait que (u_n) est bien définie.

Puisque nous avons prouvé au passage que sur I, $f(x) < x$, alors (u_n) est décroissante. Étant minorée[17], elle converge.

Notons $\ell \in [0, e^{-1}]$ sa limite, et supposons par l'absurde que $\ell > 0$.
Alors[18], $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\left(1+\dfrac{1}{\ln \ell}\right)$.
Et par unicité de la limite, $\ell = \ell\left(1+\dfrac{1}{\ln \ell}\right)$, ce qui est absurde.
On en déduit donc $\ell = 0$.

Solution de l'exercice 12.33

Prouvons que si $z \in \mathbf{C}$ est tel que $|z| < 1$, alors $\left|\dfrac{z}{2-z}\right| < 1$.
Soit donc $z \in \mathbf{C}$ de module strictement inférieur à 1.
Alors $|2-z| \geqslant 2 - |z| > 1$, si bien que par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{|2-z|} < 1$.
Et donc $\left|\dfrac{z}{2-z}\right| = \dfrac{|z|}{|2-z|} < |z| < 1$.

Pour le dire autrement, si f désigne la fonction de $\mathbf{C} \setminus \{2\}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z}{2-z}$, alors nous venons de prouver que $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ est stable par f.
Et donc la suite (u_n) est bien définie, et tous ses termes sont dans $\mathcal{D}$, si bien que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| < 1$.
Plus précisément, nous venons de prouver que pour $z \in \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, $|f(z)| < |z|$.
Autrement dit, la suite $(|f(u_n)|)_n$ est décroissante[19], si bien que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant |a|$.
Et alors, sur le même principe, si $|u_n| < a$, alors $|u_{n+1}| < \frac{|u_n|}{2-|a|}$, si bien qu'une récurrence immédiate prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2-|a|}\right)^n |u_0|.$$

Mais $2 - |a| > 1$, et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{2-|a|} < 1$, de sorte que $\left(\dfrac{1}{2-|a|}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[17] Par 0.

[18] Par continuité du ln en ℓ

[19] Notons qu'il s'agit bien d'une suite de réels.

13

Calcul matriciel

Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés des **scalaires**.

13.1 Définitions, opérations sur les matrices

Définition 13.1 – Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle **matrice à n lignes et à p colonnes à coefficients dans K** toute application $A : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$.
Une telle matrice A est représentée[1] sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le scalaire $a_{i,j}$ est appelé **coefficient d'indice (i,j) de** A, et on le note généralement $a_{i,j}$ où $[A]i,j$.
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
Lorsque $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{K})$.

[1] Et nous garderons cette représentation en tête et n'aurons **jamais** besoin de la voir comme une application.

Exemple 13.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbf{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

Remarques. ▸ Notons que se donner une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ revient à se donner une famille de $n \times p$ scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ indicée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
Il ne sera pas rare qu'on écrive «Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$», ce qui signifie qu'on considère la matrice A dont les coefficients sont les $a_{i,j}$.
▸ On parlera de «matrice de taille (n,p)» pour un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
▸ Par définition, deux matrices **de même tailles**[2] sont égales si et seulement si tous leurs coefficients le sont.

[2] Et deux matrices de tailles différentes ne peuvent pas être égales. Tout simplement car en tant qu'applications, elles n'ont pas même ensemble de définition.

Les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices lignes (de taille n), et ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont appelés matrices colonnes (de taille n).
On identifie généralement $\mathbf{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, en identifiant le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ à la matrice (à n lignes et une seule colonne) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 13.3 – ► Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On appelle **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et on note $0_{n,p}$ (ou tout simplement 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) la matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on notera aussi 0_n.
► Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on appelle **matrice identité d'ordre** n, et on note I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont les $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Autrement dit, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Terminologie
La quantité $\delta_{i,j}$ est appelée **symbole de Kronecker.**

On appelle matrice carrée toute matrice qui a autant de ligne que de colonnes.
Certaines matrices, de forme remarquable portent alors un nom :

Définition 13.4 (Matrices carrées remarquables) – Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A est

1. **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés sous la diagonale sont nuls.
2. **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   Autrement dit si tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.
3. **diagonale** si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
   C'est donc une matrice dont les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale.
   Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on note $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont (dans cet ordre) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
   Autrement dit, $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. **scalaire** si elle est diagonale, et que tous ses coefficients sont égaux. Autrement dit, s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \operatorname{Diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$.

Formule ?
Si un dessin de matrice avec des pointillés ne vous convient pas (mais à terme, il faudra que cela vous convienne) : le coefficient (i,j) de $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

13.1.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Sans chercher à expliciter pour l'instant ce qu'est un espace vectoriel, nous allons définir sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ deux opérations : la somme de deux matrices, et la multiplication d'une matrice par un scalaire.
De plus, ces deux opérations sont compatibles en un certain sens, et donc $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ forme ce que nous nommerons plus tard un espace vectoriel.

Définition 13.5 (Multiplication d'une matrice par un scalaire) –
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors on note $\lambda \cdot A$ (ou plus simplement λA) la matrice $(\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Notons qu'en particulier, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $0 \cdot A = 0_{n,p}$, et que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Proposition 13.6 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors : $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Alors

$$[(\lambda\mu) \cdot A]_{i,j} = (\lambda\mu) a_{i,j} = \lambda\mu a_{i,j} = \lambda(\mu a_{i,j}) = \lambda[\mu \cdot A]_{i,j} = [\lambda \cdot (\mu \cdot A)]_{i,j}.$$

□

Définition 13.7 – Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Alors on note $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Remarque
Notons que la somme de deux matrices n'est définie que pour des matrices de même taille.

Toutes les propriétés qui suivent doivent vous paraître relativement évidentes, puisqu'elles disent que les calculs avec des matrices se font avec les mêmes règles que les calculs dans les complexes ou les réels.
Malgré tout, leur preuve est un passage obligé.

Proposition 13.8 : *Soient* $(A,B,C)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})^3$, *et* $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$. *Alors :*

1. $A+B=B+A$ *(commutativité de la somme)*
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ *(associativité de la somme)*
3. $0_{n,p}+A=A+0_{n,p}=A$ *(*$0_{n,p}$ *est un élément neutre pour la somme)*
4. *il existe une unique matrice* $D\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *telle que* $A+D=D+A=0_{n,p}$, *et cette matrice est* $(-1)\cdot A$, *que l'on notera* $-A$.
5. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
6. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Démonstration.

1. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[A+B]_{i,j}=[A]_{i,j}+[B]_{i,j}=[B]_{i,j}+[A]_{i,j}=[B+A]_{i,j}.$$
2. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[A+(B+C)]_{i,j}=[A]_{i,j}+[B+C]_{i,j}=[A]_{i,j}+([B]_{i,j}+[C]_{i,j})=([A]_{i,j}+[B]_{i,j})+[C]_{i,j}=[A+B]_{i,j}+[C]_{i,j}=[(A+B)+C]_{i,j}.$$
Donc $A+(B+C)=(A+B)+C$.
3. Notons que la somme étant commutative, il suffit de prouver que $A+0_{n,p}=A$.
Soit alors $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. Alors
$$[0_{n,p}+A]_{i,j}=[0_{n,p}]_{i,j}+[A]_{i,j}=0+[A]_{i,j}=[A]_{i,j}.$$
Donc $0_{n,p}+A=A$.
4. Procédons par analyse-synthèse. Supposons qu'une telle matrice D existe. Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$,
$$[A+D]_{i,j}=0\Leftrightarrow[A]_{i,j}+[D]_{i,j}=0\Leftrightarrow[D]_{,j}=-[A]_{i,j}=[(-1)\cdot A]_{i,j}.$$
Donc $D=(-1)\cdot A$ est la seule matrice possible.
Inversement, on a facilement $[A+D]_{i,j}=0$ pour tout (i,j), donc $A+D=0_{n,p}$.
5. Les points 5) et 6) sont laissés en exercices.

□

Définition 13.9 – Soient $(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, qui vaut 1.
Les $E_{i,j}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant p$ sont appelée **matrices élémentaires** (de taille (n,p)).

Formule ?
Le coefficient (k,ℓ) de $E_{i,j}$ est donné par
$$[E_{i,j}]_{k,\ell}=\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Remarque. La notation $E_{i,j}$, qui ne fait pas apparaître n ou p laisse entendre qu'il n'y a pas de confusions possibles sur la taille des matrices.
On prendra garde au fait que $E_{1,2}$ ne désigne pas la même matrice suivant qu'on se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ ou dans $\mathcal{M}_{2,5}(\mathbf{R})$.

Exemple 13.10

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$, il y a six matrices élémentaires, qui sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.11 : *Soit* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\\1\leqslant j\leqslant p}}$. *Alors* $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$.

On dit que A est combinaison linéaire[3] des matrices $E_{i,j}$.
Mieux : cette écriture est unique, c'est-à-dire que si on a des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ *tels que* $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$, *alors pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $\lambda_{i,j} = a_{i,j}$.

[3] C'est-à-dire une somme de multiples des matrices élémentaires. La définition rigoureuse de combinaison linéaire viendra en temps voulu dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : le coefficient (k,ℓ) de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$ est $\lambda_{k,\ell}$.

Et donc $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$ si et seulement si pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $\lambda_{k,\ell} = a_{k,\ell}$. □

13.1.2 Produit matriciel

Définition 13.12 (Produit de matrices) – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.
Alors on définit le produit AB comme étant la matrice $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ où

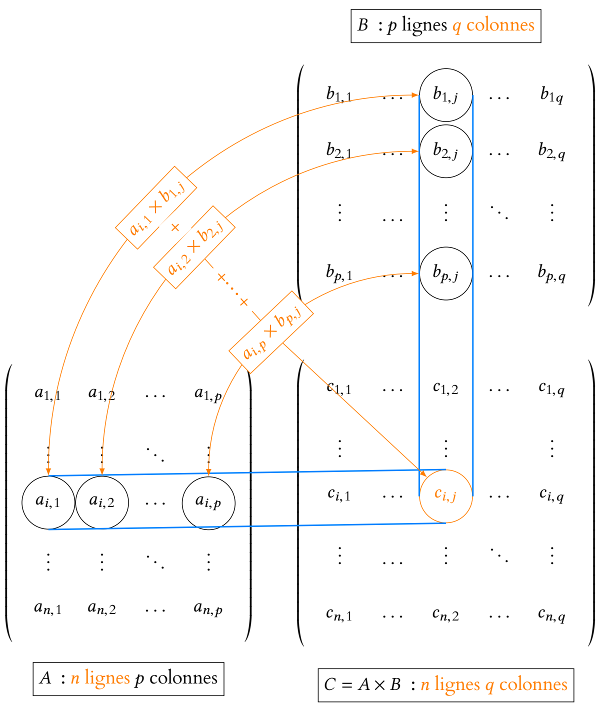
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Remarque
Le produit de deux matrices n'est défini que si la première possède autant de colonnes que la seconde possède de lignes.
En particulier, on ne peut multiplier deux matrices carrées que si elles sont de même taille.

La définition peut sembler compliquée au premier abord, mais est en fait assez facile à utiliser : le coefficient (i,j) du produit s'obtient, comme sur le dessin ci-contre en multipliant les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Il est conseillé, au moins dans un premier temps, de positionner vos matrices comme sur la figure ci-contre, avec A à gauche, B au dessus, le produit AB venant s'insérer entre les deux.

Un produit de matrices, ça se fait avec les deux mains et ça s'écrit avec la troisième !



Remarques. ► Notons que le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini.
► Il se peut que le produit AB soit défini, sans que BA le soit. Par exemple si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{K})$.
► Le produit de toute matrice par la matrice nulle est la matrice nulle.

Exemples 13.13

► Le produit de matrices, contrairement au produit de scalaires, n'est pas commutatif : on n'a pas toujours $AB = BA$, même lorsque ces deux produits sont bien définis.

Ainsi, on a par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $AB = BA$, on dit que A **et** B **commutent.**
► Plus surprenant, il se peut qu'un produit de matrices soit nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

Exercice
À quelle condition sur les tailles de A et B les deux produits AB et BA ont-ils bien un sens ?

Proposition 13.14 :

1. *pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, *pour tout* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ *et tout* $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbf{K})$, $(AB)C = A(BC)$ *(associativité du produit matriciel)*
2. *pour* $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, *on a*
$$(\lambda A+\mu A')B = \lambda AB+\mu A'B \text{ et } A(\lambda B+\mu B') = \lambda AB+\mu AB' \quad \textit{(bilinéarité du produit).}$$
3. *pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $I_nA = AI_p = A$.
4. *pour tout* $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ *et tous* $\lambda,\mu \in \mathbf{K}$, $(\lambda\cdot A)(\mu\cdot B) = (\lambda\mu)\cdot(AB)$.

En particulier
La matrice I_n commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. 1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,r]\!]$. Alors

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{i,k}\,[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$

Et de même,

$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}\,[BC]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell} \sum_{k=1}^{q} [B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$

2.

3. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

$$[I_nA]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [I_n]_{i,k}[A]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}[A]_{k,j} = [A]_{i,j}.$$

Et de même pour $[AI_p]_{i,j}$.

Détails
Tous les $\delta_{i,k}$ sont nuls, sauf pour $k = i$. Donc de la somme ne reste qu'un seul terme : celui pour lequel $k = i$.

4. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$[(\lambda\cdot A)(\mu\cdot B)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [\lambda A]_{i,k}[\mu B]_{k,j} = \lambda\mu \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \lambda\mu[AB]_{i,j} = [(\lambda\mu)(AB)]_{i,j}.$$

□

Proposition 13.15 (Multiplication par une ligne/une colonne) : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

1. *Si E_j est la matrice de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui de la $j^{\text{ème}}$ ligne qui vaut 1, alors AE_j est égal à C_j : la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.*

   Plus généralement, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$.
2. *De même, si E_i est la matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ dont seul le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ colonne est non nul et vaut 1, alors $E_iA = L_i$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.*

Autrement dit

E_j est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il n'y a que la première à faire, la suite découle de la bilinéarité du produit. Soit donc $j \in [\![1, n]\!]$. Alors AE_j est une matrice colonne (à n lignes), dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est

$$[AE_j]_{i,1} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} [E_j]_{k,1} = [A]_{i,j}.$$

Nous reconnaissons là le $i^{\text{ème}}$ coefficient de C_j, donc $AE_j = C_j$.
La formule générale pour AX découle alors de la bilinéarité du produit. □

Définition 13.16 (Puissances d'une matrice carrée) – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors, on note $A^0 = I_n$, et pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

On a alors, pour tous $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$, $A^{k+\ell} = A^k A^\ell = A^\ell A^k$.
Notons en revanche qu'on n'a pas nécessairement $(AB)^k = A^k B^k$.
Toutefois, ceci reste vrai si A et B commutent, car alors

$$(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2 \text{ puis } (AB)^3 = (AB)^2AB = A^2B^2AB = A^2AB^2B = A^3B^3, \cdots$$

Plus généralement, si A et B commutent, alors toute puissance de A commute avec toute puissance de B.

Définition 13.17 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $A^p = 0_n$, on dit que A est **nilpotente**.
On appelle alors indice de nilpotence de A le plus petit entier naturel k tel que $A^k = 0_n$. C'est donc l'unique entier k tel que $A^{k-1} \neq 0_n$ et $A^k = 0_n$.

Exemple 13.18

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$.
Donc A est une matrice nilpotente, et son indice de nilpotence vaut 3.

Proposition 13.19 (Binôme de Newton matriciel) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ deux matrices **qui commutent**, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.*
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration. La preuve se fait de la même manière que dans $\mathbf{C}$: par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, il n'y a pas grand chose à dire : $(A+B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k}$.

Supposons que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\\
&= A\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} + B\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}BA^kB^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{k+1}B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}A^iB^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k}\\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}A^{n+1}B^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}A^kB^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}A^0B^{n+1}\\
&= A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)A^kB^{n+1-k} + A^{n+1}B^0\\
&= \binom{n+1}{0}A^0B^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}A^{n+1}B^{n+1-(n+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^kB^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Commutation
C'est ici qu'on utilise le fait que A et B commutent : si $AB = BA$, alors pour tout k,

$$BA^k = A^kB.$$

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $i = k+1$, de sorte que $k = i-1$.

Formule de Pascal.

□

Exemple 13.20

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $A = 3I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=T}$.

Puisque I_2 commute à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, elle commute à T, et donc $3I_2$ commute également avec T.

Or, on a $T^2 = I_2$, puis $T^3 = T^2T = I_2T = T$, $T^4 = I_2$, $T^5 = T$, etc.

Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $T^k = \begin{cases} I_2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ T & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Par la formule du binôme, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n = (T+3I_2)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k(3I_2)^{n-k}\\
&= \left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)I_2 + \left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)T
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} & \displaystyle -\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \\ \displaystyle -\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} & \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Notons alors $S_1 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.

Alors $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$ et

$$S_1 - S_2 = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} = (-1+3)^n = 2^n.$$

On en déduit que $S_1 = \dfrac{4^n + 2^n}{2}$ et $S_2 = \dfrac{4^n - 2^n}{2}$.

Et donc

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 2^n - 4^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 13.21 : *Le produit de deux matrices A et B triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieurs, resp. diagonales) est une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale).*
De plus, dans les trois cas, le coefficient diagonal (i,i) de AB vaut $a_{i,i}b_{i,i}$ (le produit des coefficients diagonaux (i,i) de A et de B).

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices triangulaires supérieures.
Alors pour $i \geqslant j$, on a

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,k}}_{=0} B_{k,j} + A_{i,i}B_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} A_{i,k} \underbrace{B_{k,j}}_{=0} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

Donc en particulier, pour $i = j$, $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$, et pour $i > j$, $(AB)_{i,j} = 0$, ce qui est bien la définition de matrice triangulaire supérieure.
On raisonne de même pour les triangulaires inférieures, et enfin, une matrice diagonale n'est rien d'autre qu'une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. □

Le résultat suivant, plus simple qu'il n'y paraît n'est pas au programme **en sup**, mais je vous invite à essayer de le comprendre, même si sa preuve n'est pas exigible.

Proposition 13.22 (Produit par blocs) : *Soient $A, A', B, B', C, C', D, D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ dont les tailles sont comme ci-dessous. Alors*

$$\begin{array}{c} \\ p \updownarrow \\ p' \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \overset{q}{\longleftrightarrow} \quad \overset{q'}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{r'}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \updownarrow q \\ \updownarrow q' \end{array} = \begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \qquad \overset{r'}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \updownarrow p \\ \updownarrow p' \end{array}.$$

Il faut bien comprendre dans cette définition, que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ne désigne pas une matrice dont les coefficients seraient eux-mêmes des matrices, mais bien une matrice à coefficients dans $\mathbf{K}$, de taille $(p+p', q+q')$, dont les coefficients sont :

- ceux de A si le numéro de ligne est entre 1 et p et le numéro de colonne entre 1 et q
- ceux de B si le numéro de ligne est entre 1 et p et le numéro de colonne entre $q+1$ et $q+q'$

- etc

La formule affirme alors que le produit se fait comme si on faisait un produit de matrices 2×2.

Démonstration. Notons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+p',q+q'}(\mathbf{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q+q',r+r'}(\mathbf{K})$.

La preuve est plus fastidieuse à écrire qu'à comprendre.
Pour bien la comprendre, faites le produit avec vos mains : le coefficient situé, par exemple, à la première ligne et première colonne de MM' : vous allez faire les produits des coefficients de la première ligne de M par ceux de la première colonne de M'.
Et les q premiers coefficients de la première ligne de M sont ceux de la première ligne de A, pendant que les q premiers coefficient de la première colonne de M' sont ceux de la première colonne de A'.
Donc on commence en fait par calculer le coefficient $(1,1)$ de AA'.
Puis, les q' coefficients suivants de la première ligne de M sont ceux de la première ligne de B, et les q' coefficients suivants de la première colonne de M' sont ceux de la première colonne de C'. Donc nous sommes en train de calculer le coefficient $(1,1)$ de BC'.
Et donc au final, $[MM']_{1,1} = [AA']_{1,1} + [BC']_{1,1}$.

Plus généralement, notons que les coefficients de M et M' sont donnés par :

$$[M]_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant q \\ [B]_{i,j-q} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant p \text{ et } q+1 \leqslant j \leqslant q+q' \\ [C]_{i-p,j} & \text{si } p+1 \leqslant i \leqslant p+p' \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant q \\ [D]_{i-p,j-q} & \text{si } p+1 \leqslant i \leqslant p+p' \text{ et } q+1 \leqslant j \leqslant q+q' \end{cases} \qquad [M']_{i,j} = \begin{cases} [A']_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant r \\ [B']_{i,j-r} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } r+1 \leqslant j \leqslant r+r' \\ [C']_{i-q,j} & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant q+q' \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant r \\ [D']_{i-q,j-r} & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant q+q' \text{ et } r+1 \leqslant j \leqslant r+r' \end{cases}$$

Il y a alors 4 cas à distinguer lors du calcul du coefficient (i,j) de MM', suivant qu'on se trouve dans le bloc en haut à gauche, en haut à droite, etc de MM'.
Je ne traite qu'un cas[4], celui où $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, les autres sont identiques.
Soit donc $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} [MM']_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q+q'} [M]_{i,k}[M']_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} [A]_{i,k}[A']_{k,j} + \sum_{k=q+1}^{q+q'} [B]_{i,k-q}[C']_{k-q,j} \\ &= [AA']_{i,j} + \sum_{\ell=1}^{q'} [B]_{i,\ell}[C']_{\ell,j} \\ &= [AA']_{i,j} + [BC']_{i,j} = [AA' + BC']_{i,j}. \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

□

[4] Celui du bloc supérieur gauche.

13.1.3 Transposée d'une matrice

Définition 13.23 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **transposée de** A et on note $A^\top$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{j,i}$.
Dit autrement, la transposition échange les lignes et les colonnes de A, en ce sens que la première ligne de A est la première colonne de $A^\top$, etc.

⚠ La notation en vigueur dans les anciens programmes était ${}^tA$ (avec le ^{t} à gauche et non à droite) et non $A^\top$. Ne soyez donc pas surpris si vous croisez cette notation.

Exemple 13.24

Dans le cas d'une matrice carrée, transposer A revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A. Par exemple :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors } A^\top = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que les coefficients diagonaux restent alors inchangés.

Proposition 13.25 (Linéarité de la transposition) : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors*

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

Démonstration. Pour $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, on a

$$\left[(\lambda A + \mu B)^\top\right]_{i,j} = [\lambda A + \mu B]_{j,i} = \lambda [A]_{j,i} + \mu [B]_{j,i} = \lambda \left[A^\top\right]_{i,j} + \mu \left[B^\top\right]_{i,j}.$$

□

Remarque. Notons que cette formulation cache en fait plusieurs choses.
Notamment, en prenant $\lambda = \mu = 1$, que $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
Ensuite pour $\mu = 0$, que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$.

Proposition 13.26 : *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\left(A^\top\right)^\top = A$.*

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$. Alors

$$\left[\left(A^\top\right)^\top\right]_{i,j} = \left[A^\top\right]_{j,i} = [A]_{i,j}.$$

□

Proposition 13.27 (Transposée d'un produit) : *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. Alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Démonstration. On a, pour $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$\left[(AB)^\top\right]_{i,j} = [AB]_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{j,k} [B]_{k,i}.$$

Mais d'autre part, le coefficient (i, j) du produit $B^\top A^\top$, où $B^\top \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbf{K})$ et $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ vaut

$$\sum_{k=1}^{p} \left[B^\top\right]_{i,k} \left[A^\top\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [B]_{k,i} [A]_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{j,k} [B]_{k,i}.$$

□

Définition 13.28 – Une matrice carrée A est dite :

1. **symétrique** si $A^\top = A$
2. **antisymétrique** si $A^\top = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Notons que si A est antisymétrique, puisque A et $A^\top$ ont mêmes coefficients diagonaux, ces coefficients diagonaux doivent être égaux à leur opposé, et donc sont nuls.

Exemples 13.29

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$ est symétrique et $\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$ est antisymétrique.

13.1.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 13.30 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors on appelle **trace de** A, et on note le scalaire $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \in \mathbf{K}$. C'est la somme des coefficients diagonaux de A.

Exemples 13.31

On a

- $\operatorname{tr}(0_n) = 0$ et $\operatorname{tr}(I_n) = n$.
- Plus généralement, $\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
- Si A est antisymétrique, alors[5] $\operatorname{tr}(A) = 0$.

[5] En effet, tous les coefficients diagonaux de A sont alors nuls.

Proposition 13.32 (Linéarité de la trace) : *Soient* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *et soient* $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. *Alors*

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

Démonstration. Soient donc $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors

$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} [\lambda A + \mu B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$

□

Proposition 13.33 : *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *alors* $\operatorname{tr}\left(A^\top\right) = \operatorname{tr}(A)$.

Démonstration. C'est évident car les coefficients diagonaux de $A^\top$ sont les mêmes que ceux de A. □

Danger !
Pour autant, on n'a pas $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) \times \operatorname{tr}(B)$.
Par exemple,

$$\operatorname{tr}(I_n^2) = n \neq \operatorname{tr}(I_n)^2 = n^2.$$

Proposition 13.34 : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. *Alors* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration. Par définition,

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} [B]_{k,i}[A]_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} [BA]_{k,k}.$$

□

Remarque. La condition sur les tailles des matrices signifie en fait que les deux produits AB et BA sont bien définis.

13.2 INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

13.2.1 Matrices et systèmes linéaires

Considérons un système linéaire $(\mathscr{S}) = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$ de n équations à p inconnues.

Posons alors $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a $AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}$, de sorte que résoudre le système $(\mathscr{S})$ revient à résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Lorsque a et b sont deux scalaires, avec $a \neq 0$, il est facile de résoudre l'équation $ax = b$: il suffit de diviser les deux membres par a, et alors l'unique solution est $x = \dfrac{b}{a}$.
Question : existe-t-il une notion aussi simple pour les systèmes ?
La réponse est non, puisque nous savons que des systèmes n'ont pas toujours une unique solution, mais creusons un peu dans cette direction pour les systèmes carrés, c'est-à-dire lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues.

13.2.2 Matrices inversibles

Définition 13.35 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, on dit que A est **inversible**.
Un tel B est alors unique, et on l'appelle **l'inverse de** A et on le note A^{-1}.
On note $GL_n(\mathbf{K})$, et on appelle **groupe linéaire d'ordre** n l'ensemble de toutes les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Démonstration. Il faut tout de même prouver l'unicité d'une telle matrice B, lorsqu'elle existe.
Supposons qu'il existe deux matrices B_1, B_2 de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB_1 = AB_2 = I_n = B_1A = B_2A$.
Alors, en multipliant à gauche par B_2 la relation $AB_1 = I_n$, il vient

$$B_2AB_1 = B_2I_n \Leftrightarrow (B_2A)B_1 = B_2 \Leftrightarrow I_nB_1 = B_2 \Leftrightarrow B_1 = B_2.$$

□

Exemples 13.36

► La matrice identité est inversible, et est égale à son propre inverse, puisque $I_n^2 = I_n$.
► Plus généralement, toute matrice diagonale D dont les coefficients valent ± 1 est inversible, et égale à son propre inverse puisqu'alors

$$D^2 = \mathrm{Diag}(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)^2 = \mathrm{Diag}((\pm 1)^2, (\pm 1)^2, \dots, (\pm 1)^2) = \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1) = I_n.$$

► Une matrice A qui possède une ligne nulle ne peut pas être inversible, puisque pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB (où la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est nulle) est encore nulle. Et donc AB ne peut en aucun cas valoir l'identité.
De même, une matrice dont une colonne est nulle ne peut pas être inversible.

☠ Danger !
La réciproque est fausse : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible mais n'a ni ligne ni colonne nulle.

Proposition 13.37 : *Soient $A, B \in GL_n(\mathbf{K})$ deux matrices inversibles. Alors*

1. *A^{-1} est inversible, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$*
2. *$\forall \lambda \in \mathbf{K}^*$, λA est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$*
3. *AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
4. *pour tout $k \in \mathbf{N}$, A^k est inversible, et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$*
5. *$A^\top$ est inversible, et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.*

⚠ Attention !
L'inverse d'un produit est bien le produit des inverses, mais on n'oubliera pas de changer l'ordre !

Démonstration.

1. On a $A^{-1}A = AA^{-1}$, donc il existe bien une matrice B (égale à A) telle que $A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$.
   Et donc A^{-1} est inversible, d'inverse A.
2. On a $\lambda A \frac{1}{\lambda} A = \lambda \frac{1}{\lambda} AA^{-1} = I_n$ et de même $\frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda A = I_n$.
3. On a $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$ et de même $ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$.
   Donc AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
4. Par récurrence sur k. Si $k = 0$ c'est évident puisque I_n est inversible et $I_n = \left(A^{-1}\right)^0$.
   Supposons donc A^k inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$. Alors
   $$A^{k+1}\left(A^{-1}\right)^{k+1} = A^kAA^{-1}\left(A^{-1}\right)^k = A^kI_n\left(A^{-1}\right)^k = A^k\left(A^{-1}\right)^k = I_n.$$
   Et on prouve de même que $\left(A^{-1}\right)^{k+1}A^{k+1} = I_n$, donc que A^{k+1} est inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^{k+1}$.
5. On a $A^\top\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1}A\right)^\top = I_n$ et de même $\left(A^{-1}\right)^\top A^\top = I_n$.

□

Remarques. Si A est inversible, on note alors, si $k \in \mathbf{N}$, $A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k$ et alors les propriétés usuelles des puissances restent valables pour des puissances négatives[6].

⚠ Nous ne dirons rien de la somme de deux matrices inversibles A et B, tout simplement car il n'y a pas de règle générale.
Quand bien même elle serait inversible, il n'est pas vrai[7] que $(A+B)^{-1}$ soit égal à $A^{-1} + B^{-1}$.

[6] Voir le chapitre suivant.

[7] Sauf cas pathologiques.

13.2.3 Inversibilité des matrices 2×2

Les résultats de cette partie seront généralisés en fin d'année au cas des matrices de taille $n \times n$, mais d'ici là, nous ne nous priverons pas d'utiliser les résultats qui suivent sur les matrices 2×2.

Définition 13.38 – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de** A, et on note $\det(A)$ le scalaire défini par $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 13.39 : *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A) \neq 0$, alors on a

$$-\frac{1}{\det A}\left(A^2 - \operatorname{tr}(A)A\right) = I_2 \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{\det A}\left(A - (a+d)I_2\right)\right) = \left(-\frac{1}{\det A}\left(A - (a+d)I_2\right)\right)A = I_2.$$

Et donc A est inversible, d'inverse $\left(-\dfrac{1}{\det A}(A-(a+d)I_2)\right) = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$.
Si $\det(A) = 0$, supposons par l'absurde que A soit inversible.
Puisque $A^2 - \mathrm{tr}(A)A = 0$, en multipliant[8] par A^{-1}, il vient $A = \mathrm{tr}(A)I_2$, qui est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
Mais alors $\det A = \det\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{tr}(A)\end{pmatrix} = \mathrm{tr}(A)^2 \neq 0$, ce qui est absurde. □

[8] À droite ou à gauche.

Proposition 13.40 : *Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. C'est un simple[9] calcul. □

[9] Mais néanmoins désagréable (bien que sans difficulté).

Corollaire 13.41 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Alors AB est inversible si et seulement si A et B sont toutes deux inversibles.*

Démonstration. Le produit AB est inversible si et seulement si $\det(AB) \neq 0$.
Soit encore si et seulement si $\det(A)\det(B) \neq 0$. Mais un produit de scalaires[10] est nul si et seulement si chacun de ses facteurs est nul, donc
$\det A \det B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\det A \neq 0 \\ \det B \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ inversible} \\ B \text{ inversible}\end{cases}$ □

[10] Car le déterminant est bien un scalaire et plus une matrice.

Interprétation du déterminant : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.
Si l'une des colonnes de A est nulle (par exemple si $a = c = 0$), alors $\det(A) = 0$.
Si les deux colonnes de A sont non nulles et proportionnelles, alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} b \\ d\end{pmatrix}$, et alors

$$\det(A) = ad - bc = \lambda bd - b\lambda d = 0.$$

En revanche, si les deux colonnes de A ne sont pas proportionnelles, avec par exemple[11] $a \neq 0$. Puisque $b = a\dfrac{b}{a}$, on n'a pas $c\dfrac{b}{a} = d$, faute de quoi la deuxième colonne de A serait égale à $\dfrac{b}{a}$ fois la première.
Et donc $db \neq ad \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
Ainsi, une matrice 2×2 est inversible si et seulement si ses colonnes ne sont pas proportionnelles.
Puisque A est inversible si et seulement si $A^\top$ est inversible, A est inversible si et seulement si les colonnes de $A^\top$ ne sont pas proportionnelles. Mais ces colonnes sont les lignes de A.

[11] Si $a = 0$, c'est c qui sera non nul car une matrice inversible ne peut pas avoir de colonne nulle.

13.2.4 Matrices inversibles et systèmes de Cramer

Rappelons qu'un système de Cramer est un système qui possède une unique solution.

Proposition 13.42 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ possède une unique solution (et donc est un système de Cramer).*

Démonstration. Supposons A inversible. Alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ posons $X = A^{-1}B$.
Alors $AX = AA^{-1}B = I_nB = B$.
Donc le système $AX = B$ possède bien une solution et inversement, si X est une solution de $AX = B$, en multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Donc $AX = B$ possède une unique solution.

Plus généralement

Si A est inversible, alors la multiplication (à gauche ou à droite) par A d'une égalité entre matrices est réversible : l'opération inverse étant la multiplication par A^{-1}.
En particulier, multiplier une équation matricielle par A donne une équation équivalente à la première.
Ici, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Inversement, supposons que pour tout B, le système $AX = B$ possède une unique solution.

Notons alors $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ les matrices élémentaires[12] de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $AX = E_i$ possède une unique solution X_i.
Soit alors B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est X_i.
Alors, pour tout i, la $i^{\text{ème}}$ colonne de AB est obtenue[13] en multipliant A par X_i, et donc vaut E_i.
Autrement dit $AB = I_n$. Reste à vérifier qu'on a également $BA = I_n$.
Mais $A(BA - I_n) = ABA - A = I_nA - A = A - A = 0_n$.
Donc le raisonnement inverse à celui que nous venons de tenir, en décomposant ce produit de matrice colonne par colonne, prouve que la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0_{n,1}$.
Mais cette équation possède $0_{n,1}$ comme unique[14] solution.
Donc la $i^{\text{ème}}$ colonne de $BA - I_n$ est nulle, et donc $BA - I_n = 0_n \Leftrightarrow BA = I_n$.
Ceci achève donc de prouver que A est inversible. □

12 Qui se trouvent aussi être les colonnes de I_n.

13 C'est un cas particulier de produit par blocs.

14 L'unicité venant de l'hypothèse faite sur les systèmes $AX = B$.

Ceci nous fournit déjà un moyen de tester si une matrice est inversible, et de calculer son inverse : il s'agit de vérifier si le système $AX = Y$ possède une unique solution, et ce pour tout $Y \in \mathbf{K}^n$.
Lorsque c'est le cas, il faut de plus déterminer l'expression de l'unique solution de $AX = Y$ en fonction de Y. En effet, cette solution est $A^{-1}Y$.

Exemples 13.43

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\-2 & -1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, et résolvons le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -2x - y = b \\ x - y + z = c \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x - y + z = c \\ -2x - y = b \\ 3x - y + 2z = a \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y + z = c \\ -3y + 2z = b + 2c \\ 2y - z = a - 3c \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} x - y + z = c \\ -3y + 2z = b + 2c \\ z = 3a + 2b - 5c \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} x - y = -3a - 2b + 6c \\ -3y = -6a - 3b + 12c \\ z = 3a + 2b - 5c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2/3}{\iff} \begin{cases} x - y = -3a - 2b + 6c \\ y = 2a + b - 4c \\ z = 3a + 2b - 5c \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} x = -a - b + 2c \\ y = 2a + b - 4c \\ z = 3a + 2b - 5c \end{cases}$$

Puisque ce système possède bien toujours une unique solution, A est inversible.

Et donc $A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a-b+2c\\2a+b-4c\\3a+2b-5c\end{pmatrix}$, de sorte que[15] $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\2 & 1 & -4\\3 & 2 & -5\end{pmatrix}$.

15 Prendre par exemple $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ pour retrouver la première colonne de A.

► Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.
Soient alors (a,b,c) et $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. On a alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & y & + & 3z & = & b \\ 3x & - & y & - & 8z & = & c \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & 2y & - & 14z & = & c-3a \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & 7z & = & b+2a \\ & & & & 0 & = & a+2b+c \end{array}\right.$$

Ce système ne possède pas de solution si $a+2b+c \neq 0$, et donc B n'est pas inversible.

13.2.5 Inversibilité des matrices triangulaires

Proposition 13.44 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est encore une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.*

Démonstration. Prouvons le résultat pour les matrices triangulaires supérieures, il suffira de transposer[16] pour traiter le cas des triangulaires inférieures.
Procédons par récurrence sur n, la taille de la matrice.
Plus précisément, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «pour toute matrice triangulaire supérieure $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, et lorsque c'est le cas, A^{-1} est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A».

Pour $n=1$, il n'y a rien à dire, et pour $n=2$, il suffit d'utiliser le déterminant et la formule donnant l'inverse d'une matrice 2×2.
Supposons donc $\mathcal{P}(n)$ vraie, et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure.
Écrivons alors A sous forme d'une matrice par blocs, $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $d \in \mathbf{K}$.
Alors B est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont ceux de A (à l'exception de d, le dernier coefficient diagonal de A).
► Supposons A inversible.
Notons alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix}$, avec $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $d' \in \mathbf{K}$.
Alors, on a $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB'+CL' & BC'+Cd' \\ dL' & dd' \end{pmatrix} = I_{n+1} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$.
En particulier, $dd' = 1$, donc $d \neq 0$ et $d' = d^{-1}$.
Puis $dL' = 0$, donc $L' = 0$.
Et enfin, $BB' + CL' = I_n$, donc $BB' = I_n$.
De la même manière, en écrivant $A^{-1}A = I_{n+1}$, on obtient $B'B = I_n$, de sorte que $B' = B^{-1}$.
Par hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de B sont non nuls, donc tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls, et les coefficients diagonaux de $B' = B^{-1}$ sont les inverses de ceux de B, donc les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses de ceux de A.
► Supposons à présent que tous les coefficients diagonaux de A soient non nuls. Alors par hypothèse de récurrence B est inversible, B^{-1} est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de B^{-1} sont les inverses de ceux de B.
On a alors

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & -d^{-1}BB^{-1}C + Cd^{-1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

et de même $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n,1} & d \end{pmatrix} = I_{n+1}$.
Donc A est inversible, et son inverse est $\begin{pmatrix} B^{-1} & -d^{-1}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & d^{-1} \end{pmatrix}$, qui est triangulaire supérieure,

[16] Une matrice est triangulaire supérieure si et seulement si sa transposée est triangulaire inférieure.

et dont les coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A. □

Corollaire 13.45 – *Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors*

$$\operatorname{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^{-1} = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right).$$

13.2.6 Inversibilité et opérations élémentaires

Nous avons prouvé en TD que pour $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, et nous avons étudié l'effet de la multiplication à gauche par $E_{i,j}$: $(E_{i,j}A)$ n'a que des lignes nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$, égale à la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Revenons à présent sur les opérations élémentaires que nous avions effectuées sur les lignes d'un système lors de la méthode du pivot.

Ces mêmes opérations peuvent se réaliser sur les lignes d'une matrice, et possèdent alors une interprétation matricielle.
▸ **Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\lambda \neq 0$** : revient à multiplier A **à gauche** par

$$E_{1,1} + \cdots + E_{i-1,i-1} + \lambda E_{i,i} + E_{i+1,i+1} + \cdots + E_{n,n} = \operatorname{Diag}(1,\dots,1,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{\lambda},1,\dots,1).$$

Cette matrice est inversible, d'inverse $\operatorname{Diag}\left(1,\dots,1,\dfrac{1}{\lambda},1,\dots,1\right)$.
▸ **Ajouter λL_j à L_i** : revient à multiplier A **à gauche** par $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Puisque $E_{i,j}^2 = 0$ lorsque $i \neq j$, la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est inversible, d'inverse[17] $I_n - \lambda E_{i,j}$.
▸ **Échanger les lignes L_i et L_j** : revient à effectuer successivement les opérations $L_i \leftarrow L_i + L_j, L_j \leftarrow -L_j, L_j \leftarrow L_j + L_i$ et $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
Autrement dit, cela revient à multiplier A à gauche par le produit de quatre matrices inversibles, donc par une matrice inversible.
Plus précisément, cette matrice est $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
Elle est égale à son propre inverse, puisque si on échange deux fois les lignes i et j, on retrouve la matrice de départ.

[17] Faire le produit pour le vérifier. Mais on peut aussi réfléchir en termes d'opérations élémentaires : si dans un système on a ajouté λL_j à L_i, quelle opération faire pour revenir au système initial ? Retirer λL_i à L_j !

Ainsi, si on réalise une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A, la matrice obtenue est de la forme PA, avec $P \in GL_n(\mathbf{K})$.
Puisque réaliser des opérations sur les colonnes de A, revient à réaliser les mêmes opérations sur les lignes de $A^\top$, la matrice obtenue en réalisant des opérations élémentaires sur les colonnes de A est de la forme $(PA^\top)^\top = AP^\top$ avec $P \in GL_n(\mathbf{K})$.
Et donc réaliser des opérations sur les colonnes de A, c'est multiplier A **à droite** par une matrice inversible.

Proposition 13.46 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible. Alors A est inversible si et seulement si PA est inversible.*

Démonstration. Si A est inversible, alors PA est le produit de deux matrices inversibles, donc est inversible.
Et si PA est inversible, alors $A = P^{-1}PA$ est le produit de deux matrices inversibles. □

Corollaire 13.47 – *Réaliser des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne change pas son inversibilité.*

Exemple 13.48

Donc pour étudier l'inversibilité d'une matrice on peut se contenter de transformer cette matrice à l'aide d'opérations sur les lignes de manière à la transformer en une matrice dont on sait étudier l'inversibilité. Par exemple une matrice triangulaire.
Attention toutefois : ceci ne permettra que de dire si la matrice de départ est ou non inversible. Pas de calculer son inverse.
Par exemple, on a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow 3L_3+2L2}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible. Et donc A l'est aussi.

Méthode
Si vous avez juste besoin de déterminer si une matrice est inversible, cette méthode est préférable à celle à base de système expliquée plus haut. Pourtant, vous aurez sûrement remarqué que les opérations sont les mêmes (au moins au début), mais que n'ayant à écrire ni les inconnues, ni les seconds membres, le calcul est bien plus agréable, et les risques d'erreur de calcul sont moindres.

13.2.7 Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Pour déterminer si une matrice est inversible, et pour calculer son inverse si celle-ci existe, on peut procéder par opérations élémentaires sur les lignes.
En effet, si par opérations sur les lignes, on arrive à transformer A en une matrice non inversible[18], alors A n'est pas inversible.

En revanche, supposons qu'on arrive, par des opérations élémentaires à transformer A en la matrice identité I_n.
Alors il existe des matrices inversibles[19] telles que $P_r P_{r-1} \cdots P_1 A = I_n$.
Donc A est inversible puisque I_n l'est.
Et alors, en multipliant à droite la relation $P_r \cdots P_1 A = I_n$ par A^{-1}, il vient $P_r \cdots P_1 = A^{-1}$.

On en déduit une méthode de calcul de l'inverse de A : à l'aide d'opérations élémentaires, on transforme A, si c'est possible en l'identité (en suivant la méthode du pivot).
Dans le même temps, on réalise les mêmes opérations en partant de la matrice identité I_n.
Lorsque $P_r \cdots P_1 A = I_n$, alors $P_r \cdots P_1 I_n = A^{-1}$.

[18] Notamment une matrice dont une ligne est nulle.

[19] Correspondant à des opérations élémentaires.

Exemple 13.49

Sur la figure ci-dessous, la partie centrale en termes de systèmes n'est pas nécessaire, et a pour unique but de vous montrer que la méthode que nous venons de décrire pour le calcul de l'inverse se base sur les mêmes calculs que la méthode basée sur la résolution de systèmes rencontrée précédemment.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Pour $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ 2x - y & = & b \\ -3x + 2y & = & c \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+3L_1}}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ y + 2z & = & -2a + b \\ -y - 3z & = & 3a + c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ y + 2z & = & -2a + b \\ -z & = & a + b + c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\longleftrightarrow} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & a \\ y + 2z & = & -2a + b \\ z & = & -a - b - c \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&y&-&z&=&a\\ &&y&&&=&+3b+2c\\ &&&&z&=&-a-b-c\end{array}\right. \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=I_n} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x&=&+2b+c\\ y&=&+3b+2c\\ z&=&-a-b-c\end{array}\right. \quad \underbrace{\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}}_{=A^{-1}}$$

Un moyen agréable de présenter les calculs peut être le suivant : commencer par écrire côte à côte A et I_n, puis effectuer les mêmes opérations sur les lignes des deux côtés jusqu'à aboutir à la matrice identité à gauche :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\-3&2&0&0&0&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3+3L_1}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&-1&3&3&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&0&1\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\vdots$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&0&3&2\\0&0&1&-1&-1&-1\end{array}\right)$$

13.2.8 Une caractérisation de l'inversibilité

Comme mentionné précédemment, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = Y$ possède une unique solution.
Mais lors de la résolution de ce système, le fait qu'il ne possède qu'une unique solution ne dépendra que du fait qu'on arrive ou non à se ramener, par opérations élémentaires, à un système triangulaire à coefficients non nuls.
Or lors de la méthode du pivot, les opérations réalisées ne dépendent pas du second membre, mais seulement des coefficients de la matrice A.
Et donc $AX = Y$ possède une unique solution pour tout Y si et seulement si il possède une unique solution pour **un** certain $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
En particulier, si et seulement si $AX = 0_{n,1}$ possède une unique solution.
Toutefois, cette preuve est peu convaincante, faute de bonne formalisation des opérations de résolution d'un système. Essayons d'être plus rigoureux :

Proposition 13.50 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors A est inversible si et seulement si*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}),\ AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}.$$

Démonstration. Notons qu'un sens est évident : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, alors $AX = 0_{n,1}$ possède une unique solution. Puisque $X = 0_{n,1}$ est évidemment solution, c'est donc la seule solution, si bien que $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.

Procédons par récurrence sur la taille de la matrice, et pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$».
Il est clair que $\mathcal{P}(1)$ est vraie : pour $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si $a \neq 0$. Et alors pour $X = (x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{1,1} \Leftrightarrow ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
Supposons donc $\mathcal{P}(n)$ vraie, et soit $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Puisque nous avons déjà mentionné que si A est inversible, alors $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$, il nous suffit de prouver l'implication réciproque.
Supposons donc que $\forall X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0_{n+1,1} \Rightarrow X = 0_{n+1,1}$.
Alors la première colonne de A ne peut être nulle, faute de quoi on aurait $AE_1 = 0_{n+1,1}$, ce

qui n'est pas possible étant donné que $E_1 \neq 0_{n+1,1}$.
Soit donc $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$.
Alors la suite d'opérations $L_1 \leftarrow a_{i_0,1}L_1 - a_{1,1}L_{i_0}, \dots, L_n \leftarrow a_{i_0,1}L_n - a_{n,1}L_{i_0}, L_{i_0} \leftrightarrow L_1$ transforme la première colonne de A en $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$.

Il existe donc une matrice inversible[20] telle que $PA = \begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix}$, avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tel que $BY = 0_{n,1}$. Alors LY est une matrice 1×1, c'est-à-dire un élément de $\mathbf{K}$. Et alors

$$PA\begin{pmatrix}-LY\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-LY\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-LY+LY\\ 0_{n,1}+BY\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0_{n,1}\end{pmatrix} = 0_{n+1,1}.$$

Donc en multipliant à gauche par P^{-1}, $A\begin{pmatrix}-LY\\Y\end{pmatrix} = P^{-1}0_{n+1,1} = 0_{n+1,1}$.

Étant donnée l'hypothèse faite sur A, on a donc $\begin{pmatrix}-LY\\Y\end{pmatrix} = 0_{n+1,1}$, et en particulier, $Y = 0_{n,1}$.

Et donc nous venons de prouver que $BY = 0_{n,1} \Rightarrow Y = 0_{n,1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, B est donc inversible.
Mais $\begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix}1 & -LB^{-1}\\ 0_{n,1} & B^{-1}\end{pmatrix}$ puisque

$$\begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -LB^{-1}\\ 0_{n,1} & B^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -LB^{-1}+LB^{-1}\\ 0_{n,1} & BB^{-1}\end{pmatrix} = I_{n+1} \text{ et } \begin{pmatrix}1 & -LB^{-1}\\ 0_{n,1} & B^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0_{1,n}\\ 0_{n,1} & B^{-1}B\end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Donc $A = P^{-1}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0_{n,1} & B\end{pmatrix}$ est inversible.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. □

[20] Correspondant à la suite d'opérations élémentaires que nous venons d'effectuer.

Corollaire 13.51 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A = B^{-1}$.*

Remarque
A priori la définition d'inversible nous demandait de vérifier que $AB = I_n$ **et que** $BA = I_n$.
Ce que nous dit ce résultat, c'est qu'une seule de ces deux conditions suffit.

Démonstration. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est tel que $BX = 0_{n,1}$, alors $ABX = 0$, et donc $X = 0_{n,1}$.
Donc B est inversible par la proposition précédente.
Et alors en multipliant l'égalité $AB = I_n$ à droite par B^{-1}, il vient $A = ABB^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}$.
Et donc en particulier, A est inversible[21]. □

[21] Car inverse d'une matrice inversible.

Corollaire 13.52 – *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.*

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ a déjà été prouvée.
Supposons que AB soit inversible.
Si B est inversible, alors $A = (AB)B^{-1}$ est un produit de matrices inversibles, donc est inversible.
Si B n'est pas inversible, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, différent de $0_{n,1}$, tel que $BX = 0_{n,1}$.
Et alors $(AB)X = 0_{n,1}$, si bien que AB n'est pas inversible.
Donc si B n'est pas inversible, AB ne l'est pas non plus, si bien que par contraposée, si AB est inversible, alors B est inversible, et donc A aussi. □

EXERCICES DU CHAPITRE 13

En l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

► Somme, produit de matrices

EXERCICE 13.1 Si vous découvrez le produit matriciel F

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&0&-4\\1&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&-3\\-1&3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1\\0&4\\2&5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB, AC, BC, DA, CD et DC.

EXERCICE 13.2 Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui commutent, est encore nilpotente. PD

EXERCICE 13.3 Multiplication par une matrice élémentaire AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

1) Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $[AE_{i,j}]_{k,\ell}$ et $[E_{i,j}A]_{k,\ell}$.
   Comment décrivez-vous en termes simples les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$?
2) En déduire la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$. *On pourra être amenés à distinguer plusieurs cas.*

EXERCICE 13.4 Matrices stochastiques PD

Une matrice $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite stochastique si :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$

1) On note V le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs est stochastique si et seulement si $AV = V$.
2) Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques, alors $\dfrac{1}{2}(A+B)$ et AB le sont aussi.

EXERCICE 13.5 AD

1) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
2) Déterminer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AM = MA\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent à toutes les autres matrices (ensemble appelé *le centre de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).

EXERCICE 13.6 Nilpotence des matrices triangulaires strictes AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+k > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1) Montrer que pour $k,\ell \geqslant 0$, si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.
2) En déduire qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), à coefficients diagonaux nuls est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

► Puissances de matrices

EXERCICE 13.7 Calculer les puissances des matrices suivantes : PD

1) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix}3&1&3\\0&3&4\\0&0&3\end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\dots&0\end{pmatrix}$

EXERCICE 13.8 Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients valent 1. PD

1) Calculer J^2. En déduire J^k, pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2) En déduire $(J + \lambda I_n)^k$, pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$.
3) Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 13.9 Soit $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0, \pi[$. PD

1) Montrer que $A^2 = 2\cos(\theta)A - I$.
2) En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbf{N}, A^n = a_n A + b_n I$.
   Donner l'expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3) Montrer que (a_n) est linéaire récurrente d'ordre 2, déterminer son terme général et en déduire l'expression de A^n.

► Trace, transposée

EXERCICE 13.10 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent. F

EXERCICE 13.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$. PD

EXERCICE 13.12 Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$. PD

EXERCICE 13.13 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que A et B sont égales. AD

EXERCICE 13.14 Montrer par analyse-synthèse que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. AD

► Inverse d'une matrice carrée

EXERCICE 13.15 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 13.16 Inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur PD
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$, avec $\lambda_0\lambda_p \neq 0$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_p A^p = 0_n$.
Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction des A^k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

EXERCICE 13.17 Inverse d'une matrice diagonale par blocs AD
Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, $C \in GL_p(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$ est inversible, et déterminer son inverse.

EXERCICE 13.18 PD

1) Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p - B^p = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$.
2) En déduire que si N est nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible, et donner son inverse.

EXERCICE 13.19 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. AD

1) Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$.
2) En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \operatorname{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$, prouver que $\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.

EXERCICE 13.20 Oral Centrale 2014 D
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A + B$ est inversible.

EXERCICE 13.21 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse D

1) $A = (\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
2) $B = (F_{i+j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

EXERCICE 13.22 Théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante

D

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} |a_{i,j}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$. Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Correction des exercices du chapitre 13

Solution de l'exercice 13.2

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs p et q.
Alors $(AB)^p = A^pB^p = 0$. Donc AB est nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à p. On montrerait de même qu'il est inférieur ou égal à q, et donc inférieur ou égal à $\min(p,q)$.
Puisque A et B commutent, par la formule du binôme, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

En particulier, pour $n = p+q$, il vient

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0} B^{p+q-k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Détails
Si $k \leqslant p-1$, alors $p+q-k \geqslant q$, de sorte que $B^{p+q-k} = 0$.

Donc $A+B$ est nilpotente, et son indice de nilpotence est supérieur ou égal à $p+q$.

Solution de l'exercice 13.3

1. Le résultat se comprend bien en «dessinant» les matrices : les colonnes de $E_{i,j}$ sont toutes nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$.
Donc déjà, toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf éventuellement la $j^{\text{ème}}$.
Et alors les coefficients qui se trouvent dans cette $j^{\text{ème}}$ colonne sont ceux de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Détails
Faire le produit «avec les deux mains» pour comprendre pourquoi ce sont bien les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A qui apparaissent. C'est lié au fait que le 1 de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{i,j}$ est sur la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\begin{array}{cc} & j \\ & \downarrow \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \dots & a_{1,i} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} \dots & a_{2,i} \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} \dots & a_{n,i} \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement : pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AE_{i,j}]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}.$$

Ce coefficient est nul si $\ell \neq j$, car tous les $\left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}$ sont nuls.
Et pour $\ell = j$, alors tous les $[E_{,j}]_{p,\ell}$ sont nuls sauf lorsque $p = i$, et donc il ne reste que le terme correspondant à $p = i$ dans la somme ci-dessus, si bien que $[AE_{i,j}]_{k,j} = a_{k,i}$.
Et donc toutes les colonne de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Sur le même principe, on a $\left[E_{i,j}A\right]_{k,\ell} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \left[E_{i,j}\right]_{k,p} a_{p,\ell}$, qui vaut 0 si $k \neq i$.

Et pour $k = i$, $\left[E_{i,j}A\right]_{i,\ell} = a_{j,\ell}$.

Donc toutes les lignes de $E_{i,j}A$ sont nulles, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Alternative : souvenons-nous que $[E_{i,j}]_{p,q} = \delta_{i,p}\delta_{j,q}$.
On a donc, pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AE_{i,j}]_{p,q} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{p,k}[E_{i,j}]_{k,q} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{p,k}\delta_{i,k}\delta_{j,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq q \\ [A]_{p,i} & \text{si } j = q \end{cases}$$

Donc seule la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ est nulle, et son coefficient de la $p^{\text{ème}}$ ligne est le coefficient (p,i) de A.
On retrouve bien le fait que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ soit la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
On procède de même pour $E_{i,j}A$.

2. On a donc $E_{i,j}E_{k,\ell}$ qui est nulle, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ de $E_{k,\ell}$.
Celle-ci est nulle si $j \neq k$, et sinon c'est la ligne dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
En résumé, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients positifs.
Alors, on a

$$AV = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Et donc $AV = V$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
Par conséquent, A est stochastique si et seulement si $AV = V$.
Alternative : si vous n'êtes pas convaincus par les produits avec des pointillés[1], il est également possible, mais plus fastidieux, d'utiliser «proprement» la formule du produit matriciel : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(AV)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}V_{j,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

Et donc $AV = V$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(AV)_{i,1} = V_{i,1} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

[1] Mais il faudrait que vous le soyez rapidement !

2. Il est clair que si A et B sont stochastiques, alors $\frac{1}{2}(A+B)$ est à coefficients positifs.
Et alors $\frac{1}{2}(A+B)V = \frac{1}{2}(AV+BV) = \frac{1}{2}(V+V) = V$.
Donc $\frac{1}{2}(A+B)$ est stochastique.
De même, les coefficients de AB sont tous positifs, puisque, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\geqslant 0}\underbrace{b_{k,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Et alors $ABV = A(BV) = AV = V$, donc AB est stochastique.
Alternative : si on ne pense pas à utiliser la question 1, on peut tout de même s'en sortir : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}[AB]_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Solution de l'exercice 13.5

1. Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Alors, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$[AD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[D]_{k,j} = a_{i,j}\lambda_j.$$

Et d'autre part, $[DA]_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}a_{k,j} = \lambda_i a_{i,j}$.
Donc si $AD = DA$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j} \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j} = 0$.
Si $i \neq j$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a donc $a_{i,j} = 0$.
Autrement dit, les coefficients hors diagonale de A sont nuls : A est une matrice diagonale.
Inversement, deux matrices diagonales commutant toujours entre elles, si A est diagonale, alors elle commute avec D.
Donc A commute à D si et seulement si elle est diagonale.

> **Détails**
> Les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de D sont tous nuls, à l'exception du coefficient diagonal (d'indice (j,j)), qui vaut λ_j).

2. Nous savons que I_n commute à toute matrice, et plus généralement que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λI_n commute à toute matrice.
Nous allons prouver que seules les matrices scalaires commutent à toutes les matrices.

Soit donc M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire commutant à toute matrice carrée.
Par la question 1, nous savons déjà que M est diagonale, puisqu'elle doit en particulier commuter à $\mathrm{Diag}(1, 2, 3, \cdots, n)$.
À l'aide du même calcul que dans la question 1, on a donc, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AM]_{i,j} = [MA]_{i,j} \Leftrightarrow [A]_{i,j}[M]_{j,j} = [M]_{i,i}[A]_{i,j}.$$

En particulier, ceci est vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Et alors on obtient, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[M]_{i,i} = [M]_{j,j}$: tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Ainsi, le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est exactement $\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbf{K}\}$, l'ensemble des matrices scalaires.

Solution de l'exercice 13.6

1. Soit donc $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$.

Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[AB]_{i,j} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{i,p}b_{p,j}$.

Supposons que $i + k + \ell > j$. Alors

$$[AB]_{i,j} = \sum_{p=1}^{i+k-1} \underbrace{a_{i,p}}_{=0} b_{p,j} + \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j}.$$

Mais puisque $j - \ell < i + k$, pour $p \geqslant i + k$, $p > j - \ell \Leftrightarrow p + \ell > j$, et donc $b_{p,j} = 0$.
Donc $[AB]_{i,j} = 0$.
Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i + k + \ell > j \Rightarrow [AB]_{i,j} = 0$, et donc $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.

2. Supposons que A soit triangulaire supérieure. Alors elle est dans $\mathcal{T}_0^+(\mathbf{K})$.
Si de plus sa diagonale est nulle, alors elle est dans $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$.
En effet, pour $i + 1 > j$, on a soit $i > j$, et alors $[A]_{i,j} = 0$ car A est triangulaire supérieure, soit $i = j$, et alors $[A]_{i,j} = [A]_{i,i} = 0$ car les coefficients diagonaux de A sont nuls.
Par ce qui précède, on a donc $A^2 = AA \in \mathcal{T}_2^+(\mathbf{K})$.
Puis $A^3 = A^2A \in \mathcal{T}_{2+1}^+(\mathbf{K}) = \mathcal{T}_3^+(\mathbf{K})$.
Une récurrence facile prouve alors que $A^n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$.
Mais alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i + n \geqslant n + 1 > j$, et donc $[A^n]_{i,j} = 0$, de sorte que $A^n = 0_n$.
Donc A est bien nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

> **Rappel**
> L'indice de nilpotence est **le plus petit** entier k tel que $A^k = 0_n$.
> Donc si on dispose d'une puissance de A qui est nulle, cette puissance est nécessairement inférieure ou égale à l'indice de nilpotence.

Dans le cas où A est triangulaire inférieure, alors ${}^tA$ est triangulaire supérieure, à diagonale nulle, et donc $({}^tA)^n = 0$.
Or $({}^tA)^n = {}^t(A^n) = 0_n$, donc de même, $A^n = 0_n$, et donc A est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

Remarque
Nous prouverons plus tard qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a nécessairement un indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.7

Par commodité, nous noterons à chaque fois A la matrice dont on cherche à calculer les puissances.

1. Le calcul des premières puissances de A prouve que
$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}.$$
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.
Dès lors, il est évident que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^{2n} = (A^2)^n = 2^n I_2$.
Et $A^{2n+1} = A^{2n}A = 2^n A$.

3. Notons $D = 3I_3$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $A = D + T$, et D et T commutent puisqu'une matrice scalaire commute toujours à toute matrice.
On a alors $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = 0$.
Donc par la formule du binôme de Newton, il vient, pour $n \geqslant 2$,
$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} T^k 3^{n-k} \\ &= 3^n I_3 + 3^{n-1} nT + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} T^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & n3^n + 2n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Nous supposons ici que n est la taille de la matrice A. On a alors
$$A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
Puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)A$.
Il vient ensuite $A^4 = (n-1)A^2$, puis $A^5 = (n-1)A^3 = (n-1)^2 A$, etc.
Une récurrence prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$A^{2k} = (n-1)^{k-1}A^2 = \begin{pmatrix} (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

et
$$A^{2k+1}=(n-1)^kA=\begin{pmatrix}0&(n-1)^k&\dots&(n-1)^k\\(n-1)^k&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(n-1)^k&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.8

1. On a
$$J^2=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n&n&\dots&n\\n&n&\dots&n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\dots&n\end{pmatrix}=nJ.$$
On en déduit que $J^3=J^2J=nJ^2=n^2J$, puis $J^4=J^3J=n^2J^2=n^3J$, et une récurrence facile prouve que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $J^k=n^{k-1}J$.

2. Si $\lambda=0$, nous venons de répondre.
Supposons donc $\lambda\neq 0$.
Puisque I_n commute à toute matrice, elle commute en particulier avec J et donc la formule du binôme de Newton s'applique :

$$\begin{aligned}(J+\lambda I_n)^k&=\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}J^i\lambda^{k-i}I_n\\&=\lambda^kI_n+\left(\sum_{i=1}^k\binom{k}{i}n^{i-1}\lambda^{k-i}\right)J\\&=\lambda^kI_n+\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^k\binom{k}{i}n^i\lambda^{k-i}\right)J\\&=\lambda^kI_n+\frac{1}{n}\left((n+\lambda)^k-\lambda^k\right)J.\end{aligned}$$

Détails
On a reconnu un binôme auquel manque un terme.

3. Ici, on a $A=2\begin{pmatrix}5/2&1&1\\1&5/2&1\\1&1&5/2\end{pmatrix}$, donc on prend $n=3$, et $\lambda=3/2$. Et donc pour tout $k\in\mathbf{N}$,
$$A^k=2^k\left(\left(\frac{3}{2}\right)^kI_3+\frac{1}{3}\left(\left(3+\frac{3}{2}\right)^k-\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)J\right)=3^kI_3+\frac{1}{3}\left(9^k-3^k\right)J$$
$$=\begin{pmatrix}2\cdot3^{k-1}+3\cdot9^{k-1}&3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}&3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}\\3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}&2\cdot3^{k-1}+3\cdot9^{k-1}&3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}\\3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}&3\cdot9^{k-1}-3^{k-1}&2\cdot3^{k-1}+3\cdot9^{k-1}\end{pmatrix}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.9

1. On a $A^2=\begin{pmatrix}4\cos^2(\theta)-1&-2\cos(\theta)\\2\cos(\theta)&-1\end{pmatrix}=2\cos\theta A-I_2$.

2. Pour $n=0,n=1,n=2$, la propriété est évidemment vérifiée, avec
$$a_0=0,b_0=1,a_1=1,b_1=0\text{ et }a_2=2\cos(\theta),b_2=-1.$$
Par récurrence sur n : supposons que $A^n=a_nA+b_nI_2$. Alors
$$A^{n+1}=A^nA=(a_nA+b_nI)A=a_nA^2+b_nA=a_n(2\cos\theta A-I_2)-b_nA=(2a_n\cos(\theta)+b_n)A-a_nI_2.$$
Et donc $a_{n+1}=2\cos(\theta)a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-a_n$.

3. On a donc, pour $n\geqslant 1$, $a_{n+1}=2\cos(\theta)a_n-a_{n-1}$.
La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique est $r^2-2\cos(\theta)r+1=0$, de discriminant $\Delta)4\cos^2(\theta)-4=-4\sin^2\theta<0$.
Donc l'équation possède deux racines complexes conjuguées, qui sont
$$r_1=\frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}=e^{i\theta}\text{ et }r_2=\overline{r_1}=e^{-i\theta}.$$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta).$$

Or, $a_0 = \lambda = 0$ et $a_1 = \mu \sin(\theta) = 1$. Donc $a_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
On en déduit que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2a_n\cos\theta + b_n & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin((n+1)\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & -\sin((n-1)\theta) \end{pmatrix}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.10

On a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA$, qui est donc égale à AB si et seulement si A et B commutent.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.11

Il est évident que si A est la matrice nulle, alors $\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = 0$.
D'autre part, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}({}^tAA) &= \sum_{i=1}^n \left[{}^tAA\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[{}^tA\right]_{i,j}[A]_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2.\end{aligned}$$

Et donc $\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$.
Mais une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc $\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = 0$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = 0$.
Soit si et seulement si A est la matrice nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.12

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(I_n).$$

Donc on ne peut avoir $AB - BA = I_n$.

Plus généralement
Le même résultat reste valable si on remplace I_n par n'importe quelle matrice de trace non nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.13

Il s'agit, une fois de plus, d'utiliser les matrices élémentaires.
Soient donc $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Alors toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles[2], à l'exception de la $j^{\text{ème}}$. Et le coefficient diagonal de cette $j^{\text{ème}}$ colonne est

$$\left[AE_{i,j}\right]_{j,j} = \sum_{k=1}^n A_{j,k}\left[E_{i,j}\right]_{k,j} = a_{j,i}.$$

Et par conséquent, $\operatorname{tr}\left(AE_{i,j}\right) = a_{j,i}$.
De même, on a $\operatorname{tr}\left(BE_{i,j}\right) = b_{j,i}$.
Ces deux traces étant égales par hypothèse, on a donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = b_{j,i}$, et donc $A = B$.

[2] Car les colonnes correspondantes de $E_{i,j}$ le sont.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.14

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Supposons qu'il $(S,A) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ telles que $M = S + A$.
Alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$.
Il vient donc $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.
Donc si deux telles matrices S et A existent, elles sont uniques, et nous venons de trouver leur expression en fonction de M.

Méthode
La définition de symétrique/antisymétrique fait apparaître des transposées. Il est donc naturel de chercher à exploiter ces transposées, et donc de considérer ${}^tM$.

Passons à présent à l'existence, et posons $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$.
Alors ${}^tS = \dfrac{{}^tM + M}{2} = S$, donc S est symétrique.
De même, ${}^tA = -A$, donc A est antisymétrique.

Et $S + A = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2} = M$.
Donc il existe bien au moins une manière d'écrire M comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Et donc toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution de l'exercice 13.15

1. Utilisons le déterminant : $\det A = 1 + i - i^2 = 2 + i \neq 0$, donc A est inversible.
   Son inverse est alors $A^{-1} = \dfrac{1}{2+i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$.
2. Il est possible de procéder avec n'importe laquelle des deux méthodes vues dans le cours : la résolution de système ou des opérations élémentaires sur les lignes de B.
   On trouve dans les deux cas que B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. De même, C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Plutôt que de se lancer dans des calculs, remarquons que les deux dernières lignes de D sont proportionnelles : $L_3 = 2L_4$.
   Et donc la famille des lignes de D n'est pas libre, puisque
   $$0 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot L_3 + (-2) \cdot L_4 = 0_{1,n}$$
   est une combinaison linéaire nulle dont tous les coefficients sont non nuls.
   Donc D n'est pas inversible.

Solution de l'exercice 13.16

La relation donnée par l'énoncé s'écrit encore
$$\lambda_p A^p + \lambda_{p-1}A^{p-1} + \cdots + \lambda_1 A = -\lambda_0 I_n \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^p + \lambda_{p-1}A^{p-1} + \cdots + \lambda_1 A\right) = I_n.$$
Mais on peut alors factoriser par A, aussi bien à droite qu'à gauche :
$$A\left(-\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1}A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right) = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1}A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right)A = I_n.$$
Donc A est inversible, et son inverse est $\left(-\dfrac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1}A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right)$.

Solution de l'exercice 13.17

Cherchons son inverse sous forme d'une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$.

Intuition
L'inverse d'une matrice triangulaire inversible étant encore triangulaire, il est plutôt logique de chercher un inverse sous cette forme.

On a alors
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}.$$
Donc si cette matrice est égale à I_{n+p} alors

Remarque
Notons que nous procédons par implication, et par pas équivalence : c'est la phase d'analyse (si il y a un inverse, alors....)

$$\begin{cases} AA' = I_n \\ CC' = I_p \\ AB' + BC' = 0_{n,p} \end{cases}$$
On en tire facilement que $A' = A^{-1}$ et $C' = C^{-1}$.
Et alors $AB' + BC' = 0 \Leftrightarrow AB' = -BC^{-1} \Leftrightarrow B' = -A^{-1}BC^{-1}$.
Donc si un inverse existe sous la forme citée précédemment, c'est $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Reste à procéder à la synthèse, en prouvant que : $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B - A^{-1}BC^{-1}C \\ 0_{p,n} & C^{-1}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = I_{n+p}.$$

Et de même,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0_{p,n} & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = I_{n+p}.$$

Donc $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est bien inversible, d'inverse égale à $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 13.18

1. Soit $p \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}(A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}B^{p-k-1} - \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-k} \\ &= \sum_{i=1}^{p} A^i B^{p-i} - \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-k} \\ &= A^p - B^p.\end{aligned}$$

2. Supposons donc que N soit nilpotente, d'indice de nilpotence p.
Alors $-N$ est également nilpotente, d'indice de nilpotence p, et donc

$$I_n = I_n^p - (-N)^p = (I_n + N)\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}\right).$$

Et sur le même principe[3], $\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}\right)(I_n + N) = I_n$.

Donc $I_n + N$ est inversible, et son inverse est $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}$.

[3] Soit on prouve que la formule de la question 1 reste valable en échangeant l'ordre des termes soit on prouve par un calcul direct que $(I_n + N)$ et $\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}$ commutent.

Solution de l'exercice 13.19

1. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^2) &= \sum_{i=1}^{n}\left[A^2\right]_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

A est symétrique donc $a_{i,j} = a_{j,i}$.

2. Notons $f : \lambda \mapsto \mathrm{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$.
Puisque pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda A + B$ est encore symétrique, le raisonnement de la première question s'applique encore, et prouve que $f(\lambda) \geqslant 0$.
Mais d'autre part, on a

$$f(\lambda) = \mathrm{tr}\left(\lambda^2 A^2 + \lambda AB + \lambda BA + B^2\right) = \lambda^2\mathrm{tr}\left(A^2\right) + \lambda\left(\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(BA)\right) + \mathrm{tr}\left(B^2\right) = \lambda^2\mathrm{tr}\left(A^2\right) + 2\lambda\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}\left(B^2\right).$$

▸ Si $\mathrm{tr}\left(A^2\right) \neq 0$, alors f est une fonction polynomiale de degré 2, de signe constant. C'est donc que son discriminant est négatif ou nul[4].
Soit encore $(2\mathrm{tr}(AB))^2 - 4\mathrm{tr}\left(A^2\right)\mathrm{tr}\left(B^2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(AB)^2 \leqslant \mathrm{tr}\left(A^2\right)\mathrm{tr}(B^2)$.
▸ Si $\mathrm{tr}\left(A^2\right) = 0$, alors f est une fonction affine, de signe constant, positive. Ce n'est possible que si $\mathrm{tr}(AB) = 0$ et que $\mathrm{tr}\left(B^2\right) \geqslant 0$.
Et alors, on a bien l'inégalité annoncée (qui est même une égalité dans ce cas).

[4] Car s'il y avait deux racines, f changerait de signe entre ces racines.

Remarque
Le calcul de la question 1 permet de prouver que la condition $\mathrm{tr}(A^2) = 0$ n'est vérifiée que lorsque $A = 0$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.20

Comme à l'exercice 18, on prouve que $I_n + B$ est inversible.
Et alors, si A est inversible, $A + B = A(I_n + A^{-1}B)$.
Mais puisque $AB = BA$, en multipliant cette égalité à gauche et à droite par A^{-1}, il vient $A^{-1}B = BA^{-1}$.
Et donc A^{-1} et B commutent, de sorte que, si p désigne l'indice de nilpotence de B, $(A^{-1}B)^p = A^{-p}B^p = 0$.
Donc $A^{-1}B$ est encore nilpotente. On prouve alors, comme à l'exercice 17, que $I_n + A^{-1}B$ est inversible, et donc que $A + B$ est inversible car produit de deux matrices inversibles.

Inversement, si $A + B$ est inversible, alors $A + B$ commute avec $-B$, et $-B$ est nilpotente.
Par ce qui a été fait précédemment, $A = A + B + (-B)$ est inversible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.21

> **Méthode**
> Nous ne suivons pas ici l'algorithme du pivot. Peu importe : celui-ci fournit une méthode, qui fonctionne toujours, pour transformer notre matrice en l'identité. Si vous voyez d'autres opérations qui permettent d'arriver plus simplement au même résultat, il ne faut pas vous priver de les utiliser.

1. Commençons par essayer d'écrire explicitement A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Calculons son inverse par opérations élémentaires. Commençons par réaliser l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$. Alors

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Passons ensuite à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$. Alors

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Réalisons alors l'opération $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

De proche en proche, en réalisant à chaque fois les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ puis $L_i \leftarrow L_i + L_{i+1}$, on arrive à

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ne reste plus qu'à soustraire chacune des L_i à L_1 :

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $n = 2$, on a $B = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ qui est inversible[5], d'inverse $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
En revanche, si $n \geqslant 3$, alors la troisième ligne de B vérifie $L_3 = L_1 + L_2$.
En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $F_{3+j} = F_{2+j} + F_{1+j}$.
Et donc la famille des lignes de B n'est pas libre, donc B n'est pas inversible.

[5] Car de déterminant égal à -1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.22

Puisque $AX = 0_{n,1}$, alors tous les coefficients de AX sont nuls, et en particulier, le $i_0$ème coefficient de AX est nul.

Soit encore[6] $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0$.

[6] En utilisant la formule du produit matriciel.

En isolant le coefficient diagonal de la $i_0$ème ligne de A, on a donc $a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j$.

En passant à la valeur absolue, l'inégalité triangulaire nous donne alors

$$|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| \cdot |x_{i_0}|.$$

Détails

Par définition, i_0 est le numéro d'une ligne portant le plus grand coefficient (en valeur absolue) de X.
Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$|x_j| \leqslant |x_{i_0}|.$$

Si $x_{i_0} \neq 0$, alors, en divisant par $|x_{i_0}|$, il vient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur A.
Donc $x_{i_0} = 0$. Ceci implique alors que tous les coefficients de X soient nuls, et donc que $X = 0$.
Autrement dit, nous avons prouvé que $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$, ce qui est une des caractérisations de l'inversibilité, et donc A est inversible.

14 Structures algébriques

14.1 Loi de composition interne

14.1.1 Définitions

Définition 14.1 – Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne sur** E toute application de $E \times E$ dans E.
Une telle loi est souvent notée $*, \star, +$ ou encore $\times$. Et au lieu d'utiliser la notation standard $*(x, y)$ pour l'image du couple (x, y) par l'application $*$, on note plutôt $x * y$ (ou alors $x \star y, x + y$ ou $x \times y$).

Remarque L'aspect application est généralement peu important, ce qu'il faut retenir c'est qu'une loi de composition interne est un moyen de définir, à partir de deux éléments de E, un troisième élément de E.

Exemples 14.2

► La somme $(x, y) \mapsto x + y$ et le produit $(x, y) \mapsto xy$ sont des lois de composition interne sur $\mathbf{R}$, mais aussi sur $\mathbf{C}$, sur $\mathbf{Z}$, sur $\mathbf{Q}$ ou sur $\mathbf{N}$.
► La différence $(x, y) \mapsto x - y$ est une loi de composition interne sur $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}$ mais pas sur $\mathbf{N}$ puisque la différence de deux entiers naturel peut être négative.
► Sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E, on a deux lois de composition qui sont $(A, B) \mapsto A \cap B$ et $(A, B) \mapsto A \cup B$.
► L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est muni de deux lois de composition internes, qui sont la somme et le produit.
► Sur l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, la somme $(f, g) \mapsto f + g$ et la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ sont deux lois de composition internes.

⚠ Attention ! Ceci ne signifie pas que toute loi nommée $+$ est automatiquement la somme telle que vous la connaissez !

Définition 14.3 – Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.
On dit que la loi $*$ est :

1. **commutative** si $\forall (x, y) \in E^2,\ x * y = y * x$
2. **associative** si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x * (y * z) = (x * y) * z$.

Autrement dit Une loi associative est une loi dans laquelle il n'y a pas besoin de parenthèses lorsqu'on enchaîne plusieurs symboles $*$.

Exemples 14.4

► Sur $\mathbf{C}$ (et donc sur $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ et $\mathbf{N}$), la somme et le produit sont à la fois associatifs et commutatifs.
► La différence n'est pas commutative sur $\mathbf{Z}$ car $2 - 3 \neq 3 - 2$. Elle n'est pas non plus associative car $1 - (1 - 1) \neq (1 - 1) - 1$.
► L'union et l'intersection sont commutatives et associatives sur $\mathscr{P}(E)$.
► Sur $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ la composition est associative[1], mais elle n'est pas commutative. Par exemple, si $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$, alors $f \circ g \neq g \circ f$.
► La somme de matrices est associative et commutative, le produit est associatif mais n'est pas commutatif si $n \geqslant 2$ car $E_{1,2}E_{2,1} = E_{1,1} \neq E_{2,2} = E_{2,1}E_{1,2}$.

[1] Ceci a déjà été prouvé plus tôt.

Dans le cas d'un ensemble E est fini, on peut représenter une loi de composition interne $*$

sur E par un tableau à double entrée :

	a	b	c
a	$a*a$	$a*b$	$a*c$
b	$b*a$	$b*b$	$b*c$
c	$c*a$	$c*b$	$c*c$

ou

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

La commutativité est alors facile à lire sur le tableau : il faut[2] qu'il y ait une symétrie par rapport à la diagonale.
L'associativité en revanche ne s'y lit pas de manière simple.

[2] Sous réserve qu'on ait bien mis les éléments de E dans le même ordre sur les lignes et les colonnes.

Définition 14.5 – Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $*$. On dit que $*$ est **distributive** par rapport à $\oplus$ si

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x*(y\oplus z) = (x*y)\oplus(x*z) \text{ et } (x\oplus y)*z = (x*z)\oplus(y*z).$$

Remarque
Ces deux propriétés sont appelées distributivité à gauche et distributivité à droite, mais nous n'aurons pas besoin de les distinguer.

Exemples 14.6

Dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{C}$, le produit est distributif par rapport à la somme.
De même dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
Dans $\mathcal{P}(E)$, $\cup$ est distributif par rapport à $\cap$ et $\cap$ est distributif par rapport à $\cup$.

Une récurrence facile prouve que lorsque $*$ est distributive par rapport à $\oplus$, et que $\oplus$ est associative, alors pour tout $y_1,\dots,y_n \in E^n$, et tout $x\in E$,

$$x*(y_1\oplus y_2\oplus\cdots\oplus y_n) = (x*y_1)\oplus\cdots\oplus(x*y_n).$$

14.1.2 Éléments neutres, inversibilité

Définition 14.7 – Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.
On dit que $e\in E$ est un **élément neutre** pour $*$ si

$$\forall x\in E,\ x*e = e*x = x.$$

Commutativité
Bien entendu, si la loi $*$ est commutative, on peut se contenter de vérifier une seule des deux égalités $e*x = x$ ou $x*e = x$.

Proposition 14.8 : *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Si un élément neutre existe, alors il est unique.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux éléments neutre e_1 et e_2. Alors, puisque e_1 est neutre, $e_1*e_2 = e_2$.
Mais puisque e_2 est neutre, $e_1*e_2 = e_1$. Et donc $e_1 = e_2$. □

Exemples 14.9

- Dans $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Z}$, 0 est l'élément neutre pour l'addition et 1 est l'élément neutre pour la multiplication.
- Dans $\mathcal{P}(E)$, E est l'élément neutre pour l'intersection et $\emptyset$ est l'élément neutre pour l'union.
- $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ est l'élément neutre de $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ pour la composition $\circ$.
- I_n est l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour la multiplication, et la matrice nulle est l'élément neutre pour l'addition.

Remarque
Cet exemple nous montre que pour un ensemble muni de plusieurs lois, il est important de préciser de quelle loi on parle lorsqu'on parle d'élément neutre.

Définition 14.10 – Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ possédant un élément neutre e.
Un élément $x\in E$ est dit **inversible** si il existe $y\in E$ tel que $x*y = y*x = e$.

Commutativité
Encore une fois, si la loi $*$ est commutative, il suffit de prouver l'une des deux égalités

$$y*x = e \text{ ou } x*y = e.$$

Exemple 14.11

▶ Dans $\mathbf{C}$, tout élément est inversible pour l'addition, car on a toujours $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
Et de même, tout élément non nul est inversible pour la multiplication car $x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.
En revanche, 0 n'est pas inversible pour la multiplication car pour tout $y \in \mathbf{C}$, $0 \times y = y \times 0 = 0 \neq 1$.
▶ Dans $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ un élément f est inversible pour $\circ$ si et seulement si c'est une bijection.

En effet, f est inversible si et seulement si il existe $g : E \to E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}} \\ f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{R}} \end{cases}$.
Nous savons que c'est vrai si et seulement si f est inversible, et alors g est la bijection réciproque de f.

Plus généralement
Ceci reste valable dans $\mathscr{F}(E, E)$, où E est un ensemble non vide quelconque, muni de la composition des applications.

Proposition 14.12 : *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne* ***associative*** *$*$ possédant un élément neutre e.
Si $x \in E$ est inversible, alors il existe un* ***unique*** *$y \in E$ tel que $x * y = y * x = e$. Cet élément y est alors appelé* ***l'inverse de** x*, et on le note x^{-1}.*

Terminologie
Un tel ensemble E est parfois appelé un monoïde.

Démonstration. Supposons que $y_1 * x = y_2 * x = e$ et $x * y_1 = x * y_2 = e$.
Alors $(y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2$.
Mais d'autre part, la loi étant associative, $(y_1 * x) * y_2 = y_1 * (x * y_2) = y_1 * e = y_1$.
Et donc $y_1 = y_2$. □

Remarques. ▶ Si x est inversible, alors on a $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, de sorte que x^{-1} est inversible, et son inverse est x. Autrement dit : $(x^{-1})^{-1} = x$.
▶ L'élément neutre e est toujours inversible et égal à son propre inverse puisque $e * e = e$.
▶ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ muni de la multiplication, on retrouve exactement la définition de matrice inversible.

Proposition 14.13 : *Soit E un ensemble muni d'une loi associative $*$, d'élément neutre e.
Si x et y sont inversibles, alors $x * y$ est encore inversible et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $y^{-1} * x^{-1}$ est bien l'inverse de $x * y$. Or on a

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * e * y = y^{-1} * y = e.$$

Et de même, $(x * y) * (y^{-1} * x) = e$. □

Proposition 14.14 : *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$, et soit x un élément inversible. Alors*

$$\forall (y, z) \in E^2,\ x * y = x * z \Rightarrow y = z \text{ et } y * x = z * x \Rightarrow y = z.$$

On dit alors que x est ***régulier****, ce qui signifie qu'on peut «simplifier» par x.*

«Mais j'ai le droit ?»
J'entends souvent cette question : ai-je le droit de multiplier (à gauche) par x^{-1} des deux côtés de l'égalité ?
Bien entendu : dire que deux élément sont égaux, c'est que ce sont les mêmes ! Et donc si vous leur appliquez la même transformation, vous obtenez encore les mêmes éléments !

Démonstration. Si $x * y = x * z$, alors en multipliant à gauche par x^{-1}, il vient

$$x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z) \Leftrightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \Leftrightarrow e * y = e * z \Leftrightarrow y = z.$$

On prouve de même que $y * x = z * x \Rightarrow y = z$. □

Exemple 14.15

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ non vide[3]. Alors $A \cup \emptyset$ et $A \cup A$ sont égaux.
Puisque $A \neq \emptyset$, la proposition précédente prouve donc que A n'est pas inversible pour l'union (car il n'est pas régulier).
Et donc $\emptyset$ est le seul élément de $\mathscr{P}(E)$ inversible pour la loi $\cup$.

[3] Ce qui suppose bien entendu E non vide.

14.1.3 Partie stable, itérées d'un élément

Définition 14.16 – Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, et soit $A \subset E$.
On dit que A est **stable** par $*$ si $\forall (x,y) \in A^2$, $x * y \in A$.
Dans ce cas, on appelle restriction de la loi $*$ à A la loi de composition interne définie sur A par $(x,y) \mapsto x * y$.

Remarque. Si $*$ est associative (resp. commutative), alors sa restriction à A l'est également (mais la réciproque est fausse).
En revanche, si $*$ possède un élément neutre dans E, il se peut que ce ne soit pas le cas dans A. Par exemple, dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices non inversibles est stable par la multiplication, mais ne contient pas d'élément neutre.
Enfin, un élément de A peut avoir un inverse pour la loi $*$, mais si cet inverse n'est pas dans A, x n'a pas d'inverse pour la restriction de $*$ à A.

Rappel
Nous avons prouvé qu'un produit AB de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si A et B le sont.

Définition 14.17 – Soit E un ensemble muni d'une loi interne associative $*$ et d'élément neutre e, et soit $x \in E$. On note alors

$$x^0 = e \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ x^{n+1} = x^n * x.$$

Plus simplement, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x * x}_{n \text{ fois}}$.
S'il y a ambiguïté sur la loi, on note parfois x^{*n} au lieu de x^n.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que E est muni d'une loi de composition $*$ associative, et possédant un élément neutre e.

Proposition 14.18 : *Soit $x \in E$. Alors pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, $x^m * x^n = x^{m+n}$.*

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ la proposition

$$\mathscr{P}(n) : \forall m \in \mathbf{N},\ x^{m+n} = x^m * x^n.$$

Pour $n = 0$, c'est évident.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit $m \in \mathbf{N}$. Alors

$$x^m * x^{n+1} = x^m * x^n * x = x^{m+n} * x = x^{m+n+1}.$$

Donc par récurrence, $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $x^{m+n} = x^m * x^n$.

□

Proposition 14.19 : *Soit $x \in E$, inversible. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, x^n est inversible, et $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.*
On note alors x^{-n} au lieu de $(x^{-1})^n$

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n=0$, c'est évident.
Supposons x^n inversible, d'inverse $(x^{-1})^n$. Alors $x^{n+1}=x^n*x$ est inversible car produit d'inversibles, et

$$(x^{n+1})^{-1}=(x^n*x)^{-1}=x^{-1}*(x^n)^{-1}=x^{-1}*\left(x^{-1}\right)^n=\left(x^{-1}\right)^{n+1}.$$

□

Détails
C'est la proposition précédente appliquée à x^{-1}.

Proposition 14.20 : *Soit $x\in E$ inversible. Alors pour tout $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, $x^{m+n}=x^m*x^n$.*

Démonstration. Soient $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$:

- si $(m,n)\in\mathbf{N}^2$, c'est déjà fait.
- si m et n sont négatifs : alors

$$x^m*x^n=\left(x^{-1}\right)^{-m}*\left(x^{-1}\right)^{-n}=\left(x^{-1}\right)^{-n-m}=x^{m+n}.$$

- si $m\geqslant 0$ et $n\leqslant 0$. Dans le cas où $m+n\geqslant 0$, on a

$$x^m*x^n=x^{m+n}*x^{-n}*x^n=x^{m+n}.$$

Et si $m+n\leqslant 0$, alors

$$x^m*x^n=x^m*\left(x^{-1}\right)^{-n}=x^m*\left(x^{-1}\right)^m*\left(x^{-1}\right)^{-n-m}=\left(x^{-1}\right)^{-n-m}=x^{n+m}.$$

Intuition
Essayez de simplifier «à la main» x^5*x^{-3} pour comprendre ce calcul.

Intuition
Et dans ce cas, simplifiez x^3*x^{-5}.

- On traite de manière similaire le cas $m\leqslant 0, n\geqslant 0$, ou on peut remarquer que grâce au cas précédent, mais appliqué à x^{-1},

$$x^m*x^n=\left(x^{-1}\right)^{-m}*\left(x^{-1}\right)^{-n}=\left(x^{-1}\right)^{-m-n}=x^{m+n}.$$

□

Remarques. Notons que cette preuve justifie, a posteriori, la validité de ces formules pour les composées de bijections ou pour les puissances de matrices inversibles.
► Une conséquence immédiate est que toutes les puissances[4] de x commutent entre elles puisque $m+n=n+m$.

[4] Positives ou négatives (lorsqu'elles existent).

Proposition 14.21 : *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition associative $*$, possédant un élément neutre, et soit $x\in E$.*
Alors $\{x^n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie de E stable par $*$ et contenant x.
Si de plus x est inversible, alors $\{x^n,\ n\in\mathbf{Z}\}$ est également stable.

Autrement dit
Il s'agit d'une partie stable par $*$, qui contient x, et contenue dans toute autre partie de E stable par $*$ et contenant x.

Cela signifie qu'une partie de E qui contient a et qui est stable par $*$ doit contenir toutes les puissances (positives) de x.

Démonstration. La proposition qui précède nous dit que le produit de deux puissances[5] de x est encore une puissance de x, ce qui prouve la stabilité de ces deux ensembles.

[5] Positives, ou négatives lorsque ceci a un sens.

Supposons que F soit une partie de E, stable par $*$ et telle que $x\in F$. Alors $x^2=x*x\in F$, et une récurrence triviale prouve que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $x^n\in F$.
Et donc $\{x^n, n\in\mathbf{N}^*\}\subset F$. □

14.2 Groupes

14.2.1 Définition

Définition 14.22 – Soit G un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur G. On dit que $(G, *)$ est un **groupe** si :

1. La loi $*$ est associative : $\forall (x, y, z) \in G^3,\ x * (y * z) = (x * y) * z$
2. Il existe un élément neutre e pour la loi $*$: $\exists e \in G,\ \forall x \in G,\ x * e = e * x = x$
3. Tout élément de G est inversible pour $*$: $\forall x \in G,\ \exists y \in G,\ x * y = y * x = e$.

Rappelons que nous avons prouvé précédemment qu'alors l'élément neutre e et l'inverse x^{-1} de x sont nécessairement uniques.
Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que G est un **groupe commutatif**, ou un **groupe abélien**[6].

[6] En référence à Niels Henrik Abel, mathématicien norvégien (1802–1829).

Exemples 14.23

- $(\mathbf{Z}, +)$, $(\mathbf{Q}, +)$, $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{C}, +)$ sont des groupes abéliens.
- $(\mathbf{Q}^*, \times)$, $(\mathbf{R}^*, \times)$ et $(\mathbf{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens.
- $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +)$ est un groupe abélien.
- $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$ est un groupe, non abélien[7] dès que $n \geqslant 2$.

[7] Vérifiez par exemple que $I_n + E_{1,2}$ et $I_n + E_{2,1}$ sont inversibles mais ne commutent pas.

Remarque. Notons que lorsqu'on travaille dans un groupe G, si $x \in G$ et si on a $y \in G$ tel que $x * y = e_G$, alors automatiquement[8] $y = x^{-1}$, pas besoin de vérifier que $y * x = e$.

Par convention, on note généralement multiplicativement la loi d'un groupe non commutatif (c'est-à-dire $x \cdot y$), et on note alors 1_G ou plus simplement 1 son élément neutre.
Pour les groupes abéliens, on note plutôt la loi additivement : $x + y$. Dans ce cas, on note 0_G ou 0 l'élément neutre, $-x$ l'inverse de x et nx au lieu de x^n.
Ces notations ne sont pas généralement source de confusion, et si un tel risque existe, le contexte sera très clair (notamment dans un énoncé).

Remarque

Noter additivement un groupe abélien n'est pas une obligation. Mais en revanche, on évitera de noter $+$ une loi de composition qui n'est pas commutative.

L'étude systématique des groupes, qu'on abordera à peine[9] en prépa, est en réalité un gros morceau des mathématiques du XXème siècle.
Un résultat fameux est le théorème de classification des groupes finis[10] dits «simples», dont la preuve complète tient quelques milliers à quelques dizaines de milliers de pages, et surtout est trop complexe pour qu'une seule personne puisse en comprendre l'intégralité.

[9] Pas du tout en sup et guère plus en spé.

[10] C'est-à-dire de cardinal fini.

Proposition 14.24 : *Si E est un ensemble, on note $\mathfrak{S}(E)$ (ou $S(E)$) l'ensemble des bijections de E dans E.*
Alors $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif dès que E contient au moins trois éléments.
*Ce groupe est appelé **groupe symétrique sur** E, et ses éléments sont nommés **permutations** de E.*
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ (ou S_n) le groupe symétrique sur $E = [\![1, n]\!]$.

S ou $\mathfrak{S}$?

Mais quelle est donc cette drôle de lettre ? C'est un S majuscule dans une écriture gothique appelée *Fraktur*, très usitée en Allemagne au XIXème et au début du XXème, époque où l'école mathématique allemande s'est montrée très prolifique, et à qui nous devons un certain nombre de notations.
Par ailleurs, vous avez certainement déjà rencontré cette écriture : elle est intensivement utilisée dans *Astérix et les Goths.*

Démonstration. Il est clair que $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathfrak{S}(E)$, la composée de deux bijections étant encore une bijection.
La composition des applications est toujours associative, et id_E est clairement l'élément neutre pour $\circ$.
Enfin, pour $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$, la bijection réciproque σ^{-1} de σ est bien l'inverse de σ, puisque, par définition, $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{id}_E$.
Donc $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est bien un groupe.

Si E contient au moins trois éléments distincts x, y et z, notons $f : E \to E$ l'application qui échange x et y et laisse fixe tous les autres éléments de E, et notons de même g l'application qui permute y et z.
Les deux applications f et g sont bijectives[11], car $f \circ f = \mathrm{id}_E$ et $g \circ g = \mathrm{id}_E$.

[11] Et même égales à leur propre bijection réciproque.

Or, $(f \circ g)(x) = f(x) = y$ et $(g \circ f)(x) = g(y) = z$, donc $f \circ g \neq g \circ f$.
On en déduit donc que $\mathfrak{S}(E)$ n'est pas commutatif. □

> **Exercice**
> Prouver qu'en revanche, si E est de cardinal 1 ou 2, alors $\mathfrak{S}(E)$ est commutatif.

Par abus de langage, s'il n'y a pas de confusion possible sur la loi, on dit que G est un groupe (au lieu de «$(G, *)$ est un groupe»).
Généralement, la loi d'un groupe est notée multiplicativement, et on note xx' le produit de x et x' (plutôt que $x \times x'$, $x * x'$, etc).
Pour le groupes commutatifs, on préfère généralement utiliser la notation additive : $x + x'$.
Et dans ce cas, pour $x \in G$ et $n \in \mathbf{Z}$, on note $n \cdot x$ (ou tout simplement nx) au lieu de x^n.

Notons également que tout ce qui a été dit sur l'inverse dans un ensemble muni d'une loi de composition associative et admettant un élément neutre reste valable dans un groupe.
Si $(G, \cdot)$ est un groupe, alors pour tout $g \in G$, l'application $f_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$ est bijective.
En effet, si $g \cdot x = g \cdot y$, alors après multiplication par g^{-1}, il vient $x = y$, donc f_g est injective.
Et pour $y \in G$, on a $y = gg^{-1}x = f_g\left(g^{-1}x\right)$, donc f_g est surjective.
De même, $x \mapsto xg$ est bijective.
Ceci signifie que dans la table de multiplication d'un groupe fini, sur chaque ligne et chaque colonne se trouve une et une seule fois chaque élément.

Exemple 14.25 Groupes de cardinal 2 et 3, ou baby sudokus

Soit $E = \{e, a\}$ un groupe à deux éléments, d'élément neutre e.
Puisque e est élément neutre, le début de sa table de multiplication est nécessairement donné par :

	e	a
e	e	a
a	a	?

Mais la seconde ligne (ou la seconde colonne) doit contenir un e, donc ? $= e$.
Et donc la table de multiplication de E est

	e	a
e	e	a
a	a	e

On notera que cette table «ressemble beaucoup» (nous dirons bientôt que ces groupes sont isomorphes) à celle de $\{-1, 1\}$ muni de la multiplication :

	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

> **Remarque**
> Nous étions partis du fait que E était un groupe, donc nous avions supposé l'associativité, et sommes donc en train de dire qu'il existe **au plus** une LCI sur E qui en fait un groupe de neutre e.
> Si on veut prouver que cette table de multiplication défini bien une structure de groupe sur E (ce qui est le cas), il faut vérifier l'associativité, qui ne se voit pas facilement sur la table.
> On note qu'alors le groupe obtenu est commutatif, c'est-à-dire qu'un groupe de cardinal 2 est abélien.

De même, si $G = \{e, a, b\}$ est un groupe de cardinal 3 et d'élément neutre e, alors toujours parce que e est neutre, on a :

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$?_1$	$?_2$
b	b	$?_3$	$?_4$

La suite est alors un rapide jeu de sudoku : la deuxième colonne doit contenir exactement un b (parce que $x \mapsto x * a$ est bijective), et puisque la troisième ligne contient déjà un b, $?_3 \neq b$. Donc $?_1 = b$, et ainsi de suite.

Donc la table de multiplication de G est

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Notons que nous connaissons déjà cette table : c'est celle de $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ muni de la multiplication :

	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	$j^3 = 1$
j^2	j^2	1	$j^4 = j$

Définition 14.26 – Soient $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. Alors, on définit une loi de composition interne $*$ sur $G_1 \times G_2$ en posant

$$\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2,\ \forall (g_1', g_2') \in G_1 \times G_2,\ (g_1, g_2) * (g_1', g_2') = (g_1 \star_1 g_1', g_2 \star_2 g_2').$$

Proposition 14.27 : *Muni de la loi de composition ci-dessus, $G_1 \times G_2$ est un groupe, qu'on appelle* ***produit direct de*** G_1 ***et*** G_2*.*
De plus, $(G_1 \times G_2, *)$ est abélien si et seulement si $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ le sont.

Démonstration. Soit $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ et (z_1, z_2) trois éléments de $G_1 \times G_2$. Alors

$$((x_1, x_2) * (y_1, y_2)) * (z_1, z_2) = (x_1 \star_1 y_1, x_2 \star_2 y_2) * (z_1, z_2) = ((x_1 \star_1 y_1) \star_1 z_1, (x_2 \star_2 y_2) \star_2 z_2).$$

De même, $(x_1, x_2) * ((y_1, y_2) * (z_1, z_2)) = (x_1 \star_1 (y_1 \star_1 z_1), x_2 \star_2 (y_2 \star_2 z_2))$ et alors par associativité de $\star_1$ et $\star_2$, ces deux éléments sont égaux. Donc $*$ est associative.
Il est évident que (e_{G_1}, e_{G_2}) est élément neutre de $*$.
Enfin, pour $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, on a

$$(x_1, x_2) * \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right) = \left(x_1 \star_1 x_1^{-1}, x_2 \star_2 x_2^{-1}\right) = \left(e_{G_1}, e_{G_2}\right)$$

et de même $\left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right) * (x_1, x_2) = (e_{G_1}, e_{G_2})$.
Et donc (x_1, x_2) est inversible, d'inverse (x_1^{-1}, x_2^{-1}).
Donc $G_1 \times G_2$ est un groupe.

Il est aisé de constater que si $\star_1$ et $\star_2$ sont commutatives, alors $*$ l'est.
Et inversement, si $*$ est commutative, alors pour tout $(x, y) \in G_1^2$,

$$(x, e_{G_2}) * (y, e_{G_2}) = (y, e_{G_2}) * (x, e_{G_2}) \Leftrightarrow (x \star_1 y, e_{G_2}) = (y \star_1 x, e_{G_2}) \Leftrightarrow x \star_1 y = y \star_1 x.$$

Donc $\star_1$ est commutative, et de même pour $\star_2$. □

14.2.2 Sous-groupe

Définition 14.28 – Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie non vide de G. On dit que H est un **sous-groupe** de G si H est stable par $*$ et que $(H, *)$ est un groupe.

Pour tout groupe G, G et $\{e_G\}$ sont des sous-groupes de G, appelés sous-groupes triviaux. À l'inverse, on appelle sous-groupe propre de G tout sous-groupe non trivial de G.

A priori, pour prouver qu'une partie H de G est un sous-groupe, il faudrait de nouveau prouver les trois axiomes définissant un groupe (et notamment l'associativité, qui est généralement de loin le moins plaisant des trois). Les propositions qui suivent nous disent qu'on peut faire mieux :

Proposition 14.29 : *Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$. Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :*

1. $\forall (h, h') \in H^2,\ h * h' \in H$
2. $e_G \in H$
3. $\forall h \in H,\ h^{-1} \in H$.

Terminologie
On dit que H est stable par passage à l'inverse.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que H soit un sous-groupe de G.
Alors par définition, H est stable pour le produit, donc le point 1) est évident.
De plus, H possède un élément neutre e_H. La définition ne demande pas à ce qu'il s'agisse de l'élément neutre e_G de G, mais en réalité, puisque $e_H \in G$, $e_H * e_G = e_H$.
D'autre part, e_H étant élément neutre de H, $e_H * e_H = e_H = e_G * e_H$. Et donc par régularité

de e_H, $e_G = e_H$.

De même, si $h \in H$, alors h possède un inverse $h' \in H$, qui est donc nécessairement un inverse de h dans le groupe G, puisqu'il vérifie $h * h' = h' * h = e_G$.
Mais un tel inverse est unique dans G, donc $h^{-1} = h' \in H$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si H satisfait aux conditions 1), 2) et 3), montrons que c'est un sous-groupe de G.
La condition 1) traduit la stabilité de H pour la loi $*$.
L'associativité de la loi $*$ restreinte à H est évidente.
Si $e_G \in H$, alors on a toujours, $\forall h \in H$, $e_G * h = h * e_G = h$, et donc e_G est l'élément neutre de H.
Enfin, pour tout $h \in H$, l'élément h^{-1}, qui est bien dans H vérifie $h * h^{-1} = h^{-1} * h = e_G$, et donc h est inversible.
Ainsi, H satisfait bien à toutes les hypothèse de groupe. □

Remarque. On peut remplacer la condition $e_G \in H$ par «H non vide».
En effet dans ce cas, si les deux points 1) et 3) sont vérifiés, alors dès que H contient un élément h, il contient aussi h^{-1} et donc $hh^{-1} = e$.
Sauf qu'en pratique, pour prouver qu'une partie est non vide, le plus simple est de prouver qu'elle contient e_G (qui appartient donc à tous les sous-groupes de G).

On peut donner un énoncé un peu plus court, mais en pratique pas beaucoup plus facile à utiliser :

Corollaire 14.30 (Caractérisation des sous-groupes) : *Soit G un groupe et $H \subset G$. Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :*

1. *H est non vide*
2. *$\forall (x, y) \in H^2$, $x * y^{-1} \in H$.*

Méthode
En général, pour prouver que H est non vide, le plus simple est de prouver qu'il contient e_G, qui doit appartenir à tout sous-groupe.

Démonstration. Si H est un sous-groupe de G, alors il est non vide car $e_G \in H$ et pour tout $(x, y) \in H^2$, $y^{-1} \in H$ et donc $x * y^{-1} \in H$.

Inversement, supposons que les points 1) et 2) sont vérifiés.
Soit alors $h \in H$. Alors en prenant $(x, y) = (h, h)$, on a $h * h^{-1} \in H \Leftrightarrow e_G \in H$.
Et par conséquent, en prenant $(x, y) = (e_G, h)$, il vient $e_G * h^{-1} \in H \Leftrightarrow h^{-1} \in H$. Ainsi, H est stable par passage à l'inverse.
Enfin, pour $h, h' \in H$, en prenant $(x, y) = (h, h'^{-1})$, il vient $h * \left(h'^{-1}\right)^{-1} = h * h' \in H$. Et donc H est stable par produit.
Par la proposition précédente, H est un sous-groupe de G. □

Exemples 14.31

- $\{-1, 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^*, +)$.
- $\mathbf{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^*, \times)$ puisque le produit de deux réels strictement positifs est strictement positif, et que l'inverse d'un réel strictement positif est strictement positif. En revanche, $\mathbf{R}_-^*$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbf{R}^*, \times)$.
- $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^*, \times)$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^*, \times)$.
- $(\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.
- $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{K} \right\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbf{K})$.
En effet, le produit de deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1 est encore triangulaire, à coefficients diagonaux égaux à 1, et de même pour l'inverse.

De manière générale, si on vous demande de prouver qu'un ensemble est un groupe, commencez par vous demander s'il n'aurait pas le bon goût d'être un sous-groupe d'un groupe déjà connu. Il est bien plus rapide de prouver les trois points qui caractérisent un sous-groupe que ceux qui caractérisent un groupe.

Proposition 14.32 : *Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille[12] de sous-groupes de $(G,\cdot)$. Alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.*

[12] Finie ou infinie.

Démonstration. Puisque l'élément neutre e_G de G est dans chaque sous-groupe, $e_G \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

Soient alors $x, y \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Alors pour tout $i \in I$, $x \in H_i$ et $y \in H_i$.

Puisque H_i est un sous-groupe, $x \cdot y \in H_i$, et ceci étant vrai pour tout $i \in I$, $x \cdot y \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

De même, chacun des H_i étant stable par passage à l'inverse, $x^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

Et donc $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G. □

Définition 14.33 – Soit G un groupe, et soit $g \in G$. Alors $\langle g\rangle = \{g^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de G, qu'on appelle **sous-groupe engendré par g.**

Démonstration. Déjà, $\langle g\rangle$ est non vide puisqu'il contient $g = g^1$ et $e = g^0$.
De plus, si n et k sont deux entiers, de sorte que g^n et g^k sont deux éléments de G, alors $g^n \cdot (g^k)^{-1} = g^n \cdot g^{-k} = g^{n-k} \in \langle g\rangle$.
Donc $\langle g\rangle$ est bien un sous-groupe de G. □

Exemples 14.34

- Dans $(\mathbf{R}, +)$, le groupe engendré par 3 est $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = \{3k,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
- Dans $(\mathbf{R}^*, \times)$, le groupe engendré par 3 est $\{3^k,\ k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \dots\}$.
- Dans $(\mathbf{C}^*, \times)$ le groupe engendré par i est $\{1, i, -1, -i\} = \mathbf{U}_4$.

Plus généralement, le groupe engendré par $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est

$$\langle \zeta_n\rangle = \{\zeta_n^k, k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_n^r,\ 0 \leqslant r \leqslant n-1\} = \mathbf{U}_n.$$

⚠ Attention !

Ici la loi est notée +, donc les puissances de 3 sont les $3 + 3 + \cdots + 3 = 3n$, et non les 3^n.

Détails

Puisque $\zeta_n^n = 1$, alors pour $k \in \mathbf{Z}$, si $k = nq + r$ est la division euclidienne de k par n, alors

$$\zeta_n^k = (\zeta_n^n)^q \zeta_n^r = \zeta_n^r.$$

Proposition 14.35 : *Soit $g \in G$. Alors $\langle g\rangle$ est le plus petit[13] sous-groupe de G qui contient g : si H est un sous-groupe de G qui contient G, alors $\langle g\rangle \subset H$.*
Mieux : $\langle g\rangle = \bigcap_{\substack{H \text{sous-groupe de } G\\ g\in H}} H$.

[13] Au sens de l'inclusion.

Démonstration. Soit H un sous-groupe de G contenant g. Alors $g^2 = g \cdot g \in H$, puis $g^3 = g^2 \cdot g \in H$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g^n \in H$.
Et donc par passage à l'inverse, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $g^n \in H$.
Donc $\langle g\rangle \subset H$, de sorte que $\langle g\rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant g.

Puisque $\bigcap_{\substack{H \text{ sous-groupe de } G\\ g\in H}} H$ est un sous-groupe de G, et qu'il contient g par définition, alors il contient $\langle g\rangle$.
Mais $\langle g\rangle$ est lui-même un sous-groupe contenant g, donc est inclus dans $\bigcap_{\substack{H \text{ sous-groupe de } G\\ g\in H}} H$ puisqu'il s'agit de l'un des ensembles dont on prend l'union. □

Plus généralement, pour toute partie $A \subset G$, on prouve facilement que l'intersection de tous les sous-groupes contenant A est encore un sous-groupe contenant A, qu'on appelle le sous-groupe engendré par A, et qu'on note $\langle A \rangle$.
En revanche, la description de ses éléments est bien plus difficile que dans le cas d'un singleton[14].
Par exemple, si a, b sont deux éléments de A, alors $\langle A \rangle$ contient évidemment toutes les puissances de a et toutes les puissances de b. Et donc $ab, a^2b, aba, a^2ba^3b^4$, etc.
Mais il doit aussi contenir a^{-1} et b^{-1}. Et donc leurs puissances, ainsi que $a^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-2}$, $a^{-1}ba^2b^3a^{-5}b^2$, etc.

[14] Le sous-groupe engendré par $g \in G$ est donc le sous-groupe engendré par $\{g\}$.

14.2.3 Morphismes de groupes

Définition 14.36 – Soient $(G_1, \star), (G_2, \cdot)$ deux groupes. On appelle **morphisme** du groupe G_1 dans le groupe G_2 (ou plus simplement morphisme de G_1 dans G_2) toute application $\varphi : G_1 \to G_2$ telle que :

$$\forall (g, g') \in G_1^2,\ \varphi(g \star g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g').$$

Autrement dit, un morphisme est une application qui préserve la structure de groupe.

Exemples 14.37

- Pour tout groupe G, id_G est un morphisme de G dans lui-même.
- Si G_1 et G_2 sont deux groupes, alors l'application constante égale à e_{G_2} est un morphisme de G_1 dans G_2.
- Le logarithme népérien réalise un morphisme de $(\mathbf{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbf{R}, +)$. De même, exp réalise un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}_+^*, \times)$.
- L'application $\det : GL_2(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^*$ est un morphisme.
- Pour tout groupe G et pour tout $g \in G$, $\varphi_g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & g^n \end{array} \right.$ est un morphisme de $(\mathbf{Z}, +)$ dans G.

Proposition 14.38 : *Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \cdot)$ deux groupes, et soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Alors :*

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G_1^n,\ \varphi(g_1 * g_2 * \cdots * g_n) = \varphi(g_1) \cdot \cdots \cdot \varphi(g_n)$
2. $\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$
3. $\forall g \in G_1,\ \varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$.

Démonstration. 1. Par récurrence sur n.

2. On a $\varphi(e_{G_1}) = \varphi(e_{G_1} * e_{G_1}) = \varphi(e_{G_1}) \cdot \varphi(e_{G_1})$.
Et donc en simplifiant[15] par $\varphi(e_{G_1})$, il vient $e_{G_2} = \varphi(e_{G_1})$.
3. Soit $g \in G_1$. Alors

$$\varphi(g) \cdot \varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi\left(g * g^{-1}\right) = \varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}.$$

Et donc $\varphi\left(g^{-1}\right)$ est l'inverse de $\varphi(g)$.

□

[15] Tout élément de G_2 est régulier.

Proposition 14.39 : *Soient $(G_1, *), (G_2, \star)$ et $(G_3, \cdot)$ trois groupes.
Si $f : G_1 \to G_2$ et $g : G_2 \to G_3$ sont deux morphismes, alors $g \circ f$ est un morphisme de G_1 dans G_3.*

Démonstration. Soient $x, y \in G_1$. Alors

$$(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(x) \star f(y)) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) = (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y).$$

□

Définition 14.40 – Soit φ un morphisme de groupes entre $(G_1, *)$ et $(G_2, \cdot)$. On appelle alors **noyau de** φ et on note $\operatorname{Ker}\varphi$ la partie de G_1 définie par

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = e_{G_2}\} = \varphi^{-1}\left(\{e_{G_2}\}\right).$$

Étymologie
La notation Ker vient de l'allemand *Kern* (noyau) et pas de l'anglais *kernel* (noyau également).

Notons que puisque $\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$, le noyau d'un morphisme de groupe n'est jamais vide, et contient toujours l'élément neutre de G_1.

Proposition 14.41 : *Soit φ un morphisme entre deux groupes $(G_1, *)$ et $(G_2, \cdot)$. Alors φ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_{G_1}\}$.*

Démonstration. Si φ est injectif, alors e_{G_2} possède au plus un antécédent par φ.
Mais e_{G_1} est un tel antécédent, donc il est le seul : $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_{G_1}\}$.
Inversement, supposons que $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_{G_1}\}$, et soient $g, h \in G_1$ tels que $\varphi(g) = \varphi(h)$.
Alors $\varphi(g)\varphi(h)^{-1} = e_{G_2} \Leftrightarrow \varphi(g)\varphi\left(h^{-1}\right) = e_{G_2} \Leftrightarrow \varphi\left(gh^{-1}\right) = e_{G_2}$.
Don $gh^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Par conséquent, $gh^{-1} = e_{G_1} \Rightarrow g = h$.
Et donc φ est injective. □

Remarque. Ce résultat est très fort : il dit qu'un morphisme de groupe est injectif si et seulement si l'élément neutre de G_2 possède au plus un[16] antécédent. Et donc il n'est pas nécessaire de vérifier que tout élément possède un unique antécédent, il suffit de le faire pour e_{G_2}.

[16] Et donc un unique.

Proposition 14.42 : *Soient G, H deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Alors :*

1. *pour tout sous-groupe G_1 de G, $f(G_1)$ est un sous-groupe de H.*
2. *pour tout sous-groupe H_1 de H, $f^{-1}(H_1)$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Voir l'exercice 14 du TD. □

Proposition 14.43 : *Si $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes bijectif, alors $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ est également un morphisme de groupe.*

Démonstration. Soient $(y_1, y_2) \in G_2^2$, et soient $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ et $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$.
Alors $\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = y_1 \cdot y_2$.
Donc $x_1 * x_2 = \varphi^{-1}(y_1 \cdot y_2)$, de sorte que $\varphi^{-1}(y_1 \cdot y_2) = \varphi^{-1}(y_1) * \varphi^{-1}(y_2)$.
Donc φ^{-1} est bien un morphisme de $(G_2, \cdot)$ dans $(G_1, *)$. □

Définition 14.44 – Un morphisme de groupes bijectif est appelé un **isomorphisme**.
Dans le cas où les groupes de départ et d'arrivée sont les mêmes, on parle d'**automorphisme.**

On dit que deux groupes G_1 et G_2 sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de G_1 dans G_2 (ou, ce qui revient au même par la proposition précédente, un isomorphisme de G_2 dans G_1).
Nous savons déjà ce que signifie la bijectivité : qu'à tout élément de G_1 correspond un unique élément de G_2, autrement dit que nous sommes face aux «mêmes ensembles», une

bijection étant juste un moyen de changer le nom des éléments de G_1.
L'aspect morphisme nous dit alors que la structure de groupe est préservée par la bijection, c'est-à-dire que si dans la table de multiplication de G_2, on «renumérote» les éléments de G_2 à l'aide des éléments de G_1, alors on obtient la table de multiplication de G_1.

Exemples 14.45

Dans $\mathfrak{S}_3$, soit σ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$.
Alors $\sigma^2(1) = 3$, $\sigma^2(3) = 2$ et $\sigma^2(1) = 3$, puis $\sigma^3 = \mathrm{id}$. En particulier, $\sigma^{-1} = \sigma^2$.
Alors $\langle\sigma\rangle = (\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$.

Sa table est donnée par

$\circ$	id	σ	σ^2
id	id	σ	σ^2
σ	σ	σ^2	id
σ^2	σ^2	id	σ

C'est celle de $\mathbf{U}_3$, où on remplace 1 par id, j par σ et j^2 par σ^2.
Autrement dit, l'application $f : \langle\sigma\rangle \to \mathbf{U}_3$ définie par $f(\mathrm{id}) = 1$, $f(\sigma) = j$ et $f(\sigma^2) = j^2$ est un isomorphisme de $\langle\sigma\rangle$ sur $\mathbf{U}_3$. Lorsqu'on a dit qu'il n'y avait pas de choix pour la table de multiplication d'un groupe de cardinal 2 ou 3, nous avons en fait prouvé[17] que deux groupes de cardinal 2 (ou deux groupes de cardinal 3) sont toujours isomorphes. Ou encore qu'«à isomorphisme près, il n'y a qu'un groupe de cardinal 2 (ou de cardinal 3)».

Terminologie

Un tel σ est appelé permutation circulaire.

[17] Ou presque prouvé, mais nous n'écrirons pas les détails.

14.3 Anneaux

Définition 14.46 – Un **anneau** $(A, +, \times)$ est un ensemble A muni de deux lois de composition internes, notées + et × telles que :

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif[18], dont l'élément neutre est noté 0_A
2. la loi × est associative et possède un élément neutre noté 1_A
3. × est distributive sur +

Si de plus × est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un **anneau commutatif.**

[18] En particulier, + est associative et commutative.

En pratique, il y a donc un certain nombre de propriétés à vérifier pour prouver qu'un ensemble A muni de deux lois de composition internes + et × est un anneau :

1. $\forall (x, y, z) \in A^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de l'addition)
2. $\forall (x, y) \in A^2$, $x + y = y + x$ (commutativité de l'addition)
3. $\exists 0_A \in A$, $\forall x \in A$, $x + 0_A = x$ (existence d'un élément neutre pour l'addition)
4. $\forall x \in A$, $\exists y \in A$, $x + y = 0_A$ (existence d'un inverse pour l'addition)
5. $\forall (x, y, z) \in A^3$, $x \times (y \cdot z) = (x \times y) \times z$ (associativité de la multiplication)
6. $\exists 1_A \in A$, $\forall x \in A$, $x \times 1_A = 1_A \times x = x$ (existence d'un élément neutre pour la multiplication)
7. $\forall (x, y, z) \in A^3$, $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ et $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (distributivités)

Remarque

Certaines conventions n'imposent pas l'existence d'un neutre pour la multiplication, et appellent anneau unitaire ce que nous appelons anneau. Le programme de MPSI est clair : pour nous, un anneau possède un élément neutre pour ×.

Commutativité

Dans le cas où × est commutative, puisque + l'est, il suffit de ne vérifier que l'une de ces deux conditions, cela entraînera automatiquement l'autre.

Exemples 14.47

- L'ensemble $\{0\}$, muni des seules lois qu'on peut lui mettre[19] est un anneau, appelé **anneau nul.**
- $(\mathbf{Z}, +, \times)$, $(\mathbf{Q}, +, \times)$, $(\mathbf{R}, +, \times)$ et $(\mathbf{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs.
- $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$.

[19] À savoir $0 + 0 = 0$ et $0 \times 0 = 0$.

⚠ Attention aux notations : si $a \in A$ et $n \in \mathbf{N}$, na désigne l'élément $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}$, alors que a^n désigne l'élément $\underbrace{a \cdot a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Enfin, pour $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, na désigne l'élément $\underbrace{-a + (-a) + \cdots + (-a)}_{|n| \text{ fois}}$ et a^n n'est défini que si a possède un inverse pour le produit, et dans ce cas, $a^n = \left(a^{-1}\right)^{|n|}$, où a^{-1} désigne l'inverse de a pour le produit (l'inverse de a pour la somme, appelé opposé de a, étant noté $-a$).

Proposition 14.48 (Règles de calcul dans un anneau) : *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, et soient $a, b, c \in A$. Alors :*

1. $x \cdot 0_A = 0_A \cdot x = 0_A$
2. $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
3. *Plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $a \cdot (nb) = (na) \cdot b = n(a \cdot b)$.*

Démonstration. 1. On a $a \cdot 0_A + a \cdot 0_A = a \cdot (0_A + 0_A) = a \cdot 0_A$.
Donc en simplifiant par $a \cdot 0_A$ il reste $a \cdot 0_A = 0_A$.

2. On a $a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot 0_A = 0_A$, donc $a \cdot (-b)$ est l'opposé[20] de $a \cdot b$, donc égal à $-(a \cdot b)$.
On prouve de même l'autre égalité.
3. Si $n \in \mathbf{N}$, on a
$$a \cdot (nb) = a \cdot (b + \cdots + b) = (a \cdot b) + (a \cdot b) + \cdots + (a \cdot b) = n(a \cdot b).$$
Et de même, $(na) \cdot b = (a + a + \cdots + a) \cdot b = (a \cdot b) + \cdots + (a \cdot b) = n(a \cdot b)$.
Et si $n < 0$, alors par définition, $a \cdot (nb) = a \cdot (\underbrace{(-n)}_{\in \mathbf{N}}(-b)) = -n(a \cdot (-b)) = n(a \cdot b)$.

□

Simplification

Cette simplification est possible car $(A, +)$ est un groupe. Donc il s'agit de la proposition 14.14.

[20] C'est-à-dire l'inverse pour la loi $+$.

Remarque. Dans la définition d'anneau, rien n'empêche 1_A et 0_A d'être égaux.
Cela dit, si c'est le cas, on a, pour tout $a \in A$, $a \cdot 0_A = 0_A$ comme nous venons de le montrer, mais également $a \cdot 0_A = a \cdot 1_A = a$, de sorte que $a = 0_A$.
Autrement dit, un tel anneau est nécessairement l'anneau nul qui, soyons honnêtes, n'est pas très intéressant.

Proposition 14.49 : *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, et soient $a, b \in A$ deux éléments de A tels que $ab = ba$ (on dit que a et b commutent). Alors, pour $n \in \mathbf{N}$, on a :*

1. $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ *(formule du binôme de Newton)*
2. $a^n - b^n = (a - b) \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

Commutativité ?

Pour bien comprendre en quoi la commutativité de a et b est importante, vous pouvez regarder les preuves données dans le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (en cours pour le binôme, en TD pour la seconde).

Démonstration. Les preuves sont exactement les mêmes que dans $\mathbf{C}$. □

14.3.1 Sous-anneau

Définition 14.50 – Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et soit B une partie non vide de A. On dit que B est un **sous-anneau** de A si B contient 1_A, B est stable à la fois pour $+$ et pour $\cdot$, et que $(B, +, \cdot)$ est un anneau[21].

[21] Où les lois $+$ et $\cdot$ désignent les restrictions à B des lois de A.

Proposition 14.51 : *Une partie B d'un anneau $(A, +, \cdot)$ est un sous-anneau de A si et seulement si :*

1. $1_A \in B$
2. $\forall (x, y) \in B^2,\ x - y \in B$
3. $\forall (x, y) \in B^2,\ x \cdot y \in B$.

Démonstration. Très similaire à celle de sous-groupe. Notons d'ailleurs que les deux premiers points garantissent que $(B,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$. □

Exemples 14.52

▸ L'ensemble $2\mathbf{Z}$ des nombres pairs n'est pas un sous-anneau de $\mathbf{Z}$. Bien qu'il en soit un sous-groupe et qu'il soit stable par multiplication, il ne contient pas le neutre multiplicatif de $\mathbf{Z}$, qui est 1.
▸ $\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbf{Z}^2\right\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$.
En effet, $1 = 1+0\cdot\sqrt{2}\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, si $x = a+b\sqrt{2}$ et $y = c+d\sqrt{2}$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}\left(\sqrt{2}\right)$ (avec $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$), alors $x-y = (a-c)+\sqrt{2}(b-d)\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.
Et de même, $xy = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = \underbrace{ac+2bd}_{\in\mathbf{Z}}+\underbrace{(bc+ad)}_{\in\mathbf{Z}}\sqrt{2}\in\mathbf{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

14.3.2 Un exemple fondamental

Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau et soit E un ensemble.
Alors, sur l'ensemble $\mathscr{F}(E,A) = A^E$ des fonctions de E dans A, on définit deux lois de composition internes, encore notées $+$ et $\cdot$, de la manière suivante :

- ▸ $\forall x\in E,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- ▸ $\forall x\in E,\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$.

Proposition 14.53 : *Muni des deux opérations $+$ et $\cdot$, $\mathscr{F}(E,A)$ est un anneau, commutatif si et seulement si A l'est.*

Démonstration. ▸ L'associativité des deux lois découle assez facilement de l'associativité des lois de A.
Ainsi, pour f,g,h dans $\mathscr{F}(E,A)$, on a, pour tout $x\in E$,

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = (f+(g+h))(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in E$, $f+(g+h) = (f+g)+h$.
De même, l'addition dans $\mathscr{F}(E,A)$ est commutative car l'addition de A l'est.
▸ La fonction nulle $\widetilde{0}$, définie par : $\forall x\in E,\ \widetilde{0}(x) = 0_A$ est élément neutre pour l'addition car pour $f\in\mathscr{F}(E,A)$, et pour tout $x\in E$,

$$(f+\widetilde{0})(x) = f(x)+\widetilde{0}(x) = f(x)+0_A = f(x)$$

et donc $f+\widetilde{0} = f$.
On prouve de même que la fonction constante égale à 1_A, notée $\widetilde{1}$ est l'élément neutre pour la multiplication.
▸ L'inverse de f pour l'addition est la fonction $-f : x\mapsto -(f(x))$ puisque $\forall x\in E$,

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f(x)) = f(x)-f(x) = 0_A = \widetilde{0}(x)$$

et donc $f+(-f) = \widetilde{0}$.
▸ Enfin, pour $f,g,h\in\mathscr{F}(E,A)$, et pour $x\in E$, on a

$$(f\cdot(g+h))(x) = f(x)\cdot(g(x)+h(x)) = f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x) = (f\cdot g+f\cdot h)(x)$$

de sorte que $f\cdot(g+h) = f\cdot g+f\cdot h$.
On prouve de même que $(f+g)\cdot h = f\cdot h+g\cdot h$. □

Notons que ce résultat ne suppose aucune hypothèse sur l'ensemble de départ E, seul l'ensemble d'arrivée doit être muni d'une structure d'anneau[22].
En particulier, les ensembles $\mathscr{F}(I,\mathbf{R})$, $\mathscr{F}(I,\mathbf{C})$, où I est un intervalle, ainsi que les ensembles de suites $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
L'intérêt de ce résultat est qu'il évite bien souvent de prouver qu'un ensemble de suites ou

[22] En général, on l'utilisera avec $A = \mathbf{R}$ ou $A = \mathbf{C}$.

de fonctions est un anneau en vérifiant tous les points de la définition. En effet, on peut se contenter de prouver qu'il s'agit d'un sous-anneau d'un anneau de référence, ce qui demande bien moins d'efforts que de prouver de nouveau toutes les propriétés définissant un anneau.

Exemple 14.54

L'ensemble des suites convergentes est un sous-anneau de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
En effet, la suite constante égale à 1 est convergente, la différence de deux suites convergentes est convergente, et le produit de deux suites convergentes est convergente.

Remarque. La preuve montre en fait que si $(G, \cdot)$ est un groupe, alors pour tout ensemble E, $\mathscr{F}(E, G)$ est un groupe.

14.3.3 Diviseurs de zéro

Définition 14.55 – Soit A un anneau et $a \in A$ différent de 0_A. On dit que a est un **diviseur de zéro** s'il existe $b \in A$ différent de 0_A tel que $a \cdot b = 0_A$ ou $b \cdot a = 0_A$.

Remarque. Un diviseur de zéro est un élément qui viole la sacro-sainte règle apprise à la maternelle : «un produit est nul si et seulement si l'un de des facteurs est nul».
Bien entendu, cette règle reste valable dans l'anneau $(\mathbf{R}, +, \times)$, ainsi que dans l'anneau $(\mathbf{C}, +, \times)$ (autrement dit dans le cadre où vous l'avez apprise), mais ne découle pas directement des axiomes définissant un anneau.

Exemples 14.56

▸ Dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, toute matrice nilpotente M non nulle[23] est un diviseur de zéro puisque si on note p son indice de nilpotence, $M \underbrace{M^{p-1}}_{\neq 0_n} = 0_n$.

▸ Plus généralement, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est non inversible, avec $A \neq 0_n$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nul tel que $AX = 0_{n,1}$.
Et alors si B est la matrice dont toutes les colonnes sont égales à X, alors toutes les colonnes de AB sont égales à AX et donc sont nulles. Par conséquent, $AB = 0_n$, donc A est un diviseur de zéro.
▸ Plaçons nous dans l'anneau $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites réelles.
Soit alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$, et soit (v_n) la suite définie par
$v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Alors (u_n) et (v_n) ne sont pas nulles, mais pourtant, on a $u_0 v_0 = 0 \times 1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n v_n = n \times 0 = 0$, de sorte que $(u_n v_n)_n$ est la suite nulle.
Et donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux diviseurs de zéro.

[23] Et il en existe, prendre par exemple $E_{i,j}$ avec $i \neq j$.

Définition 14.57 – Un anneau commutatif A est dit **intègre** si il est non nul et ne possède pas de diviseurs de zéro.
Autrement dit si $A \neq \{0_A\}$ et si

$$\forall (a, b) \in A^2,\ a \cdot b = 0_A \Rightarrow (a = 0_A \textbf{ ou } b = 0_A)\,.$$

Exemple 14.58

$(\mathbf{C}, +, \times)$ et tous ses sous-anneaux (donc en particulier $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}$) sont intègres.

14.3.4 Éléments inversibles

Définition 14.59 – Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit que $a \in A$ est **inversible** s'il possède un inverse pour la loi $\cdot$, c'est-à-dire s'il existe $b \in A$ tel que $a \cdot b = b \cdot a = 1_A$.
L'ensemble des éléments inversibles de A se note $A^\times$, ou encore $U(A)$ (on parle parfois d'unités au lieu d'inversibles).

Exemples 14.60

- 1_A est toujours inversible, de sorte que $\{1_A\} \subset A^\times$.
- En revanche, si A n'est pas l'anneau nul, alors 0_A n'est pas inversible (car $a \cdot 0_A = 0_A$ ne peut jamais être égal à 1_A), et donc $A^\times \subset A \setminus \{0\}$.
- Dans $(\mathbf{Z}, +, \times)$, les seuls inversibles sont 1 et -1.
- Dans $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$, les éléments inversibles sont bien les matrices que nous avons appelé inversibles. Et nous avons alors noté $GL_n(\mathbf{K})$ au lieu de $U(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$.

Proposition 14.61 : *Si $a \in A$ est inversible, alors a n'est pas un diviseur de zéro.*

Démonstration. Si $b \in A$ est tel que $a \cdot b = 0_A$, alors en multipliant à gauche par a^{-1}, il vient $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0_A \Leftrightarrow b = 0_A$.
Et de même, si $b \cdot a = 0_A$, alors $b = 0_A$. □

Proposition 14.62 : *Soit $(A, +, \times)$ un anneau. L'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles de A est un groupe pour la loi $\times$, appelé groupe des inversibles (ou groupe des unités) de A. Ce groupe est commutatif si A est un anneau commutatif.*

Démonstration. Par définition d'un anneau, la loi $\times$ est associative.
Puisque 1_A est inversible, il est bien dans $A^\times$ et donc est l'élément neutre de $A^\times$.
Enfin, par définition de $A^\times$ tout élément possède un inverse. □

14.3.5 Morphismes d'anneaux

Définition 14.63 – Si $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ sont deux anneaux dont les éléments neutres multiplicatifs respectifs sont notés 1_A et 1_B, on appelle **morphisme d'anneaux** toute application $f : A \to B$ telle que :

1. $\forall (x, y) \in A^2,\ f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$
2. $\forall (x, y) \in A^2,\ f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$
3. $f(1_A) = 1_B$.

Remarques. ▸ Le premier point nous dit notamment que f est un morphisme de groupe entre les groupes abéliens $(A, +_A)$ et $(B, +_B)$.
Et donc $f(0_A) = 0_B$, $\forall x \in A,\ f(-x) = -f(x)$ et comme tous les morphismes de groupes f est injectif si et seulement si son noyau[24] est réduit à $\{0_A\}$.
▸ En revanche, contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, $f(1_A) = 1_B$ ne découle pas directement du second point.
Et par exemple, si B n'est pas l'anneau nul, l'application nulle vérifie les deux premiers points, mais pas le troisième et n'est donc pas un morphisme d'anneaux.

[24] L'image réciproque de $\{0_B\}$.

Exemples 14.64

- L'application $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbf{C}$ dans lui-même.
- Soit $f : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ l'application qui à $a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ associe $a - b\sqrt{2}$.

Alors $f(1) = f(1 + 0\sqrt{2}) = 1 - 0\sqrt{2} = 1$.
Pour $(a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4$. Alors

$$f(a+b\sqrt{2})f(c+d\sqrt{2}) = (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = ac+2bd-(ad+bc)\sqrt{2} = f((ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2})) = f((a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})).$$

Et de même,

$$f(a + b\sqrt{2}) + f(c + d\sqrt{2}) = (a + c) - (b + d)\sqrt{2} = f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})).$$

Donc f est un morphisme d'anneaux.

Remarque
Cette application est bien définie puisque tout élément de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ s'écrit de manière **unique** $a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

On prouve sans difficultés que la composée de deux morphismes d'anneaux est encore un morphisme d'anneaux, et que la bijection réciproque d'un morphisme d'anneaux bijectif (on parle alors d'isomorphisme d'anneaux) est encore un morphisme d'anneaux.

14.4 CORPS

Définition 14.65 – On appelle **corps** tout anneau commutatif non nul dans lequel tout élément non nul[25] est inversible.

[25] C'est-à-dire différent du neutre pour +.

Exemples 14.66

- $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, munis de leurs opérations habituelles sont des corps.
- $(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}), +, \times)$ n'est pas un corps, car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, bien que non nulle.
- $\{0, 1\}$, muni des lois suivantes est aussi un corps :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

et

×	0	1
0	0	0
1	0	1

- $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est un corps. On prouve comme pour $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ qu'il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbf{R}$. Reste à prouver que tout élément non nul de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ possède un inverse dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Mais dans $\mathbf{R}$, l'inverse de $a + b\sqrt{2} \neq 0$ est

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \sqrt{2}\left(-\frac{b^2}{a^2 - 2b^2}\right) \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

Notons en particulier que dans un corps, tout élément non nul étant inversible, il n'y a pas de diviseurs de zéro : un corps est intègre.
Les corps seront le bon cadre pour faire de l'algèbre linéaire, et par exemple, tout ce que nous avons dit sur les matrices à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ reste valable dans un corps quelconque.

Exercices du chapitre 14

▶ Lois de composition interne

Exercice 14.1 Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\max(x, y)$ est bien défini. On définit ainsi une loi de composition interne, notée max sur E. PD

1) Montrer que la loi max est associative et commutative.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(E, \max)$ possède un élément neutre.
3) Lorsque cette condition est vérifiée, quels sont les éléments inversibles de E ?

Exercice 14.2 Éléments réguliers AD
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, associative, et possédant un élément neutre e. Un élément $x \in E$ est dit régulier à gauche si $\forall (y, z) \in E^2,\ x * y = x * z \Rightarrow y = z$ et régulier à droite si $\forall (y, z) \in E^2,\ \ y * x = z * x \Rightarrow y = z$.

1) Quels sont les éléments réguliers (à droite ou à gauche) de $(\mathbf{Z}, \times)$?
2) Soit A un ensemble. Montrer que dans $(\mathcal{F}(A, A), \circ)$, un élément f est régulier à droite si et seulement si f est surjective. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit régulier à gauche.

▶ Groupes

Exercice 14.3 On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbf{R}$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. PD
Montrer que $(\mathbf{R}, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 14.4 Centre d'un groupe PD
Soit G un groupe. On appelle centre de G l'ensemble $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$ des éléments commutant avec tous les éléments de G. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G. À quelle condition a-t-on $\mathcal{Z}(G) = G$?

Exercice 14.5 Divers sous-groupes PD
Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G.

1) $G = (\mathbf{C}^*, \times)$, $\quad H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n$
2) $G = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\quad H$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G.
3) $G = GL_2(\mathbf{R})$, $\quad H$ l'ensemble des éléments de G dont tous les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$.
4) $G = GL_n(\mathbf{R})$, $\quad H$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1.
5) $G = \mathfrak{S}_n$, $\quad H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$

Exercice 14.6 Donner les tables de multiplication de $\mathbf{U}_4$ et $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$. Prouver alors que ces deux groupes ne sont pas isomorphes (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre ces groupes), bien que de même cardinal. AD

Exercice 14.7 Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$. D

1) Montrer que tout élément est égal à son propre inverse. En déduire que G est abélien.
2) Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3) On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G, différent de $\{e\}$ ou de G, et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh,\ h \in H\}$.
   a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
   b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 14.8 Un cas particulier du théorème de Lagrange AD
Soit G un groupe commutatif fini, de cardinal n.

1) Soit $g \in G$. Montrer que $x \mapsto gx$ est une bijection de G sur lui-même.
2) Soit $g \in G$. En calculant de deux manières le produit $\prod_{x \in G} (gx)$, montrer que $g^n = 1_G$.
3) Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbf{C}^*, \times)$.

Exercice 14.9 Opérations sur les sous-groupes AD
Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. On note $HK = \{h \cdot k,\ (h, k) \in H \times K\}$

1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

3) Si G est abélien, montrer que HK est un sous-groupe de G.
4) ($\star$) Prouver que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

EXERCICE 14.10 Soit G un groupe. On définit une relation binaire sur G par $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ x = g^{-1}yg$. **AD**

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
2) Déterminer le cardinal de la classe d'équivalence de 1_G.
3) Si G est abélien, prouver que les classes d'équivalence sont des singletons.
4) Montrer que si $x \sim y$ et s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 1_G$, alors $y^n = 1_G$.

EXERCICE 14.11 Dans cet exercice, on note G l'ensemble des similitudes directes du plan, qu'on assimile à l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ tels que $\forall z \in \mathbf{C},\ f(z) = az + b$. **AD**

1) Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.
2) Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On pose $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$.
   Montrer que G_{z_0} est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbf{C}^*$. Est-il abélien ?

EXERCICE 14.12 Soit G un groupe, et soit $x \in G$. On dit que x est d'ordre fini s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = e_G$. **AD**

1) Montrer que si G est abélien, et que x et y sont d'ordre fini, alors xy est encore d'ordre fini.
2) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si G n'est plus abélien ?

EXERCICE 14.13 Conjugaison dans un groupe **AD**

Soit G un groupe. Pour $a \in G$, on pose $\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & aga^{-1} \end{array} \right.$.

1) Montrer que τ_a est un morphisme bijectif de G dans lui-même (on parle alors d'automorphisme).
2) On pose $\mathscr{C}(G) = \{\tau_a,\ a \in G\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.
3) Montrer que l'application $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G)$ qui à $a \in G$ associe τ_a est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

EXERCICE 14.14 Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. **PD**

1) Prouver que pour tout sous-groupe H_1 de G_1, $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.
2) Prouver que pour tout sous-groupe H_2 de G_2, $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1. En déduire que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1.

EXERCICE 14.15 Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ dans $(\mathbf{Z}, +)$. De $(\mathbf{Q}, +)$ dans $(\mathbf{Z}, +)$. **AD**

EXERCICE 14.16 Soit $(G, *)$ un groupe, et soit A une partie non vide **finie** de G, stable par $*$. Prouver que A est un sous-groupe de G. **D**

▸ Anneaux, corps

EXERCICE 14.17 Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2},\ (x, y) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un anneau. **AD**
Prouver que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2},\ (x, y) \in \mathbf{Q}^2\}$ est un corps.

EXERCICE 14.18 Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. Montrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau. Est-ce un corps ? **F**

EXERCICE 14.19 Produit direct d'anneaux **PD**
Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux. On munit $A \times B$ de deux lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_A a', b +_B b') \text{ et } (a, b) \otimes (a', b') = (a \times_A a', b \times_B b').$$

Montrer que $(A \times B, \oplus, \otimes)$ est un anneau, commutatif si A et B le sont. Cet anneau est-il intègre ?

EXERCICE 14.20 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, l'anneau des suites réelles ? **PD**

1) l'ensemble des suites de limite nulle
2) l'ensemble des suites croissantes
3) l'ensemble des suites convergentes
4) l'ensemble des suites divergentes
5) l'ensemble des suites bornées
6) l'ensemble des suites (u_n) telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
7) l'ensemble des suites stationnaires
8) l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang

EXERCICE 14.21 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Pour $a \in A$, on appelle racine carrée de a tout élément dont le carré vaut a. **AD**

1) Prouver que si A est intègre, alors tout élément de A admet au plus deux racines carrées.

2) En revanche, prouver que dans $(\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,\times)$, la fonction constante $x \mapsto 1$ possède une infinité de racines carrées.

EXERCICE 14.22 Soit A un anneau commutatif et E un ensemble non vide. À quelle condition $\mathscr{F}(E,A)$ est-il intègre ? PD

EXERCICE 14.23 Montrer qu'un anneau commutatif intègre fini est un corps. TD

EXERCICE 14.24 **Idéaux premiers (D'après oral ENS)** TD

Soit A un anneau commutatif non nul. On appelle idéal de A tout sous-groupe I de $(A,+)$ tel que $\forall (a,x) \in A \times I$, $ax \in I$.

1) Montrer que pour tout $x \in A$, $xA = \{ax, a \in A\}$ est un idéal de A.
2) Un idéal I est dit maximal si tout idéal de A, différent de A, et qui contient I est égal à I lui-même.
   Et un idéal I différent de A est dit premier si $\forall (a,b) \in A^2$, $ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.
   a) Montrer qu'un idéal I est maximal si et seulement si pour tout $x \in A \setminus I$, $I + xA = A$ (où $I + aA$ est l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme somme d'un élément de I et d'un élément de aA).
   b) Prouver qu'un idéal maximal est premier.
3) Montrer que A est un corps si et seulement si tout idéal de A est premier.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 14

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.1

1. C'est trivial.
2. Supposons que E contienne un élément neutre e pour max. Alors, pour tout $x \in E$, $\max(x, e) = x$, et donc $e \leqslant x$.
Donc un élément neutre est forcément un minorant de E, et étant dans E, c'est le plus petit élément de E.
Inversement, si E possède un plus petit élément e, alors pour tout $x \in E$, $\max(x, e) = x$, et donc e est élément neutre.
Ainsi, $(E, \max)$ possède un élément neutre si et seulement si il possède un plus petit élément.
3. L'élément neutre est bien entendu inversible, égal à son propre inverse.
Soit $x \in E$ un élément inversible. Alors il existe $y \in E$ tel que $\max(x, y) = e$.
Donc soit $x = e$, soit $y = e$.
Mais si $y = e$, alors y est l'inverse de x, et donc $x = y^{-1} = e^{-1} = e$.
Donc e est l'unique élément inversible de E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.2

1. Notons que $\mathbf{Z}$ étant commutatif, les éléments réguliers à droite et réguliers à gauche sont les mêmes.
Supposons donc que x soit régulier, et soient $y, z \in \mathbf{Z}$ tels que $xy = xz$.
Alors $x(y - z) = 0$. Et donc soit $x = 0$, soit $y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$.
Il est clair que 0 n'est pas régulier car $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$. Donc tout élément non nul de $\mathbf{Z}$ est régulier.
2. Supposons que f soit surjective, et soient $g, h \in \mathscr{F}(A, A)$ telles que $g \circ f = h \circ f$.
Soit alors $y \in A$. Par surjectivité de f, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Et alors $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$. Ceci étant vrai quel que soit $y \in A$, on en déduit que $g = h$, donc que f est régulier à droite.

En revanche, si f n'est pas surjective, alors il existe $y \in A$ qui ne possède pas d'antécédent par f. Et alors deux fonctions g et h qui diffèrent uniquement en y vérifient $\forall x \in A,\ g(f(x)) = h(f(x))$ car $f(x) \neq y$.
Pourtant $h \neq g$ par hypothèse, donc f n'est pas régulier à droite.

Autrement dit
On suppose que $g(x) = h(x)$ pour tout $x \neq y$ et que $g(y) \neq h(y)$.

Si f est injective, soient alors g et h deux fonctions telles que $f \circ g = f \circ h$.
Alors pour tout $x \in A$, $f(g(x)) = f(h(x))$, et donc $g(x) = h(x)$. Donc $g = h$: f est régulier à gauche.
Inversement, soit f une fonction régulière à gauche pour la composition, et soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Soient alors g et h les fonctions constantes égales respectivement à x_1 et x_2.
On a donc $f \circ g = f \circ h$. Et donc $g = h$, de sorte que $x_1 = x_2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.3

Commençons par prouver l'associativité de la loi $\star$: soient x, y, z trois réels. Alors

$$x \star (y \star z) = \sqrt[3]{x^3 + \left(\sqrt[3]{y^3 + z^3}\right)^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}.$$

Et d'autre part,

$$(x \star y) \star z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = x \star (y \star z).$$

Donc $\star$ est une loi de composition associative.
Notons qu'elle est clairement commutative, puisque la somme dans $\mathbf{R}$ est commutative, et donc $x^3 + y^3 = y^3 + x^3$.

0 est l'élément neutre pour $\star$, puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \star 0 = \sqrt[3]{x^3} = x$. Et par commutativité, $0 \star x = x \star 0 = x$.
Enfin, tout élément admet bien un inverse, qui est $-x$, puisque

$$x \star (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} = \sqrt[3]{x^3 - x^3} = \sqrt[3]{0} = 0.$$

Et par commutativité, $(-x) \star x = 0$.
Ainsi, $(\mathbf{R}, \star)$ est bien un groupe.

> **Remarque**
> Bien que l'élément neutre soit le même que celui du groupe $(\mathbf{R}, +)$, et que l'inverse d'un élément x soit également le même que dans $(\mathbf{R}, +)$, il ne s'agit pas du même groupe, car en général,
> $$x \star y \neq x + y.$$
> Par exemple
> $$1 \star 1 = \sqrt[3]{2} \neq 2 = 1 + 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.4

Pour tout $x \in G$, $ex = xe = x$, donc $e \in \mathcal{Z}(G)$.
Soit $g \in \mathcal{Z}(G)$, et soit $x \in G$. Alors $gx^{-1} = x^{-1}g$, et donc en passant à l'inverse, $xg^{-1} = g^{-1}x$, de sorte que x et g^{-1} commutent. Ceci étant vrai pour tout $x \in G$, $g^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$.
Enfin, si $g, h \in \mathcal{Z}(G)$, alors pour tout $x \in G$,

$$ghx = g(hx) = g(xh) = (gx)h = xgh.$$

Donc gh et x commutent, de sorte que $gh \in \mathcal{Z}(G)$.
Et donc nous avons bien vérifié les quatre points caractérisant un sous-groupe, $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.
On a alors $\mathcal{Z}(G) = G$ si et seulement si

$$\forall g \in G,\ g \in \mathcal{Z}(G) \Leftrightarrow \forall (g, h) \in G^2, hg = gh.$$

Soit encore si et seulement si G est abélien.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.5

1. 1 (qui est l'élément neutre de $\mathbf{C}^*$) est dans tous les $\mathbf{U}_n$, donc dans leur union.
Soient $x, y \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n$.
Alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = 1$ et il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $y^p = 1$.
Mais alors $(xy)^{np} = x^{np}y^{np} = (x^n)^p\,(y^p)^n = 1^p 1^n = 1$.
Donc $xy \in H$.
De plus, si $x \in H$, alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = 1$, et donc $\left(\frac{1}{x}\right)^n = 1$, donc $\frac{1}{x} \in \mathbf{U}_n \subset H$.
Ainsi, H est un sous-groupe de G.

> **☠ Danger !**
> n et p n'ont aucune raison d'être égaux.

2. La matrice nulle est dans H.
La somme[1] de deux matrices triangulaires supérieures est encore triangulaire supérieure.
Et si $M \in H$, alors $-M$ (qui est l'inverse de M pour l'addition) est encore dans H.
Donc H est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

[1] Ici, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est bien muni de la somme.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans H, mais son inverse, $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans H, donc H n'est pas un sous-groupe de G.

> **Remarque**
> Si on ajoute la condition que $\det A = \pm 1$, alors H devient un sous-groupe de G.

4. La matrice I_n est dans H.
Le produit de deux matrices de H est dans H.
Et si $M \in H$, alors son inverse est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de M, donc valent tous 1.
Donc $M^{-1} \in H$: H est un sous-groupe de G.

5. $\mathrm{id}(1) = 1 \neq 2$, donc id, qui est l'élément neutre de $\mathfrak{S}_n$ n'est pas dans H : H n'est pas un sous-groupe de G.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.6

Pour $\mathbf{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$, il n'y a pas de difficulté :

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Puisque $\mathbf{U}_2 = \{-1, 1\}$, le groupe $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ contient 4 éléments : $(1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)$, et on a alors

$\times$	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
$(-1,-1)$	$(-1,-1)$	$(1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$	$(-1,-1)$
$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,1)$

En particulier, pour tout x dans $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$, on a $x^2 = (1,1)$ l'élément neutre.
Supposons par l'absurde qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2 \to \mathbf{U}_4$.
Alors pour tout $y \in \mathbf{U}_4$, il existe un unique $x \in \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ tel que $y = \varphi(x)$. Et alors $y^2 = \varphi(x)^2 = \varphi\left(x^2\right) = \varphi((1,1)) = 1$.
Autrement dit, le carré de tout élément de $\mathbf{U}_4$ est égal à 1. Ceci est manifestement faux, puisque $i^2 = -1 \neq 1$.
Par conséquent, il n'existe pas d'isomorphisme de $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2 \to \mathbf{U}_4$.

> **Rappel**
> Un morphisme envoie toujours l'élément neutre sur l'élément neutre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.7

1. Pour tout $x \in G$, $xx = x^2 = e$, et donc $x^{-1} = x$.

2. Soient $x, y \in G$. Alors $xy = (xy)^{-1}$. Mais $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, qui par la question précédente vaut yx. Et donc $xy = yx$, si bien que G est abélien.

3. Il existe $x \in G$ tel que $x \neq e$. Et alors $\{e, x\}$ est un sous-groupe de G, de cardinal 2.

4.a. Notons qu'un tel sous-groupe H existe par la question précédente.
Puisque $e \in H$, $e \in H \cup gH$.
Soient $g_1, g_2 \in H \cup gH$. Soit $g_1 \in H$, soit il existe $h_1 \in H$ tel que $g_1 = gh_1$.
De même, soit $g_2 \in H$, soit il existe $h_2 \in H$ tel que $g_2 = gh_2$.

Montrons que $g_1g_2 \in H \cup gH$ est stable par produit, puisque tout élément étant égal à son propre inverse, on aura donc, $g_1g_2^{-1} = g_1g_2 \in H \cup gH$.

► Si $g_1, g_2 \in H$. Alors $g_1g_2 \in H$ par définition d'un sous-groupe.
► Si $g_1 \in H$ et $g_2 \notin H$. Alors $g_1g_2 = g_1gh_2 = g\underbrace{(g_1h_2)}_{\in H} \in gH \subset H \cup gH$.

► Si $g_1 \notin H$ et $g_2 \in H$. Alors $g_1g_2 = g\underbrace{(h_1g_2)}_{\in H}$.

► Si $g_1 \notin H$ et $g_2 \notin H$. Alors $g_1g_2 = gh_1gh_2 = g^2h_1h_2 = h_1h_2 \in H \subset H \cup gH$.
Donc nous avons bien prouvé que pour tout $g_1, g_2 \in H \cup gH$, $g_1g_2 \in H \cup gH$, qui est donc un sous-groupe de G.
Puisque la translation à gauche par g est bijective, $h \mapsto gh$ est une bijection de H sur gH, qui a donc même cardinal que H.
Par ailleurs, H et gH sont disjoints. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x \in H \cup gH$. Alors $x \in H$ et il existe $h \in H$ tel que $x = gh$. Et alors $g = xh^{-1} \in H$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $g \notin H$.
Donc $H \cup gH$ est de cardial $\text{Card}(H) + \text{Card}(gH) = 2\text{Card}(H)$.

4.b. Supposons par l'absurde que $\text{Card}(G)$ ne soit pas une puissance de 2.
Soit alors H_1 un sous-groupe de G de cardinal 2. Alors $H_1 \neq G$, et donc il existe $g_1 \in G \setminus H_1$.
Donc $H_2 = H_1 \cup g_1H_1$ est un sous-groupe de G de cardinal 4.
Mais alors $H_2 \neq G$ puisque G n'est pas de cardial 4. Donc il existe $g_2 \in G \setminus H_2$. Et alors $H_3 = H_2 \cup g_2H_2$ est un sous-groupe de G de cardinal 8.
Mais H_3 n'est pas égal à G, etc.
On construit donc par récurrence une suite de sous-groupes $(H_k)_{k \geqslant 1}$ tels que H_k soit de cardinal 2^k.
Mais si k est suffisamment grand, $2^k > \text{Card}(G)$, ce qui est absurde.
Donc $\text{Card}(G)$ est nécessairement une puissance de 2.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.8

1. Notons $f_g : x \mapsto gx$, et $f_{g^{-1}} : x \mapsto g^{-1}x$. Alors, pour tout $x \in G$,

$$\left(f_g \circ f_{g^{-1}}\right)(x) = g(g^{-1}x) = x \text{ et de même } \left(f^{g^{-1}} \circ f_g\right)(x) = g^{-1}(gx) = x.$$

Donc non seulement f_g est bijective, mais en plus, nous savons que son inverse est $f_{g^{-1}}$.

2. D'une part, f_g étant bijective, on a, avec le changement de variable $y = gx$,

$$\prod_{x\in G}(gx) = \prod_{y\in G} y.$$

D'autre part, G étant commutatif, on a

$$\prod_{g\in G}(gx) = g^n \prod_{x\in G} x.$$

Détaillons un poil ce calcul pour bien voir où l'hypothèse de commutativité est indispensable : notons $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Alors

$$\begin{aligned}\prod_{x\in G}(gx) &= \prod_{i=1}^{n}(gx_i)\\ &= (gx_1)(gx_2)\cdots(gx_n) = gx_1gx_2\cdots gx_n\\ &= ggx_1x_2gx_3\cdots gx_n\\ &= \cdots = \underbrace{g\cdots g}_{n \text{ fois}}(x_1x_2\cdots x_n)\\ &= g^n\prod_{x\in G} x.\end{aligned}$$

En notant $A = \prod_{x\in G} x$, on a donc $g^nA = A$, et donc en multipliant à droite par A^{-1}, $g^n = 1_G$.

3. D'après la question précédente, un sous-groupe de cardinal n de $(\mathbf{C}^*, \times)$, qui sera forcément commutatif car $(\mathbf{C}^*, \times)$ l'est, est formé d'éléments z tels que $z^n = 1$.
Par conséquent, il est formé de racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
Autrement dit, si G est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^*, \times)$ de cardinal n, alors $G \subset \mathbf{U}_n$.
Mais $\mathbf{U}_n$ est lui-même de cardinal n, et donc $G = \mathbf{U}_n$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(\mathbf{C}^*, \times)$ possède un unique sous-groupe de cardinal n, qui est $\mathbf{U}_n$.

Explication
La bijectivité nous dit que les gx, quant x parcourt G, prennent une et une seule fois chaque valeur dans G.
Et donc le produit des gx est le même que le produit des x, $x \in G$.
Remarquons au passage que cette notation produit n'a de sens que parce que le groupe est commutatif, sans cela, on ne saurait pas dans quel ordre a lieu le produit.

L'associativité nous permet de nous passer des parenthèses.
La commutativité sert ici : on peut permuter l'ordre de deux facteurs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.9

1. C'est du cours, mais reprouvons-le tout de même :

- $e_G \in H$ car H est un sous-groupe, et de même, $e_G \in K$. Donc $e_G \in H \cap K$.
- soient $g_1, g_2 \in H \cap K$. Alors $g_1g_2 \in H$ car H est un sous-groupe, et de même, $g_1g_2 \in K$, donc $g_1g_2 \in H \cap K$: $H \cap K$ est stable par produit.
- enfin, si $g \in H \cap K$, alors $g^{-1} \in H$, puisque H est un sous-groupe, et de même $g^{-1} \in K$, donc $g^{-1} \in H \cap K$.

Et donc $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

2. Si l'un des deux sous-groupes est inclus dans l'autre, alors il est évident que $H \cup K$ est un sous-groupe[2].
Inversement supposons que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G, et supposons que $H \not\subset K$ et $K \not\subset H$.
Alors il existe $h \in H \setminus K$ et il existe $k \in K \setminus H$.
Alors $hk \in H \cup K$.
► **Si $hk \in H$** : alors $h^{-1} \in H$ et donc $k = h^{-1}(hk) \in H$, ce qui est absurde.
► **Si $hk \in K$** : alors $k^{-1} \in K$ et donc $h = (hk)k^{-1} \in K$, ce qui est absurde.
Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction, et donc $H \cup K$ sous-groupe de G implique $H \subset K$ ou $K \subset H$.

3. Déjà, $e_G = \underbrace{e_G}_{\in H}\underbrace{e_G}_{\in K} \in HK$.
Soient $x, y \in HK$. Alors il existe $(h, h') \in H^2$ et $(k, k') \in K^2$ tels que $x = hk$ et $y = h'k'$.
Et alors $xy = (hk)(h'k') = hkh'k' = hh'kk' = \underbrace{hh'}_{\in H}\underbrace{kk'}_{\in K} \in HK$.
Et avec les mêmes notations, $x^{-1} = (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1} = \underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{k^{-1}}_{\in K} \in HK$.
Donc HK est un sous-groupe de G.

[2] Puisqu'il est égal soit à H soit à K.

Rédaction
Attention aux quantificateurs : il existe un élément dans H pas dans K, mais ce n'est pas le cas de tous les éléments de H (ne serait-ce que parce que e_G est dans H et dans K).

4. Supposons que $KH = HK$. Prouvons qu'alors HK est un sous-groupe de G.
Il contient évidemment $e_G = e_G \cdot e_G$.
Soient $x, y \in HK$. Alors il existe $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que $x = h_1k_1$ et $y = h_2k_2$.
Et alors $xy^{-1} = (h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}$.
Mais $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} \in KH = HK$. Donc il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $(k_1k_2^{-1})h_2^{-1} = hk$.
Et alors $xy^{-1} = h_1hk = (h_1h)k \in HK$. Donc HK est un sous-groupe de G.

Inversement, supposons que HK soit un sous-groupe de G.
Alors $K \subset HK$ (puisque $h \in H$ s'écrit $h \cdot e_G$) et $H \subset HK$, par stabilité de HK par produit, $KH \subset HK$. Inversement, soit $x \in HK$. Alors $x^{-1} \in HK$. Et donc il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $x^{-1} = hk$, de sorte que $x = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Donc $KH = HK$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.10

Rédaction Attention à ne pas oublier le quantificateur existentiel devant g, et ne pas perdre de vue qu'il dépend des éléments x et y.

1. Soit $x \in G$. Alors $x = 1_G^{-1}x1_G$, donc $x \sim x$: $\sim$ est réflexive.
Soient $(x, y) \in G^2$ tels que $x \sim y$. Alors il existe $g \in G$ tel que $x = g^{-1}yg$. Et alors, en multipliant à gauche par g et à droite par g^{-1}, il vient $y = gxg^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1} xg^{-1}$, de sorte que $y \sim x$. Donc $\sim$ est symétrique.
Soient $(x, y, z) \in G^3$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors il existe deux éléments g et h de G tels que $x = g^{-1}yg$ et $y = h^{-1}zh$.
Et donc $x = g^{-1}h^{-1}zhg = (hg)^{-1}\, z(hg)$, et donc $x \sim z$: la relation $\sim$ est transitive.

2. Un élément $x \in G$ est dans la classe d'équivalence de 1_G si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $x = g^{-1}1_Gg = g^{-1}g = 1_G$.
Et donc $\overline{1_G} = \{1_G\}$.

3. Supposons G abélien, et soient $(x, y) \in G^2$ tels que $x \sim y$.
Alors il existe $g \in G$ tel que $x = g^{-1}yg = yg^{-1}g = y$.
Donc la classe d'équivalence de x est réduite à x : c'est un singleton.

4. Soient x et y deux éléments de G tels que $x \sim y$, et soit $g \in G$ tel que $y = g^{-1}xg$.
Alors
$$y^n = \left(g^{-1}xg\right)^n = g^{-1}x \underbrace{gg^{-1}}_{=1_G} xg \cdots g^{-1}xg = g^{-1}x^ng = g^{-1}1_Gg = 1_G.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.11

Rappel Il a été prouvé en cours que l'ensemble des permutations d'un ensemble est un groupe pour la composition.

1. Puisque les similitudes directes sont des bijections de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, nous allons prouver que G est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}(\mathbf{C})$ des bijections de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.
G contient évidemment $\mathrm{id}_{\mathbf{C}} : z \mapsto z$.
Il est évident que la composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe, donc G est stable par produit. Et si $f : z \mapsto az + b$ est une similitude directe, alors $f^{-1} : z \mapsto \dfrac{z-b}{a}$ est également une similitude directe.
Donc G est stable par passage à l'inverse, et donc est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(\mathbf{C}), \circ)$.
Il ne s'agit pas d'un groupe abélien, par exemple car $f : z \mapsto -z$ et $g : z \mapsto z + 1$ ne commutent pas :
$$f \circ g : z \mapsto -z - 1 \text{ et } g \circ f : z \mapsto -z - 1.$$

2. Donc G_{z_0} est l'ensemble des similitudes qui ont z_0 pour point fixe.
C'est bien le cas de l'identité, si f et g ont z_0 pour point fixe, alors $g(z_0) = z_0 \Leftrightarrow g^{-1}(z_0) = z_0$, si bien que $(f \circ g^{-1})(z_0) = f(z_0) = z_0$ et donc $f \circ g^{-1} \in G_{z_0}$.
Ainsi, G_{z_0} est un sous-groupe de G.
Soit alors $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* & \longrightarrow & G_{z_0} \\ \alpha & \longmapsto & z \mapsto \alpha(z - z_0) + z_0 \end{array} \right.$.
Nous savons que toute similitude directe qui possède z_0 comme point fixe est de la forme $z \mapsto re^{i\theta}(z - z_0) + z_0$ où r est le rapport et θ l'angle de la similitude.
Donc φ est surjective, et même bijective puisque l'écriture d'une similitude sous la forme $z \mapsto az + b$ est unique.
Reste donc à voir qu'ils s'agit d'un morphisme de groupes.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}^*$. Notons $f_1 = \varphi(\alpha_1) : z \mapsto \alpha_1(z - z_0) + z_0$ et $f_2 = \varphi(\alpha_2) : z \mapsto \alpha_2(z - z_0) + z_0$.
Alors $f_1 \circ f_2$ est une fonction affine, qui possède z_0 comme point fixe (car il est point fixe de z_1 et de z_2), et qui possède $\alpha_1\alpha_2$ comme coefficient dominant.
Donc pour tout $z \in \mathbf{C}$, $(f_1 \circ f_2)(z) = \alpha_1\alpha_2(z - z_0) + z_0$, c'est donc $\varphi(\alpha_1\alpha_2)$.

Alternative Si vous n'êtes pas convaincu, faire le calcul !

Et donc f est un morphisme de groupes, c'est donc un isomorphisme de groupes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.12

1. Si G est abélien, alors les puissances de x et de y commutent.
Donc en particulier, si n, p sont deux entiers strictement positifs tels que $x^n = y^p = e_G$, alors $(xy)^{np} = x^{np}y^{np} = (x^n)^p\,(y^p)^n = e_G$.
Et donc xy est d'ordre fini.

2. Le résultat n'est plus vrai si G n'est pas abélien. Par exemple, dans le groupe des similitudes directes du plan[3], une rotation d'angle π est d'ordre fini, puisqu'élevée au carré, elle est égale à l'identité.
En revanche, la composée de deux rotations d'angle π, de centre distincts est une translation de vecteur non nul.
En effet, si $\alpha \neq \beta$ sont deux complexes, si $f : z \mapsto -z + \alpha$ et $g : z \mapsto -z + \beta$ sont deux rotations d'angle π, alors $g \circ f : z \mapsto z + (\beta - \alpha)$.
Or, une translation τ de vecteur non nul $\vec{u}$ n'est jamais d'ordre fini puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, τ^n est[4] la translation de vecteur $n\vec{u} \neq \vec{0}$.

[3] Voir l'exercice précédent.

[4] Passer par les complexes si vous avez besoin de vous en convaincre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.13

1. Soient $(g, h) \in G^2$. Alors

$$\tau_a(g)\tau_a(h) = aga^{-1}aha^{-1} = agha^{-1} = \tau_a(h).$$

Donc τ_a est un morphisme de G dans lui-même.
Pour montrer la bijectivité , il y a deux options :

- ►soit prouver injectivité et surjectivité
- ►soit exhiber la bijection réciproque si on la voit.

Ici, la seconde option est de loin la plus facile, puisque pour tout $g \in G$,

$$(\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a)(g) = a^{-1}\tau_a(g)a = a^{-1}aga^{-1}a = g = \mathrm{id}_G(g).$$

Et de même, $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \mathrm{id}$, donc $\tau_{a^{-1}}$ est la bijection réciproque de τ_a.

Prouvons tout de même injectivité et surjectivité.
Pour l'injectivité, soit $g \in \operatorname{Ker} \tau_a$.
Alors $aga^{-1} = e \Leftrightarrow ag = ea \Leftrightarrow g = e$.
Donc τ_a est injectif.

Méthode
Pour prouver l'injectivité d'un morphisme, il suffit de prouver que son noyau est réduit à l'élément neutre.
Et puisqu'on a toujours $\{e_G\} \subset \operatorname{Ker} \varphi$, il suffit de prouver l'inclusion réciproque, c'est à dire

$$x \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow x = e_G.$$

Soit à présent $y \in G$. Alors $y = a(a^{-1}ya)a^{-1} = \tau_a\left(a^{-1}ya\right)$, et donc τ_a est surjectif.
On en déduit donc que τ_a est bijectif.

Remarque
Notons que nous venons de trouver l'unique antécédent de y, et donc la bijection réciproque de τ_a.

2. Nous venons de prouver que les τ_a sont des éléments de $\mathfrak{S}(G)$, car bijectifs.
On a $\tau_e = \mathrm{id}_G \in \mathscr{C}(G)$.
Et pour $(a, b) \in G^2$ et $g \in G$, on a

$$\left(\tau_a \circ \tau_b^{-1}\right)(g) = \left(\tau_a \circ \tau_{b^{-1}}\right)(g) = \tau_a\left(b^{-1}gb\right) = ab^{-1}g\left(ab^{-1}\right)^{-1}(g).$$

Et donc $\tau_a \circ \tau_{b^{-1}} = \tau_{ab^{-1}} \in \mathscr{C}(G)$.
Ainsi, $\mathscr{C}(G)$ est bien un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.

3. Le calcul réalisé à l'instant prouve que pour $(a, b) \in G^2$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$, soit encore que $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, et donc φ est un morphisme de groupes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.14

1. Soit H_1 un sous-groupe de G_1, et soient $y_1, y_2 \in f(H_1)$. Alors il existe deux éléments $x_1, x_2 \in H_1$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Et alors $y_1y_2^{-1} = f(x_1)f(x_2)^{-1} = f(x_1x_2^{-1})$. Puisque H_1 est un sous-groupe de G_1, $x_1x_2^{-1} \in H_1$ et donc $y_1y_2^{-1} \in f(H_1)$, de sorte que $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2.

2. Soit H_2 un sous-groupe de G_2, et soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(H_2)$.
Alors $f(x_1) \in H_2$ et $f(x_2) \in H_2$.
Donc $f(x_1x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2)^{-1} \in H_2$, de sorte que $x_1x_2^{-1} \in f^{-1}(H_2)$.
Donc $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_2.

En particulier, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\{e_{G_2}\}\right)$, et $\{e_{G_2}\}$ est un sous-groupe de G_2, donc $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.15

Soit $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ un morphisme de groupes. Alors $\varphi(0) = 0$.
Notons $k = \varphi(1)$. Alors $\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = k + k = 2k$.
Puis $\varphi(3) = \varphi(2+1) = \varphi(2) + \varphi(1) = 2k + k = 3k$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) = nk$.
Et pour $n \in \mathbf{Z}$ négatif, $\varphi(n) = -\varphi(-n)$, où $-n \in \mathbf{N}$ et donc $\varphi(n) = -(-nk) = nk$.
Inversement, il est facile de constater que pour $k \in \mathbf{Z}$ fixé, $\varphi : n \mapsto nk$ est bien un morphisme de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même car

$$\forall (p,q) \in \mathbf{Z}^2, \varphi(p+q) = (p+q)k = pk + qk = \varphi(p) + \varphi(q).$$

Donc les morphismes de $(\mathbf{Z}, +)$ dans lui-même sont les $n \mapsto kn$, $k \in \mathbf{Z}$.

Soit à présent $\varphi : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ un morphisme. Soit alors $r \in \mathbf{Q}$ non nul, et soit $n \in \mathbf{N}$.
Alors $\varphi(r) = \varphi\left(\frac{r}{n} + \frac{r}{n} + \cdots + \frac{r}{n}\right) = \varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{r}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{r}{n}\right)$.
Or, $\varphi(r)$, $\varphi\left(\frac{r}{n}\right)$ et n sont tous des entiers, donc n divise $\varphi(r)$, et ce quel que soit $n \in \mathbf{N}$.
Le seul entier étant divisible par tous les autres est 0, et donc $\varphi(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$: φ est le morphisme nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.16

Soit $a \in A$. Puisque A est stable par $*$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a^n \in A$.
Mais A étant fini, ces puissances ne sauraient être toutes distinctes : il existe deux entiers distincts n et p tels que $a^n = a^p$.
Quitte à échanger n et p, supposons que $p > n$. Alors $a^n = a^p \Leftrightarrow a^{p-n} = e_G$.
Donc déjà, $e_G \in A$ car $p - n \in \mathbf{N}^*$.
De plus, $a * a^{p-n-1} = e_G$, de sorte que $a^{p-n-1} = a^{-1}$.
Or, $p - n - 1 \geqslant 0$, donc $a^{-1} \in A$.
Ainsi, nous avons prouvé que A contient l'élément neutre, et est stable par passage à l'inverse : si $a \in A$, alors $a^{-1} \in A$.
Puisque A est de plus stable par $*$, il s'agit d'un sous-groupe de G.

> ⚠ Attention !
> On ne sait pas encore si $a^0 = e_G$ est dans A.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.17

Il est clair que $1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ car $1 = 1 + 0\sqrt{2}$. Soient $(x,y) \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]^2$. Alors il existe quatre entiers a, b, c, d tels que $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$.
Et donc $x - y = \underbrace{a-c}_{\in \mathbf{Z}} + \underbrace{(b-d)}_{\in \mathbf{Z}}\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
De même, $xy = \underbrace{ac + 2bd}_{\in \mathbf{Z}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbf{Z}}\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
Donc $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$, et en particulier est un anneau.

> Méthode
> Pour montrer qu'un ensemble est muni d'une structure d'anneau, toujours commencer par se demander s'il ne pourrait pas 'agir d'un sous-anneau d'un ensemble déjà connu.
> En effet, il y a bien moins de propriétés à prouver pour un sous-anneau que pour un anneau.

Les mêmes types de calculs, en remplaçant $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Q}$ prouvent que $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est un anneau.
De plus, soit x un élément non nul de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
Alors il existe deux rationnels a et b tels que $x = a + b\sqrt{2}$.
Et alors l'inverse[5] de x

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

Et donc tout élément non nul est inversible : $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est bien un corps.

[5] Dans le corps $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.18

Rappelons que $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^k}, (n,k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\right\}$.

Nous allons prouver qu'il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.
On a $1 = \frac{1}{10^0} \in \mathbb{D}$.
Soient x, y deux nombre décimaux. Alors il existe des $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ et $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^2$ tels que $x = \frac{k_1}{10^{n_1}}$ et $y = \frac{k_2}{10^{n_2}}$. Et alors

$$x - y = \frac{k_1}{10^{n_1}} - \frac{k_2}{10^{n_2}} = \frac{10^{n_2}k_1 - 10^{n_1}k_2}{10^{n_1+n_2}} \in \mathbb{D}.$$

Et de même, $xy = \dfrac{k_1k_2}{10^{n_1+n_2}} \in \mathbb{D}$.
Donc il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.
Il ne s'agit pas d'un corps, car bien que $3 \in \mathbb{D}$, $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal, puisque les diviseurs premiers du dénominateur d'un nombre décimal ne peuvent qu'être 2 et/ou 5.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.19

Ici, pas question de prouver qu'il s'agit d'un sous-anneau de quelque chose déjà connu, il va donc tout falloir reprouver.
Avec tout de même une bonne nouvelle : il a déjà été prouvé en cours que $(A \times B, \oplus)$ est un groupe[6], abélien car A et B le sont.
Il reste donc à prouver que $\otimes$ est associative, qu'elle possède un élément neutre (qui est $(1_A, 1_B)$), et qu'elle est distributive par rapport à $\oplus$.
Prouvons juste ce dernier point, en traitant par exemple le cas de la distributivité à gauche : soient $(x_A, x_B), (y_A, y_B)$ et (z_A, z_B) trois éléments de $A \times B$. Alors

[6] C'est celui que nous avons appelé produit direct de A et B.

$$\begin{aligned}
(x_A, x_B) \otimes ((y_A, y_B) \otimes (z_A, z_B)) &= (x_A, x_B) \otimes ((y_A +_A z_A, y_B +_B z_B))\\
&= (x_A \times_A (y_A +_A z_A), x_B \times_B (y_B +_B z_B))\\
&= (x_A \times_A y_A +_A x_A \times_A z_A, x_B \times_B y_B +_B x_B \times_B z_B)\\
&= (x_A \times_A y_A, x_B \times_B y_B) \oplus (x_A \times_A z_A, x_B \times_B z_B)\\
&= ((x_A, y_A) \otimes (x_B, y_B)) \oplus ((x_A, y_A) \otimes (z_A, z_B)).
\end{aligned}$$

$\times_A$ est ditributive par rapport à $+_A$, et idem dans B.

On prouverait de même la distributivité à droite.
Bref, $A \times B$ est un anneau, et il est facile de constater qu'il est commutatif si A et B le sont, et même qu'il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante.
En revanche, même si A et B sont intègres, dès que A et B sont non nuls, on a $A \times B$ qui n'est pas intègre.
En effet, pour $a \in A \setminus \{0_1\}$ et $b \in B \setminus \{0_B\}$, $(a, 0_B) \otimes (0_A, b) = (0_A, 0_B)$, sans qu'aucun des deux facteurs ne soit nul.

Enfin, si A est nul, alors tout élément de $A \times B$ est de la forme $(0_A, b)$, avec $b \in B$.
Donc si B est intègre, alors $(0_A, b_1) \otimes (0_A, b_2) = (0_A, 0_B) \Leftrightarrow b_1b_2 = 0_B \Leftrightarrow b_1 = 0_B$ **ou** $b_2 = 0_B$.
Donc $A \times B$ est intègre.
En revanche, si B n'est pas intègre, et que a, b sont deux diviseurs de zéro tels que $ab = 0_B$, alors $(0_A, a) \otimes (0_A, b) = (0_A, 0_B)$, et donc $(0_A, a)$ est un diviseur de zéro dans $A \times B$, qui n'est donc pas intègre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.20

1. Non, car la suite constante égale à 1 n'est pas dedans.
2. Non, car l'opposée d'une suite strictement croissante n'est plus croissante.
3. Oui.
4. Non : la suite nulle n'est pas divergente.
5. Oui : la suite constante égale à 1 est bornée, et la différence et le produit de suites bornées sont bornées.
6. Non : l'opposé d'une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $-\infty$.
7. Oui : la suite constante égale à 1 est stationnaire[7].
   Si (u_n) et (v_n) sont stationnaires, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ et $n_1 \in \mathbf{N}$ tels que $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$ et $n \geqslant n_1 \Rightarrow v_n = v_{n_1}$.
   Mais alors pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $u_n - v_n = u_{n_0} - v_{n_1}$, et donc $(u_n - v_n)$ est stationnaire.
   De même, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $u_nv_n = u_{n_0}v_{n_1}$.
   Donc on a bien un sous-anneau de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
8. Non, la suite constante égale à 1 n'est pas dedans.

[7] Puisque constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.21

1. Supposons A intègre, et soit $a \in A$ possédant une racine carrée b : $a = b^2$.
   Si c est une racine carrée de a, on a donc $c^2 = b^2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = 0_A$.
   Soit encore[8], $(c - b)(c + b) = 0_A$.

[8] Et là, l'hypothèse que A est commutatif est importante.

Puisque A est intègre, on a donc $c-b=0_A$ ou $c+b=0_A$, et donc $c=b$ ou $c=-b$.
Donc a possède au plus deux racines carrées.

Bien entendu, vous connaissez bien l'anneau intègre $\mathbf{R}$: nous ne venons pas de dire que tout élément de A possède exactement deux racines carrées, mais bien au plus deux.

2. Pour $a \in \mathbf{R}$, la fonction définie par $f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant a \\ -1 & \text{si } x > a \end{cases}$ est telle que $f_a \times f_a = \tilde{1}$, et donc est une racine carrée de $\tilde{1}$.
Et donc, cette dernière possède une infinité de racines carrées.

Solution de l'exercice 14.22

Nous allons prouver que $\mathscr{F}(E,A)$ est intègre si et seulement si E est un singleton et que A est intègre.
Si $E=\{x\}$ est un singleton et que A est intègre, soient alors $f,g \in \mathscr{F}(E,A)$ telles que $f\times g = \widetilde{0}$, la fonction nulle.
Alors $f(x)g(x)=0_A$, et donc par intégrité de A, $f(x)=0_A$ ou $g(x)=0_A$.
Mais alors f est la fonction nulle[9], ou g est la fonction nulle. Donc $\mathscr{F}(E,A)$ est intègre.

[9] Qui est le neutre additif de $\mathscr{F}(E, A)$.

En revanche, si $\mathrm{Card}(E)\geqslant 2$, alors soient x,y deux éléments distincts de $\mathscr{F}(E,A)$. Alors les fonctions $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1_A & \text{si } t=x \\ 0_A & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1_A & \text{si } t=y \\ 0_A & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$ sont non nulles mais vérifient $f\times g=\widetilde{0}$.
Donc $\mathscr{F}(E,A)$ n'est pas intègre.

Et si A n'est pas intègre, soient alors x,y deux diviseurs de zéro tels que $xy=0_A$. Alors les fonctions constantes égales respectivement à x et y ne sont pas nulles, mais leur produit l'est, donc sont des diviseurs de zéro.

Solution de l'exercice 14.23

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif intègre de cardinal n.
Pour prouver que A est un corps, il suffit de prouver que tout élément non nul de A admet un inverse.
Soit donc $x\neq 0_A$.
Alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & xy \end{array}\right.$ est injective.
En effet, si $f(y_1)=f(y_2)$, alors

$$xy_1 = xy_2 \Leftrightarrow xy_1 - xy_2 = 0 \Leftrightarrow x(y_1-y_2)=0_A.$$

Mais A étant intègre, et x étant non nul, il vient nécessairement $y_1-y_2=0_A \Leftrightarrow y_1=y_2$.

Or, A étant de cardinal fini, f est injective si et seulement si elle est bijective[10].
En particulier, 1_A admet un antécédent par f : il existe $y\in A$ tel que $xy=1_A$. Puisque A est commutatif, on a alors $yx=1_A$, et donc y est l'inverse de x.
Par conséquent, tout élément non nul de A est inversible : A est un corps.

[10] Ce résultat plutôt intuitif sera prouvé bien plus tard.

Solution de l'exercice 14.24

1. Soit $x\in A$. Alors $0_A = x0_A \in xA$, qui est donc non vide.
Soient xu, xv deux éléments de xA. Alors $xu-xv=x(u-v)$, qui est un élément de xA.
Donc déjà xA est un sous-groupe de $(A,+)$.
Si $u\in xA$, alors il existe $v\in A$ tel que $u=xv$. Et alors pour $y\in A$, $yu=yxv=x(yv)\in xA$.
Donc xA est un idéal de A.

2.a. Il s'agit de remarquer que si I et J sont deux idéaux, alors $I+J=\{x+y,\ (x,y)\in I\times J\}$ est encore un idéal de A.
En effet, si $x+y$ et $x'+y'$ sont deux éléments de $I+J$, avec $(x,x')\in I^2$ et $(y,y')\in J^2$, alors

$$(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y')\in I+J$$

car I et J sont des sous-groupes.
Et pour $a\in A$, et $x+y\in I+J$, on a $ax\in I$ car I est un idéal et de même $ay\in J$, donc

$a(x+y) = ax + ay \in I + J$.
Donc $I + J$ est un idéal de A.

Soit donc I un idéal maximal, et soit $x \in A \setminus I$. Alors $I + xA$ est un idéal de A, qui contient I, et qui contient même strictement I, puisqu'il contient x, qui n'est pas dans I.
Par maximalité de I, ceci signifie donc que $I + xA = A$.

Et inversement, supposons que pour tout $x \in A \setminus I$, $I + xA = A$.
Soit alors J un idéal de A, différent de A, et contenant I. Supposons que $J \neq I$. Alors il existe $x \in J \setminus I$, pour lequel $I + xA = A$.
Mais $I + xA \subset J$, donc $A \subset J$, et donc $J = A$.
Ceci est absurde, et donc c'est que $J = I$, ce qui prouve que I est maximal.

2.b. Soit I un idéal maximal, et soient $(a, b) \in A^2$ tels que $ab \in I$. Supposons que $a \notin I$.
Alors $I + aA = A$ par la question précédente.
Et donc en particulier, $1 \in A$, et donc il existe $x \in I$ et $y \in A$ tels que $x + ay = 1$. Après multiplication par b, on a donc $bx + bay = b$.
Mais $x \in I$, donc $bx \in I$, par définition d'un idéal. Et $ab \in I$, donc $yab \in I$.
Et, donc par stabilité de I pour la somme[11], $b = bx + aby \in I$.
On prouve de la même manière que si $ab \in I$ et $b \notin I$, alors $a \in I$.
Et donc I est bien un idéal premier de A.

[11] Rappelons que c'est un sous-groupe de $(A, +)$.

3. Supposons que A soit un corps, et soit I un idéal de A.
Si $I = \{0\}$, alors I est premier car A est intègre : $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
En revanche, si $I \neq \{0\}$, alors il existe $x \in I$ non nul.
Et donc $1 = xx^{-1} \in I$. Et donc pour tout $a \in A$, $a \times 1 = a \in I$. Et ainsi, $I = A$.
Or, il est évident que A est premier.

Remarque
Nous venons au passage de prouver qu'un idéal qui contient 1 est nécessairement A tout entier.

Inversement, supposons que tout idéal de A soit premier.
Puisque $\{0\}$ est un idéal, il est premier, et donc A est intègre.
Soit $a \in A$. Alors l'idéal a^2A est alors soit égal à A tout entier, soit premier.
Dans le premier cas, cela signifie qu'il existe $b \in A$ tel que $a^2b = 1$, et donc a est inversible.
Dans le second cas, puisque $a^2 \in I$, $a \in I$ (ou $a \in I$). Et donc il existe $b \in I$ tel que $a^2b = a \Leftrightarrow a\,(ab-1) = 0$.
Puisque A est intègre, si $a \neq 0$, alors $ab = 1$, et donc a est inversible.
Par conséquent, tout élément non nul de A est inversible : A est un corps.

15 Arithmétique des entiers

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés de $\mathbf{N}$ et de $\mathbf{Z}$, sans jamais nous préoccuper de l'existence d'ensembles plus grands (que ce soit $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).
L'une des «faiblesses» de $\mathbf{Z}$ est l'absence d'une division toujours bien définie : dans $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ tout nombre non nul divise n'importe quel nombre[1], ce qui n'est absolument pas vrai dans $\mathbf{Z}$.
Par exemple, on ne peut pas parler, en restant dans $\mathbf{Z}$ du quotient de 3 par 2.
Cette faiblesse fait toute la richesse[2] de $\mathbf{Z}$ car elle nous oblige à introduire les notions de diviseurs, multiples, nombres premiers, etc, que nous allons étudier dans ce chapitre.

[1] $a = b \times \frac{a}{b}$.

[2] Et la beauté !

15.1 Relation de divisibilité

15.1.1 Diviseurs, multiples

Définition 15.1 – Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. On dit que a **divise** b et on note $a \mid b$ s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $b = ak$.
On dit alors que a **est un diviseur de** b, et que b **est un multiple de** a.

Autrement dit
Les multiples de a sont les éléments de
$$a\mathbf{Z} = \{ak,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Notons que -1 et 1 divisent tous les entiers, puisqu'on a toujours $a = 1 \times a = (-1) \times (-a)$.
En revanche, les seuls diviseurs de 1 ou de -1 sont ± 1.
Tous les entiers sont diviseurs de 0, puisque pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $0 = 0 \times k$.
En revanche, 0 est le seul multiple de 0.

Proposition 15.2 : *Soit $n \in \mathbf{Z}$, non nul. Alors l'ensemble $\mathcal{D}(n) = \{a \in \mathbf{Z} \mid a \text{ divise } n\}$ des diviseurs de n est un ensemble fini.*

Démonstration. Si $a \mid n$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = ak$, et nécessairement, $k \neq 0$, donc $|k| \geqslant 1$. Et donc $|a| \leqslant |n|$, de sorte que $a \in [\![-n, n]\!]$.
D onc $\mathcal{D}(n) \subset [\![-n, n]\!]$, qui est un ensemble fini, donc $\mathcal{D}(n)$ est lui-même fini. □

Exemple 15.3

$\mathcal{D}(7) = \mathcal{D}(-7) = \{-7, -1, 1, 7\}$ et $\mathcal{D}(10) = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$.

Nous avons mentionné précédemment que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$, malheureusement cela n'est plus vrai sur $\mathbf{Z}$, car on perd l'antisymétrie.
Par exemple, on a $-2 \mid 2$, $2 \mid -2$, et pourtant $2 \neq -2$.
En revanche, la réflexivité et la transitivité restent vraies sur $\mathbf{Z}$, et on dispose du résultat suivant : si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $|a| = |b|$ (ou encore $a = \pm b$).

Proposition 15.4 : *Soient $a, b, n \in \mathbf{Z}$.*

1. *Si $n \mid a$ et $n \mid b$, alors $n \mid a + b$*
2. *Si $n \mid a$, alors $n \mid ab$.*

Démonstration. 1. Si $n \mid a$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a = kn$ et de même, il existe $k' \in \mathbf{Z}$ tel que $b = k'n$.
Et donc $a + b = kn + k'n = (k + k')n$, donc $n \mid a + b$.

2. Si $a = kn$, alors $ab = knb$, donc $n \mid ab$.

□

⚠ La réciproque au second point est fausse : n peut diviser un produit ab sans diviser ni a ni b. Par exemple, 4 divise $12 = 2 \times 6$, mais ne divise ni 2 ni 6.

Corollaire 15.5 – *Si $n \mid a$ et $n \mid b$, alors pour tous $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$, $n \mid au + bv$.*

15.1.2 Calcul modulaire

Rappelons que pour $n \in \mathbf{N}^*$, on dispose d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$ qui est la relation de congruence modulo n :

$$a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ a - b = kn \Leftrightarrow n \mid (a - b).$$

Notons qu'en particulier, n divise a si et seulement si $a \equiv 0 \ [n]$.

Proposition 15.6 (Calculs en congruence) : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient a, b, c, d des entiers.*

1. *Si $a \equiv b \ [n]$ et $c \equiv d \ [n]$, alors $a + c \equiv b + d \ [n]$.*
2. *Si $a \equiv b \ [n]$ et $c \equiv d \ [n]$, alors $ac \equiv bd \ [n]$.*
   En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a^k \equiv b^k \ [n]$.
3. *Pour $m \in \mathbf{N}^*$, on a $a \equiv b \ [n] \Leftrightarrow am \equiv bm \ [mn]$.*

Démonstration. 1. Il existe $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $a - b = nk_1$ et $c - d = nk_2$. Et donc en sommant ces relations, $(a + c) - (b + d) = n(k_1 + k_2)$ de sorte que $a + c \equiv b + d \ [n]$.

2. Avec les mêmes notations :

$$ac = (b+nk_1)(d+nk_2) = bd+n(k_1d+k_2b+nk_1k_2) \Leftrightarrow ac-bd = n\underbrace{(k_1d + k_2b + nk_1k_2)}_{\in \mathbf{Z}}.$$

Donc $ac \equiv bd \ [n]$.
La relation sur les puissances en découle directement, par récurrence sur k.

3. On a

$$\begin{aligned} a \equiv b \quad [n] &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ a - b = kn \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ m(a - b) = mnk \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z},\ am - bm = (mn)k \\ &\Leftrightarrow am \equiv bm \quad [mn]. \end{aligned}$$

□

⚠ La relation de congruence modulo α, avec $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ (on pensera notamment à $\alpha = 2\pi$...) est encore compatible avec l'addition, mais pas avec la multiplication[3].

[3] Je vous laisse le soin de trouver ce qui ne va pas marcher dans la preuve ci-dessus...

Exemples 15.7

▸ $36^{2022} - 13^{2022}$ est divisible par 7. En effet, on a

$$36^{2022} - 13^{2022} \equiv 1^{2022} - (-1)^{2022} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \quad [7].$$

▸ $117^{119} - 8$ est divisible par 17.
On a $117 = 7 \times 17 - 2 \equiv -2 \ [17]$. Et donc $117^{119} \equiv (-2)^{119} \ [17]$.
Or, par élévations au carré successives, on a

$$(-2)^2 \equiv 4 \quad [17],\ (-2)^4 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv -1 \quad [17],\ (-2)^8 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \quad [17].$$

Mais $119 = 8 \times 14 + 7$ et donc $(-2)^{119} = (-2)^{8\times 14+7} = \left((-2)^8\right)^{14}(-2)^7$, de sorte que

$$117^{119} \equiv (-2)^{119} \equiv \left((-2)^8\right)^{14}(-2)^7 \equiv 1 \times (-2)^7 \quad [117].$$

Et alors $(-2)^7 \equiv (-2)^4(-2)^2(-2) \equiv 4(-1)(-2) \equiv 8\ [17]$, d'où le résultat annoncé.

15.1.3 Division euclidienne

La division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ n'est rien d'autre que la division telle que vous l'avez apprise à l'école primaire : on reste dans $\mathbf{Z}$, on ne fait pas apparaître un nombre à virgule, mais un quotient et un reste.
Par exemple, le quotient de la division de 131 par 7 vaut 18, et le reste vaut 5, ce qui signifie que $131 = 18 \times 7 + 5$.

Proposition 15.8 : *Soient $a \in \mathbf{Z}$ et soit $b \in \mathbf{N}^*$.*
Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ tel que

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b.$$

*L'écriture $a = bq + r$ est appelée **division euclidienne de** a **par** b, q est appelé quotient de la division euclidienne de a par b, et r est appelé le reste.*

Démonstration. Commençons par l'unicité, et supposons qu'on dispose de deux écritures $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, avec $0 \leqslant r_1 < b$ et $0 \leqslant r_2 < b$.
Alors $0 = a - a = bq_1 + r_1 - (bq_2 + r_2) = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \Leftrightarrow r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$.
Donc b divise $r_2 - r_1$, alors que $-b < r_2 - r_1 < b$. Ceci n'est possible que si $r_2 - r_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$.
Et alors $bq_1 = bq_2 \Leftrightarrow q_1 = q_2$.

Remarque
À ce stade, nous avons prouvé que la division euclidienne, **si elle existe**, est unique. Reste à prouver qu'elle existe !

Passons à l'existence, et notons $a + b\mathbf{Z} = \{a + bk,\ k \in \mathbf{Z}\}$ l'ensemble des entiers congrus à a modulo b.
Alors $(a + b\mathbf{Z}) \cap \mathbf{N}$ est non vide, car il contient $a = a + 0b$ si $a \geqslant 0$ et $a - ab$ si $a < 0$.
Comme toute partie non vide de $\mathbf{N}$, elle possède donc un plus petit élément, notons-le r.
Par définition, il existe donc $q_1 \in \mathbf{Z}$ tel que $a + bq_1 = r$.
On a alors $r < b$, car si on avait $r \geqslant b$, alors $r - b$ serait toujours un entier positif, et $r - b = a + b(q_1 - 1) \in a + b\mathbf{Z}$, contredisant la minimalité de r.
En posant $q = -q_1$, on a alors bien $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. □

Remarques.
- La méthode qu'on vous a expliquée au primaire[4] pour trouver q et r reste valable, et on ne peut pas faire beaucoup mieux !
- L'idée de base étant[5] globalement de partir de a et de retrancher b autant de fois que possible à a, en restant dans $\mathbf{N}$. Le nombre maximal de fois que l'on peut retrancher b à a est alors le quotient q.
- Il n'est pas très dur de constater que $q = \left\lfloor \dfrac{a}{n} \right\rfloor$ (et alors $r = a - bq$).
- Attention aux nombres négatifs ! Nous avons dit précédemment que $131 = 18 \times 7 + 5$. On n'en déduit pas que $-131 = -18 \times 7 - 5$ est la division euclidienne de -131 par 7, car -5 est négatif....
  La division cherchée est $-131 = -19 \times 7 + 2$.
- Le résultat est encore valable si b est un entier strictement négatif si on impose au reste de vérifier $0 \leqslant r < |b|$.

[4] «Poser» la division.

[5] Au moins si a et b sont positifs.

Exercice
Le prouver.

Proposition 15.9 : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$.*
1. *Soit $a \in \mathbf{Z}$ et soit $a = nq + r$ la division euclidienne de a par n, avec $0 \leqslant r < n$. Alors a est congru à r modulo n.*
2. *Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Alors a et b sont congrus modulo n si et seulement si ils ont le même reste dans la division euclidienne par n.*

Démonstration. 1. C'est immédiat en utilisant la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication : $a \equiv nq + r \equiv 0 + r \equiv r \ [n]$.

2. Notons $a = nq_1 + r_1$ et $b = nq_2 + r_2$ les divisions respectives de a et b par n.
Supposons dans un premier temps a et b congrus modulo n : $a \equiv b \ [n]$.
Et donc par le point 1), $r_1 \equiv r_2 \ [n]$. Il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que $r_1 - r_2 = kn$.
Or, $-n < r_1 - r_2 < n$, de sorte que $k = 0$, et donc $r_1 - r_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$.

Inversement, si $r_1 = r_2$, alors $a \equiv r_1 \equiv r_2 \equiv b \ [n]$.

□

Exemple 15.10

Déterminons le reste de la division euclidienne de 67^{2020} par 7.
Cela revient à trouver $r \in [\![0, 6]\!]$ tel que $67^{2020} \equiv r \ [7]$.
Or, on a $67 = 63 + 4 \equiv 4 \ [7]$.
Puis $4^2 \equiv 16 \equiv 2 \ [7]$ et donc $4^3 \equiv 8 \equiv 1 \ [7]$.
Par conséquent, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $4^{3k} \equiv 1 \ [7]$.
Il nous faut alors le reste de la division euclidienne par 3. Mais nous n'avons pas besoin de cette division euclidienne : 2019 est divisible[6] par 3, donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $2019 = 3k$ donc $2020 = 3k + 1$. Le reste cherché est 3.
On a donc $67^{2020} \equiv 4^{2020} \equiv 4^{3k} \times 4 \ [7] \equiv 4 \ [7]$.
Et donc le reste de la division euclidienne de 67^{2020} par 7 vaut 4.

[6] Vois ci-dessous.

Profitons-en pour reprouver le critère usuel de divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 3.

Soit donc $n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$ un entier.

Alors $10 \equiv 1 \ [3]$ de sorte que pour tout k, $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \ [3]$.

Et donc $n \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k \ [3]$.

Par conséquent, $n \equiv 0 \ [3]$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{p} a_k \ [3]$.

Corollaire 15.11 – *Soit $a \in \mathbf{Z}$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *a est divisible par n ;*
2. *le reste de la division euclidienne de a par n est nul.*
3. *$a \equiv 0 \ [n]$;*

Démonstration. 1) ⇒ 2) : si a est divisible par n, il existe $q \in \mathbf{Z}$ tel que $a = qn = qn + 0$.
Par unicité de la division euclidienne, le quotient de la division euclidienne de a par n vaut q, et surtout le reste vaut 0.

Unicité
Nous utilisons ici vraiment l'unicité de la division euclidienne, et pas seulement le fait qu'une telle écriture $a = qn + r$ existe, mais vraiment le fait qu'elle est unique : si on a une telle écriture sous les yeux, alors c'est nécessairement la division euclidienne.

2) ⇒ 3) Immédiat d'après le point 1) de la proposition précédente.

3) ⇒ 1) Si $a \equiv 0 \ [n]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a - 0 = kn \Leftrightarrow a = kn$, donc a est divisible par n. □

Rappelons que pour $k \in \mathbf{Z}$, la classe d'équivalence de k pour la relation de congruence modulo n est $\overline{k} = \{qn + k, \ q \in \mathbf{Z}\}$.
La division euclidienne permet de dénombrer les classes d'équivalence pour cette relation :

Proposition 15.12 : *Il y a exactement n classes d'équivalence pour la congruence modulo n, qui sont $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$.*

Démonstration. Par la proposition 15.9 deux entiers sont dans la même classe modulo n si et seulement si ils ont même reste dans la division euclidienne par n.
Or, il y a exactement n restes possible : $0, 1, 2, \dots, n-1$.
Donc il y a n classes d'équivalence. □

Enfin, ajoutons un corollaire de la division euclidienne qui sert souvent :

Proposition 15.13 : *Pour $n, k \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, k divise $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$.*
*Autrement dit, le produit de k entiers **consécutifs** est toujours divisible par k.*

Démonstration. L'idée est tout simplement que l'un au moins des k entiers consécutifs $n, n+1, \dots, n+k-1$ est divisible par k.

Notons $n = kq + r$ la division euclidienne de n par k, avec $0 \leqslant r < k$.
Si $r = 0$ alors $n \equiv 0 \ [k]$ et donc $n(n+1)\cdots(n+k-1) \equiv 0 \ [k]$.
Et si $r \neq 0$, alors $n+k-r = k(q+1) \equiv 0 \ [k]$, et donc $n(n+1)\cdots(n+k-r)\cdots(n+k-1) \equiv 0 \ [k]$. □

Exemples 15.14

▸ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n(n+1)$ est pair.
▸ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ est divisible par 3.
▸ On peut en réalité faire beaucoup mieux : un produit de k entiers consécutifs est toujours divisible par $k!$.
En effet, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} = k!\binom{n+k-1}{n-1}.$$

Puisque nous avons prouvé que les coefficients binomiaux sont toujours entiers[7], alors $k!$ divise $n(n+1)\cdots(n+k-1)$.

[7] Ce qui n'est pas complètement trivial, et ne découle pas directement de divisibilités, mais plutôt de l'identité de Pascal.

15.1.4 Nombres premiers

Définition 15.15 – Un **nombre premier** est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs.
Un entier qui n'est pas premier est dit **composé**.

Notons qu'un nombre premier ne peut donc pas être nul[8], ne peut pas non plus être égal à 1 (qui ne possède que lui-même comme diviseur positif).
Et puisqu'un entier $n \geqslant 2$ est toujours divisible à la fois par 1 et par lui-même, les diviseurs positifs d'un nombre premier p sont nécessairement 1 et p.
On pourrait d'ailleurs donner comme définition d'un nombre premier : un nombre supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Autrement dit, $p \geqslant 2$ est premier si et seulement si $\forall (a, b) \in \mathbf{N}^2$, $p = ab \Rightarrow (a = 1$ **ou** $b = 1)$.

[8] Car 0 a une infinité de diviseurs.

Exemples 15.16

Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.
En revanche, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$, $9 = 3 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $14 = 7 \times 2$ et $15 = 3 \times 5$ ne sont pas premiers.

Notons que 2 est le seul nombre premier pair, puisqu'un nombre pair strictement supérieur à 2 possède 2 comme diviseur, et ne saurait donc être premier.
L'importance des nombres premiers réside dans le résultat suivant, que nous raffinerons très vite, et qui dit que les nombres premiers sont en quelque sorte les «briques» à partir desquelles on peut construire tous les entiers.

Proposition 15.17 : *Tout entier naturel non nul est produit de nombres premiers.*

Démonstration. Traitons tout de suite le cas peu intéressant de 1, qui est le produit de 0 nombres premiers.
Prouvons par récurrence forte sur $n \geqslant 2$ que n est produit de premiers.
L'initialisation est aisée : car 2 est premier et donc : $2 = 2$ (produit de 1 terme).
Supposons que tout entier de $[\![2, n]\!]$ soit produit de nombres premiers.
Soit p_1 le plus petit diviseur de $n+1$ supérieur strict à 1, c'est-à-dire $p_1 = \min\left(\mathbf{N} \cap \mathscr{D}(n+1) \setminus \{1\}\right)$.

Alors p_1 est premier. En effet, supposons par l'absurde que $p_1 = ab$, avec $a > 1$ et $b > 1$.
Alors $b \geqslant 2$ et donc $a = \dfrac{p_1}{b} < p_1$. Or, b étant un diviseur de p_1, c'est un diviseur de $n+1$, contredisant la minimalité de p_1.

Il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que $n + 1 = p_1 k$. Puisque $p_1 > 1$, $k < n + 1$ et donc $k \leqslant n$.
Par hypothèse de récurrence, il existe donc des nombres premiers $p_2, p_3, \dots, p_r$ tels que $k = p_2 p_3 \cdots p_r$.
Et donc $n + 1 = p_1 p_2 \cdots p_r$ est produit de nombres premiers.
Par le principe de récurrence forte, tout entier supérieur ou égal à 2 est produit de nombres premiers. □

Rappel
Par **convention**, un produit de 0 termes vaut 1...

Remarque
Un tel diviseur existe puisque $\mathbf{N} \cap \mathscr{D}(n+1) \setminus \{1\}$ n'est pas vide : il contient $n+1$.

Théorème 15.18 : *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre fini N de nombres premiers, et notons $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.
Soit alors $n = \prod_{k=1}^{N} p_k + 1$. Alors n possède au moins un diviseur premier, donc il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $p_i \mid n$.
Mais p_i divise $\prod_{k=1}^{N} p_k$, et donc p_i divise $n - \prod_{k=1}^{N} p_k = 1$.
Par conséquent, $p_i = 1$, contredisant la primalité de p_i.
Nous tenons donc notre contradiction : c'est que notre hypothèse de départ est fausse, et donc il existe une infinité de nombres premiers. □

Pour déterminer les nombres premiers inférieurs à un entier n fixé, on utilise le crible d'Ératosthène rencontré en terminale (voir ci-dessous).

Mentionnons que le problème de déterminer si un grand nombre est premier est difficile, au sens où il est coûteux en calculs.
C'est plutôt une bonne nouvelle, puisque c'est sur ce principe que reposent *la plupart* des algorithmes cryptographiques utilisés aujourd'hui.
En revanche, avec un ordinateur quantique, factoriser un entier en produit de premiers devient bien plus facile.
Non parce qu'un ordinateur quantique est «plus puissant[9]», mais parce que pour ce problème précis, on dispose d'un algorithme quantique, appelé algorithme de SHOR, qui est bien plus efficace[10]. Cela signifie que si les ordinateurs quantiques venaient à se démocratiser, alors il faudra rapidement changer nos habitudes en matière de cryptographie.
Relativisons un peu : en 2022, le plus grand entier factorisé par un ordinateur quantique à l'aide de l'algorithme de Shor est .... 21.

[9] Pour certains problèmes, les ordinateurs quantiques ne sont pas meilleurs que les ordinateurs classiques.
[10] Il factorise N en $O((\log N)^3)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le premier nombre premier est 2. On barre tous les multiples de 2, le premier nombre non barré, à savoir 3 est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre à présent les multiples de 3 qui n'ont pas été barrés précédemment. Le premier nombre non encore barré, ici 5, est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre à présent les multiples de 5. Le premier nombre non encore barré, ici 7, est premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre les multiples de 7. On a traité le cas de tous les premiers jusqu'à $10 = \sqrt{100}$. Tous les nombres encore non barrés sont premiers.

Figure 15.1 – Le crible d'Ératosthène pour déterminer les premiers inférieurs à 100.

15.2 Plus grand commun diviseur (PGCD), plus petit commun multiple (PPCM)

15.2.1 PGCD de deux entiers

Définition 15.19 – Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$ deux entiers non simultanément nuls[11]. Le **plus grand commun diviseur** (en abrégé PGCD) de a et b est $a \wedge b = \max(\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b))$.
Par convention, on pose $0 \wedge 0 = 0$.

[11] Donc l'un des deux peut être nul, mais pas les deux.

Remarque

Comme son nom l'indique, c'est bien le plus grand (au sens de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$) nombre qui divise à la fois a et b.

Remarque. Si $a \neq 0$, alors $\mathscr{D}(a)$ est majoré par $|a|$ et donc $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$ est majoré. Puisqu'il s'agit d'une partie non vide (elle contient 1) de $\mathbf{Z}$, elle admet bien un plus grand élément.

Exemples 15.20

- $60 \wedge 18 = 6$ car $\mathscr{D}(60) \cap \mathscr{D}(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
- Si $b = 0$, alors $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(a)$ et donc $a \wedge 0 = |a|$.
- Plus généralement, si $b \mid a$, $\mathscr{D}(b) \subset \mathscr{D}(a)$, et donc $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b)$, de sorte que $a \wedge b = |b|$.
- Le PGCD est insensible aux signes : $a \wedge b = |a| \wedge |b|$.

Proposition 15.21 : *Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et soit $d \in \mathbf{Z}$. S'il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $au + bv = d$, alors $a \wedge b \mid d$.*

Démonstration. Le PGCD de a et b divise a et divise b, donc il divise $au + bv = d$. □

15.2.2 L'algorithme d'Euclide

Lemme 15.22. Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Alors, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $a \wedge b = (a + kb) \wedge b$.

Terminologie
Ce résultat est souvent appelé lemme d'Euclide.

Démonstration. Si $b = 0$, le résultat est trivial, on suppose donc $b \neq 0$.
Si un entier d divise à la fois a et b, alors il divise $a + kb$, et divise toujours b.
Inversement, si d divise à la fois $a + kb$ et b, alors il divise $a = (a + kb) - kb$ et b.
Nous venons donc de prouver que $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(a + kb) \cap \mathscr{D}(b)$.
Et donc en passant au maximum $a \wedge b = (a + kb) \wedge b$. □

Corollaire 15.23 – *Soient $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}^*$, et soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Alors $a \wedge b = r \wedge b$.*

Démonstration. Il s'agit juste de remarque que $r = a - bq$. □

Les résultats qui précèdent nous permettent de mettre en œuvre un algorithme simple, appelé **algorithme d'Euclide** pour le calcul du PGCD de deux entiers, qui ne nécessite pas de déterminer tous les diviseurs de ces deux entiers.
Soient donc a et b deux entiers naturels[12] non nuls.
Notons r_1 le reste de la division euclidienne de a par b. On a donc $0 \leqslant r_1 < b$.
Par le corollaire 15.23, $a \wedge b = r_1 \wedge b$.
Notons alors r_2 le reste de la division euclidienne de b par r_1. On a alors $0 \leqslant r_2 < r_1$.
De proche en proche, on définit alors r_{k+1} comme étant le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k. Ceci n'est possible que tant que $r_k \neq 0$ (car on n'a pas défini la division euclidienne par 0).
On obtient alors une suite strictement décroissante (car $r_{k+1} < r_k$) d'éléments de $[\![0, b-1]\!]$.
Cette suite est donc nécessairement finie[13], puisque $[\![0, b-1]\!]$ est fini.
Autrement dit, il existe un rang n tel que $r_n = 0$.
Et alors, par applications successives du corollaire 15.23,

$$a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_{n-1} \wedge 0 = r_{n-1}.$$

Ainsi, dans le procédé décrit ci-dessus, $a \wedge b$ est le dernier reste **non nul.**

[12] Changer le signe de a et/ou de b ne change pas le PGCD.

[13] Et même de cardinal au plus b.

Exemple 15.24

Calculons $1540 \wedge 882$. On a $1540 = 882 + 658$.
Puis $882 = 658 + 224$, $658 = 2 \times 224 + 210$, $224 = 210 + 14$, $210 = 15 \times 14 + 0$.
Et donc $1540 \wedge 882 = 14$.

En `Python`, l'algorithme d'Euclide s'écrit de la manière suivante :

```
def pgcd(a,b) :
        while a%b  != 0 :
                a,b = b,a%b
        return b
```

Proposition 15.25 : *Soit $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Alors un entier d divise à la fois a et b si et seulement si il divise leur PGCD.*
Autrement dit, $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$.

Démonstration. Une fois de plus, nous ne traitons que le cas de a et b positifs, puisque les signes n'ont ici aucune importance.
Si $(a,b) = (0,0)$, alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathbf{N} = \mathcal{D}(0)$.
Si $a = 0$, alors $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(0 \wedge b)$.
Nous supposons donc a et b non nuls. En reprenant les notations de l'algorithme d'Euclide, on a[14]

[14] Cf la preuve 15.22.

$$\mathcal{D}(a)\cap\mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(r_1)\cap\mathcal{D}(b) = \cdots = \mathcal{D}(r_{n-1})\cap\mathcal{D}(r_n) = \mathcal{D}(r_{n-1})\cap\underbrace{\mathcal{D}(0)}_{=\mathbf{Z}} = \mathcal{D}(r_{n-1}) = \mathcal{D}(a\wedge b).$$

□

Proposition 15.26 : *Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ et soit $d \in \mathbf{N}$.*

Alors $d = a \wedge b$ si et seulement si $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \mid a \textbf{ et } n \mid b) \Rightarrow n \mid d \end{cases}$

Démonstration. Le sens direct découle de la proposition précédente.
Inversement, supposons que $d \in \mathbf{N}$ soit un diviseur commun de a et b tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \mid a \textbf{ et } n \mid b) \Rightarrow n \mid d.$$

Alors $d \mid (a \wedge b)$ et en prenant $n = a \wedge b$, qui divise a et b, on a donc $a \wedge b \mid d$.
Donc $d = a \wedge b$. □

Remarque. Pour a, b positifs, la proposition précédente affirme que $a \wedge b$ est plus petit à la fois que a et b au sens de la relation de divisibilité[15] et qu'il est plus grand (toujours pour la divisibilité) que tout diviseur commun de a et b, c'est-à-dire que tout minorant de $\{a,b\}$.
Autrement dit, $a \wedge b$ est le plus grand des minorants de $\{a,b\}$: c'est donc $\inf\{a,b\}$.

[15] Qui est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$.

Proposition 15.27 : *Soient $(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3$.*

1. *$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (associativité du PGCD)*
2. *$\forall k \in \mathbf{Z}$, $(ak) \wedge (bk) = |k|(a \wedge b)$.*

Démonstration. 1. Il s'agit de noter que

$$\mathcal{D}(a\wedge b)\cap\mathcal{D}(c) = (\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b))\cap\mathcal{D}(c) = \mathcal{D}(a)\cap\mathcal{D}(b)\cap\mathcal{D}(c) = \mathcal{D}(a)\cap(\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(c)) = \mathcal{D}(a)\cap\mathcal{D}(b\wedge c).$$

2. Prouvons le résultat pour $k \in \mathbf{N}$ puisque le PGCD est insensible aux signes.
Puisque $a \wedge b$ divise à la fois a et b, $k(a \wedge b)$ divise à la fois ak et bk et donc divise $(ak) \wedge (bk)$.

Inversement, k divise ak et bk, donc divise leur PGCD : il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $|k|d = (ak) \wedge (bk)$.
Donc kd divise ak, et donc d divise a. De même, d divise b. Donc d divise $a \wedge b$.
Et après multiplication par k, $kd = (ak) \wedge (bk)$ divise $k(a \wedge b)$.
On en déduit[16] que $(ak) \wedge (bk) = k(a \wedge b)$.

[16] C'est l'antisymétrie de la relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$

□

15.2.3 Théorème de Bézout

Théorème 15.28 (Identité de Bézout, ou petit théorème de Bézout) : *Soient $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Alors il existe $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a \wedge b = au + bv$.*

Démonstration. Encore une fois, prouvons le résultat pour $b \geqslant 1$.
Plus précisément, nous allons prouver par récurrence forte sur $b \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(b)$: «pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $\exists (u,v) \in \mathbf{Z}^2$, $a \wedge b = au + bv$».
Initialisation : si $b = 1$, alors pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $a \wedge b = 1 = 0 \times a + 1 \times 1$.
Hérédité : supposons la propriété vraie jusqu'au rang $b - 1$.
Soit $a \in \mathbf{Z}$, et soit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b.
Si $r = 0$, alors $b \mid a$, et donc $a \wedge b = b = a \times 0 + b \times 1$.
Si $r \neq 0$, alors $a \wedge b = b \wedge r$, et $1 \leqslant r < b$.
Donc par hypothèse de récurrence, il existe $(u_1, v_1) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $b \wedge r = bu_1 + rv_1$.
Et donc $a \wedge b = b \wedge r = bu_1 + (a - bq)v_1 = av_1 + b(u_1 - qv_1)$.
Donc $\mathscr{P}(b)$ est vraie, et par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $b \geqslant 1$. □

⚠ L'identité de Bézout nous donne une implication, et pas une équivalence. Si un entier d vérifie $d = au + bv$, alors d n'est pas nécessairement le PGCD de a et de b, mais en revanche est un multiple de celui-ci (car a et b sont tous deux multiples de $a \wedge b$).
Par exemple, $4 \wedge 6 = 2$, et $8 = 14 \times 4 - 6 \times 8$.

Terminologie — Une telle relation est appelée relation de Bézout.

⚠ Il n'y a pas unicité d'un couple (u,v) tel que $au + bv = a \wedge b$.
Par exemple, $18 \wedge 30 = 6 = (-3) \times 18 + 2 \times 30 = 2 \times 18 + (-1) \times 30$.
Plus généralement, si $d = a \wedge b$ et si $au + bv = d$ est une relation de Bézout, alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $a\left(u + k\dfrac{b}{d}\right) + b\left(v - k\dfrac{a}{d}\right) = d$ est une autre relation de Bézout.

La preuve du théorème nous permet en fait de donner un algorithme pour trouver u et v, il suffit de modifier légèrement l'algorithme d'Euclide.
En effet, si $a = bq + r$, alors la connaissance d'une relation de Bézout pour le couple (b,r) nous donne une relation de Bézout pour le couple (a,b).
Plus précisément, si $b \wedge r = bu + rv$, alors

$$a \wedge b = b \wedge r = bu + rv = bu + (a - bq)v = av + b(u - qv).$$

Autrement dit — On suppose que r_n est le dernier reste non nul lors de notre succession de divisions euclidiennes.

Notons $r_1, r_2, \dots, r_n$ (resp. $q_1, \dots, q_n$) les restes (resp. les quotients) successifs obtenus dans l'algorithme d'Euclide, où $a = q_1 b + r_1$, et où $r_n = a \wedge b$.
Alors $a \wedge b = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1}$: on a une relation de Bézout pour le couple (r_{n-2}, r_{n-1}), relation que l'on notera $\mathscr{R}_{n-1}$.
Or, $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1} \Leftrightarrow r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$.
En remplaçant alors r_{n-1} par $r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1}$ dans la relation $\mathscr{R}_{n-1}$, on obtient une relation de Bézout pour le couple (r_{n-3}, r_{n-2}), relation que l'on notera $\mathscr{R}_{n-2}$.
De proche en proche, on finit donc par arriver à une relation de Bézout $(\mathscr{R}_1)$ pour le couple (b, r_1). Et puisque $r_1 = a - bq_1$, on arrive alors à une relation de Bézout pour le couple (a,b).
Ce procédé est appelé **algorithme d'Euclide étendu**.

Exemple 15.29

Nous avons déjà calculé $1540 \wedge 882 = 14$.
Et en reprenant le détail des divisions euclidiennes effectuées, on a

$$\begin{aligned}
1540 = 882 + 658 &\Leftrightarrow 658 = 1540 - 882\\
882 = 658 + 224 &\Leftrightarrow 224 = 882 - 658\\
658 = 2 \times 224 + 210 &\Leftrightarrow 210 = 658 - 2 \times 224\\
224 = 210 + 14 &\Leftrightarrow 14 = 224 - 210.
\end{aligned}$$

Donc il vient

$$\begin{aligned}14 &= 224 - 210\\ &= 224 - (658 - 2\times 224) = -658 + 3\times 224\\ &= -658 + 3\times(882 - 658) = 3\times 882 - 4\times 658\\ &= 3\times 882 - 4(1540 - 882) = 7\times 882 - 4\times 1540.\end{aligned}$$

15.2.4 Entiers premiers entre eux

Définition 15.30 – Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. On dit que a et b sont **premiers entre eux** si $a \wedge b = 1$.
Autrement dit si et seulement si les seuls entiers divisant à la fois a et b sont ± 1.

Exemples 15.31

- 2 et 5 sont premiers entre eux.
- Plus généralement, deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

Théorème 15.32 (De Bézout) : *Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.*

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ a déjà été vu, puisque $a \wedge b = 1$.
Pour la réciproque, rappelons nous que si $n \in \mathbf{Z}$ est un diviseur à la fois de a et de b, alors c'est un diviseur de $au + bv$.
Et donc si il existe u et v tels que $au + bv = 1$, alors $a \wedge b$, qui divise à la fois a et b, divise 1, et donc vaut ± 1.
Étant positif, il vaut 1 et on a donc $a \wedge b = 1$. □

⚠ Si $au + bv = d$ n'est pas égal à 1, on peut toujours uniquement affirmer que $a \wedge b \mid d$, mais pas qu'il est égal à d.
Par exemple, $28 = 882 \times 2 - 1540 \times 8$, mais le PGCD de 882 et 1540 ne vaut pas 28, il divise seulement 28.

Proposition 15.33 : *Soient a, b, c trois entiers non nuls. Alors a est premier avec bc si et seulement si a est premier à la fois avec b et avec c.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $a \wedge bc = 1$, soit alors d un diviseur commun à a et b.
Alors d divise à la fois a et bc, et donc divise 1. Donc $a \wedge b = 1$.
Et sur le même principe, $a \wedge c = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, supposons que $a \wedge b = a \wedge c = 1$.
Alors par le théorème de Bézout[17], il existe deux couples d'entiers (u_1, v_1) et (u_2, v_2) tels que $1 = au_1 + bv_1$ et $1 = au_2 + cv_2$.
Alors, en multipliant ces deux relations, il vient

$$1 = (au_1 + bv_1)(au_2 + cv_2) = a(au_1u_2 + u_1cv_2 + u_2bv_1) + bc(v_1v_2).$$

Et donc[18] a et bc sont premiers entre eux. □

[17] En fait, ici on n'utilise que le sens «identité de Bézout».

[18] C'est Bézout.

Corollaire 15.34 – *Soient $a, b_1, \ldots, b_n$ des entiers. Alors a est premier avec le produit $b_1 \cdots b_n$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, a est premier avec b_i.*

En abrégé
Un entier est premier avec un produit si et seulement si il est premier avec chacun de ses facteurs.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Proposition 15.35 (Lemme de Gauss) : *Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.*

Démonstration. Il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Et donc $auc + bvc = c$.
Or, $a \mid auc$ et $a \mid bc$, donc $a \mid bvc$ et par conséquent $a \mid auc + bcv = c$. □

Corollaire 15.36 – *Soient a, b, n trois entiers. Si a et b sont premiers entre eux, et divisent tous les deux n, alors leur produit ab divise n.*

Démonstration. Puisque $a \mid n$, il existe $d \in \mathbf{Z}$ tel que $n = ad$.
Mais alors $b \mid ad$ et b est premier avec a, donc b divise d.
Par conséquent, il existe $d' \in \mathbf{Z}$ tel que $d = bd'$, et donc $n = ad = (ab)d'$, si bien que $ab \mid n$. □

Corollaire 15.37 (Simplification dans des congruences) – *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $a, b, k \in \mathbf{Z}$. Si $ak \equiv bk \ [n]$ et si $k \wedge n = 1$, alors $a \equiv b \ [n]$.*

Démonstration. Si $ak \equiv bk \ [n]$, alors $n \mid k(a - b)$.
Mais n étant premier avec k, n divise $a - b$, et donc $a \equiv b \ [n]$. □

Proposition 15.38 : *Soient a, b deux entiers, non tous deux nuls.*
Si on note $d = a \wedge b$ leur PGCD, alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Réciproquement, s'il existe trois entiers $(d, a', b') \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}^2$, avec $a' \wedge b' = 1$, tels que $a = da'$ et $b = db'$, alors $d = a \wedge b$

Démonstration. Le sens direct est facile : par définition, d divise à la fois a et b, donc il existe a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Si $n = a' \wedge b'$, alors dn divise à la fois a et b, donc divise d. Donc $dn \mid d \Leftrightarrow n \mid 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Inversement, supposons l'existence de d, a', b' vérifiant les conditions de l'énoncé.
Alors $a \wedge b = (da') \wedge (db') = d(a' \wedge b') = d$. □

Proposition-definition 15.39 Soit $r \in \mathbf{Q}$. Alors il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ avec a, b premiers entre eux et tel que $r = \dfrac{a}{b}$.
De plus, si $r = \dfrac{a'}{b'}$ avec $(a', b') \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $a' = ak$ et $b' = bk$.
L'écriture $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$ est appelée **forme irréductible** de r.

Démonstration. Pour l'existence, il suffit de noter que par définition de $\mathbf{Q}$, il existe $(u, v) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tels que $r = \dfrac{u}{v}$, et qu'alors, en posant $d = u \wedge v$, $u = da$ et $v = db$, avec a et b premiers entre eux, alors $r = \dfrac{a}{b}$

Soit alors $r = \dfrac{a'}{b'}$ une autre écriture de r, de sorte que $ab' = a'b$. Puisque a et b sont premiers entre eux, et que a divise $a'b$, a divise a'. Et de même, b divise b'.
Et alors $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$. Si on pose $k = \dfrac{a'}{a} \in \mathbf{N}$, alors $a' = ka$ et $b' = kb$.

On a alors $a' \wedge b' = k$, si bien que $a' \wedge b' = 1 \Leftrightarrow k = 1$, et donc il y a unicité de la forme irréductible. □

15.2.5 PPCM de deux entiers

Définition 15.40 – Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ non nuls. On appelle **plus petit commun multiple de** a **et** b, et on note $a \vee b$ le plus petit[19] élément strictement positif multiple de a et b, c'est-à-dire $a \vee b = \min(a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}^*)$.
Pour $a \in \mathbf{Z}$, on pose $a \vee 0 = 0 \vee a = 0$.

[19] Au sens de la relation d'ordre usuelle.

Remarques. ▸ Ce minimum existe bien car si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}^*$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, car elle contient $|ab|$.
▸ Comme pour le PGCD, le PPCM est commutatif ($a \vee b = b \vee a$) et insensible au signe puisque $|a| \vee |b| = a \vee b$.

Proposition 15.41 : *Soient* $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, *et soit* $m \in \mathbf{N}$. *Alors*

$$m = a \vee b \Leftrightarrow \begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \\ \forall n \in \mathbf{N},\ (a \mid n \textbf{ et } b \mid n) \Rightarrow m \mid n \end{cases}$$

Autrement dit
Pour la relation de divisibilité, $a \vee b$ est le plus petit des majorants de $\{a, b\}$, donc $\sup\{a, b\}$.

Démonstration. Si $m = a \vee b$, alors m est divisible à la fois par a et par b.
De plus, si n est un multiple commun de a et b, notons $n = mq + r$ la division euclidienne de n par m, avec $0 \leqslant r < m$.
Alors $r = n - mq$ est divisible à la fois par a et par b, donc est un multiple commun de a et b.
Étant strictement inférieur à m, il ne peut pas être strictement positif[20] et donc est nul.
Donc $m \mid n$.

[20] m est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b.

Inversement, si m est un multiple commun de a et b divisant tout autre multiple commun de a et b, alors en particulier, il divise $a \vee b$.
Or, nous venons de prouver que $a \vee b \mid m$, et donc $m = a \vee b$. □

Proposition 15.42 : *Soient* $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. *Alors* $\forall k \in \mathbf{Z}$, $(ka) \vee (kb) = |k|(a \vee b)$.

Démonstration. Supposons a, b et k non nuls. Encore une fois, on peut supposer $k \in \mathbf{N}$.
Alors $k(a \vee b)$ est un multiple commun de ka et de kb.
Par ailleurs, si n est un multiple commun de ka et de kb, alors n est divisible par k, donc il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $n = kc$.
Mais $ka \mid kc$ et $k \neq 0$, donc $a \mid c$. Et de même $b \mid c$. Donc $(a \vee b) \mid c$.
Et par conséquent, $k(a \vee b) \mid n$.
Nous reconnaissons là la caractérisation de $(ka) \vee (kb)$ donnée par la proposition précédente, donc $k(a \vee b) = (ka) \vee (kb)$. □

Le PGCD et le PPCM sont reliés par la formule suivante :

Proposition 15.43 : *Pour tout* $(a, b) \in \mathbf{N}^2$, *on a* $(a \vee b) \times (a \wedge b) = ab$.

Remarque
Il suffit donc de savoir calculer l'un des deux nombres $a \vee b$ ou $a \wedge b$ pour déterminer l'autre.

Démonstration. Commençons par supposer a et b premiers entre eux, et prouvons qu'alors $a \vee b = ab$.
Soit m un multiple commun de a et b. Alors il existe deux entiers u et v tels que $m = au = bv$.
Alors $a \mid bv$, et puisque $a \wedge b = 1$, $a \mid v$, de sorte que $ab \mid bv$ et donc $ab \mid m$.
Puisque ab est évidemment un multiple commun de a et b, on a donc $ab = a \vee b$.

Dans le cas général, notons $d = a \wedge b$, de sorte qu'il existe deux entiers a' et b', premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$. Et alors

$$a \vee b = (da') \vee (db') = d(a' \vee b') = da'b' = ab'.$$

Et donc après multiplication par $a \wedge b$, $(a \wedge b) \times (a \vee b) = adb' = ab$. □

15.2.6 Familles de n entiers

Définition 15.44 – Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers non tous nuls. On appelle PGCD de $a_1, \dots, a_n$ le plus grand diviseur commun des a_i, c'est-à-dire $\max\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i)\right)$.

Proposition 15.45 : *Avec les notations ci-dessus, si d est le PGCD de $a_1, \dots, a_n$, alors*

$$\mathcal{D}(d) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i).$$

Autrement dit, un entier divise à la fois $a_1, \dots, a_n$ si et seulement si il divise leur PGCD.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n, l'idée étant que si $d' = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{D}(a_i) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(a_i)\right) \cap \mathcal{D}(a_{n+1}) = \mathcal{D}(d') \cap \mathcal{D}(a_{n+1}) = \mathcal{D}(d' \wedge a_{n+1}).$$

Mais $d' \wedge a_{n+1}$ est le plus grand élément de $\mathcal{D}(d' \wedge a_{n+1})$, et donc est le PGCD de $a_1, \cdots, a_{n+1}$. □

Remarque. Notons que cette preuve montre que le PGCD de $a_1, \cdots, a_{n+1}$ est égal au PGCD du (PGCD de $a_1, \cdots, a_n$) et de a_{n+1}, et qu'on peut donc le calculer par récurrence. Le PGCD de $a_1, \dots, a_n$ est donc $a_1 \wedge (a_2 \wedge \cdots \wedge (a_{n-1} \wedge a_n))$.
Et comme nous avons déjà prouvé l'associativité du PGCD, les parenthèses ne sont pas indispensables, on peut noter $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

Proposition 15.46 (Identité de Bézout) : *Soient $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls. Alors il existe $u_1, \cdots, u_n \in \mathbf{Z}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$.*

Démonstration. Par récurrence sur n : notons $d = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, et supposons que $d = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, alors $\bigwedge_{i=1}^{n+1} a_i = d \wedge a_{n+1}$.
Et donc par l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que

$$d \wedge a_{n+1} = du + a_{n+1}v = d\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)u + a_{n+1}v = \sum_{i=1}^{n} a_i d u_i + a_{n+1}v.$$

□

Définition 15.47 – Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers non tous nuls. On dit que $a_1, \dots, a_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** si leur PGCD vaut 1 (ou de manière équivalente, si leurs seuls diviseurs communs sont ± 1).

⚠ Si des entiers $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux premiers, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. En effet, on a déjà $a_1 \wedge a_2 = 1$, donc $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.
En revanche la réciproque est fausse : par exemple les entiers 6, 10 et 15 sont premiers entre eux dans leur ensemble puisque

$$6 \wedge 10 \wedge 15 = (6 \wedge 10) \wedge 15 = 2 \wedge 15 = 1.$$

Pourtant ils ne sont pas deux à deux premiers puisque $6 \wedge 10 = 2$, $6 \wedge 15 = 3$ et $10 \wedge 15 = 5$.

Proposition 15.48 : *Des entiers $a_1, \dots, a_n$ non tous nuls sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe des entiers $u_1, \dots, u_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i u_i = 1$.*

Démonstration. Si $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$, alors c'est l'identité de Bézout.

Inversement, supposons qu'il existe $u_1, \dots, u_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i u_i = 1$.

Alors $d = \displaystyle\bigwedge_{i=1}^n a_i$ divise chacun des a_i et donc divise $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i u_i = 1$, et donc $d = 1$. □

> **⚠ Attention !**
> La notation est bien pratique pour la suite du cours, mais n'a rien de standard, donc si vous décidez de noter **P** l'ensemble des nombres premiers dans une copie, signalez-le clairement.

15.3 FACTORISATION PREMIÈRE ET APPLICATIONS

Dans la suite, on note **P** l'ensemble des nombres premiers.

15.3.1 Quelques propriétés des nombres premiers

Proposition 15.49 : *Soit p un nombre premier, et soit $n \in \mathbf{Z}$ non divisible par p. Alors p et n sont premiers entre eux.*

Démonstration. Notons $d = p \wedge n$. Alors $d \mid p$, et donc $d = 1$ ou $d = p$.
Si $d = p$, cela signifie que $p \mid n$, ce qui est contraire à notre hypothèse.
Donc $d = 1$ et donc p et n sont premiers entre eux. □

Notons en particulier que deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux puisqu'aucun ne divise l'autre.

Corollaire 15.50 – *Un nombre premier p divise un produit si et seulement si il divise l'un des facteurs.*

Démonstration. Prouvons le résultat pour un produit de deux facteurs, une récurrence facile permettant ensuite de généraliser à un produit de n facteurs, n quelconque.
Soient donc a et b deux entiers tels que $p \mid ab$.
Soit $p \mid a$, auquel cas il n'y a rien à prouver.
Soit p ne divise pas a, et donc est premier avec a.
Par le lemme de Gauss, p divise donc b.
Ainsi, $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$. □

> **Remarque**
> Notons que ce résultat est évidemment faux si p n'est pas premier : $4 \mid 12 = 2 \times 6$, mais $4 \nmid 2$ et $4 \nmid 6$.

15.3.2 Valuation p-adique

Définition 15.51 – Soit p un nombre premier, et soit $n \in \mathbf{Z}$ un entier non nul.
Alors le maximum de l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} \mid p^k \text{ divise } n\}$ est appelé **valuation p-adique de** n, et noté $v_p(n)$.

Démonstration. Il y a tout de même quelque chose à prouver : que le maximum en question existe.
Pour ce faire, prouvons que $\{k \in \mathbf{N},\ p^k \mid n\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$.
Elle est clairement non vide car elle contient 0 : $p^0 = 1$ divise toujours n.
Elle est majorée car si p^k divise n, alors $k \leqslant p^k \leqslant |n|$. □

Par définition, $v_p(n)$ est la plus grande puissance de p qui divise n.
Notons que n est premier avec p si et seulement si $v_p(n) = 0$. Par exemple, $v_2(12) = 2$ car $2^2 = 4$ divise 12 et $2^3 = 8$ ne divise pas 12 (et donc aucune puissance plus grande de 2 ne peut diviser 12).

Lemme 15.52. Soit $p \in \mathbf{P}$, soit $a \in \mathbf{Z}$ non nul, et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $n = v_p(a)$ si et seulement si il existe $a' \in \mathbf{Z}$, premier à p, tel que $a = p^n a'$.

Démonstration. Si $n = v_p(a)$, alors p^n divise a : il existe $a' \in \mathbf{Z}$ tel que $a = p^n a'$. Et alors p ne peut pas diviser a', car alors a serait au moins divisible par p^{n+1}. Par conséquent, a' est premier avec p.
Inversement, si $a = p^n a'$, avec $a' \wedge p = 1$, alors p^n divise a, et p ne divisant pas a', p^{n+1} ne divise pas a, donc $v_p(a) = n$. □

Proposition 15.53 : *Soit p un nombre premier. Si a et b sont deux entiers non nuls, alors $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.*

Démonstration. $p^{v_p(a)}$ divise a et $p^{v_p(b)}$ divise b, donc $p^{v_p(a)+v_p(b)} = p^{v_p(a)}p^{v_p(b)}$ divise ab.
Par définition de $v_p(a)$, $a = p^{v_p(a)}a'$, où p ne divise pas a'. Puisque p est premier, on a donc $p \wedge a' = 1$.
De même, $b = p^{v_p(b)}b'$, où $p \wedge b' = 1$.
Et donc $ab = p^{v_p(a)+v_p(b)}a'b'$, où $a'b'$ est premier avec p.
Et donc, par le lemme précédent, $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. □

Rappel
Un entier est premier à un produit si et seulement si il est premier à chacun des facteurs.

Il n'existe pas de règle générale pour la valuation d'une somme (voir TD pour quelques cas particuliers).

15.3.3 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème 15.54 : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe une unique suite finie $(p_1, \alpha_1), \cdots, (p_k, \alpha_k)$ de couples de $\mathbf{P} \times \mathbf{N}^*$ telle que :*

1. *pour $i < j$, $p_i < p_j$*
2. *$n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.*

Plus simplement : tout entier non nul se décompose de manière unique[21] comme produit de facteurs premiers.

[21] À l'ordre des facteurs près.

Démonstration. Nous avons déjà vu l'existence à la proposition 15.17. Il s'agit donc de prouver ici que cette décomposition est unique.
Supposons donc qu'il existe deux décompositions de n en produits de facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^{\ell} q_i^{\beta_i}$$

où $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ et $q_1 < \cdots < q_\ell$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ des entiers strictement positifs.

Commençons par prouver que ces deux décompositions contiennent les mêmes nombres premiers, et supposons par l'absurde qu'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $p_i \notin \{q_1, \ldots, q_\ell\}$. Alors p_i est premier avec chacun des q_i, et donc est premier avec $n = \displaystyle\prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\beta_j}$.

Détails
Deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

C'est absurde car $p_i \mid n$.
Donc les deux décompositions contiennent les mêmes nombres premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}.$$

De plus, pour $i \in [\![1, k]\!]$, $n = p_i^{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} p_j^{\alpha_j}$, et p_i étant premier avec chacun[22] des $p_j, j \neq i$, il est premier avec $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} p_j^{\alpha_j}$.
Donc par le lemme 15.52 $\alpha_i = v_{p_i}(n)$. Et de même, $\beta_i = v_{p_i}(n)$.
Donc l'écriture est bien unique. □

[22] Deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

Nous venons de prouver que dans cette écriture, $\alpha_i = v_{p_i}(n)$.
Un moyen pratique d'écrire la décomposition en produit de facteurs premiers de n est donc $n = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{v_p(n)}$.
Il y a tout de même des précautions à prendre puisque ce produit comporte un nombre infini de termes. Seulement, il n'existe qu'un nombre fini de premiers p pour lesquels $v_p(n) \neq 0$, et donc pour lesquels $p^{v_p(n)} \neq 1$.
Autrement dit, le produit est bien infini, mais seuls un nombre fini de termes ne valent pas 1. Nous pourrions donc tout aussi bien écrire

$$n = \prod_{\substack{p \in \mathbf{P} \\ v_p(n) \neq 0}} p^{v_p(n)}$$

mais il faut bien reconnaître que cette écriture est moins élégante !

15.3.4 Application aux diviseurs, au PGCD et au PPCM

Proposition 15.55 : *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors $a \mid b$ si et seulement si pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(a) \leqslant v_p(b)$.*

Démonstration. Si a divise b, soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $b = ak$.
Alors pour tout premier p, $v_p(b) = v_p(a) + v_p(k) \geqslant v_p(a)$.
Inversement, supposons que pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(a) \leqslant v_p(b)$, et soit $k = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{v_p(b) - v_p(a)}$.
Alors k est un entier (car les $v_p(b) - v_p(a)$ sont tous positifs) et

$$ak = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{v_p(a)} \times \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{v_p(b) - v_p(a)} = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{v_p(b)} = b.$$

Donc $a \mid b$. □

Remarque
Là encore, il ne s'agit pas d'un produit infini, puisque les seuls termes susceptibles de valoir autre chose que 0 sont ceux pour lesquels $v_p(b) \geqslant 1$ (autrement dit, pour les premiers divisant b), qui sont en nombre fini.

Proposition 15.56 : *Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$. Alors :*

1. $a \wedge b = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$.
   Autrement dit, pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(a \wedge b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.
2. $a \vee b = \prod_{p \in \mathbf{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$.
   Autrement dit, pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(a \vee b) = \max(v_p(a), v_p(b))$.
3. *a et b sont premiers entre eux si et seulement si pour tout $p \in \mathbf{P}$, $v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$.*

Démonstration. 1. Soit $p \in \mathbf{P}$. Alors $p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ divise a et b, donc divise $a \wedge b$.
Ainsi, $v_p(a \wedge b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$.
Inversement, si p^k divise $a \wedge b$, alors p^k divise a et p^k divise b, donc $v_p(a) \geqslant k$ et $v_p(b) \geqslant k$, de sorte que $k \leqslant \min(v_p(a), v_p(b))$.
Et alors $v_p(a \wedge b) \leqslant \min(v_p(a), v_p(b))$.

2. Il suffit d'utiliser $a \vee b = \dfrac{ab}{a \wedge b}$, et de noter que pour tous entiers[23] m et n,

$$m + n - \min(m, n) = \max(m, n).$$

Et donc en particulier, pour p premier,

$$v_p(a) + v_p(b) - \min(v_p(a), v_p(b)) = \max(v_p(a), v_p(b)).$$

3. Utiliser le point 1) et le fait que le minimum de deux nombres positifs est nul si et seulement si l'un de ces nombres est nul.

□

[23] Et même réels.

15.3.5 Petit théorème de Fermat

Théorème 15.57 : *Soit p un nombre premier, et soit $a \in \mathbf{Z}$. Alors $a^p \equiv a \quad [p]$.
De plus, si a n'est pas divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
En effet, on a $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$.
Donc p divise $k\binom{p}{k}$ et est premier avec k, de sorte que par le lemme de Gauss, il divise $\binom{p}{k}$.
Autrement dit, $\binom{p}{k} \equiv 0 \quad [p]$.
Ainsi, quels que soient les entiers u et v, on a

$$(u+v)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k v^{p-k} \equiv u^p + v^p \quad [p].$$

Prouvons à présent par récurrence sur $a \in \mathbf{N}$ que $a^p \equiv a \quad [p]$.
Pour $a = 0$ ou $a = 1$, c'est évident. Supposons que $a^p \equiv a \quad [p]$.
Alors $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \quad [p]$.
Par le principe de récurrence, pour tout $a \in \mathbf{N}$, $a^p \equiv a \quad [p]$.
Et si $a < 0$, alors il existe $b \in \mathbf{N}$ tel que $a \equiv b \quad [p]$.
Et donc $a^p \equiv b^p \equiv b \equiv a \quad [p]$.

Détails
Par exemple, on peut prendre pour b le reste de la division euclidienne de a par p (ce n'est pas du tout la seule solution, mais c'est la plus petite).

Enfin, si a n'est pas divisible par p, alors il est premier avec p. Or, ce que nous venons de prouver, c'est que $a^p - a$ est divisible par p.
Mais $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$, avec $a \wedge p = 1$, donc p divise $a^{p-1} - 1$.
Soit encore $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$. □

Exemple 15.58

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, tout diviseur premier impair de $n^2 + 1$ est congru à 1 modulo 4.
En effet, soit $p \in \mathbf{P}$ un nombre premier impair divisant $n^2 + 1$.
Alors n n'est pas divisible par p, puisque n^2 ne l'est pas non plus.
Donc $n^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.
Soit encore $(n^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$.
Mais $n^2 \equiv -1 \ [p]$, donc $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$.

Mais puisque $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \pm 1$, la congruence donnée plus tôt est nécessairement une égalité : $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
Et donc $\dfrac{p-1}{2}$ est pair : il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\dfrac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p = 4k+1$.

Détails
Puisque $p \geqslant 3$, -1 n'est pas congru à 1 modulo p.

15.4 UNE BRÈVE INTRODUCTION À $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Nous avons mentionné précédemment que pour $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $k \in \mathbf{Z}$ est congru à un et un seul entier de $[\![0, n-1]\!]$.
Autrement dit, si on note $\overline{r} = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \equiv r \ [n]\} = \{r + kn,\ k \in \mathbf{Z}\}$ la classe d'équivalence de r pour la relation de congruence modulo n, alors $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$ est une partition de $\mathbf{Z}$.
Les classes d'équivalence de la relation de congruence modulo n sont appelées **classes de congruence modulo n.**

Définition 15.59 – Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ l'ensemble des classes de congruence modulo n : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Remarque
$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'est donc pas une partie de $\mathbf{Z}$, mais un ensemble d'ensembles de nombres.
Ou encore une partie de $\mathscr{P}(\mathbf{Z})$.

Pour $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on appelle **représentant de** x tout élément de x (qui rappelons-le, est un ensemble).
Ainsi, les représentants de $\overline{0}$ sont tous les entiers divisibles par n, les représentants de 1 sont les entiers congrus à 1 modulo n, etc.
Rappelons qu'une classe d'équivalence est entièrement caractérisée par la donnée d'un seul de ses éléments, et donc qu'un représentant de $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ caractérise entièrement x.

On définit une loi de composition interne sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en posant $\overline{k} + \overline{\ell} = \overline{k+\ell}$.
Le point clé est que la classe d'équivalence de $x+y$ ne dépend pas des représentants x et y choisis.
Plus précisément : si $k \equiv k' \ [n]$ et si $\ell \equiv \ell' \ [n]$, alors $k + \ell \equiv k' + \ell' \ [n]$.
Et donc $\overline{k+\ell} = \overline{k'+\ell'}$.
Autrement dit, il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition de $\overline{k} + \overline{\ell}$: tout choix de représentants de $\overline{k}$ et $\overline{\ell}$ conduit à la même classe d'équivalence.

Par exemple, modulo 6, $3 \equiv 9$ et $4 \equiv 16$.
Et alors $\overline{3+4} = \overline{7} = \overline{1}$ et $\overline{9+16} = \overline{25} = \overline{1}$. Donc $\overline{3} + \overline{4} = \overline{1}$.

Donnons par exemple la table d'addition de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

La loi + est associative car si $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sont trois éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$,

$$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x+y} + \overline{z} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+(y+z)} = \overline{x} + \overline{y+z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}).$$

Remarque
Nous avons en fait utilisé ici l'associativité de l'addition sur $\mathbf{Z}$.

De même, en utilisant la commutativité de l'addition d'entiers, on prouve que + est commutative sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
La classe d'équivalence de 0 (qui est formée des multiples de n) est élément neutre, puisque pour tout $\overline{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on a

$$\overline{0} + \overline{k} = \overline{0+k} = \overline{k}.$$

Enfin, pour tout $\overline{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on a $\overline{k} + \overline{-k} = \overline{k + (-k)} = \overline{0}$, et donc $\overline{-k}$ est l'inverse de $\overline{k}$ pour la loi +.
Ainsi, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien.

Soit alors $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, de sorte que $\mathbf{U}_n = \{\zeta^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
Considérons alors l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{U}_n \\ \overline{k} & \longmapsto & \zeta^k \end{array} \right.$.
Elle est bien définie car ζ^k ne dépend pas du représentant de $\overline{k}$ choisi. Plus précisément : si $\overline{k'} = \overline{k}$, alors $\exists p \in \mathbf{Z}$ tel que $k' = pn + k$, et donc $\zeta^{k'} = \zeta^{np+k} = (\zeta^n)^p \zeta^k = \zeta^k$.
De plus, φ est un morphisme de groupes, puisque pour $\overline{k}, \overline{k'} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on a

$$\varphi\left(\overline{k} + \overline{k'}\right) = \varphi\left(\overline{k+k'}\right) = \zeta^{k+k'} = \zeta^k\zeta^{k'}.$$

Ce morphisme est surjectif, car si $z \in \mathbf{U}_n$, alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $z = \zeta^k = \varphi\left(\overline{k}\right)$.
De plus, $\overline{k} \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi\left(\overline{k}\right) = 1 \Leftrightarrow \zeta^k = 1$.
Si on note $k = nq + r$ la division euclidienne de k par n, on a alors $\zeta^k = \zeta^r = 1$, et donc, puisque les ζ^j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$ sont deux à deux distincts, nécessairement $r = 0$.
Donc n divise k, de sorte que $\overline{k} = \overline{0}$.
Ceci prouve donc que $\operatorname{Ker}\varphi = \{\overline{0}\}$, et donc φ est injectif.
Donc φ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ et $\mathbf{U}_n$.

A l'instar de ce qui a été fait pour la loi $+$, on peut définir une seconde loi $\times$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ en posant $\overline{k} \times \overline{k'} = \overline{kk'}$.
Elle est bien définie car la congruence modulo n est compatible à la multiplication.
On prouve alors que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, en utilisant le fait que $\mathbf{Z}$ en est un.
L'élément neutre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour la loi $\times$ est alors $\overline{1}$.

> ⚠ Attention !
> Je n'ai pas dit qu'il s'agissait d'un sous-anneau de $\mathbf{Z}$, puisque $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'est pas une partie de $\mathbf{Z}$, mais toutes les propriétés d'associativité, distributivité, etc, découlent de celles des lois de $\mathbf{Z}$.

Proposition 15.60 : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'application $\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ k & \longmapsto & \overline{k} \end{array} \right.$, qui à un entier associe sa classe de congruence modulo n est un morphisme d'anneaux surjectif.*

Démonstration. On a déjà $f(1) = \overline{1}$, qui est le neutre multiplicatif de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
Par ailleurs, nous avons déjà prouvé[24] que pour $k, \ell \in \mathbf{Z}$, $\overline{k+\ell} = \overline{k} + \overline{\ell}$.
Soit encore $f(k+\ell) = f\left(\overline{k}\right) + f\left(\overline{\ell}\right)$.
Et de même pour le produit, donc f est bien un morphisme d'anneaux.
Il est évidemment surjectif, puisque les éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont tous de la forme $\overline{k} = f(k)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. □

[24] C'est la définition de l'addition sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Proposition 15.61 : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{Z}$. Alors $\overline{a}$ est un inversible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement si $a \wedge n = 1$.*

Démonstration. $\overline{a}$ est inversible si et seulement si il existe $\overline{u} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $\overline{au} = 1$, soit si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $au + nv = 1$.
Donc si et seulement si $a \wedge n = 1$. □

> Remarque
> Nous avons déjà dit que nous pouvions simplifier par a modulo n si $a \wedge n = 1$.
> Nous pouvons désormais le formuler différemment : tout élément inversible de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est régulier (pour la multiplication).

Proposition 15.62 : *L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier. Dans ce cas, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps.*

Démonstration. Si n est composé, $n = ab$, avec a, b positifs, tous deux distincts de 1.
Alors $\overline{0} = \overline{n} = \overline{ab}$.
Mais $2 \leqslant a < n$, donc $\overline{a} \neq \overline{0}$ et de même $\overline{b} \neq \overline{0}$.
Donc $\overline{a}$ est un diviseur de 0 : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ n'est pas intègre.
Par contraposée, si $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, alors n est premier.

Inversement, si n est premier, alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $n \wedge k = 1$, et donc $\overline{k}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
Donc tout élément non nul de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est inversible : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et en particulier est intègre. □

Notons qu'une fois ces résultats établis, si l'on connaît un peu de théorie des groupes (au moins le fait que dans un groupe fini tout élément est d'ordre divisant le cardinal du groupe[25]), il est facile de donner une démonstration du petit théorème de Fermat.
Soit p un nombre premier, et soit $a \in \mathbf{Z}$, non divisible par p.
Alors $\overline{a}$ est un élément non nul du groupe $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times, \times)$, qui est de cardinal $p-1$ (car tous les éléments non nuls de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sont inversibles).
Et donc est d'ordre divisant $p-1$, si bien que $\overline{a}^{p-1} = \overline{1} \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ [p]$.

[25] Voir le DM 11.

EXERCICES DU CHAPITRE 15

▶ Divisibilité, calculs en congruences

EXERCICE 15.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, F

1) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ 2) $16 \mid 5^n - 1 - 4n$ 3) $6 \mid n(n+2)(7n-5)$

EXERCICE 15.2 Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13. F

EXERCICE 15.3 En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation $x^4 = 3y^2 - 25$, $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ ne possède pas de solution. PD

EXERCICE 15.4 Montrer qu'un entier dont l'écriture en base 10 est la répétition de deux groupes de trois chiffres identiques (comme 817 817) est divisible par 7, par 11 et par 13. D'ailleurs, que vaut le produit $7 \times 11 \times 13$? PD

EXERCICE 15.5 En utilisant des congruences modulo 3, déterminer tous les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit également premier. PD

EXERCICE 15.6 Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{3^{11^{17}}}$. AD

EXERCICE 15.7 **(Oral Centrale)** PD
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note N le nombre de diviseurs positifs de n et P leur produit. Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

EXERCICE 15.8 **(Oral ENS)** TD
Montrer qu'il existe un multiple de 2019 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 3.
Indication : le nombre premier 673 divise 2019.

▶ PGCD, PPCM

EXERCICE 15.9 Pour chacun des couples (a, b) suivants, déterminer $a \wedge b$, $a \vee b$ et une relation de Bézout. F

1) $(51, 438)$ 2) $(720, 1320)$ 3) $(151, 77)$

EXERCICE 15.10 **Équations $ax + by = c$** PD

1) On s'intéresse dans cette question à l'équation $18x + 25y = 1$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.
   a) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0).
   b) Montrer que si (x, y) est solution, on a alors $18(x - x_0) = 25(y_0 - y)$, puis qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 25k + x_0$.
   c) En déduire toutes les solutions de l'équation.
2) Résoudre les équations $9x + 15y = 3$, $42x + 45y = 6$ et $12x + 30y = 15$.

EXERCICE 15.11 Soient $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$, tels que a et b soient premiers entre eux. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. PD

EXERCICE 15.12 AD

1) Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
2) Montrer que le PGCD de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^{a \wedge b} - 1$.

EXERCICE 15.13 AD

1) Montrer que pour a, b entiers, $(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$.
2) Résoudre le système $\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420 \end{cases}$ d'inconnues $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

EXERCICE 15.14 Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$. PD

EXERCICE 15.15 **(Banque CCP, exercice 95)** PD

1) Soient $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ premiers entre eux, et soit $c \in \mathbf{N}$.
   Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Leftrightarrow ab \mid c$.

2) On considère le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$.

a) Déterminer une solution particulière x_0 de $(\mathcal{S})$.

b) Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{S})$.

EXERCICE 15.16 Soit $a \in \mathbf{N}^*$, et soit $(F_n)_n$ une suite d'entiers naturels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = aF_{n+1} + F_n$. **PD**
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} \wedge F_n = F_0 \wedge F_1$.

EXERCICE 15.17 Une réciproque de Bézout **PD**
Soient a et b deux entiers non nuls, et soit $d \in \mathbf{N}$ un diviseur commun de a et de b. Montrer que s'il existe deux entiers $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $au + bv = d$, alors $d = a \wedge b$.

EXERCICE 15.18 Retour sur les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité **AD**
Montrer que pour $a, b \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{a\wedge b}$.

▶ Nombres premiers et décomposition primaire

EXERCICE 15.19 Soit $n \geqslant 3$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$. **F**
En déduire 1000 entiers consécutifs sans aucun nombre premier.

EXERCICE 15.20 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ n'est pas premier. **F**

EXERCICE 15.21 Nombres de Fermat **AD**

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2^m$.

2) On note à présent $F_n = 2^{2^n} + 1$ (qu'on appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Fermat).

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} = F_0F_1 \cdots F_n + 2$.

b) En déduire que pour (m, n) distincts, F_m et F_n sont premiers entre eux.

EXERCICE 15.22 Inégalité ultramétrique **PD**
Soit p un nombre premier et soit $(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Montrer que $v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$. Prouver que si $v_p(a) \neq v_p(b)$, alors cette inégalité est en fait une égalité.

EXERCICE 15.23 En utilisant le petit théorème de Fermat, prouver que pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $a^{13} \equiv a \quad [2730]$. **AD**

EXERCICE 15.24 Soient p, q deux nombres premiers distincts. Prouver que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \ [pq]$. **AD**

EXERCICE 15.25 Montrer que la suite $(2^n - 3)_n$ contient une infinité de termes divisibles par 5, une infinité de termes divisibles par 13, mais aucun divisible par 5×13. **D**

EXERCICE 15.26 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n, et soient $p_1, \dots, p_k$ les facteurs premiers de n. Exprimer $d(n)$ en fonction des $v_{p_i}(n)$, $i \in [\![1, k]\!]$. **PD**

EXERCICE 15.27 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient a, b deux entiers premiers entre eux. **PD**
On suppose que le produit ab est une puissance $n^{\text{ème}}$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $ab = c^n$.
Montrer que a et b sont déjà eux-mêmes des puissances $n^{\text{èmes}}$.

EXERCICE 15.28 Autour de la valuation p-adique d'une factorielle **AD**
Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $100! = 2^{97}(2n + 1)$.

EXERCICE 15.29 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \left\lfloor (1 + \sqrt{3})^{2n+1} \right\rfloor$. **D**

1) Prouver que $u_n = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} + (1 - \sqrt{3})^{2n+1}$.

2) Déterminer la valuation 2-adique de u_n

EXERCICE 15.30 Théorème de Wilson **D**

1) Soit p un nombre premier.

a) Montrer que $\forall x \in [\![1, p-1]\!]$, $\exists! y \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $xy \equiv 1 \quad [p]$.

b) En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \quad [p]$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, tel que $(n-1)! \equiv -1 \quad [n]$. Montrer que n est premier.

*On a donc prouvé que $p \in \mathbf{N}^*$ est premier **si et seulement si** $(p-1)! \equiv -1 \quad [p]$.*

TD

EXERCICE 15.31 Théorème de Kürschák (Oral ENS)

Déterminer pour quels entiers $n \geqslant m \geqslant 1$ le nombre $H_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$ est un entier.

Indication : utiliser les valuations 2-adiques des entiers $k \in [\![m, n]\!]$.

D

EXERCICE 15.32 Ordre d'un élément dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On se place dans le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

1) Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \langle \overline{1} \rangle$, le sous-groupe engendré par la classe de congruence de 1.

2) Soit $\overline{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer que $d = n \wedge a$ ne dépend pas du choix d'un représentant de $\overline{a}$, et que $\langle \overline{a} \rangle = \langle \overline{d} \rangle$. Quel est le cardinal de $\langle \overline{a} \rangle$?

Correction des exercices du chapitre 15

Solution de l'exercice 15.1

1. Raisonnons modulo 7 :

$$\begin{aligned}3^{2n+1}+2^{n+2} &\equiv 9^n\times 3+4\times 2^n \pmod 7\\ &\equiv 2^n\times 3+4\times 2^n \pmod 7\\ &\equiv 2^n(3+4) \pmod 7\\ &\equiv 2^n\times 7\equiv 0 \pmod 7.\end{aligned}$$

Et donc $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7.

2. Commençons par calculer les premières puissances de 5 modulo 16 :

$$5^2=25\equiv 9 \pmod{16},\ 5^3\equiv 5^2{\cdot}5\equiv 45\equiv 12\equiv -3 \pmod{16},\ 5^4\equiv -3{\cdot}5\equiv 1 \pmod{16}.$$

Et donc les puissances suivantes sont faciles

$$5^5\equiv 5^4\cdot 5\equiv 5 \pmod{16},\ 5^6\equiv 5^4\cdot 5^2\equiv 9 \pmod{16},\ 5^7\equiv 5^4\cdot 5^3\equiv -3 \pmod{16},\dots$$

Et donc pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$5^{4k}\equiv 1 \pmod{16},\ 5^{4k+1}\equiv 5 \pmod{16},\ 5^{4k+2}\equiv 9 \pmod{16},\ 5^{4k+3}\equiv -3 \pmod{16}.$$

Mais en même temps, on a

$$\begin{aligned}1+4(4k)\equiv 1 \pmod{16}, &\quad 1+4(4k+1)\equiv 5 \pmod{16}\\ 1+4(4k+2)\equiv 9 \pmod{16}, &\quad 1+4(4k+3)\equiv 13\equiv -3 \pmod{16}.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $5^n\equiv 1+4n \pmod{16}$ de sorte que $5^n-1-4n\equiv 0 \pmod{16}$ et donc est divisible par 16.

3. Distinguons plusieurs cas, suivant la classe de congruence de n modulo 6.
Si $n\equiv 0 \pmod 6$, alors $n(n+2)(7n-5)\equiv 0 \pmod 6$.
Si $n\equiv 1 \pmod 6$, alors $n(n+2)(7n-5)\equiv 1\cdot 3\cdot(7-5)\equiv 6\equiv 0 \pmod 6$.
Si $n\equiv 2 \pmod 6$, alors $n(n+2)(7n-5)\equiv 2\cdot 4\cdot 9\equiv 0 \pmod 6$.
Si $n\equiv 3 \pmod 6$, alors $n(n+2)(7n-5)\equiv 3\cdot 5\cdot 16\equiv 15\cdot 16\equiv 3\cdot 4\equiv 0 \pmod 6$.
Si $n\equiv 4 \pmod 6$, alors $n+2\equiv 0 \pmod 6$, donc $n(n+2)(7n-5)\equiv 0 \pmod 6$.
Enfin, si $n\equiv 5 \pmod 6$, alors $n(n+2)(7n-5)\equiv 5\cdot 7\cdot 30\equiv 0 \pmod 6$.
Donc dans tous les cas, $n(n+2)(7n-5)\equiv 0 \pmod 6$, donc $6\mid n(n+2)(7n-5)$.

> **Méthode**
> Montrer qu'un entier est divisible par n, c'est prouver qu'il est congru à 0 modulo n.
> Ceci est souvent plus facile à prouver grâce aux propriétés des congruences.

> **Méthode**
> Une fois qu'on a : $5^4\equiv 1$, alors pour $n=4q+r$, on aura
> $$5^n\equiv\left(5^4\right)^q 5^r\equiv 5^r.$$
> Il suffit donc d'obtenir la division euclidienne de n par 4.

> **Autrement dit**
> La classe de congruence de $1+4n$ modulo 16, tout comme celle de 5^n, dépend que de la classe de congruence de n modulo 4.

Solution de l'exercice 15.2

Notons que $100^{1000}=10^{2000}$. Or, $10\equiv -3\quad[13]$.
Et donc $10^2=(-3)^2=9\equiv -4\quad[13]$, $10^3\equiv -40\equiv -1\quad[13]$, de sorte que $10^6\equiv 1[13]$.
Mais $2000=6\times 333+2$ de sorte que

$$10^{2000}\equiv 10^{6\times 333+2}\equiv 10^2(10^6)^{333}\equiv 10^2\equiv -4\equiv 9\quad[13].$$

Et donc[1] le reste de la division euclidienne par 13 de 100^{1000} vaut 9.

> **Méthode**
> La question peut en fait se reformuler en «trouver la classe de 100^{1000} modulo 13», et nous allons donc raisonner modulo 13.

[1] 9 est compris entre 0 et 12, ce qui n'était pas le cas de -4.

Solution de l'exercice 15.3

Soit $x\in\mathbf{Z}$. Alors on a soit $x\equiv 0\ [3]$, soit $x\equiv 1\ [3]$, soit $x\equiv 2\ [3]$.
Dans le premier cas, $x^2\equiv 0\ [3]$, et dans les deux autres, $x^2\equiv 1\ [3]$.

Et alors une puissance 4ème est aussi nécessairement congrue à 0 ou 1 modulo 3.
Or s'il existait $x,y\in\mathbf{Z}$ tels que $x^4=3y^2-25$, alors $x^4\equiv -25\equiv -1\equiv 2\ [3]$, ce qui est impossible.
Donc l'équation $x^4=3y^2-25$ ne possède pas de solution.

Solution de l'exercice 15.4

Il s'agit de noter que $1000\equiv -1 \pmod 7$, car $1000=143\times 7-1$
Or un nombre formé de deux groupes de trois chiffres identiques est de la forme $n=1000a+a=1001a$, avec $a\in[\![0,999]\!]$.
Mais alors $n\equiv 1001a \pmod 7\equiv 0 \pmod 7$.
Comme $1001=7\times 11\times 13$, le même raisonnement est valable modulo 11 et modulo 13.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.5

Notons que $p = 3$ est clairement solution car $p^2 + 2 = 11$ est premier.
De plus, $p = 2$ n'est pas solution car $p^2 + 2 = 6$ n'est pas premier.
Soit donc p un nombre premier supérieur ou égal à 5.
Alors p ne peut être divisible par 3, et donc est congru à 1 ou à 2 modulo 3.
Or, $1^2 = 1 \equiv 1\ [3]$ et $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$, de sorte que dans tous les cas, $p^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$.
Autrement dit, 3 divise $p^2 + 2$, qui ne peut donc pas être premier.
Ainsi, 3 est le seul nombre premier tel que $p^2 + 2$ soit encore premier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.6

Il s'agit donc de trouver le reste de la division euclidienne de $n = 7^{3^{11^{17}}}$ par 10, ou encore de trouver sa classe de congruence modulo 10.
On a $7^2 \equiv 9 \pmod{10}$, $7^3 \equiv 7^2 \cdot 7 \equiv 63 \equiv 3 \pmod{10}$ et $7^4 \equiv 7^3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{10}$.
Ainsi, si $a = 4k + r$ est la division euclidienne de a par 4, alors $7^a = (7^4)^k\, 7^r \equiv 7^r \pmod{10}$.
Donc il s'agit ici de déterminer la classe de congruence de $3^{11^{17}}$ modulo 4.
Or $3 \equiv -1 \pmod 4$ de sorte que $3^2 \equiv 1 \pmod 4$.
Et donc $3^b \equiv 3 \pmod 4$ si b est impair et $3^b \equiv 1 \pmod 4$ si b est pair.
Puisque 11^{17} est impair, $3^{11^{17}} \equiv 3 \pmod 4$, et donc $n \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$.
Donc le dernier chiffre de l'écriture décimale de n est un 3.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.7

On a $P^2 = \left(\prod_{d|n} d\right)^2$.
Mais à chaque diviseur d de n correspond un autre diviseur, qui est $\frac{n}{d}$.
Plus précisément, notons D_n l'ensemble des diviseurs positifs de n, et soit $\varphi_n : D_n \to D_n$ l'application définie par $\varphi_n(d) = \frac{n}{d}$.
Alors $\varphi_n \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{D_n}$, et donc φ_n est une bijection de D_n sur lui-même, égale à sa propre bijection réciproque.
En particulier, $\prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \frac{n}{d}$.
Et donc $P^2 = \prod_{d|n} d \prod_{d|n} \frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^N$.
Puisque P est positif, en passant à la racine, on en déduit que $P = n^{N/2}$.

Remarque Notons qu'avec nos notations, N est le cardinal de D_n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.8

Notons qu'un nombre N a une écriture décimale ne comportant que des 3 si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$N = \sum_{k=0}^{n} 3 \times 10^k = 3 \sum_{k=0}^{n} 10^k = 3\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n+1} - 1}{3}.$$

Remarque $n + 1$ est le nombre de chiffres de l'écriture décimale de N.

On a $2019 = 3 \times 673$, qui est donc la décomposition de 2019 en produit de facteurs premiers.
Par le petit théorème de Fermat, $10^{672} \equiv 1 \quad [673]$, de sorte que 673 divise $10^{672} - 1$.
Mais 9 est premier avec 673, et donc par le lemme de Gauss, puisque 673 divise $10^{672} - 1 = 9\frac{10^{672} - 1}{9}$, 673 divise $\frac{10^{672} - 1}{9}$.
Et donc $\frac{10^{672} - 1}{9}$ est un multiple de 673.
En multipliant par 3, $\frac{10^{672} - 1}{3}$ est un multiple de 2019, dont tous les chiffres de l'écriture décimale valent 3.

Nbe de chiffres Comme mentionné plus tôt, ce nombre est celui dont l'écriture décimale contient 672 fois le chiffre 3.

Remarque : *notons que nous n'avons pas nécessairement trouvé le plus petit multiple de* 2019 *dont l'écriture ne contient que des* 3.
De fait, une recherche avec `Python` *prouve que* $\frac{10^{224} - 1}{3}$ *est déjà un multiple de* 2019.
Ceci vient du fait que le petit théorème de Fermat, s'il nous garantit que $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$, *ne nous dit pas que* $p - 1$ *soit le plus petit entier* k *tel que* $a^k \equiv 1 \quad [p]$.
De fait, ici, $10^{224} \equiv 1 \quad [673]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.9

Il s'agit d'appliquer (bêtement) l'algorithme d'Euclide étendu.

1. $51 \wedge 438 = 3 = 43 \times 51 - 5 \times 438$. On a alors $51 \vee 438 = \dfrac{51 \times 438}{3} = 7446$.

2. $720 \wedge 1320 = 120 = 2 \times 720 - 1320$. On a donc $720 \vee 1320 = 7920$.

3. $77 \wedge 151 = 1 = 51 \times 77 - 26 \times 151$. Et donc $77 \vee 151 = 11\,627$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.10

Notons que $18x + 25y = 1$ est une équation de droite $(\mathscr{D})$. Résoudre cette équation, c'est donc trouver tous les points à coordonnées entières situées sur $\mathscr{D}$.

1.a. Déterminer une solution particulière, c'est trouver une relation de Bézout pour le couple $(18, 25)$. L'algorithme d'Euclide étendu nous fournit alors $18 \times 7 + 25 \times (-5) = 1$.
Donc $(7, -5)$ est solution.

1.b. L'équation s'écrit alors

$$18x + 25y = 18x_0 + 25y_0 \Leftrightarrow 18(x - x_0) = 25(y_0 - y).$$

Et alors, si (x, y) est une solution, 25 divise $18(x - x_0)$. Étant premier à 18, par le lemme de Gauss, il divise $x - x_0$: il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 25k + x_0$.

1.c. Si (x, y) est solution, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 25k + x_0$, alors $18k = y_0 - y$, donc $y = y_0 - 18k$.
Inversement, pour $k \in \mathbf{Z}$, alors $(25k + x_0, y_0 - 18k)$ est solution puisque

$$18(25k + x_0) + 25(y_0 - 18k) = 18x_0 + 25y_0 = 1.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(25k + 7, -5 - 18k),\ k \in \mathbf{Z}\}$.

2. L'équation $9x + 15y = 3$ est équivalente à l'équation $3x + 5y = 1$, où 3 et 5 sont premiers entre eux, et donc il est possible d'appliquer la même méthode que précédemment.
Notons qu'une solution particulière s'obtient sans faire appel à l'algorithme d'Euclide étendu : $3 \times 2 + 5 \times (-1) = 1$.
Donc $(2, -1)$ est solution particulière.
Et alors sur le même principe, on prouve que les solutions de $3x + 5y = 1$ sont les $(2+5k, -1-3k), k \in \mathbf{Z}$, et donc les solutions de $9x+15y = 3$ sont les $(6+15k, -2-9k), k \in \mathbf{Z}$.

Là encore, nous pouvons simplifier un peu, et diviser l'équation par $42 \wedge 45 = 3$. On obtient alors l'équation $14x + 15y = 2$.
Mais $15 - 14 = 1$, donc $15 \times 2 + (-2) \times 14 = 2$.
On montre alors de même que précédemment que les solutions sont les $(-6 + 15k, 6 - 14k), k \in \mathbf{Z}$.

Enfin, pour la dernière, on a $12 \wedge 30 = 6$. Et donc 6 divise toujours $12x + 30y$. Or $6 \nmid 15$, donc l'équation $12x + 30y = 15$ n'a pas de solutions entières.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.11

Si $d \mid a$, alors d est premier avec b.
En effet, si on note $d' = d \wedge b$, alors $d' \mid a$ et $d' \mid b$, donc $d' \mid a \wedge b = 1$. Donc $d \wedge b = 1$.
Et donc si $d \mid bc$, alors[2] $d \mid c$. On en déduit qu'un diviseur commun à a et bc divise a et c, donc en particulier, $a \wedge (bc)$ divise $a \wedge c$.

[2] C'est le lemme de Gauss.

Inversement, $a \wedge c$ divise à la fois a et bc, donc divise $a \wedge (bc)$.
Et donc $a \wedge (bc) = a \wedge c$.

Détails
Les deux PGCD sont positifs, donc s'ils se divisent mutuellement, ils sont égaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.12

1. Si $a = bq + r$, alors

$$\begin{aligned} 2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 &= 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = 2^r \left(2^{bq} - 1\right) + 2^r - 1 \\ &= 2^r \left(2^b - 1\right)\left(1 + 2^b + \cdots + 2^{b(q-1)}\right) + 2^r - 1. \end{aligned}$$

Puisque $2^r - 1 < 2^b - 1$, il s'agit bien là de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

2. Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de a et b. Notons r_1 le reste de la division euclidienne de a par b, r_2 le reste de la division euclidienne de b par r_1, etc, jusqu'à r_n, le dernier reste non nul (et donc le PGCD de a et b), et donc $r_n = 0$.
Alors le reste de la division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$ est $2^{r_1} - 1$. Puis le reste de la division de $2^b - 1$ par $2^{r_1} - 1$ est $2^{r_2} - 1$, etc. On arrive alors au reste de la division euclidienne de $2^{r_{n-1}} - 1$ par $2^{r_n} - 1$ qui vaut $2^0 - 1 = 0$.
Par le lemme d'Euclide, on a donc

$$(2^a-1)\wedge(2^b-1) = (2^b-1)\wedge(2^{r_1}-1) = (2^{r_1}-1)\wedge(2^{r_2}-1) = \cdots = (2^{r_{n-1}}-1)\wedge(2^0-1) = 2^{r_{n-1}}-1 = 2^{a\wedge b}-1.$$

Donc le PGCD de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^{r_n} - 1$, ce qui est bien le résultat attendu.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.13

1. Commençons par le cas où a et b sont premiers entre eux.
Puisque $a \vee b = ab$, il s'agit donc de prouver que $(a + b) \wedge (ab) = 1$.
Alors $a + b$ est premier avec a, puisqu'un diviseur commun de $a + b$ et a doit diviser b, et donc doit diviser $a \wedge b = 1$.
De même, $a + b$ est premier avec b. Et donc $a + b$ est premier avec ab.

> **Rappel**
> Un entier est premier avec un produit si et seulement si il est premier avec chacun de ses facteurs.

Alternative : supposons qu'il existe un nombre premier p divisant $(a + b) \wedge ab$.
Alors p divise a ou p divise b.
Mais si $p \mid a$ et $p \mid a + b$, alors $p \mid b$, donc $p \mid a \wedge b = 1$.
Et de même, si $p \mid b$, alors $p \mid a$ et donc $p \mid 1$.
Or aucun nombre premier ne divise 1, donc $(a + b) \wedge (ab)$ n'a pas de diviseur premier, ce qui n'est possible que si il est égal à 1.

> ⚠ **Attention !**
> Ici il est fondamental de supposer p premier, sans cette hypothèse, p peut diviser un produit dans diviser aucun de ses termes. Par exemple $4 \mid 2 \times 6$, mais $4 \nmid 2$ et $4 \nmid 6$.

Dans le cas général, notons $d = a \wedge b$, et soient a', b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors

$$(a+b)\wedge(a\vee b) = [d(a'+b)']\wedge[(da')\vee(db')] = d\,[(a'+b')\wedge(a'\vee b')] = d\times 1 = d = a\wedge b.$$

2. Nommons $(\mathscr{S})$ le système de l'énoncé.
Si (a, b) est une solution de $(\mathscr{S})$, alors $a \wedge b = (a + b) \wedge (a \vee b) = 144 \wedge 420 = 12$.
Donc il existe a' et b' premiers entre eux tels que $a = 12a'$ et $b = 12b'$.
Et alors (a, b) est solution du système $(\mathscr{S})$ si et seulement si il existe deux entiers a', b' premiers entre eux tels que $(a, b) = (12a', 12b')$, avec (a, b') solution de $\begin{cases} a' + b' = 12 \\ a'b' = 35 \end{cases}$ $(\mathscr{S}')$.
Ce système se résout de manière classique : les solutions sont les couples (x, y) tels que $\{x, y\}$ est l'ensemble des racines de $X^2 - 12X + 35$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 144 - 4 \times 35 = 4$.
Donc les deux racines en sont $\dfrac{12 + \sqrt{4}}{2} = 7$ et $\dfrac{12 - \sqrt{4}}{2} = 5$.
Ainsi, les couples de réels (a', b') solutions du système $(\mathscr{S}')$ sont $(5, 7)$ et $(7, 5)$.
Et donc les solutions au système $(\mathscr{S})$ de départ sont $(12 \times 5, 12 \times 7) = (60, 84)$ et $(84, 60)$.
Alternative *: on peut également remarquer que* $35 = 5\times 7 = 35\times 1$ *sont les seules décompositions de* 35 *en produit de deux entiers, et que seule la première décomposition conduit à une somme égale à* 12.

> **Méthode**
> Pour calculer ce PGCD on peut, au choix utiliser l'algorithme d'Euclide, ou utiliser les décompositions en produits de facteurs premiers de 420 et 144.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.14

Notons $d = a \wedge b$, de sorte qu'il existe a', b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.
On a donc $(a \wedge b)^n = d^n(a' \wedge b')^n = d^n$, et $a^n \wedge b^n = (d^n a'^n) \wedge (d^n b'^n) = d^n\,(a'^n \wedge b'^n)$.
Il s'agit donc de prouver que $a'^n \wedge b'^n = 1$, soit encore que a'^n et b'^n sont premiers entre eux.

Mais puisque a' et b' sont premiers entre eux, a' est premier avec $b' \times b' \times \cdots \times b' = b'^n$.
Et alors b'^n est premier avec a', donc avec $a' \times a' \times \cdots \times a' = a'^n$.
Et donc $a'^n \wedge b'^n = 1$, et donc $(a \wedge b)^n = d^n = d^n(a'^n \wedge b'^n) = a^n \wedge b^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.15

1. Supposons que $a \mid c$ et $b \mid c$. Alors c est un multiple commun de a et b, et donc est un multiple de $a \wedge b = ab$. Donc $ab \mid c$.

Inversement, puisque a et b divisent ab, si $ab \mid c$, alors $a \mid c$ et $b \mid c$.

> **Toujours vrai**
> Notons que cette implication ne nécessite pas que a et b soient premiers entre eux, et est toujours vraie.

2.a. Si vous êtes chanceux, vous pouvez peut-être trouver directement une solution particulière, et dans ce cas il ne faut pas se priver de l'utiliser. Par contre, si en deux minutes vous ne voyez pas de solution particulière «évidente», alors il ne faut pas persévérer et essayer de mettre en œuvre une solution un peu plus systématique.

Un entier x_0 est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si il existe deux entiers relatifs k_1 et k_2 tels que $\begin{cases} x_0 = 6 + 17k_1 \\ x_0 = 4 + 15k_2 \end{cases}$
En particulier, en soustrayant ces deux équations, il vient $2 = 15k_2 - 17k_1$.
Ce système a alors une solution relativement évidente : $2 = 15 \times (-1) - 17 \times (-1)$.
Si $k_1 = k_2 = -1$, on a donc $x_0 = 6 - 17 = 4 - 15 = -11$.
Ainsi, -11 est une solution particulière du système.

2.b. Soit $x \in \mathbf{Z}$. Alors x est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si

$$\begin{cases} x \equiv x_0 \pmod{17} \\ x \equiv x_0 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 \equiv 0 \pmod{17} \\ x - x_0 \equiv 0 \pmod{15} \end{cases} \Leftrightarrow 15 \mid (x - x_0) \text{ et } 17 \mid (x - x_0).$$

Par la question 1, qui s'applique puisque 15 et 17 sont premiers entre eux[3], cette dernière condition est vérifiée si et seulement si $x - x_0$ est divisible par $15 \times 17 = 255$.
Donc les solutions de $(\mathscr{S})$ sont les $x_0 + 255k = 255k - 11$, $k \in \mathbf{Z}$.

[3] 17 est premier et ne divise pas 15.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.16

Il s'agit de prouver que la suite $(F_{n+1} \wedge F_n)_n$ est constante, et donc autrement dit que pour tout n, $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = F_{n+1} \wedge F_n$.

Commençons par noter[4] que (F_n) est strictement croissante.

[4] Il faudrait une récurrence pour le prouver proprement...

Et alors $F_{n+2} = aF_{n+1} + F_n$ est la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1}.
Le lemme d'Euclide nous affirme qu'alors $F_{n+2} \wedge F_{n+1} = F_{n+1} \wedge F_n$, d'où le résultat cherché.

Rappel
$a \wedge b$ est le plus grand, au sens de la divisibilité, diviseur commun de a et b : tout autre diviseur commun divise le PGCD.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.17

Nous savons que $a \wedge b$ divise $au + bv = d$.
D'autre part, d étant un diviseur commun de a et b, $d \mid a \wedge b$.
Et donc d et $a \wedge b$ étant positifs, on a bien l'égalité $d = a \wedge b$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.18

Notons $d = a \wedge b$, de sorte qu'il existe deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Soit alors $z \in \mathbf{U}_{a \wedge b} = \mathbf{U}_d$.
Alors $z^a = z^{a'd} = \left(z^d\right)^{a'} = 1^{a'} = 1$, donc $z \in \mathbf{U}_a$.
De même, on prouve que $z \in \mathbf{U}_b$, et donc $z \in \mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b$, de sorte que $\mathbf{U}_d \subset \mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b$.
Inversement, par l'identité de Bézout, il existe u et v tels que $d = au + bv$, et donc pour $z \in \mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b$, on a

$$z^d = z^{au+bv} = z^{au} z^{bv} = (z^a)^u \left(z^b\right)^v = 1.$$

Et donc $z \in \mathbf{U}_d$, de sorte que $\mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b \subset \mathbf{U}_d$, et donc par double inclusion, $\mathbf{U}_d = \mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b$.

Plus généralement
Si $p \mid q$, alors $\mathbf{U}_p \subset \mathbf{U}_q$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.19

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Alors $k \mid n!$ et donc $k \mid n! + k$.
Et par conséquent, $n! + k$ n'est pas premier.
Pour obtenir 1000 nombres consécutifs, il faut donc $n - 2 + 1 = 1000 \Leftrightarrow n = 1001$.
Et donc les entiers $1001!+2, 1001!+3, \dots, 1001!+1001$ sont 1000 nombres consécutifs, dont aucun n'est premier par ce qui précède. Aucun de ces entiers n'est premier car $1001! + k$ est divisible par k, pour $2 \leqslant k \leqslant 1000$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.20

Vous avez probablement reconnu des coefficients du triangle de Pascal : 4, 6, 4, 1, il ne nous manque qu'un 1 au début de cette séquence pour qu'il s'agisse d'une ligne du triangle de Pascal.
Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 &= (n+1)^4 - n^4 \\ &= \left((n+1)^2\right)^2 - \left(n^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$= ((n+1)^2 - n^2)((n+1)^2 + n^2) = (2n+1)(2n^2+2n+1).$$

Nous avons donc deux diviseurs de $4n^3+6n^2+4n+1$, tous deux strictement supérieurs à 1, donc $4n^3+6n^2+4n+1$ n'est pas premier.

Solution de l'exercice 15.21

1. Il s'agit de prouver que le seul facteur premier de n est 2.
Écrivons $n = 2^m q$ avec q impair. Une telle écriture est toujours possible : puisque si $m = v_2(n)$, alors $n = 2^{v_2(n)}q$, avec $q \wedge 2 = 1$, c'est-à-dire q impair.
Alors $2^n = \left(2^{2^m}\right)^q$, et donc

$$2^n + 1 = \left(2^{2^m}\right)^q - (-1)^q = \left(2^{2^m}+1\right)\left(\sum_{k=0}^{q-1} 2^{2^m k}(-1)^{q-1-k}\right).$$

Nous avons alors là une factorisation de 2^n+1, qui est premier.
Donc $2^{2^m}+1 = 1$ ou $2^{2^m}+1 = 2^n+1$.
Le premier cas est clairement impossible, donc $2^{2m}+1 = 2^n+1$, donc $n = 2^m$.

Astuce
La troisième identité remarquable, si elle permet de factoriser $a^n - b^n$ quel que soit n permet également de factoriser $a^m + b^m$ lorsque m est impair car $+b^m = -(-b)^m$.

Commentaire historique *: les premiers nombres de Fermat sont $F_0 = 2^{2^0}+1 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65\,537$.*
Ces nombres sont tous premiers. On a alors $F_5 = 4\,294\,967\,297$, dont il est difficile de savoir sans ordinateur s'il est ou non premier...
Fermat a conjecturé que les F_n étaient tous premiers. Il a fallu attendre Euler pour savoir que $64 \mid F_5$, qui n'est donc pas premier.
À l'heure actuelle, on ne connaît pas d'autres nombres de Fermat premiers autres que F_0, F_1, F_2, F_3, F_4. Et on ne sait pas s'il en existe d'autres ou non.
Ces nombres premiers apparaissent dans un résultat surprenant du à Wantzel : on peut construire un polygone régulier à n côtés uniquement à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée[5] si et seulement si n est de la forme une puissance de 2 fois un produit de nombres premiers de Fermat distincts.
Par exemple on peut tracer à la règle et au compas un polygone à $6, 15$ ou $68 = 2^2 \times 17$ côtés, mais pas un polygone à $25 = 5^2$ ou à 11 côtés.

[5] Vous savez par exemple comment obtenir un hexagone puisque vous avez déjà tracé une rosace...

2.a. Prouvons le résultat par récurrence sur n.
On a $F_1 = 2^2+1 = 5 = 3+2 = (2^{2^0}+1)+2 = F_0+2$. Donc la récurrence est bien initialisée.
Supposons que $F_{n+1} = F_0F_1\cdots F_n + 2$.
Alors $F_{n+2} = 2^{2^{n+2}}+1$, et donc

$$F_{n+2} - 1 = 2^{2^{n+2}} = 2^{2^{n+1}\times 2} = \left(2^{2^{n+1}}\right)^2 = (F_{n+1}-1)^2 = F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} + 1.$$

Soit encore $F_{n+2} = F_{n+1}^2 - 2F_{n+1} + 2 = F_{n+1}\left(F_{n+1}-2\right) + 2$.
Mais par hypothèse de récurrence, $F_{n+1} = F_0F_1\cdots F_n + 2$, et donc

$$F_{n+2} = F_{n+1}\left(F_0F_1\cdots F_n + 2 - 2\right) + 2 = F_0\cdots F_{n+1} + 2.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} = F_0\cdots F_n + 2$.

2.b. Supposons que $m < n$. Alors $F_n = F_0\cdots F_m\cdots F_{n-1} + 2$.
Si d est un diviseur commun à F_n et F_m, c'est donc un diviseur de $2 = F_n - F_m(F_0\cdots F_{m-1}F_{m+1}\cdots F_{n-1})$.
Donc $d = 1$ ou $d = 2$. Or, F_n et F_m sont impairs, donc ne peuvent avoir 2 comme diviseur.
On en déduit que 1 est l'unique diviseur commun à F_n et à F_m, de sorte que F_n et F_m sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 15.22

Quitte à échanger a et b, on peut supposer que $v_p(a) \leqslant v_p(b)$, et donc que $\min(v_p(a), v_p(b)) = v_p(a)$.
Puisque $p^{v_p(a)}$ divise $p^{v_p(b)}$ et que $p^{v_p(b)}$ divise b, alors $p^{v_p(a)}$ divise b.
Comme $p^{v_p(a)}$ divise évidemment a, il divise $a+b$.
Et donc $v_p(a+b) \geqslant v_p(a)$, ce qui prouve bien l'inégalité demandée.

Inégalité
Notons que cette inégalité peut être stricte. Par exemple, $v_5(15) = v_5(10) = 1$, mais $v_5(10+15) = 2$.

Si $v_p(b) \neq v_p(a)$, notons alors a' et b' deux entiers tels que $a = p^{v_p(a)}a'$ et $b = p^{v_p(b)}b'$.
Alors $a+b = p^{v_p(a)}\left(a' + p^{v_p(b)-v_p(a)}b'\right)$.
Mais p ne peut pas diviser $a' + p^{v_p(b)-v_p(a)}b'$, car divisant déjà[6] $p^{v_p(b)-v_p(a)}b'$, il diviserait

[6] $v_p(b) - v_p(a) \geqslant 1$.

alors $a' = \left(a' + p^{v_p(b)-v_p(a)}b'\right) - p^{v_p(b)-v_p(a)}b'$.
On en déduit donc que $v_p(a+b) = v_p(a) = \min(v_p(a), v_p(b))$.
En revanche, si $v_p(a) = v_p(b)$, alors on ne peut faire mieux que l'inégalité générale.
Elle peut toujours être une égalité, par exemple, si $p \geqslant 5$ est premier, alors $v_p(p) = 1 = v_p(2p)$ et $v_p(p+2p) = v_p(3p) = 1$.
Mais on peut aussi avoir $v_p(p^n+1) = 0$, $v_p(p^n-1) = 0$ et $v_p(p^n+1+p^n-1) = v_p(2p^n) \geqslant n$.

Solution de l'exercice 15.23

Commençons par décomposer 2730 en produit de facteurs premiers.
Il est clairement divisible par 10, et 273 est divisible par 3.
Donc $2730 = 2\times 3\times 5\times 91 = 2\times 3\times 5\times 7\times 13$.
Par le petit théorème de Fermat, on a, pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $a^{13} \equiv a \quad [13]$.
De même, $a^7 \equiv a \quad [7]$ et donc $a^{13} = a^7a^6 \equiv aa^6 \equiv a^7 \equiv a \quad [7]$.
Toujours par le petit théorème de Fermat, $a^5 \equiv a \quad [5]$ et donc $a^{13} \equiv a^5a^5a^3 \equiv a^5 \equiv a \quad [5]$.
Enfin, $a^{13} \equiv \left(a^3\right)^4 a \equiv a^4a \equiv a^3a^2 \equiv a^3 \equiv a \quad [5]$.
Et pour 2, évitons le recours au petit théorème de Fermat : a^{13} et a ont la même parité, et donc $a^{13}-a$ est divisible par 2.
Ainsi, 2, 3, 5, 7 et 13 divisent tous $a^{13}-a$. Donc leur PPCM divise $a^{13}-a$.
S'agissant d'entiers premiers entre eux, car tous premiers et distincts, leur PPCM est égal à leur produit : $2730 \mid a^{13}-a$, soit $a^{13} \equiv a \quad [2730]$.

Parité
Notons que pour $p = 2$, le petit théorème de Fermat nous dit que $a^2 \equiv a \quad [2]$, c'est-à-dire que a^2 et a sont de même parité. Ce que vous savez depuis bien longtemps !

Solution de l'exercice 15.24

Il s'agit donc de prouver que $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.
Puisque p et q sont premiers entre eux, il suffit donc de prouver que $p^{q-1}+q^{p-1}-1$ est divisible à la fois par p et par q.

Par le petit théorème de Fermat, on a donc $p^{q-1} \equiv 1 \;[q]$ et $q^{p-1} \equiv 1 \;[p]$.
Puisque $p^{q-1} \equiv 0 \;[p]$, $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 \;[p]$.
Donc $p \mid p^{q-1}+q^{p-1} - 1$.
De même, $q \mid p^{q-1}+q^{p-1}-1 \;[q]$.
Et donc $pq \mid p^{q-1}+q^{p-1}-1$, de sorte que $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv 1 \;[pq]$.

Solution de l'exercice 15.25

Par le petit théorème de Fermat, $2^4 \equiv 1 \;[5]$. Par ailleurs, $2^3 \equiv 3 \;[5]$ et donc $2^{4k+3} \equiv 3 \;[5]$, de sorte que $5 \mid 2^{4k+3}-3$.
De même, $2^{12} \equiv 1 \;[13]$ et $2^4 \equiv 3 \;[13]$, donc $2^{12k+4} \equiv 3 \;[13]$, donc $13 \mid 2^{12k+4} \;[13]$.

En revanche, $2^6 \equiv -1 \;[65]$, donc $2^{12} \equiv 1 \;[65]$.
Donc $2^{n+12}-3 \equiv 2^n - 3 \;[65]$. Autrement dit, la suite des restes de la division euclidienne de 2^n par 65 est périodique de période 12.
Il suffit donc de calculer les restes des divisions euclidiennes de 2^k-3 par 65 pour $k \in [\![0, 11]\!]$.

Les premières puissances de 2 modulo 65 sont $2, 4, 8, 16, 32, 64$.
Or $2^6 = 64 \equiv -1 \;[65]$.
Donc $2^7 \equiv -2 \;[65]$, $2^8 \equiv -4, \dots, 2^{11} \equiv -32 \;[65]$, $2^{12} \equiv 1 \;[65]$.
Et alors aucune de ces puissances n'est congrue à 3 modulo 65, si bien que 2^n-3 n'est jamais divisible par 65.

Solution de l'exercice 15.26

Nous savons que tout diviseur de n s'écrit de manière unique $\displaystyle\prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$, avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant v_{p_i}(n)$, et qu'inversement, tout nombre de cette forme divise n.
Choisir un diviseur de n, c'est donc choisir les k entiers $\beta_1, \dots, \beta_k$, avec pour tout i, $0 \leqslant \beta_i \leqslant v_{p_i}(n)$.
Le nombre β_1 peut donc prendre les valeurs $0, 1, \dots, v_{p_1}(n)$, donc il y a $v_{p_1}(n)+1$ choix possibles pour la valeur de β_1.
Puis, β_1 étant choisi, il y a $v_{p_2}(n)+1$ choix possibles pour β_2, etc.

Soit un total de $\left(v_{p_1}(n)+1\right)\left(v_{p_2}(n)+1\right)\cdots\left(v_{p_k}(n)+1\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^k \left(v_{p_i}(n)+1\right)$ diviseurs de n.

Produit
Le fait qu'on fasse un produit sera vraiment justifié plus tard dans l'année, mais cela doit vous sembler naturel.
Un exemple plus simple serait celui où vous avez le choix entre 3 langues et deux options (SI ou info).
Pour chacun des 3 choix de langue, il y a donc deux options, soit un total de 3×2 couplages langue/option.

Solution de l'exercice 15.27

Il s'agit de remarquer qu'un entier k est une puissance $n^{\text{ème}}$ si et seulement si pour tout $p \in \mathscr{P}$, $v_p(k)$ est divisible par n.
En effet, si $k = c^n$, on a alors pour tout p premier, $v_p(k) = v_p(c^n) = v_p(c)$.
Et inversement, si pour tout p premier, $v_p(k) = nq_p$, alors

$$k = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{nq_k} = \left(\prod_{p \in \mathscr{P}} p^{q_p}\right)^n.$$

Remarque
Gardons à l'esprit que ceci vaut notamment si $v_p(k) = 0$.

Si ab est une puissance $n^{\text{ème}}$, $ab = c^n$, alors on a $ab = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{nv_p(c)}$.

Soit encore, pour tout $p \in \mathscr{P}$, $v_p(ab) = nv_p(c) \Leftrightarrow v_p(a) + v_p(b) = nv_p(c)$.
Mais a et b étant premiers entre eux[7], pour tout $p \in \mathscr{P}$, $v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$.
Si $v_p(a) = 0$, alors $v_p(a)$ est divisible par n, et $v_p(b) = nv_p(c)$ est divisible par n.
On conclut de même si $v_p(b) = 0$.
Donc pour tout $p \in \mathscr{P}$, $v_p(a)$ et $v_p(b)$ sont des multiples de n, donc a et b sont des puissances $n^{\text{èmes}}$.

[7] Et c'est ici qu'il s'agit d'une hypothèse fondamentale.

Et inversement, si $a = c^n$ et $b = d^n$ sont des puissances $n^{\text{èmes}}$, alors $ab = (cd)^n$ est une puissance $n^{\text{ème}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.28

Il s'agit donc de prouver que 100! s'écrit comme un nombre impair fois 2^{97}.
Soit encore que dans la décomposition de 100! en produit de facteurs premiers, 2 apparaît 97 fois. Ce qui signifie que $v_2(100!) = 97$.

Par définition, $100! = 1 \times 2 \times \cdots \times 98 \times 99 \times 100$.
Les facteurs 2 ne proviennent que des nombres pairs $2, 4, 6, \ldots, 98, 100$.
Autrement dit, puisque $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99$ est impair,

$$v_2(100!) = v_2(2\times4\times\cdots\times98\times100) = v_2(2^{50}\times1\times2\times\cdots\times49\times50) = v_2(2^{50})+v_2(50!) = 50+v_2(50!).$$

De la même manière, $v_2(50!) = 25 + v_2(25!)$.
On a alors $v_2(25!) = v_2(2 \times 4 \times \cdots \times 22 \times 24) = 12 + v_2(12!)$.
Puis $v_2(12)! = 6 + v_2(6!)$.
Et un calcul direct[8] nous donne $v_2(6!) = v_2(2) + v_2(4) + v_2(6) = 4$.
Et donc enfin, $v_2(100!) = 50 + 25 + 12 + 6 + 4 = 97$, d'où le résultat annoncé.
Notons que nous n'avons pas déterminé la valeur de l'entier n, mais l'énoncé demandait juste de prouver son existence, pas de le calculer.
Si vraiment vous en voulez la valeur, $n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{100!}{2^{97}} - 1\right)$...
Plus généralement, il existe une formule pour la valuation p-adique d'une factorielle, due à Legendre, qui affirme que pour tout premier p,

[8] Ou une étape supplémentaire si le cœur vous en dit.

$$v_p(n!) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Remarque
Cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.29

Notons $\alpha_n = \left(1 + \sqrt{3}\right)^{2n+1}$.

1. En utilisant la formule du binôme, il vient

$$\begin{aligned}
\left(1 + \sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1 - \sqrt{3}\right)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(-\sqrt{3}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1 + (-1)^k\right) \sqrt{3}^k \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 2\sqrt{3}^k \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2 \cdot 3^i \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Si k est impair, $1 + (-1)^k = 0$.
Et si k pair, $1 + (-1)^k = 2$.

Donc déjà $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}$ est un entier.
D'autre part, puisque $\sqrt{3}\in]1,2[$, $1-\sqrt{3}\in]-1,0[$, de sorte que $-1<(1-\sqrt{3})^{2n+1}<0$.
Et donc $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}$ est un entier, avec

$$\alpha_n-1<\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}<\alpha_n.$$

Donc nécessairement, $\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=\lfloor\alpha_n\rfloor=u_n$.

2. La formule prouvée ci-dessus nous donne

$$\begin{aligned}u_n &= (1+\sqrt{3})\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^2\right)^n+(1-\sqrt{3})\left(\left(1-\sqrt{3}\right)^2\right)^n\\ &= \left(1+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)^n\\ &= 2^n\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\end{aligned}$$

On a donc $v_2(u_n)=n+v_2\left(\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\right)$.
On a alors

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\underbrace{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}_{=v_n}+\underbrace{\sqrt{3}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]}_{=w_n}.$$

De nouveau avec le binôme, on a

$$v_n=2\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k2^{n-k}=2\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}3^i2^{n-2i}.$$

Il est clair qu'il s'agit là d'un entier pair.
► Si n est pair, alors tous les termes de la somme sont divisibles par 2, sauf le dernier qui est $\binom{n}{n}3^{n/2}2^{n-n}$.
Donc v_n est divisible par 2, mais pas par 4, donc $v_2(v_n)=1$.
► En revanche, si n est impair, alors tous les termes de la somme sont divisibles par 2, y compris le dernier qui est cette fois $\binom{n}{n-1}3^{(n-1)/2}2^{n-(n-1)}=n3^{(n-1)/2}2$.
Non seulement ce terme est pair, mais en plus il n'est pas divisible par 4 car n est impair.
Tous les autres termes de la somme étant divisibles par 4, on en déduit que $v_2(v_n)=2$.
Pour le dire autrement, on a $v_n\equiv 2 \pmod 4$ si n est pair et $v_n\equiv 0 \pmod 4$ si n est impair.

Sur le même principe, on a

$$w_n=2\sqrt{3}\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k2^{n-k}=2\sqrt{3}\sum_{i=0}^{\lfloor(n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2i+1}\sqrt{3}^{2i+1}2^{n-2i-1}=2\cdot 3\sum_{i=0}^{\lfloor(n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2i+1}3^i2^{n-2i-1}.$$

Comme pour v_n, on prouve que $v_2(w_n)=2$ si n est pair et $v_2(w_n)=1$ si n est impair.
Autrement dit, que $w_n\equiv 0 \pmod 4$ si n est pair et $w_n\equiv 2 \pmod 4$ si n est impair.

Donc dans tous les cas, $v_n+w_n\equiv 2 \pmod 4$, ce qui signifie que $v_2(v_n+w_n)=1$: il s'agit d'un nombre divisible par 2 et pas par 4.
Et donc au final, on a $v_2(u_n)=n+v_2(v_n+w_n)=n+1$.

> **Alternative**
> On peut utiliser le résultat de l'exercice 22, en notant que $v_2(v_n)\neq v_2(w_n)$ et donc
> $$\begin{aligned}&v_2(v_n+w_n)\\ &=\min(v_2(v_n),v_2(w_n))=1.\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.30

1.a. Soit $x\in[\![1,p-1]\!]$. Puisque p est premier et ne divise pas x, x et p sont premiers entre eux.
Et donc par le théorème de Bézout, il existe $(u,v)\in\mathbf{Z}^2$ tels que $xu+pv=1$.
Remarquons que u ne peut être divisible par p, faute de quoi 1 serait lui aussi divisible par p, ce qui est absurde.
Notons alors $u=ap+b$ la division euclidienne de u par p, de sorte que $1\leqslant b\leqslant p-1$. Il vient donc $xu+pv=xb+p(ax+v)=1$ et par conséquent $xu\equiv 1 \quad [p]$.
Ceci prouve donc l'existence demandée.

> **$b\neq 0$**
> Nous venons de dire que u n'est pas divisible par p, donc $b\neq 0$.

Passons à l'unicité, et supposons qu'il existe deux entiers y_1 et y_2 dans $[\![1, p-1]\!]$ tels que $xy_1 \equiv xy_2 \quad [p]$.
Alors $x(y_1 - y_2) \equiv 0 \quad [p]$ et donc est divisible par p.
Puisque x est premier avec p, par le lemme de Gauss, on a donc $p \mid (y_1 - y_2)$.
Or, $-(p-2) \leqslant y_1 - y_2 \leqslant p-2$, et le seul nombre divisible par p dans $[\![-(p-2), (p-2)]\!]$ est 0. Donc $y_1 = y_2$.

Nous avons donc prouvé qu'il existe un unique $y \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $xy \equiv 1 \quad [p]$.

1.b. Rappelons que $(p-1)! = \displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} k$.
L'idée est de regrouper chacun des termes k de ce produit avec son inverse modulo p, c'est-à-dire avec l'unique élément y de $[\![1, p-1]\!]$ tel que $ky \equiv 1 \quad [p]$.
Toutefois, ce regroupement ne sera pas possible lorsque k est égal à son inverse modulo p.
En effet, chacun des éléments de $[\![1, p-1]\!]$ n'apparaît qu'une seule fois dans $(p-1)!$
Autrement dit, les termes qu'on ne pourra simplifier avec leur inverse sont les k tels que $k^2 \equiv 1 \quad [p]$.
Mais $k^2 \equiv 1 \quad [p] \Leftrightarrow k^2 - 1 \equiv 0 \quad [p] \Leftrightarrow p \mid k^2 - 1$.
Puisque $k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$, alors p divise $k^2 - 1$ si et seulement si $p \mid k-1$ ou $p \mid k+1$.
Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, ceci n'est possible que dans deux cas : $k = 1$ et $k = p-1$.

Ainsi, après avoir regroupé les termes deux à deux lorsque c'était possible, il vient

$$(p-1)! \equiv 1 \times (p-1) \equiv p - 1 \equiv -1 \quad [p].$$

2. Supposons donc que $(n-1)! \equiv -1 \quad [n]$.
Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $(n-1)! = -1 + kn \Leftrightarrow kn - (n-1)! = 1$.
Par le théorème de Bézout, n et $(n-1)!$ sont premiers entre eux.
En particulier, aucun des entiers de $[\![2, n-1]\!]$, qui sont des diviseurs de $(n-1)!$, ne divise n.
Et donc les seuls diviseurs positifs de n sont 1 et n : n est premier.

Commentaires *: si on sait que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps, la première partie est évidente : tout élément non nul possède un unique inverse.*
Et alors le regroupement des termes deux par deux dans la question 1.b. revient à regrouper chaque élément avec son inverse, ce qui n'est possible que pour ceux qui ne sont pas égaux à leur propre inverse modulo p.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.31

Notons tout de suite qu'il y a un cas trivial : celui où $m = n = 1$, où alors $H_{m,n} = 1 \in \mathbf{N}$.
Nous allons prouver qu'il s'agit de la seule solution.
Dans la suite, on suppose donc $n \geqslant 2$. Puisque $\frac{1}{n}$ n'est pas un entier, on peut également supposer $m < n$.
Comme indiqué, nous allons donc nous intéresser aux valuations 2-adiques des $k \in [\![m, n]\!]$.
Plus précisément, notons α la plus grande de ces valuations, c'est-à-dire $\alpha = \max\{v_2(k),\ m \leqslant k \neq n\}$.
Notons que $\alpha \geqslant 1$, puisque m étant différent de n, il existe au moins un entier pair entre m et n.
Alors cette valuation n'est atteinte qu'une seule fois : il existe un unique $k \in [\![m, n]\!]$ tel que $v_2(k) = \alpha$.
En effet, supposons par l'absurde qu'il existe deux tels entiers $k < k'$.
Alors $k + 2^\alpha$, qui est le multiple de 2^α immédiatement supérieur à k est également entre m et n (il est inférieur ou égal à k').
Mais puisque $k = 2^\alpha p$, avec p impair, $k + 2^\alpha = 2^\alpha(p+1) = 2^{\alpha+1}\dfrac{p+1}{2}$, qui possède une valuation 2-adique supérieure ou égale à $\alpha + 1$.

> **Explications**
> De deux multiples successifs de 2^α, l'un des deux est un multiple de $2^{\alpha+1}$.
> Cela généralise un résultat bien connu : de deux nombres pairs successifs, l'un est multiple de 4.

Notons alors $p = 2^\alpha q$, avec q impair, le PPCM des entiers de $[\![m, n]\!]$. Notons également ℓ l'unique entier de $[\![m, n]\!]$ tel que $v_2(\ell) = \alpha$.
Et pour tout $k \in [\![m, n]\!]$, notons a_k l'entier tel que $\frac{1}{k} = \frac{a_k}{p} \Leftrightarrow ka_k = p$.
Alors pour $k \neq \ell$, puisque $v_2(k) < \alpha$, $v_2(a_k) \geqslant 1$, donc a_k est pair.
En revanche, $v_2(a_\ell) = 0$, et donc a_ℓ est impair.
Et alors $H_{m,n} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \dfrac{1}{2^\alpha q}\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Puisque $\sum_{k=m}^{n} a_k$ est impair, p ne divise pas $\sum_{k=m}^{n} a_k$, et donc $H_{m,n}$ n'est pas entier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 15.32

1. Nous savons que $\langle\overline{1}\rangle = \left\{k\langle\overline{1}\rangle,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, où pour $k \geqslant 1$, $k\overline{1} = \overline{1} + \overline{1} + \cdots + \overline{1} = \overline{k}$.
   Et donc en particulier, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{k} \in \langle\overline{1}\rangle$.
   Puisque $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\overline{k}, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, on a donc $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \subset \langle\overline{1}\rangle$, et l'inclusion réciproque étant évidente, on a égalité.
2. Soient a, a' deux représentants de la même classe de congruence modulo n.
   Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $a' = a + nk$. Mais alors, par le lemme d'Euclide, $a \wedge n = a' \wedge n$.

   Par Bézout, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $au + bv = d$, et donc $\overline{d} = \overline{au} = u\overline{a}\ \in \langle\overline{a}\rangle$.
   Donc déjà $\langle\overline{d}\rangle \subset \langle\overline{a}\rangle$.
   Inversement, il existe $a' \in \mathbf{Z}$ tel que $a = da'$, et donc $\overline{a} = \overline{da'} = a'\overline{d} \in \overline{d}$, donc $\langle\overline{a}\rangle \subset \langle\overline{d}\rangle$.
   Donc $\langle\overline{a}\rangle = \langle\overline{d}\rangle$.

   > **Rappel**
   > Le groupe engendré par $\overline{d}$ est inclus dans tout sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ contenant $\overline{d}$.

   Pour le cardinal de $\langle d\rangle$, notons simplement que $\frac{n}{d}d = n$, et donc $\frac{n}{d}\overline{d} = \overline{n}\ = \overline{0}$.
   Et pour $0 \leqslant k < \frac{n}{d}$, alors $0 \leqslant kd < n$, donc les $k\overline{d}$ sont deux à deux distincts. Donc déjà $\langle\overline{d}\rangle$ est de cardinal supérieur ou égal à $\frac{n}{d}$.
   Par ailleurs, pour $k \in \mathbf{Z}$, si $k = \frac{n}{d}q + r$ est la division euclidienne de k par $\frac{n}{d}$, alors $kd = nq + dr$ et donc $k\overline{d} = r\overline{d}$, avec $0 \leqslant r < \frac{n}{d}$.
   Et donc $\langle\overline{d}\rangle = \left\{k\overline{d}, 0 \leqslant k < \frac{n}{d}\right\}$ est donc de cardinal $\frac{n}{d}$.

Limites, continuité

16

Dans ce chapitre, on définit et étudie la notion de limite d'une fonction.
Celle-ci est plus riche que celle de limite d'une suite, puisque si la limite d'une suite n'a d'intérêt que lorsque $n \to +\infty$, pour une fonction il est possible de s'intéresser à des limites en n'importe quel réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Quelques compléments sur les voisinages

La notion de voisinage, qui a été définie dans le chapitre sur les suites numériques va nous permettre d'unifier les différentes notions de limites. Rappelons donc la définition d'un voisinage : on appelle voisinage de $a \in \overline{\mathbf{R}}$ tout ensemble V de la forme :

- **Si** $a \in \mathbf{R}$, $V =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.
- **Si** $a = +\infty$, $V =]A, +\infty[$, $A \in \mathbf{R}$.
- **Si** $a = -\infty$, $V =]-\infty, B[$, avec $B \in \mathbf{R}$.

Il est assez facile de constater que :

1. l'intersection de deux voisinages de a est encore un voisinage de a ;
2. l'intersection de tous les voisinages de a est $\{a\}$ si $a \in \mathbf{R}$, vide si $a = \pm\infty$;
3. si a, b sont deux éléments distincts de $\overline{\mathbf{R}}$, alors il existe V_a voisinage de a et V_b voisinage de b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

> **Autrement dit**
> Il existe des voisinages respectifs de a et b qui sont disjoints.

Seul le dernier point mérite peut-être quelques explications. Il faut distinguer en tout 4 cas.

- Si a et b sont réels. Alors pour $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3}$, $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap]b-\varepsilon, b+\varepsilon[= \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$, alors $]a-1, a+1[\cap]a+2, +\infty[= \emptyset$.
- Si $a \in \mathbf{R}$ et $b = -\infty$, alors $]a-1, a+1[\cap]-\infty, a-2[= \emptyset$.
- Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$, alors $]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[= \emptyset$.

Nous savons que lorsqu'on s'intéresse à la limite d'une fonction f en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, a n'a pas besoin d'être dans l'ensemble de définition de f, c'est notamment le cas lorsqu'on s'intéresse à des limites en $\pm\infty$, ou encore à la limite en 0 d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

La définition suivante vise à définir les points a de $\overline{\mathbf{R}}$ en lesquels il est pertinent de s'intéresser à la limite d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Par exemple, il n'est pas pertinent de s'intéresser à la limite en -1 ou en $-\infty$ d'une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 16.1 – Soit D une partie de $\mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que a **est adhérent** à D si tout voisinage V de a rencontre D : $D \cap V \neq \emptyset$.

> **Cas particulier**
> Notons que si $a \in D$, alors nécessairement, a est adhérent à D.

Exemples 16.2

► Si I est un intervalle, alors les points adhérents à I sont les points de I, plus ses éventuelles bornes, qu'elles soient ou non dans I.
Par exemple, $+\infty$ est adhérent à $[2, +\infty[$ et -1 et 3 sont adhérents à $]-1, 3[$ et à $[-1, 3[$.
-1 n'est pas adhérent à $[0, 1]$, puisque $]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ est un voisinage de -1 disjoint de $[0, 1]$.
► Tout réel est adhérent à $\mathbf{Q}$ puisque tout intervalle ouvert non vide contient des rationnels. Ce qui nous autorisera, de manière surprenante, à parler de la limite en $\sqrt{2}$ d'une fonction définie sur $\mathbf{Q}$.

Dans toute la suite, et sauf mention explicite du contraire I désigne une partie quelconque de $\mathbf{R}$, sur laquelle seront définies nos fonctions.
En première lecture, il est possible de supposer que I est un intervalle, ce qui facilite la compréhension, mais n'est pas indispensable pour définir la notion de limite.

Définition 16.3 – Soit f une fonction définie sur un ensemble I, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f vérifie une propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que $f_{|I\cap V}$ vérifie $\mathscr{P}$.

Remarque

Il faut y voir là l'analogue pour les fonctions à la notion de propriété vraie «à partir d'un certain rang» pour les suites.

Exemple 16.4

▶ La fonction ln est strictement positive au voisinage de $+\infty$. En effet, $]2, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ sur lequel ln est positive.
▶ La fonction exponentielle est bornée au voisinage de $-\infty$, par exemple car $\forall x \in]-\infty, 0], |e^x| \leqslant 1$.
▶ La fonction $f : x \mapsto \cos\dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbf{R}_+^*$ est monotone au voisinage de tout $x \notin \left\{\dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbf{N}\right\}$.
En effet, pour $x > 0$, si $k \in \mathbf{N}$ est tel que $\dfrac{1}{(k+1)\pi} < x < \dfrac{1}{k\pi}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]k\pi, (k+1)\pi[$, et alors f est strictement monotone sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ car composée des fonctions strictement monotones cos et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

16.1 LIMITE D'UNE FONCTION

16.1.1 Les 9 limites

Contrairement aux suites, dont la limite est toujours considérée lorsque $n \to +\infty$, on peut parler de limite d'une fonction en un réel fini, en $+\infty$ et en $-\infty$. Et cette limite, lorsqu'elle existe, peut être finie, ou égale à $\pm\infty$.
Ce qui nous conduit à distinguer neuf cas dans la définition de limite :

Définition 16.5 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I.

1. <u>Si $a \in \mathbf{R}$</u> :
   (a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
   (b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$
   (c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$$
2. <u>Si $a = +\infty$</u> :
   (a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in I, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
   (b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists B \in \mathbf{R}, \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

(c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) < A.$$

3. <u>Si $a = -\infty$</u> :

(a) on dit que f tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

(b) on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow f(x) > A.$$

(c) on dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists B \in \mathbf{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Rightarrow f(x) < A.$$

Remarques. ▸ Comme pour le cas des limites de suites, les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges. De même, dans le cas des limites finies, on peut remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par «pour tout ε suffisamment proche de 0» (donc par exemple $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ ou encore $\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$), dans le cas des limites égales à $+\infty$, on peut remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A > 0$ (ou même par «pour tout A suffisamment grand»), et dans le cas des limites égales à $-\infty$, remplacer $\forall A \in \mathbf{R}$ par $\forall A < 0$.
▸ Comme pour les suites, on ne manipulera pas de limite, et on n'écrira pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ avant d'avoir prouvé l'existence d'une telle limite.
▸ Dans le cas très particulier où $I = \mathbf{N}$ et $a = +\infty$, alors on retrouve la définition de limite d'une suite.

Si vous avez bien compris ces limites, il devrait être aisé de retrouver ces définitions sans avoir besoin de les connaître par cœur.
Surtout, il existe une définition bien plus simple qui unifie[1] ces 9 limites :

[1] Et qui est bien entendu équivalente aux définitions données plus tôt.

Définition 16.6 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage W_a de a tel que

$$\forall x \in I,\ x \in W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell.$$

Danger !
Parce qu'il s'agit là d'un moyen pratique de traiter d'un seul coup les limites finies et les limites infinies, je vais donner la plupart des preuves qui suivent en utilisant la notion de voisinage. Cela ne vous dispense pas de connaître par cœur/de retrouver très vite les 9 définitions, qui seront bien plus faciles à manipuler lors de la résolution d'exercices.

Proposition 16.7 (Unicité de la limite) : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. S'il existe deux éléments ℓ_1, ℓ_2 de $\overline{\mathbf{R}}$ tels que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Démonstration. Redonnons une preuve avec des ε dans le cas où ℓ_1, ℓ_2 sont réels.
Supposons que $\ell_1 \neq \ell_2$, et soit $\varepsilon = \dfrac{|\ell_2 - \ell_1|}{3}$.
Alors il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in]a - \eta_1, a + \eta_1[\Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$.
De même, $\exists \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I, x \in]a - \eta_2, a + \eta_2[\Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon$.
Posons alors $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Alors pour $x \in I \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(x) - \ell_1 + \ell_2 - f(x)| \leqslant |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon \leqslant \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|$$

ce qui est absurde.

On pourrait de même adapter les preuves en distinguant les cas suivant que ℓ_1, ℓ_2 soient réels, ou égaux à $\pm\infty$, ce qui nous conduirait à distinguer au moins 4 cas.
Plus simplement : si $\ell_1 \neq \ell_2$, alors il existe V_1 voisinage de ℓ_1 et V_2 voisinage de ℓ_2 tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Soit alors W_1 un voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap W_1$, $f(x) \in V_1$ et soit W_2 un voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap W_2$, $f(x) \in V_2$.
Alors pour $x \in W_1 \cap W_2$, $f(x) \in V_1 \cap V_2$, ce qui est absurde.
Donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Détails
Deux voisinages d'un même point ne sont jamais disjoints.

La connaissance de la limite[2] de f en a donne des informations sur f **au voisinage de** a, et pas nécessairement des informations sur le comportement global de f, c'est-à-dire sur I tout entier.
C'est là une différence de taille avec les suites, car $\mathbf{N}$ privé d'un voisinage de $+\infty$ est un ensemble fini, et on en déduisait par exemple qu'une suite convergente est bornée. Alors que pour une fonction, nous ne disposons que du résultat suivant :

[2] Si elle existe.

Proposition 16.8 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est bornée **au voisinage de** a.*
Autrement dit, il existe un voisinage V de a et $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in V, |f(x)| \leqslant M$.

Autrement dit
L'hypothèse faite est que f possède une limite **finie** en a.

Démonstration. Il suffit de prendre $V =]\ell-1, \ell+1[$, de sorte qu'il existe U voisinage de a tel que
$$\forall x \in I,\ x \in U \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1.$$
Et donc $\forall x \in I \cap U, |f(x)| \leqslant |\ell| + 1$. Donc f est bien bornée au voisinage de a. □

⚠ En revanche, rien n'indique que f soit bornée sur $\mathbf{R}$ tout entier, l'exemple le plus simple étant $\mathrm{id}_{\mathbf{R}} : x \mapsto x$, qui admet une limite finie en 0, et n'est pourtant pas bornée (car ni majorée ni minorée) sur $\mathbf{R}$.

De même, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors f est minorée au voisinage de a, et si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors f est majorée au voisinage de a.

Le résultat qui suit est plutôt intuitif : si une fonction admet une limite en un point a **où elle est définie**, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

Danger !
On suppose ici que f est définie en a, et pas seulement qu'il s'agit d'un point adhérent à I.
Par exemple, ce résultat ne s'appliquera pas si $I =]a, b]$.

Proposition 16.9 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$.*
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$, alors $\ell = f(a)$ (et en particulier, $\ell \in \mathbf{R}$).

Démonstration. Il s'agit essentiellement de noter que l'intersection de tous les voisinages de ℓ est $\{\ell\}$ si $\ell \in \mathbf{R}$ et est vide sinon.
Or, si V est un voisinage de ℓ, alors il existe W voisinage de a tel que $f(W \cap I) \subset V$.
Mais $a \in W \cap I$, donc $f(a)$ appartient à tous les voisinages de ℓ. En particulier, l'intersection de tous les voisinages de ℓ est non vide, donc $\ell \neq \pm\infty$, et $f(a)$ est dans tout voisinage de ℓ, donc $a = \ell$. □

⚠ Nous avons bien fait l'hypothèse que la limite existe, cette proposition ne garantit pas l'existence de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dès que f est définie en a.
Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'a de limite en aucun réel[3], bien qu'elle soit définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[3] Voir TD.

Définition 16.10 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f **est continue en** a si f admet une limite en a.
Par ce qui précède, cette limite est nécessairement égale à $f(a)$, donc f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Enfin, mentionnons un point important : la notion de limite est une notion locale, ce qui signifie que lorsqu'on parle de la limite de f en a, il suffit de connaître f au voisinage de a (c'est-à-dire pour x «proche de a»). Ainsi, pour étudier la limite d'une fonction en 1, il n'est pas utile de savoir quoi que ce soit au sujet de f restreinte à $\mathbf{R}_-$, ni même de f restreinte à $[0, 0.999]$.
De même, pour étudier la limite de f en $+\infty$, le comportement de f sur $]-\infty, 1]$, sur $[0, 1]$ ou sur $[0, 100\,000]$ n'ont aucune importance.

Proposition 16.11 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I.*
Soit également V_a un voisinage de a. Alors f admet une limite en a si et seulement si $f_{|I\cap V_a}$ admet une limite en a, et dans ce cas, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_{|I\cap V_a}.$$

Démonstration. Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe W_a voisinage de a tel que $x \in I \cap W_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell$.
Et donc en particulier, pour $x \in I \cap W_a \cap V_a$, $f_{|I\cap V_a}(x) \in V_\ell$. Donc $f_{|I\cap V_a}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Inversement, si $f_{|I\cap V_a}(x) = \ell$, soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe W_a voisinage de a tel que pour $x \in I \cap (V_a \cap W_a)$, $f_{|I\cap V_a \cap W_a}(x) = f(x) \in V_\ell$.
Mais $V_a \cap W_a$ est un voisinage de a, donc on retrouve bien la définition de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. □

La conséquence importante de cette proposition est que toutes les hypothèses des théorèmes qui vont suivre n'ont pas besoin d'être vérifiées sur I tout entier, mais seulement au voisinage de a.

16.1.2 Limite à gauche, limite à droite

Nous donnons ici un sens à des notations utilisées depuis la première, à savoir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Définition 16.12 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I.
On dit que f est **définie à gauche au voisinage de** a si a est adhérent à $I\cap]-\infty, a[$.
C'est-à-dire si pour tout voisinage V de a, $V \cap I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$.
De même, f est **définie à droite au voisinage de** a si a est adhérent à $I\cap]a, +\infty[$.

Dans le cas où I est un intervalle, une fonction f définie sur I est définie à droite au voisinage de tout point de I, et à droite de la borne de gauche de l'intervalle, mais pas à droite de sa borne de droite.
Par exemple, une fonction définie sur $]0, 1]$ est définie à droite au voisinage de 0, mais pas à gauche.

Définition 16.13 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I au voisinage duquel f est définie à gauche et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la gauche et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ si $f_{|I\cap]-\infty, a[} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
Autrement dit :

- si $\ell \in \mathbf{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a - \eta < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- si $\ell = +\infty$: $\forall A \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) > A$.
- si $\ell = -\infty$: $\forall B \in \mathbf{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I,\ a - \eta < x < a \Rightarrow f(x) < B$.

De même, on dit que $f(x)$ tend à droite vers ℓ en a et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si $\lim_{x\to a} f_{|I\cap]a+\infty[} = \ell$.

La notion de limite à droite/gauche n'a aucun intérêt pour $a = \pm\infty$, puisqu'on ne peut tendre vers $+\infty$ que par la gauche, et vers $-\infty$ que par la droite.

Proposition 16.14 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R}$ adhérent à I au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite. Alors :*

1. *si $a \in I$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ et $f(a) = \ell$.*
2. *si $a \notin I$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.*

Démonstration. 1. Si $a \in I$. Alors si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, nous avons déjà prouvé que $f(a) = \ell$, et les deux limites à gauche et à droite sont évidentes.
Supposons à présent que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
Soit alors V un voisinage de $f(a)$. Il existe alors un voisinage W_a^- de a tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, a[\cap W_a^-$, $f(x) \in V$.
De même, il existe alors un voisinage W_a^+ de a tel que $\forall x \in I \cap]a, +\infty[\cap W_a^+$, $f(x) \in V$.
Soit alors $W_a = W_a^+ \cap W_a^-$. Alors pour $x \in I \cap W_a$, on a :
- soit $x = a$, et alors $f(x) = f(a) \in V$.
- soit $x > a$, et alors $x \in I \cap]a, +\infty[\cap W_a^+$, et donc $f(x) \in V$.
- soit $x < a$, et alors $x \in I \cap]-\infty, a[\cap W_a^-$, et donc $f(x) \in V$.

Donc on a bien prouvé l'existence d'un voisinage W_a de a tel que $\forall x \in I \cap W_a$, $f(x) \in V$, et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. Le principe est le même si $a \notin I$, mais alors on n'a pas à se soucier de la valeur de $f(a)$.

□

Exemples 16.15

- Soit f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Alors $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2} = 1$ et $f(1) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ (et donc f est continue en 1).

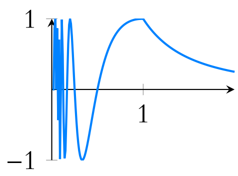


Figure 16.1– La fonction f.

- Soit g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$, mais $-1 \neq g(0)$, donc g n'admet pas de limite en 0, et donc n'y est pas continue.

- La fonction $h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ tend vers $+\infty$ en 0.

En effet, $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$.
Et h n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

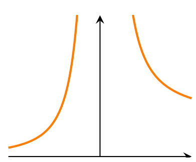


Figure 16.2– La fonction h.

16.1.3 Caractérisation séquentielle des limites

Le résultat qui suit reformule la limites d'une fonction à l'aide de limites de suites.

Proposition 16.16 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Alors il y a équivalence entre*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$
2. *pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, qui tend vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers ℓ.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, et soit (x_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a.
Soit alors V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe W_a voisinage de a tel que pour tout $x \in I \cap W_a$, $f(x) \in V_\ell$.
En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $x_n \in W_a$ et donc $f(x_n) \in V_\ell$.
Et donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2) $\Rightarrow$ 1). Supposons que pour toute suite (x_n) de limite a, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Supposons par l'absurde que f ne tend pas vers ℓ en a.
Alors il existe un voisinage V_ℓ de ℓ tel que pour tout voisinage W_a de a, il existe $x \in I \cap W_a$ tel que $f(x) \notin V_\ell$.
Soit alors (W_n) une suite décroissante[4] de voisinages de a définie de la manière suivante :

- Dans le cas où $a \in \mathbf{R}$, on peut prendre $W_n = \left]a - \dfrac{1}{n+1}, a + \dfrac{1}{n+1}\right[$.
- Dans le cas où $a = +\infty$, on peut prendre $W_n =]n, +\infty[$.
- Dans le cas où $a = -\infty$, on peut prendre $W_n =]-\infty, -n[$.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in I \cap W_n$ tel que $f(x_n) \notin V_\ell$.
Dans les trois cas, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Donc par hypothèse, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $f(x_n) \in V_\ell$.
Or, $x_{n_0} \in W_{n_0}$, donc $f(x_{n_0}) \in V_\ell$ alors que par définition $f(x_{n_0}) \notin V_\ell$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. □

[4] Au sens de l'inclusion, c'est-à-dire telle que $W_{n+1} \subset W_n$.

Ceci fournit notamment un moyen facile de prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en a.

Exemple 16.17

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.
Soit alors $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, de sorte que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais considérons également la suite (y_n) définie par $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.
Alors $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(y_n) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Puisque les deux suites $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ ont des limites différentes, f n'admet pas de limite en 0.

16.2 Calculs avec des limites

16.2.1 Opérations sur les limites

Tous les résultats énoncés sur les limites d'une somme, d'un produit, d'un quotient pour les limites de suites. Et les preuves en sont inchangées ou presque, c'est d'ailleurs un bon exercice que d'essayer d'en écrire quelques unes pour les fonctions en s'inspirant de ce qui a été dit pour les suites.

Un autre moyen de prouver tous ces résultats est d'utiliser la caractérisation séquentielle des limites : supposons que f et g soient deux fonctions définies sur I telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$.
Soit alors (x_n) une suite à valeurs dans I, qui tend vers a. Alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbf{R}$ et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbf{R}$.
Et donc, par somme de limites **de suites**, $f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de limite a, $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$.
Et le même raisonnement se tient pour les produits et les quotients, ou les produits et quotients de limites infinies tant qu'ils ne font pas apparaître de formes indéterminées.
On retrouve également le fait que si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et que f est strictement positive (respecti-

vement négative) sur un voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).
Au-delà des résultats bien connus sur la somme, le produit et le quotient de limites, ajoutons :

Proposition 16.18 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Alors pour $\ell \in \mathbf{R}$, on a*

1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow f(x) - \ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$
3. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow |f(x) - \ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$

Enfin, rappelons également que le produit d'une fonction bornée[5] par une fonction qui tend vers 0 en a tend vers 0.

[5] Ou plus simplement bornée au voisinage de a.

Seul le résultat suivant est nouveau :

Proposition 16.19 (Composition de limites) : *Soit $f : I \to J$, $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$, de sorte que $g\circ f$ soit bien définie.*
Soient a adhérent à I, b adhérent à J et soit $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

Démonstration. Sans la notion de voisinage, il nous faudrait distinguer 27 cas suivant que a, b et ℓ soient finis ou égaux à $\pm\infty$.
Soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Puisque $g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors il existe V_1 voisinage de b tel que $\forall x \in V_1 \cap J$, $g(x) \in V$.
Et puisque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow}$, alors il existe V_2 voisinage de b tel que pour tout $x \in I \cap V_2$, $f(x) \in V_1$.
Et alors, pour $x \in I \cap V_2$, on a $f(x) \in J \cap V_1$ et donc $g(f(x)) \in V$.
Ceci étant vrai pour tout voisinage V de ℓ, $g\circ f$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a. □

Notons que ce résultat légitime la notion de changement de variable dans une limite que vous utilisez depuis la terminale.

Exemple 16.20

Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, on peut procéder au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, et s'intéresser à $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X}$.
Cela revient à considérer $g : X \mapsto \dfrac{\ln(1+X)}{X}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Alors notre fonction de départ est $g\circ f$, et puisque nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
Et cette limite est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = g'(1) = 1$.

⚠ Nous n'avons pas défini de limite qui seraient égales à 0^+, ou à 1^-, etc. Seulement des limites à droite/à gauche **en** un réel a.
Vous ne noterez donc par exemple pas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a^+$.
Ce que vous avez en tête en utilisant une telle notation, c'est surtout que f tend vers a en restant supérieure à a.
Et donc si $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \ell$, alors on a envie d'avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = \ell$.
Tout ceci est vrai, mais il faut être précis. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) > a$, que $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = \ell$.
En effet, soit V_ℓ un voisinage de ℓ. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\eta[$, $g(x) \in V_\ell$.

Remarque
Si on prend f et g définies sur $\mathbf{R}$ tout entier, c'est pour ne pas trop alourdir les hypothèses et les notations. Mais on peut tout à fait imaginer généraliser ce résultat à un cadre plus général.

Mais alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in]A, +\infty[$, $|f(x) - a| < \eta$.
Mais puisque f est à valeurs supérieures strictement à a, alors $\forall x \in]A, +\infty[$, $a < f(x) < a+\eta$.
Et donc pour tout $x \in]A, +\infty[$, $g(f(x)) \in V_\ell$. Et donc $g(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

16.2.2 Limites et inégalités

Lemme 16.21. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit a adhérent à I. Soient $m < \ell < M$ trois réels.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors au voisinage de a, $m < f(x) < M$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $m < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < M$.
Alors il existe W_a voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap W_a$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$.
D'où le résultat annoncé. □

En pratique
On peut prendre

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min(\ell - m, M - \ell).$$

Remarque. Comme pour les limites de suites, après passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges.

Mieux
Le caractère local de la notion de limite permet en fait de faire l'hypothèse plus faible que $f \leqslant M$ uniquement au voisinage de a.

Corollaire 16.22 (Passage à la limite dans les inégalités) – *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, tel que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.*

1. *si pour tout $x \in I$ $f(x) \leqslant M$, alors $\ell \leqslant M$.*
2. *si pour tout $x \in I$, $m \leqslant f(x)$, alors $m \leqslant \ell$.*

Démonstration. Prouvons le premier cas. Supposons que $\ell > M$. Alors il existe un voisinage V_a de a tel que pour tout $x \in I \cap V_a$, $f(x) > M$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur M. □

⚠ Notons qu'il n'y a pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large.**

Corollaire 16.23 – *Soient f et g deux fonctions définies sur I, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent et sont réelles, et qu'au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$.*
Alors $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $g - f \geqslant 0$. □

16.3 Théorèmes d'existence de limites

Les théorèmes énoncés précédemment ne s'appliquaient que pour des fonctions dont on savait déjà qu'elles possèdent une limite en a.
Passons à présent aux théorèmes permettant de justifier l'existence de telles limites.

16.3.1 Utilisation d'inégalités

Proposition 16.24 (Théorème des gendarmes) : *Soient f, g et h trois fonctions définies sur un même ensemble I, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, et supposons qu'au voisinage de a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.*
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors $\lim_{x\to a} g(x)$ existe et vaut ℓ.

Démonstration. En raison du caractère local de la limite, il suffit de prouver le résultat lorsque l'encadrement $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ est valable sur I tout entier.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe deux voisinages V_f et V_h de a tels que

$$\forall x \in I \cap V_f, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\forall x \in I \cap V_h, \ |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Et en particulier, pour $x \in I \cap (V_f \cap V_h)$,

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < \ell + \varepsilon.$$

Puisque $V_f \cap V_h$ est un voisinage de a, on a donc bien la définition de $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. □

Remarque. Une fois encore, la caractérisation séquentielle de la limite permettait de conclure à l'aide du théorème des gendarmes pour les suites.
En effet, si $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ tend vers a, alors[6] $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, et de même, $h(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Et donc, puisque $f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n)$, par le théorème des gendarmes (version suites), $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Et donc pour toute suite $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ de limite a, $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

[6] C'est la caractérisation séquentielle de la limite appliquée à f.

Exemple 16.25

Une étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - 2\sqrt{x}$ prouve que celle-ci est dérivable, de dérivée négative sur $[1, +\infty[$.
Elle est décroissante sur $[1, +\infty[$, et puisque $f(1) = -2 < 0$, on en déduit que f est négative sur $[1, +\infty[$.
Donc pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Au voisinage
Notez que l'encadrement n'était pas valable pour tout x dans le domaine de définition de nos fonctions. Mais il l'était sur un voisinage de $+\infty$ (qui est $[1, +\infty[$), ce qui suffit à passer à la limite.

Proposition 16.26 : *Soient f, g définies sur I, soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I, et supposons que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$.*
Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.
De même, si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration. Nous ne prouvons que le premier cas. Soit $A \in \mathbf{R}$. Alors il existe un voisinage V_a de a tel que pour $x \in I \cap V_a$, $f(x) > A$. Et alors, toujours pour $x \in I \cap V_a$, $g(x) > A$.
On a donc bien la définition de $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. □

16.3.2 Le théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone, bien qu'analogue au théorème de même nom pour les suites, est un peu plus délicat pour les fonctions.
Nous énonçons ici des résultats pour une fonction définie sur un intervalle, mais on pourrait imaginer des énoncés plus généraux.

Théorème 16.27 (Théorème de la limite monotone) : *Soient $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction* ***croissante***. *Alors :*

1. *$\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x \in]a, b[} f(x)$ si f est majorée et $+\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x \in]a, b[} f(x)$ si f est minorée, et $-\infty$ sinon.*

Démonstration. Supposons f majorée, et soit alors $M = \sup\{f(x), x \in]a, b[\}$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists A \in]a, b[$ tel que $M - \varepsilon < f(A) \leqslant M$.
En particulier, pour $x \geqslant A$, on a $M - \varepsilon < f(A) \leqslant f(x) \leqslant M$.
► Si $b \in \mathbf{R}$, alors posons $\eta = b - A > 0$. Alors pour tout $x \in]a, b[\cap]b - \eta, b + \eta[=]A, b[$, on a $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$, et donc $|f(x) - M| < \varepsilon$.
On a donc bien $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$.
► Et si $b = +\infty$, alors pour tout $x \in]A, +\infty[$, $|f(x) - M| < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{x \to b} f(x) = M$.

Détails
C'est la caractérisation «epsilonesque» de la borne supérieure.

En revanche, si f n'est pas majorée, alors pour tout $A \in \mathbf{R}$, $\exists B \in]a, b[$ tel que $f(B) > A$.
Et par croissance de f, pour $x \geqslant B$, $f(x) > A$.
▸ Si $b \in \mathbf{R}$, soit alors $\eta = b - B > 0$.
Alors pour $x \in]a, b[\cap]b-\eta, b+\eta[$, $f(x) \geqslant f(B) > A$.
Et donc $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.
▸ Si $b = +\infty$: alors pour $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant f(B) > A$, et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Le principe est le même pour les limites en a. □

Astuce
On peut aussi s'en tirer avec ce qui précède (les limites en la borne de droite) en utilisant la fonction
$$g : \left| \begin{array}{ccc}]-b, -a[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array} \right.$$
qui est croissante.

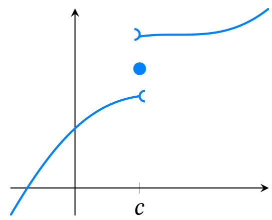
Théorème 16.28 : *Soient $(a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$, avec $a < b$, et soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction **décroissante**. Alors :*

1. *$\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe, et vaut $\inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ si f est minorée et $-\infty$ sinon.*
2. *$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, et vaut $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ si f est majorée, et $+\infty$ sinon.*

Corollaire 16.29 – *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ croissante, et soit $c \in]a, b[$.
Alors $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ existent et*
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \to c^+} f(x).$$
On a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes en renversant le sens des inégalités.

Notation
Ces deux limites à gauche et à droite sont parfois notées $f(c^-)$ et $f(c^+)$.

Démonstration. $f_{|]a,c[}$ est croissante, et est majorée par $f(c)$. Donc elle possède une limite finie en c, de sorte que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ existe.
Et par passage à la limite dans les inégalités, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c)$.
On procède de même pour les limites à droite. □



⚠ Il se peut que les deux inégalités ci-dessus soient strictes. Par exemple avec la fonction ci-contre.

16.4 CONTINUITÉ : L'ASPECT LOCAL

16.4.1 Définitions, premières propriétés

Définition 16.30 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. On a déjà dit que f est **continue** en a si elle admet une limite en a.
On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en a pour tout $a \in I$.
On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Rappel
Nous avons déjà prouvé que cette limite ne peut qu'être finie, égale à $f(a)$.

Les opérations sur les limites prouvent alors que la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues en a est encore continu en a.
Et que si $f : I \to J$ est continue en a, et que $g : J \to \mathbf{R}$ est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Et par conséquent, la somme/le produit/le quotient de deux fonctions continues sur un même ensemble I est encore continu sur I.
Et si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Remarque
Couplé au fait que id_I est toujours continue, cela prouve déjà que les fonctions polynômiales, et les quotients de telles fonctions (les fonctions rationnelles) sont continues sur leur ensemble de définition.

Proposition 16.31 : *Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Alors $\mathscr{C}(I, \mathbf{R})$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}^I$.*

Démonstration. La fonction constante égale à 1 est continue sur I, comme toute fonction constante.

Si f, g sont continues sur I, alors $f - g$ est continue sur I.
Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I. □

16.4.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 16.32 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est continue en a*
2. *pour toute suite (x_n) à valeurs dans I et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de continuité et de la caractérisation séquentielle des limites. □

Ce résultat est en fait fréquemment utilisé dans le sens 1) ⇒ 2), par exemple pour dire que $u_n \to a \Rightarrow e^{u_n} \to e^a$.
En réalité, il se cache là-derrière un argument de continuité de l'exponentielle, qu'il faudrait préciser.

Exemple 16.33

▸ Soit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors $u_n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Nous avons déjà prouvé que $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.
Donc en particulier, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Et donc, par continuité de la fonction exponentielle en 1 (continuité toujours admise à ce stade de l'année...), $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^1 = e$.
▸ Pour bien comprendre que la continuité est indispensable, on peut considérer la fonction partie entière, qui n'est pas continue en 1.
Il n'est donc pas question d'affirmer que $u_n \to 1 \Rightarrow \lfloor u_n \rfloor \to \lfloor 1 \rfloor$.
Par exemple, la suite de terme général $1 - \frac{1}{n}$ est un contre-exemple.

Remarque
Notons qu'à ce stade, il n'y a aucun besoin d'une caractérisation séquentielle de la notion de limite : si x est assez grand, $x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est assez grand, et donc ceci vaut aussi pour n entier suffisamment grand.

16.4.3 Continuité à droite/à gauche

Définition 16.34 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$ un point au voisinage duquel f est définie à droite et à gauche.

1. On dit que f **est continue à gauche** en a si $f_{|I\cap]-\infty,a]}$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f **est continue à droite en** a si $f_{|I\cap[a,+\infty[}$ est continue en a, c'est-à-dire si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Proposition 16.35 : *Sous les hypothèses ci-dessus, f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche de a.*

Exemples 16.36

▸ $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.
Par composition, si f est continue, $|f|$ est continue.
▸ La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $]n, n+1[$, $n \in \mathbf{Z}$ puisqu'elle y est constante

égale à n.
En revanche, elle n'est que continue à droite en $n \in \mathbf{Z}$.
Si $x \in [n, n+1[$, alors $\lfloor x \rfloor = n \underset{x \to n^+}{\longrightarrow} n = \lfloor n \rfloor$.
Mais si $x \in]n-1, n[$, alors $\lfloor x \rfloor = n - 1 \underset{x \to n^-}{\longrightarrow} n - 1 \neq \lfloor n \rfloor$, donc $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue à gauche en n.
▸ La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout point $a \neq 0$, puisqu'elle est alors égale à une fonction affine[7] sur un voisinage de a.
Et en 0, il est aisé de constater qu'elle est continue à droite et continue à gauche, donc continue.
Une conséquence importante en est la suivante : si f est continue, alors $|f|$ l'est aussi.
⚠ Réciproque fausse, par exemple $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

[7] Donc polynomiale.

16.4.4 Prolongement par continuité

⚠ Attention !
Il faut que a soit un point où f n'est pas déjà définie.

Définition 16.37 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in \mathbf{R} \setminus I$, adhérent à I.
Si f admet une limite **finie** ℓ lorsque $x \to a$, on appelle prolongement par continuité de f en a la fonction :

$$\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccl} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$$

Alors la fonction $\tilde{f}$ est continue en a.

Démonstration. Il faut tout de même prouver que $\tilde{f}$ est continue en a, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in I$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Mais pour $x \neq a$, $\tilde{f}(x)$ et $f(x)$ sont égaux, donc pour $x \in I, |x-a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et si $x = a$, alors $\tilde{f}(a) - \ell = \ell - \ell = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in I \cup \{a\}$, $|x - a| < \eta \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \ell| < \varepsilon$.
Et donc $\lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$, donc $\tilde{f}$ est continue en a. □

⚠ On ne prolongera une fonction qu'en un réel, il n'est pas question de donner une valeur à $f(+\infty)$.
Et de même, la valeur donnée ne peut qu'être réelle, on ne posera pas $\tilde{f}(a) = \pm\infty$.

Exemples 16.38

▸ Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Alors f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin(0)}{x} = \sin'(0) = 1$.
Donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

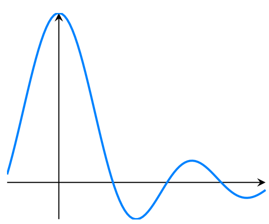


FIGURE 16.3– La fonction $\tilde{f}$ (appellée aussi *sinus cardinal*).

▸ Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ peut être prolongée par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln(x) = -\infty$ et donc, par composition avec la limite de exp en $-\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$.
On prolonge donc notre fonction par continuité en posant $0^\alpha = 0$.

⚠ Attention !
Ceci ne vaut pas pour $\alpha = 0$, on veut toujours avoir $0^0 = 1$.

16.5 CONTINUITÉ : THÉORÈMES GLOBAUX

16.5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires et ses corollaires

Théorème 16.39 (Théorème des valeurs intermédiaires) : *Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, et soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.*

Remarque
On serait tenté de dire $y \in [f(a), f(b)]$, mais dans le cas où $f(b) < f(a)$, il faut en fait lire $y \in [f(b), f(a)]$.

Démonstration. Il faut distinguer deux cas suivant que $f(a) \leqslant f(b)$ ou $f(b) < f(a)$. Les preuves étant similaires, nous ne traitons que le premier. Le cas où $y = f(a)$ ou $y = f(b)$ est trivial[8], donc nous supposons que $y \in]f(a), f(b)[$.
Soit alors $M = \sup\{x \in [a,b],\ f(x) \leqslant y\}$. Notons que ce sup existe puisque nous sommes en présence d'une partie non vide (elle contient a) et bornée de $\mathbf{R}$, car incluse dans $[a,b]$.
Alors, la caractérisation séquentielle des bornes supérieures nous dit qu'il existe une suite (x_n) à valeurs dans $[a,b]$, qui tend vers M et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) \leqslant y$.
Mais f est continue en M, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(M)$, et donc $f(M) \leqslant y$.
On ne peut avoir $M = b$, car on aurait alors $f(b) \leqslant y$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc pour n suffisamment grand, $M + \dfrac{1}{n} \in [a,b]$.
Or, $M + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) = f(M)$.
Or, $f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) > y$, donc $f(M) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(M + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant y$.
Et donc nécessairement, par double inégalité, $f(M) = y$. □

[8] Il suffit de prendre $c = a$ ou $c = b$.

Remarque
C'est ici qu'on utilise le fait que f est définie sur un **intervalle**.

⚠ Les deux hypothèses fondamentales que f est continue et que son ensemble de définition est un intervalle ne sont pas négociables.

Corollaire 16.40 – *Une fonction continue sur un intervalle I qui n'est pas de signe constant s'annule en un point de I.*

Démonstration. Soient $a, b \in I$ tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Si on note J le segment de bornes a et b alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in J$ tel que $f(c) = 0$. □

Détails
Donc $J = [a, b]$ si $a < b$, $J = [b, a]$ sinon.

Par contraposée, une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas sur cet intervalle est de signe constant.

Corollaire 16.41 : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. Soit I un intervalle, soit f une fonction continue sur I.
Soient alors $u < v \in f(I)$. Il existe alors deux réels a et b dans I tels que $u = f(a)$ et $v = f(b)$.
Soit alors $z \in [u,v]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ (ou $[b,a]$ si jamais $b < a$) tel que $z = f(c) \in f(I)$.
Et donc $[u,v] \subset f(I)$: $f(I)$ est un intervalle. □

Le théorème des valeurs intermédiaires se généralise bien avec des limites, finies ou infinies, tant qu'on travaille avec des fonctions continues sur des intervalles. Il y aurait bien trop de cas à distinguer pour donner un énoncé et une preuve complète, mais vous avez l'intuition de ces résultats.
Traitons deux cas à titre d'exemple :

Exemple 16.42

► Soit $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ continue, avec $a \in \overline{\mathbf{R}}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $y \in \mathbf{R}$ **strictement** compris entre ℓ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b]$ tel que $f(c) = y$.
Supposons par exemple que $\ell > f(b)$, de sorte que $f(b) \leqslant y < \ell$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que $f(b) \leqslant y < \ell - \varepsilon < \ell$.
Alors, par définition de limite, il existe $t \in]a, b]$ tel que $\ell - \varepsilon < f(t) \leqslant \ell$.
Et alors, le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué entre t et b prouve qu'il existe $c \in [t, b]$ tel que $f(c) = y$.
► Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$. Alors pour tout $y \leqslant f(a)$, il existe $c \in [a, b[$ tel que $f(c) = y$.
En effet, par définition de limite, il existe un voisinage V_b de b tel que pour tout $x \in I \cap V_b$, $f(x) < y - 1$. Et donc en particulier, pour $x_0 \in I \cap V_b$, $f(x_0) < y - 1$.
Donc le théorème des valeurs intermédiaires s'applique entre a et x_0 : il existe $c \in [a, x_0]$ tel que $f(c) = y$, et $[a, b[$ étant un intervalle, on a bien $x_0 \in [a, b[$.

⚠ Attention !
Une précaution à prendre dans ces cas là est qu'une limite n'est pas forcément une valeur atteinte. C'est possible, mais dans ce cas, le théorème des valeurs intermédiaires ne suffira pas.

Détails
Il existe bien de tels x_0.

Corollaire 16.43 : *Soit I un* ***intervalle*** *de $\mathbf{R}$, et soit $f : I \to \mathbf{R}$. Notons alors $J = f(I)$. Si f est continue et strictement monotone alors J est un intervalle de $\mathbf{R}$ et f réalise une bijection de I sur J.*

Démonstration. Le fait que J soit un intervalle découle du théorème des valeurs intermédiaires.
L'injectivité découle de la stricte monotonie. Et la surjectivité de la définition même de J : c'est l'ensemble des éléments qui admettent au moins un antécédent par f. □

La question qui reste ouverte est : comment déterminer J ?
Il y aurait trop de cas à distinguer pour qu'il soit intéressant de donner un énoncé complet, mais vous connaissez déjà intuitivement ces résultats, et la pratique du théorème de la bijection ne change pas : on lit l'intervalle image sur le tableau de variations de f.
Notons que par le théorème de la limite monotone, f admet nécessairement des limites[9] aux bornes de I.
Donnons tout de même quelques exemples de cas particuliers :

- si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$
- si $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ est strictement croissante et continue, alors f réalise une bijection de $]a, b]$ sur $]\lim\limits_a f, f(b)]$
- si $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ est strictement décroissante et continue, alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left]\lim\limits_b f, \lim\limits_a f\right[$
- etc, etc

[9] Finies ou infinies.

Prouvons par exemple le second point, en gardant à l'esprit que la seule chose qui n'a pas encore été prouvée est que $J = f(]a, b]) = \left]\lim\limits_a f, f(b)\right]$.
Il est évident que $f(b)$ est le plus grand élément de J par croissance de f, et par le théorème de la limite monotone, $\inf J = \inf\limits_{x\in]a,b]} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$
Donc[10] $J =]\lim\limits_a f, f(b)]$ ou $J = [\lim\limits_a f, f(b)]$.
Si on était dans le second cas, cela signifierait qu'il existe $t \in]a, b]$ tel que $f(t) = \lim\limits_a f$, et donc, par stricte croissance de f, pour $x \in]a, t[$, $f(x) < \lim\limits_a f$.
Ceci contredit le fait que $\lim\limits_a f = \inf J$.

Remarque
Avec cet inf éventuellement égal à $-\infty$, ce qui n'est pas tout à fait autorisé dans $\mathbf{R}$, mais a un sens dans $\overline{\mathbf{R}}$ (qui rappelons-le, est aussi muni d'une relation d'ordre).

[10] Cf. la classification des intervalles de $\mathbf{R}$.

16.5.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème 16.44 : *Soit $I = [a, b]$ un* ***segment*** *de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*
Autrement dit, f possède un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

Max/min
Dire que f atteint ses bornes est plus fort que juste dire qu'elle est bornée. Le second garantit l'existence de $\sup f$ / $\inf f$, alors que le premier garantit leur existence et le fait qu'ils soient dans l'image de f, et donc que ce sont bien des valeurs atteintes.

Démonstration. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b])$ est un intervalle J.
▸ Si J possède une borne supérieure M, alors par la caractérisation séquentielle de borne supérieure il existe une suite (y_n) d'éléments de J qui converge vers M. Notons alors x_n un antécédent de y_n, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
▸ Si J n'est pas majoré, alors il existe une suite (y_n) d'éléments de J qui tend vers $M = +\infty$. Notons alors x_n un antécédent de y_n, de sorte que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans les deux cas, puisque (x_n) est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un réel c.
Et puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite, $a \leqslant c \leqslant b$, soit encore $c \in [a, b]$.
Mais alors, par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$.
Or $f\left(x_{\varphi(n)}\right) = y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Ceci élimine donc déjà le cas où J n'est pas majoré, et donc $M = f(c)$ est le maximum de J, puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par f.

En appliquant le même raisonnement à $-f$, on prouve que f possède un minimum. □

⚠ Ceci ne vaut plus si on n'est pas sur un segment, comme le prouvent par exemple les cas de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$, $\ln_{|]0,1]}$ ou Arctan.

Exemple 16.45

Une fonction continue et périodique sur $\mathbf{R}$ possède un maximum et un minimum.
En effet, soit T une période de f. Alors sur le segment $[0, T]$, f est continue et possède donc un minimum m atteint en x_0 et un maximum M atteint en x_1. Donc pour tout $x \in [0, T]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, et soit $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$, de sorte que $k \leqslant \frac{x}{T} < k + 1 \Leftrightarrow kT \leqslant x < (k+1)T$.
Alors $f(x) = f(x - kT)$, avec $x - kT \in [0, T[\subset [0, T]$.
Donc $m \leqslant f(x - kT) \leqslant M$ et donc $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

16.6 Continuité d'une bijection réciproque

Proposition 16.46 : *Soit I un* ***intervalle*** *et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue.*
Alors il y a équivalence entre :

1. *f est strictement monotone*
2. *f est injective (et donc bijective de I sur $f(I)$)*

Démonstration. Le sens 1) $\Rightarrow$ 2) a déjà été vu, et ne nécessite aucunement la continuité de f.
Supposons à présent que f soit injective, et supposons par l'absurde qu'elle n'est pas monotone[11].
Alors f n'est pas croissante, donc il existe $x_1, y_1 \in I$ tels que $x_1 < y_1$ et $f(x_1) > f(y_1)$.
Et même, f n'est pas décroissante, donc il existe $x_2, y_2 \in I$ tels que $x_2 < y_2$ et $f(x_2) < f(y_2)$.
Pour $t \in [0, 1]$, considérons alors $\alpha(t) = (1 - t)x_1 + tx_2$.
Il est facile[12] de prouver que $\alpha(t)$ est compris entre x_1 et x_2, et donc dans I car I est un intervalle.
De même, $\beta(t) = (1 - t)y_1 + ty_2$ est dans I.
Soit alors $g : t \mapsto f(\alpha(t)) - f(\beta(t))$. Alors g est continue sur I car somme et composée de fonctions continues.
On a $g(1) = f(\alpha(1)) - f(\beta(1)) = f(x_2) - f(y_2) < 0$.

[11] Étant injective, si elle est monotone, elle est strictement monotone.

[12] Éventuellement en distinguant les cas $x_1 < x_2$ et $x_1 \geqslant x_2$.

De même, $g(0) = f(x_1) - f(y_1) > 0$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $g(t_0) = 0$, soit encore $f(\alpha(t_0)) = f(\beta(t_0))$.
Mais f est injective, donc $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Soit encore

$$(1-t_0)x_1 + t_0 x_2 = (1-t_0)y_1 + t_0 y_2 \Leftrightarrow \underbrace{(1-t_0)(x_1-y_1)}_{\leqslant 0} = \underbrace{t_0(y_2-x_2)}_{\geqslant 0}.$$

Puisque $t_0 \neq 0$, $x_1 - y_1 = 0$, ce qui est absurde.
Donc f est monotone, et donc strictement monotone. □

Proposition 16.47 : *Soient I un intervalle, et soit $f : I \to f(I)$ continue et bijective. Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même sens de variation que f.*

De manière imagée
Si vous savez tracer le graphe de f sans lever le crayon, vous saurez aussi tracer son symétrique par rapport à la première bissectrice sans lever le crayon.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que f et f^{-1} ont même sens de variation.
Notons $J = f(I)$ et supposons par exemple que f est croissante (et donc f^{-1} aussi).
Il suffit de prouver que pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de droite[13] de J, $\lim\limits_{x\to a^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$ et pour tout point $a \in J$ qui n'est pas la borne de gauche de J, $\lim\limits_{x\to a^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$. Soit donc $a \in J$ qui n'est pas égal à sa borne de gauche.
Par le théorème de la limite monotone, $\ell = \lim\limits_{x\to a^-} f^{-1}(x)$ existe dans $\mathbf{R}$, et même est inférieure à $f^{-1}(a)$.
On a alors $\ell \in I$, puisque pour n suffisamment grand[14], on a $\underbrace{f^{-1}\left(a - \frac{1}{n}\right)}_{\in I} \leqslant \ell \leqslant \underbrace{f^{-1}(a)}_{\in I}$, et I est un intervalle.
Alors, par continuité de f en ℓ, $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$.
Mais par composition de limites, on a $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = f(\ell)$, et trivialement, $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(f^{-1}(x)\right) = a$.
Donc par unicité de la limite, $f(\ell) = a \Leftrightarrow \ell = f^{-1}(a)$.
On traite sur le même principe les limites à droite.
Et donc f^{-1} est continue en a, et ceci étant vrai pour tout $a \in J$, f^{-1} est continue sur J. □

[13] Sous réserve que cette borne soit dans J, c'est-à-dire que J soit un intervalle fermé à droite.

[14] Suffisamment grand pour que $a - \frac{1}{n} \in I$, ce qui est possible puisque a n'est pas la borne de gauche de I.

Le même principe nous donne les limites de f^{-1} aux bornes de $f(I)$, encore une fois, sans qu'on ait vraiment envie de donner des énoncés généraux.
Contentons-nous d'un exemple :

Exemple 16.48

On sait que tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
Donc Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite ℓ en $-\infty$, nécessairement finie puisque Arctan est bornée.
Mais d'autre part, par composition de limites,

$$\ell = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arctan}(\tan x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc $\ell = -\frac{\pi}{2}$.

16.7 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Comme pour les suites, la notion de limite **finie** se prolonge au cas des fonctions à valeurs complexes.
Entendons-nous bien : nous parlons toujours de fonctions définies sur une partie I de $\mathbf{R}$, mais qui cette fois prennent des valeurs dans $\mathbf{C}$.

Définition 16.49 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$, où $I \subset \mathbf{R}$, et soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbf{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V_a \text{ voisinage de } a,\ \forall x \in I,\ x \in V_a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note $\mathscr{C}(I, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{C}$.

On retrouve alors une caractérisation par les parties réelles/imaginaires :

Proposition 16.50 : *Avec les hypothèses précédentes,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Démonstration. Voir la preuve donnée pour le cas des suites. □

De même, on retrouve que si f possède une limite (nécessairement finie) en a, alors f est bornée au voisinage de a.
Tous les résultats ne faisant pas appel à la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ restent valables sur $\mathbf{C}$, et en particulier la caractérisation séquentielle, et tout ce qui concerne les opérations sur les limites.
Attention à la composition des limites, on ne pourra composer pas composer deux fonctions à valeurs complexes[15], mais seulement $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$, où J est une partie de $\mathbf{R}$. Autrement dit, f (la fonction de droite) doit être définie sur une partie de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Bornée
La définition de bornée n'a pas changée : f est bornée si la fonction réelle $|f|$ l'est.

[15] Ou plutôt, on ne dira rien des limites de telles composées, puisque nous n'avons défini la limite que pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}$.

On dispose notamment de la proposition suivante :

Proposition 16.51 : *Soit* $f \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$. *Alors* $|f| \in \mathscr{C}(I, \mathbf{C})$.

Démonstration. $|f| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2}$ est composée de la fonction $\mathrm{Re}(f)^2 + \mathrm{Im}(f)^2$, continue sur I et à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, avec la fonction racine carrée, continue sur $\mathbf{R}_+$. □

Les mêmes résultats se traduisent évidemment en termes de continuité. Toutefois, puisqu'on perd la relation d'ordre dans $\mathbf{C}$, le théorème des valeurs intermédiaires n'y a plus de sens, de même que le théorème de la bijection.

Le théorème des bornes atteintes doit lui aussi être reformulé, mais il permet tout de même de prouver qu'une fonction à valeurs complexes continues sur un segment est bornée.
Notons qu'il nous faut adapter un peu la définition de fonction bornée, puisqu'il n'est plus question de parler de minorant/majorant sur $\mathbf{C}$.

Définition 16.52 – Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est bornée si la fonction réelle $|f|$ est bornée.
C'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$.

Proposition 16.53 : *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ *une fonction à valeurs complexes continue sur un segment. Alors* f *est bornée.*

Démonstration. En effet, si f est une telle fonction, $|f|$ est une fonction continue sur le même segment, et à valeurs réelles. Elle est donc bornée[16] □

[16] Et atteint ses bornes, mais c'est inutile ici.

Exercices du chapitre 16

▸ Limites

Exercice 16.1 (Re-)Prouver «à la main» (c'est-à-dire sans utiliser la notion de voisinage) que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$ dans les cas suivants : F

1) $a = b = \ell = +\infty$
2) $a = -\infty$, $b, \ell \in \mathbf{R}$
3) $a \in \mathbf{R}$, $b = +\infty$, $\ell = -\infty$

Exercice 16.2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_n$ tende vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. PD

Exercice 16.3 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante. PD

1) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$.
2) Peut-on avoir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$?

Exercice 16.4 Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent : PD

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos x}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\lfloor x\rfloor$
7) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
8) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
9) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

Exercice 16.5 Montrer que la fonction cos n'a pas de limite (finie ou infinie) en $+\infty$. F

Exercice 16.6 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f possède une limite (finie ou non) en $+\infty$. AD

Exercice 16.7 Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$. AD

Exercice 16.8 AD

1) Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est continue en aucun point.
2) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est continue en 0, mais n'est continue en aucun $a \in \mathbf{R}^*$.

Exercice 16.9 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$. Montrer que $\ell = 0$. PD

Exercice 16.10 Du découpage d'ε D
Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 16.11 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ croissante. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$. Montrer alors que pour tout $b > 0$, $\dfrac{f(bx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D

Exercice 16.12 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$. AD

1) Que peut valoir $f(1)$? Déterminer f si $f(1) = 0$.
2) On suppose à présent $f(1) \neq 0$.
   a) Prouver que pour tout $q \in \mathbf{Q}$, $f(q) = q$.
   b) Montrer que f est positive sur $\mathbf{R}_+$, puis qu'elle est croissante sur $\mathbf{R}$.
   c) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.

▶ Continuité

EXERCICE 16.13 Soient f et g les deux fonctions définies sur $[0,2]$ par F

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } 0<x<1\\ 2-x & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-2 & \text{si } 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

Étudier la continuité des fonctions f, g, $g\circ f$ et $f\circ g$.

EXERCICE 16.14 Soit f une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles, telle que $|f|$ soit constante. Prouver que f est constante. AD

EXERCICE 16.15 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues en 0 et telles que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(2x)=f(x)$. AD

EXERCICE 16.16 Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f possède au moins une racine réelle. Ce résultat est-il encore vrai pour un polynôme de degré pair ? PD

EXERCICE 16.17 Déterminer si les fonctions suivantes peuvent se prolonger par continuité aux bornes de leur ensemble de définition : PD

1) $f(x)=(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ 2) $g(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 3) $h(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 4) $k(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

EXERCICE 16.18 Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction bornée et $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction continue. Prouver que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bornées sur $\mathbf{R}$. PD

EXERCICE 16.19 Un (très bon) skieur de fond termine les 42km de la Foulée Blanche (course populaire qui a lieu à Autrans dans le Vercors) en 2h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure dans lequel il a parcouru exactement 21 km. AD

EXERCICE 16.20 Soit $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$ croissante, et telle que $g:x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Prouver que f est continue. D

EXERCICE 16.21 Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f\circ f$ admet un point fixe. AD

EXERCICE 16.22 **Fonctions 1-lipschitziennes** AD
Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que $\forall(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ (*on dit que f est 1-lipschitzienne*).

1) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un intervalle de $\mathbf{R}$.

EXERCICE 16.23 Montrer qu'une fonction périodique et continue est bornée. PD

EXERCICE 16.24 **Divers résultats d'existence de points fixes** AD

1) Soient $a<b$ deux réels, et soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.
2) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue et décroissante. Prouver que f possède un unique point fixe.
3) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a\in\mathbf{R}$ et $k\in\mathbf{N}^*$ tel que $f^k(a)=a$. Montrer que f possède un point fixe.

EXERCICE 16.25 Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Monter que f possède un minimum. PD

EXERCICE 16.26 **Continuité et densité** AD

1) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbf{Q}$, $f(x)=0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2) Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui coïncident sur $\mathbf{Q}$. Montrer que $f=g$.

EXERCICE 16.27 **Des bijections non continues** PD

Soit f définie sur $]0,1]\cup[2,3[$ par $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,1[\\ x-1 & \text{si } x\in[2,3[\end{cases}$

Montrer que f réalise une bijection continue strictement croissante sur son domaine de définition sur un intervalle à préciser. Sa bijection réciproque f^{-1} est-elle continue ?

EXERCICE 16.28 Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ surjective. Montrer que tout $y\in\mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents. D

EXERCICE 16.29 **Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique)** TD
Déterminer toutes les fonctions continues $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telles que pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)f(y)$.

Correction des exercices du chapitre 16

Solution de l'exercice 16.2

Soit $A \in \mathbf{R}$.
Puisque $(f(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A$.
Mais alors, pour x réel supérieur ou égal à n_0, on a $f(x) \geqslant f(n_0) > A$.
Et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution de l'exercice 16.3

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $t \geqslant x+1$, $f(x) < f(x+1) \leqslant f(t)$.
Et donc par passage à la limite lorsque $t \to +\infty$, $f(x) < f(x+1) \leqslant 0$.
En particulier, on a bien $f(x) < 0$.

Remarque

Si on se contentait de $f(x) < f(t)$, ce qui est vrai pour $t > x$, le passage à la limite ferait tout de même apparaître une inégalité large.

2. Notons $A = f(0)$. Alors il existe $B \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \leqslant B$, $f(t) > f(0)$.
Alors par stricte croissance de f, pour $t > B$, $f(t) > f(B) > f(0)$.
Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) > f(0)$. Et en particulier, $f(0) > f(0)$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 16.4

1. Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}$ $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $e^{-1} \leqslant e^{\cos x} \leqslant e$.

Et donc[1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{\cos x} = 0$.

[1] Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.

2. Multiplions par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{\sqrt{x+1-(x-2)}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}} = \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}.$$

Et donc après multiplication par $\sqrt{x}$, on a

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right) = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant -\sin x$ et donc par croissance de l'exponentielle,
$e^{x-\sin x} \geqslant e^{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.

4. On a, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$.
Posons alors $X = \dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2}{X}\ln(1+X) = 2\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)-\ln(1)}{X}$.
Mais nous reconnaissons là le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+X$, qui tend, lorsque X tend vers 0 vers $\ln'(1) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 2$.

Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.

5. Pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = 0 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Et pour $x \in]-1,0[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = -\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc[2] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ n'existe pas.

[2] Les limites à droite et à gauche sont distinctes.

6. Le moyen le plus simple est encore d'appliquer le résultat de l'exercice 5 puisque qu'il s'agit là d'une fonction périodique.
Plus simplement, pour $n \in \mathbf{N}$, $n - \lfloor n\rfloor = 0$, et donc pour $x_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $x_n - \lfloor x_n\rfloor = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et pour $y_n = n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $y_n - \lfloor y_n \rfloor = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
On a donc deux suites de limite $+\infty$, dont les images par $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ ne tendent pas vers la même limite. Par la caractérisation séquentielle des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \lfloor x \rfloor$ n'existe pas.

7. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, et donc pour $x > 0$,

$$1 - x < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1.$$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

De même, en changeant le sens des inégalités pour $x < 0$, on arrive à $\lim\limits_{x\to0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Et donc[3], $\lim\limits_{x\to0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

Danger ! Ne pas oublier qu'il faut $x > 0$ pour multiplier par x sans changer le sens des inégalités.

[3] La fonction n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

8. On peut raisonner comme à la question précédente, ou plus simplement par produit de limites : $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$, et donc $x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = x \times x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.

9. Notons $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, de sorte que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\cos\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$ par continuité du cosinus en 0.
De même, en posant $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\cos\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{y_n} + (2n+1)\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Donc $x \mapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Quand $x \to 0$, $x + \frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
On peut prouver que $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[2,+\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(x_n) = 2n\pi$ possède une unique solution dans $]0,1]$.
Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\cos\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Mais de même, on peut construire une suite (y_n), qui tend vers 0, et telle que $\cos\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = -1$, et donc $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
Remarque : on peut même être plus explicite, et construire x_n, puisque

$$\varphi(x_n) = 2n\pi \Leftrightarrow x_n + \frac{1}{x_n} = 2n\pi \Leftrightarrow x_n^2 - 2n\pi x_n + 1 = 0.$$

Il est alors facile de prouver que cette équation possède une unique solution dans $]0,1]$, et l'expression de cette solution prouve alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Autrement dit Dans tout intervalle ouvert centré en 0, $x \mapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ prend la valeur 1. Ceci implique notamment que si elle admet une limite, celle-ci ne peut valoir que 1.

10. Nous savons que $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$.
De même, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.
Et alors $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{x} \frac{x}{\sin(2x)} = \frac{5}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.5

Il s'agit d'utiliser la caractérisation séquentielle des limites : supposons par l'absurde que cos possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$.
Alors pour toute suite $(u_n)_n$ de réels qui tend vers $+\infty$, $\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
En particulier, c'est le cas pour $u_n = n\pi$, et donc $\cos(n\pi) = (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Alternative On aurait aussi pu considérer deux suites (u_n) et (v_n) dont on savait que $\cos(u_n)$ et $\cos(v_n)$ avaient des limites différentes. Par exemple $u_n = 2n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Nous savons que ceci est absurde car la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas convergente, et étant bornée, elle ne peut tendre vers $\pm\infty$.
Et donc cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 16.6

Supposons que f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$, et soit T une période de f.
Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, on a $x + nT \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x+nT) = f(x)$, et donc par unicité de la limite $f(x) = \ell$.
Et donc f est constante égale à ℓ.

Remarque
Ceci prouve déjà que $\ell \in \mathbf{R}$.

Inversement, il est évident que si f est constante, alors elle possède une limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 16.7

Pour $x_n = n$, on a $f(x_n) = 1$. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, une éventuelle limite ne peut qu'être égale à 1.
D'autre part, pour $y_n = n + \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$f(y_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \sqrt{n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par la caractérisation séquentielle des limites, si f admettait une limite en $+\infty$, celle-ci devrait être la limite commune à $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$.
Donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 16.8

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers a, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
De même, par densité de $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, il existe une suite (y_n) d'irrationnels qui tend vers a, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(y_n) = 0$.
On en déduit[4] donc que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'admet pas de limite en a, et donc n'y est pas continue.
2. Puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) \leqslant x^2$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = 0$, et donc $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ est continue en 0.
En revanche, pour $a \neq 0$, puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue en a, si $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ admet une limite en a, alors

$$\lim_{x\to a} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \frac{1}{a^2}\lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x).$$

Et ceci viendrait contredire la question 1, et donc $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ n'est continue en aucun $a \neq 0$.

[4] C'est encore la caractérisation séquentielle des limites.

Solution de l'exercice 16.9

Puisque f est bornée au voisinage de $+\infty$, il existe $M \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathbf{R}_+$ tels que pour $x > A$, $|f(x)| \leqslant M$.
Et en particulier, pour $x, y \geqslant A$, $-2M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 2M$.

Supposons par l'absurde $\ell \neq 0$, et soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $k|\ell| > 2M$.
On a alors, pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x+k) - f(x) = (f(x+k) - f(x+k-1)) + (f(x+k-1) - f(x+k-2)) + \cdots + (f(x+1) - f(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} k\ell.$$

Remarque
Notons bien que k est fixé, et que nous avons donc sommé un nombre fini et fixé de limites.

Or pour tout $x > A$, $-2M \leqslant f(x+k) - f(x) \leqslant 2M$, si bien que par passage à la limite, $-2M \leqslant k\ell \leqslant 2M$, et donc $k|\ell| \leqslant 2M$, ce qui contredit la définition de k.
On en déduit donc que $\ell = 0$.

Solution de l'exercice 16.10

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est croissante, $f(x+1)-f(x) \geqslant 0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x) = 0$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $0 \leqslant f(x) - f(x-1) \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $x \geqslant A$, et $k \in \mathbf{N}$ tel que $x - k \geqslant A$, on a

$$0 \leqslant f(x-k) - f(x-k-1) \leqslant \varepsilon.$$

En sommant toutes ces inégalités pour k allant de 0 à n, où $n = \lfloor x - A \rfloor$, il vient après télescopage

$$0 \leqslant f(x) - f(x-n-1) \leqslant (n+1)\varepsilon.$$

Soit encore

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{(n+1)\varepsilon}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \varepsilon.$$

Puisque nous avons choisi pour n le plus grand entier tel que $x - n \geqslant A$, alors $x - n - 1 < A$ et donc par croissance de f, $f(x-n-1) \leqslant f(A)$.
On en déduit donc que $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(A)}{x} + \varepsilon$.
Et donc pour $x \geqslant \max\left(A, \frac{f(A)}{\varepsilon}\right)$, on a $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$.
Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.11

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{f(a^n x)}{f(x)} = \frac{f\left(a \cdot a^{n-1}x\right)}{f(a^{n-1}x)} \frac{f(a \cdot a^{n-2}x)}{f(a^{n-2}x)} \cdots \frac{f(ax)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Attention ! Ici, à n fixé, nous avons fait le produit d'un nombre **fini et fixé** de limites, il n'y a pas de problème.

Mais alors, pour $n < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{f(X)}{f(a^{-n}X)} = 1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = 1$. Soit alors $n = \left\lfloor \dfrac{\ln b}{\ln a} \right\rfloor$, de sorte que $a^n \leqslant b < a^{n+1}$.
Alors par croissance de f, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(a^n x) \leqslant f(bx) \leqslant f(a^{n+1}x)$ et donc

$$\frac{f(a^n x)}{x} \leqslant \frac{f(bx)}{x} < \frac{f(a^{n+1}x)}{x}.$$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(bx)}{x} = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.12

1. On doit avoir $f(1) = f(1^2) = f(1)f(1) = f(1)^2$. Donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1)f(x) = 0$.
Donc f est la fonction nulle.

2.a. C'est du classique : $f(0) = 0$, puis $f(2) = f(1) + f(1) = 2$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.
Puis pour $n \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $f(n + (-n)) = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(n) = -f(-n) = -(-n) = n$.
Enfin, pour $q \in \mathbf{Q}$, si $q = \dfrac{a}{b}$, alors $a = bq \in \mathbf{Z}$, et donc $f(a) = f(b)f(q) \Leftrightarrow a = bf(q) \Leftrightarrow f(q) = \dfrac{a}{b} = q$.

2.b. Si $x \in \mathbf{R}_+$, alors $f(x) = f\left(\sqrt{x}\sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt{x}\right)^2 \geqslant 0$.
Et donc pour $x \leqslant y$, on a $f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x)$.
Mais $y - x \geqslant 0$, donc $f(y - x) \geqslant 0$, et donc $f(y) \geqslant f(x)$.
Ainsi, f est croissante sur $\mathbf{R}$.

2.c. Soit $a \in \mathbf{R}$. Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de rationnels, avec (x_n) croissante et (y_n) décroissante, qui tendent vers a.
Et alors $f(x_n) \leqslant f(a) \leqslant f(y_n) \Leftrightarrow x_n \leqslant f(a) \leqslant y_n$.
Par le théorème des gendarmes, $f(a) = a$.
Et donc f est l'identité.

Détails On peut prendre x_n (resp. y_n) l'approximation décimale par défaut (resp. excès) de a à 10^{-n} près.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.13

Pour f, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$, donc f n'est pas continue[5] en 1.
De même, g n'est pas continue en 1.

[5] Mais on prouverait qu'elle est continue à droite.

Pour $x \in [0,2]$, on a $g(f(x)) = x - 1$ et $f(g(x)) = \begin{cases} 2-x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$.

Il est évident que $g \circ f$ est continue, et on prouve aisément que $f \circ g$ ne l'est pas en 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.14

Supposons au contraire que f ne soit pas constante, et soient alors $a \neq b$ deux valeurs prises par f, et notons x_0 un antécédent de a et x_1 un antécédent de b.
Puisque $|f|$ est constante, nécessairement $|a| = |b|$. Puisque de plus $a \neq b$, alors $a \neq 0$ et donc $b = -a$.
Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [x_0, x_1]$ (ou $[x_1, x_0]$ si $x_0 > x_1$) tel que $f(t_0) = 0$.
Ceci contredit donc le fait que $|f|$ soit constante.
Et donc, si $|f|$ est constante, alors f est constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.15

Commençons par noter qu'une récurrence triviale prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2^n x) = f(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, non nul. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = f(2^n 2^{-n} x) = f(2^{-n} x)$.
Or, $2^{-n} x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et f étant continue en 0, $f(2^{-n}x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)$, seules les fonctions constantes sont solution.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.16

Soit $f : x \mapsto a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$.
Alors, lorsque $x \to +\infty$, en factorisant par x^{2n+1}, on prouve que f tend vers $+\infty$ si $a_{2n+1} > 0$ et vers $-\infty$ sinon.

De même, une étude en $-\infty$ prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Dans les deux cas, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont de signes opposés, donc par le théorème des valeurs intermédiaires[6], il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

[6] Un polynôme est continu.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.17

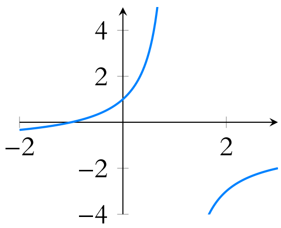


FIGURE 16.1– $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$

1. Il faut d'abord déterminer le domaine de définition de f, ce qui nécessite d'étudier le signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$.
   Or, une étude rapide de cette fonction prouve que $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[$.
   Notons que f est impaire sur $]-1,1[$, et donc il suffit d'étudier le prolongement par continuité en 1.
   Or, pour $x \in]0,1[$, on a
   $$f(x) = \underbrace{(1-x^2)}_{\underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\ln(1+x)}_{\underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \ln(2)} - \underbrace{(1+x)}_{\underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 2}(1-x)\ln(1-x).$$
   Mais $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X \to 0} X \ln(X) = 0$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, et donc on peut prolonger f par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[-1,1]$, en posant $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(-1) = 0$.

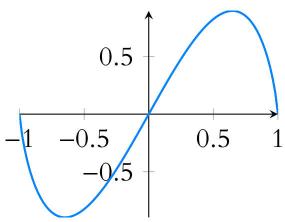


FIGURE 16.2– La fonction f.

2. La fonction g est définie sur $\mathbf{R}^*$.
   Or, puisque $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, on a
   $$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ 0 \leqslant |g(x)| \leqslant |x|.$$
   Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} |g(x)| = 0$.
   Soit encore $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Et donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = 0$..

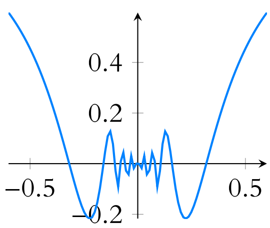


FIGURE 16.3– La fonction g.

3. La fonction h est définie sur $\mathbf{R}^*$. Or, lorsque $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ et donc par composition de limites, $\lim x \to 0 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.
   Il est donc possible de prolonger par continuité h en 0 en posant $\tilde{h}(0) = 0$.

4. Cette fois lorsque x tend vers 0 par la gauche, $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.
Donc k ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.18

Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|g(x)| \leqslant M$.
Et en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(g(x))| \leqslant M$.
Donc $f \circ g$ est bornée.

Remarque L'hypothèse de continuité de g est ici totalement superflue.

D'autre part, g étant continue sur $[-M, M]$, elle y est bornée : il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in [-M, M]$, $|g(x)| \leqslant N$.
Et donc pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \in [-M, M]$, et donc $|g(f(x))| \leqslant N$.
Ainsi, $g \circ f$ est bornée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.19

Notons $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ la fonction qui a un temps t associe la distance parcourue par notre skieur depuis entre le départ et t.
On a donc $f(0) = 0$ et $f(2) = 42$.
Les lois de la physique telles que nous les connaissons[7] nous obligent à supposer f continue. Nous pourrions même raisonnablement supposer que f est croissante, mais cela n'est pas indispensable (nous autorisons donc notre skieur à perdre un gant et à revenir en arrière pour le récupérer, ce qui est plutôt sympathique de notre part !).

[7] À ma connaissance, si on sait téléporter des photons, on n'a toujours pas réussi à téléporter un skieur.

Si f est affine, c'est-à-dire que notre skieur a évolué à vitesse constante sur tout le parcours, le résultat est absolument évident : il a parcouru 21 kilomètres dans tout intervalle de temps d'une heure.
S'il est resté sur place la première heure, et a bouclé le 42 kilomètres lors de la deuxième heure, là encore à vitesse constante, alors dans l'intervalle de temps $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, il a parcouru 21 km.
On pourrait ainsi traiter de nombreux cas «à la main».
Considérons plutôt la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$, de sorte que g est la distance parcourue dans l'heure qui commence en x.
▸ Si $f(1) \geqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) - f(0) \geqslant 21$, et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) < 21$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, qui est continue sur $[1, 2]$, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 21$.
▸ Si $f(1) \leqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) \leqslant 21$ et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) \geqslant 21$.
Là encore, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 21$.

Et donc dans les deux cas, il existe un intervalle d'une heure dans lequel le skieur a parcouru 21 km.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.20

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Puisque f est croissante, par le théorème de la limite monotone, elle admet des limites à gauche et à droite en a. Notons $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
On a alors $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$.
De même, g étant décroissante, elle admet des limites à droite et à gauche en a, notons-les $g(a^-)$ et $g(a^+)$.
Et alors $g(a^+) \leqslant g(a) \leqslant g(a^-)$.
Mais la fonction $x \mapsto x$ est continue en a, et admet donc a pour limite à droite et à gauche en a, donc par opération sur les limites[8]

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} xg(x) = a \lim_{x\to a^+} g(x) = ag(a^+).$$

[8] Les opérations usuelles restent évidemment valables pour des limites à gauche ou à droite.

Et de même, $f(a^-) = ag(a^-)$.
Puisque $a > 0$, on a donc $f(a^-) \geqslant f(a^+)$, et comme nous avions déjà l'inégalité dans l'autre sens, $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.
Et donc f est continue en a.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.21

Si x est un point fixe de f, alors $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$, donc x est un point fixe de $f \circ f$.

Donc déjà, si f admet un point fixe, alors $f \circ f$ admet un point fixe.

> **Remarque**
> Notons que la continuité de f ne nous a été d'aucun utilité ici.

Inversement, supposons que f ne possède pas de point fixe. Alors, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant. En effet, si elle changeait de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires[9], il existerait $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
Supposons donc qu'elle soit strictement positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(f(x)) > f(x) > x$. Et donc $f \circ f$ n'admet pas de point fixe.
De même, si $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < x$, alors pour tout x, $f(f(x)) < f(x) < x$, et donc $f \circ f$ n'admet pas non plus de point fixe.

[9] Et c'est ici que la continuité de f est indispensable !

Nous avons donc prouvé que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

Solution de l'exercice 16.22

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, on a $|x - y| < \varepsilon$ et donc $|f(x) - f(y)| < |x - y| < \varepsilon$.
Et donc $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$, donc f est continue en x.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, f est continue sur $\mathbf{R}$.

> **Autrement dit**
> On peut prendre $\eta = \varepsilon$ dans la définition de limite.

2. Supposons que f possède au moins deux points fixes $x < y$.
Soit alors $z \in]x, y[$, et supposons par l'absurde que $f(z) \neq z$.
▶ Si $f(z) > z$. Alors

$$|f(x) - f(z)| \leqslant |x - z| \Leftrightarrow f(z) - f(x) \leqslant z - x.$$

Soit encore $f(z) - z < f(x) - x = 0$, ce qui est absurde.
▶ Si $f(z) < z$, alors $|f(y) - f(z)| \leqslant |y - z| \Leftrightarrow f(y) - f(z) \leqslant y - z$, et par conséquent $f(z) - z \geqslant f(y) - y = 0$, ce qui est absurde.
Donc $f(z) = z$, et donc z est un point fixe.
Ainsi, tous les points de $[x, y]$ sont fixes par f : l'ensemble des points fixes de f est un intervalle de $\mathbf{R}$.

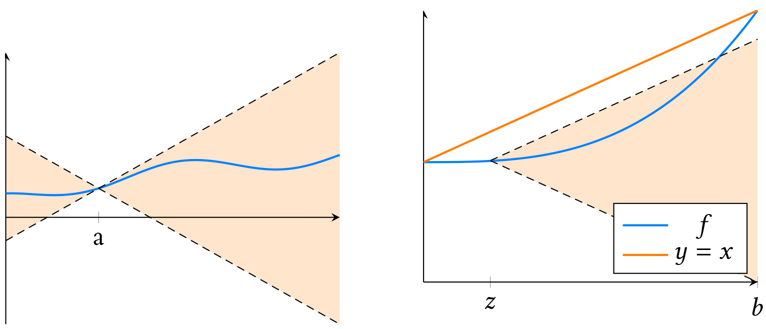
> **Remarque**
> S'il n'y a pas de point fixe, il n'y a rien à dire, et s'il n'y a qu'un point fixe a, $\{a\} = [a, a]$ est un intervalle.

Remarques : si f est 1-lipschitzienne, et si $a \in \mathbf{R}$, alors pour tout $x \geqslant a$, $|f(x) - f(a) \leqslant |x - a|$, de sorte que

$$f(a) + a - x \leqslant f(x) \leqslant x - a + f(a).$$

Or, $y = f(a) + a - x$ est l'équation de la droite de coefficient directeur -1 passant par $(a, f(a))$.
Et de même, $y = x - a + f(a)$ est l'équation de la droite de coefficient directeur 1 qui passe par $(a, f(a))$.
Donc si f est 1-lipschitzienne, sa courbe représentative est située entre ces deux droites[10].
Si a et b sont deux points points fixes, et si $z \in [a, b]$ est tel que $f(z) < z$, alors le graphe

[10] Voir la figure de gauche ci-dessous.



de f doit être situé sous une droite de coefficient directeur 1 et parallèle à la première bissectrice : on ne pourra pas avoir $f(b) = b$.
Et alors f ne peut rester sur cette droite et venir intersecter la première bissectrice en b.
Idem si $f(z) > z$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.23

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction T-périodique continue. Alors f est continue sur $[0, T]$, et donc y est bornée : il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in [0, T]$, $|f(x)| \leqslant M$.
Et alors pour $x \in \mathbf{R}$, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $0 \leqslant x - kT < T$.
Et alors $|f(x)| = |f(x - kT)| \leqslant M$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant M$, de sorte que f est bornée.

Détails
Prendre $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.24

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.
Puisque $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$, alors $f(a) \geqslant a \Leftrightarrow f(a) - a \geqslant 0 \Leftrightarrow g(a) \geqslant 0$.
De même, $f(b) \leqslant b \Leftrightarrow f(b) - b \leqslant 0 \Leftrightarrow g(b) \leqslant 0$.
Donc g, qui est une fonction continue car somme de fonctions continues, change de signe.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.
Soit encore $f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

2. Si f est décroissante, alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante, car somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante.
Donc elle s'annule au plus une fois. Nous allons prouver qu'elle s'annule au moins une fois.
Par décroissance de f, pour $x < 0$, $f(x) \geqslant f(0)$ et donc $g(x) \geqslant f(0) - x$.
On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
De même, pour $x > 0$, $f(x) < f(0)$, et donc $g(x) < f(0) - x$, de sorte que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.
Et ainsi, g s'annule exactement une fois sur $\mathbf{R}$, et donc f possède un unique point fixe.

3. Il s'agit une fois encore de prouver que $g : x \mapsto f(x) - x$ s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.
Or, on a $(f(a) - a) + (f^2(a) - f(a)) + (f^3(a) - f^2(a)) + \cdots + (f^k(a) - f^{k-1}(a)) = 0$.
Soit encore $g(a) + g(f(a)) + \cdots + g(f^{k-1}(a)) = 0$.
La fonction g ne peut donc pas être de signe constant et non nulle entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.
Étant continue, elle s'annule donc (entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$), de sorte que f possède un point fixe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.25

Soit $A = f(0) + 1$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que pour $x > b$, $f(x) > f(0) + 1$. Notons qu'on a nécessairement $b > 0$.
De même, comme $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour $x < a$, $f(x) > f(0) + 1$. Et alors a est négatif.
Alors, sur le segment $[a,b]$, la fonction f est continue, et donc[11] possède un minimum $m \leqslant f(0)$, atteint par exemple en $x_0 \in [a,b]$.
Alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

- soit $x \in [a,b]$, auquel cas $f(x) \geqslant m$ par définition de m;
- soit $x > b$, mais alors $f(x) > f(0) + 1 > m$;
- soit $x < a$, et alors $f(x) > f(0) + 1 > m$.

Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant m$, de sorte que m est un minorant de f. Et puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par f, c'est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.

[11] C'est le théorème des bornes atteintes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.26

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite $(q_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Et alors par continuité de f, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(q_n) = f(a) \Rightarrow f(a) = 0$.

2. La fonction $f - g$ est continue sur $\mathbf{R}$, et nulle sur $\mathbf{Q}$. Par la question 1, elle est nulle, donc $f = g$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.28

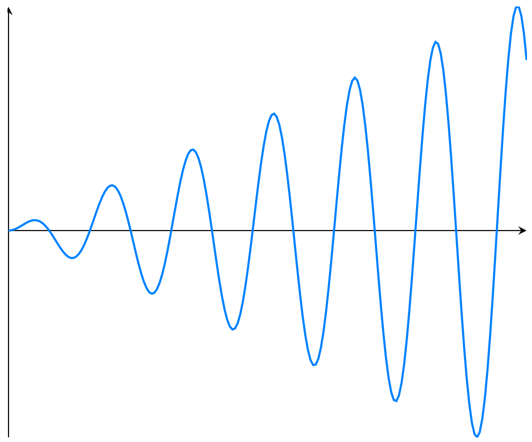
Supposons au contraire qu'il existe $y \in \mathbf{R}$ qui ne possède qu'un nombre fini d'antécédents[12].
Notons alors $x_1 < \cdots < x_n$ ces antécédents. Alors $x \mapsto f(x) - y$ est de signe constant sur $]x_n, +\infty[$. En effet, par le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \mapsto f(x) - y$ changeait de signe sur $]x_n, +\infty[$, alors y aurait un antécédent dans $[x_n, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas. Et idem pour l'autre intervalle.
Supposons par exemple que pour tout $x > x_n$, $f(x) \geqslant y$.

[12] La surjectivité nous garantit l'existence d'au moins un antécédent.

Notons alors $m = \min_{[0,x_n]} f$, qui existe bien par le théorème des bornes atteintes[13].
Alors $\min(y, m) - 1$ n'a pas d'antécédent dans $[0, x_n]$ par définition, et ne peut en avoir dans $]x_n, +\infty[$ puisque f n'y prend que des valeurs supérieures à y.
Ceci vient contredire la surjectivité de f.
Et donc tout $y \in \mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents.

13 Qui s'applique ici puisque $[0, x_n]$ est un segment.

Un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses est $x \mapsto x\sin(x)$, qui prend bien une infinité de fois chaque valeur y.
Notons que ce théorème devient absolument faux si on remplace $\mathbf{R}_+$ par $\mathbf{R}_+^*$, comme le



prouve le cas de la fonction ln.

Exercice
Le prouver «à la main», sans utiliser ce qui précède.

SOLUTION DE L'EXERCICE 16.29

Procédons par analyse-synthèse.
Soit donc f une telle fonction, qu'on peut supposer non nulle[14].
Pour $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) \in \{0, 1\}$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\sqrt{x^2}) = 0$.
Si $x > 0$, on a donc $f(x) = 0$. Et pour $x < 0$, on a, si $y \in \mathbf{R}$ est un réel tel que $f(y) \neq 0$,
$f(x) = \dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{f(y)} = \dfrac{f\left(\sqrt{(-x)^2+y^2}\right)}{f(y)} = f(-x)$.
Et donc $f(x) = 0$ pour tout x.

14 La fonction nulle est clairement solution.

Remarque
f étant non nulle, il existe un tel réel.

On a donc $f(0) = 1$.
Prouvons que f ne s'annule jamais. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x)^2 = f\left(\sqrt{2}|x|\right)$, et donc si $t > 0$ est un point où f s'annule, alors on a aussi $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0$.
Et alors une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}^n}\right) = 0$.
Mais par continuité de f, puisque $\dfrac{t}{\sqrt{2}^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient donc $f(0) = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Donc f est de signe constant[15], et puisque $f(0) = 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

15 C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, et lié au fait qu'elle est continue.

Soit alors g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \ln\left(f(\sqrt{x})\right)$.
Elle est continue par composition de fonctions continues, et pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$g(x^2 + y^2) = \ln\left(f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) = \ln\left(f(x)f(y)\right) = g(x^2) + g(y^2).$$

Soit encore $g(X + Y) = g(X) + g(Y)$ pour tout $(X, Y) \in \mathbf{R}^2$.
Mais alors il est classique que $g(0) = 0$, que si $g(1) = a$, alors pour tout $x \in \mathbf{N}$, $g(n) = g(1 + 1 + \cdots + 1) = g(1) + \cdots + g(1) = na$, puis que pour tout rationnel r, $g(r) = ar$.
Enfin, par continuité de g, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = ax$.
Et par conséquent, $f(x) = e^{ax^2}$.

Inversement, toute fonction de la forme $x \mapsto e^{ax^2}$ satisfait bien l'équation de départ.
Donc les solutions sont la fonction nulle et les $x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

Polynômes

17

17.1 À changer l'an prochain

On peut parler de racine de multiplicité 0.
Depuis le lycée, vous êtes familiers des polynômes de degré 2, qui sont des fonctions de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Et vous avez déjà rencontré des polynômes de degré 3, 4 voire plus, et avez probablement déjà une bonne intuition de ce dont il s'agit.
Ce chapitre a pour objectif de redéfinir toutes ces notions de façon plus formelle, et d'en étudier les propriétés.

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ est un corps quelconque.
Vous pouvez bien entendu imaginer que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, mais sauf mention explicite du contraire, ces résultats restent valables pour $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ ou encore $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

> **Rappel**
> Nous avons mentionné que pour p premier, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps.

17.2 L'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes

Nous ne définirons pas véritablement ce qu'est une $\mathbf{K}$-algèbre A, mais disons qu'il s'agit d'un anneau muni en plus d'une structure d'espace vectoriel (que nous définirons bientôt). Autrement dit, au delà des deux opérations qui existent dans un anneau, il en existe une troisième qui est la possibilité de multiplier les éléments de A par des éléments de $\mathbf{K}$ (les scalaires), avec certaines compatibilités entre toutes ces opérations.
Vous connaissez déjà un exemple de $\mathbf{K}$-algèbre, il s'agit de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

17.2.1 Définition de $\mathbf{K}[X]$ et de ses opérations

Le principe de la définition qui suit est simple : nous avons déjà prouvé[1] que sur $\mathbf{R}$, une fonction polynomiale est entièrement déterminée par la suite de ses coefficients.
Définissons donc un polynôme comme une suite finie de nombres (ici des éléments de $\mathbf{K}$).

[1] Dans le chapitre 7.

Définition 17.1 – On note $\mathbf{K}[X]$ la partie de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ formée des suites nulles à partir d'un certain rang.
Les éléments de $\mathbf{K}[X]$ sont appelés **polynômes à coefficients dans K**.
Pour $k \in \mathbf{N}$, on note X^k l'élément $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}[X]$ défini par $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

> **Danger !**
> Le rang à partir duquel la suite est nulle dépend bien sûr de la suite choisie !

Donc intuitivement, dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on fait correspondre à $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$.

Définition 17.2 – Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un élément de $\mathbf{K}[X]$.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on dit que a_k est le **coefficient de degré k de P**.
Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé polynôme nul, et on le note $0_{\mathbf{K}[X]}$, ou plus simplement 0.
Le **degré** d'un polynôme non nul $P = (a_k)_k$ est $\deg(P) = \max\{k \in \mathbf{N},\ a_k \neq 0\}$.
Par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$.

> **Autrement dit**
> Un polynôme de degré n est un polynôme dont le coefficient de degré n est **non nul** et dont tous les coefficients de degré supérieur sont nuls.

Remarque. Notons que **par définition**, deux polynômes $P = (a_0, a_1, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, \dots)$ sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux : $\forall k \in \mathbf{N},\ a_k = b_k$.

Nous allons à présent définir plusieurs opérations sur $\mathbf{K}[X]$.

Définition 17.3 – Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$.
On définit :

- pour $\lambda \in \mathbf{K}$, le polynôme $\lambda \cdot P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n, \dots)_n$
- la somme $P+Q$ de P et Q comme étant le polynôme

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)_n.$$

  Notons qu'il s'agit bien d'un polynôme, puisque pour $n > \max(\deg P, \deg Q)$, $a_n = b_n = 0$ et donc $a_n + b_n = 0$.
- le produit PQ de P et Q comme étant le polynôme $PQ = (c_n)_n$ où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Loi de composition

On n'a pas ici une loi de composition interne : elle n'associe pas un polynôme à deux polynômes, mais ce que nous nommerons plutôt une loi de composition externe : à un polynôme et un scalaire (= un élément de $\mathbf{K}$) elle associe un polynôme.

La définition de la somme n'appelle pas à davantage de commentaires, mais celle du produit mérite quelques explications.
Prenons deux fonctions polynomiales $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1x + \cdots + b_qx^q$, et développons le produit $f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p) \times (b_0 + b_1x + \cdots + b_qx^q) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_pb_qx^{p+q}. \end{aligned}$$

En particulier, le terme constant[2] est donné par a_0b_0, le terme en x est donné par $a_0b_1 + a_1b_0$, ..., le terme de degré n est $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$, ce qui coïncide bien avec notre définition.

[2] Sans x.

Plus formellement : quitte à ajouter un certain nombre de coefficients nuls à l'un ou l'autre des polynômes, on peut supposer que $p = q$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_kx^k \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell x^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} a_kb_\ell x^{\ell+k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n+k} a_kb_{\ell-k}x^j \\ &= \sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}x^j = \sum_{j=0}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}\right)x^j. \end{aligned}$$

Distributivité.

Chgt d'indice

$j = \ell + k$.

Permutation de sommes.

Notons au passage que pour $n > p + q$, on a

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k \underbrace{b_{n-k}}_{=0 \text{ car } n-k>p+q-p=q} + \sum_{k=p+1}^{n} \underbrace{a_k}_{=0 \text{ car } k>p} b_{n-k} = 0.$$

Et donc PQ est bien un polynôme puisque tous ses coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Et donc le produit définit bien une loi de composition interne sur $\mathbf{K}[X]$.

Remarque

Notons au passage que nous venons de prouver que

$$\deg(PQ) \leqslant \deg(P) + \deg(Q).$$

Puisqu'on a noté $X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ fois}}, 1, 0, \dots)$, un polynôme $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots)$ s'écrit encore

$$\begin{aligned} P &= a_0(1, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + a_2(0, 0, 1, 0, \dots) + \cdots + a_n(0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &= a_0 \times X^0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \end{aligned}$$

où $n = \deg P$.

Cette écriture est unique puisque si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{i=0}^{p} b_iX^i$, alors $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) = (b_0, b_1, \dots, b_p, 0, \dots)$, et donc par définition même de l'égalité de deux suites, $\forall i \in \mathbf{N}$,

$a_i = b_i$.

On s'autorisera aussi à noter $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'une vraie somme jusqu'à $+\infty$, et que seul un nombre fini de termes sont non nuls.

Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on notera parfois $\widetilde{\lambda}$ le polynôme dont le seul coefficient non nul est celui de degré 1, qui vaut λ : $\widetilde{\lambda} = (1, 0, 0, \dots)$, mais la plupart du temps, nous le noterons[3] tout simplement λ. En particulier, $\widetilde{0} = 0_{\mathbf{K}[X]}$.
Ces polynômes, à savoir ceux dont le degré est inférieur ou égal à 0, sont appelés polynômes **constants.**

[3] Abusivement.

Danger !
Je n'ai pas dit de degré 0, mais de degré **inférieur** ou égal à 0. Le polynôme nul est constant

Définition 17.4 – Si P est un polynôme non nul, alors son coefficient de degré $\deg(P)$ est appelé **coefficient dominant**.
Un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.
Enfin, un polynôme dont un seul coefficient est non nul est appelé un **monôme**.

Autrement dit
Le coefficient dominant est le dernier terme non nul de la suite des coefficients.

Exemple 17.5

Le coefficient dominant de $P = -2X^3 + X^2 - 1$ est -2.
Ce polynôme n'est pas unitaire, mais $\dfrac{P}{-2}$ l'est.
De manière générale, si P est non nul, alors en le divisant par son coefficient dominant, on obtient un polynôme unitaire proportionnel à P.

17.2.2 Propriétés des opérations

Proposition 17.6 : *Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$ trois éléments de $\mathbf{K}[X]$. Alors :*

1. *$P + Q = Q + P$. (commutativité de l'addition)*
2. *$(P + Q) + R = P + (Q + R)$. (associativité de l'addition)*
3. *$P + 0_{\mathbf{K}[X]} = 0_{\mathbf{K}[X]} + P = P$ ($0_{\mathbf{K}[X]}$ neutre pour $+$)*
4. *P possède un inverse pour l'addition, qu'on note $-P$ et qui est donné par*

$$-P = \sum_{k=0}^{p} (-a_k) X^k = (-1) \cdot P.$$

Autrement dit, $(\mathbf{K}[X], +)$ est un groupe commutatif.

Démonstration. Plutôt que de prouver qu'il s'agit d'un groupe, prouvons qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +)$.
Il suffit pour cela de remarquer que la suite nulle (qui est le polynôme nul) est nulle à partir d'un certain rang, et que la différence de deux suites nulles à partir d'un certain rang est encore nulle à partir d'un certain rang.
Le point 4 nécessite toute de même une petite précision : si nous avons déjà prouvé que l'inverse d'une suite $P = (a_0, a_1, \dots)$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est la suite que nous avons donc notée $-P$, et qui est $(-a_0, -a_1, \dots)$, l'énoncé précise ici qu'il s'agit également du polynôme $(-1) \cdot P$.
Et donc $-P$ et $(-1) \cdot P$ désignent bien le même objet, ce qui est plutôt rassurant car cela va dans le sens de nos habitudes, mais n'avait rien d'une évidence au vu des définitions. □

Remarque
Nous avons prouvé que $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \times)$ est un anneau, donc en particulier, $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +)$ est un groupe commutatif.

Proposition 17.7 : *Soient* $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ *et* $R = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$ *trois éléments de* $\mathbf{K}[X]$. *Alors :*

1. $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $PQ = QP$ *(commutativité du produit)*
2. $\forall (P,Q,R) \in \mathbf{K}[X]^3$, $(PQ)R = P(QR)$ *(associativité du produit)*
3. $\forall (P,Q,R) \in \mathbf{K}[X]^3$, $P(Q+R) = PQ + PR$ *(distributivité)*
4. $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $\widetilde{1} \times P = P$ *($\widetilde{1}$ est élément neutre pour la multiplication)*
5. $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $\lambda \cdot (P+Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$
6. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $(\lambda+\mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$
7. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall P \in \mathbf{K}[X]$, $\lambda \cdot (\mu \cdot P) = (\lambda\mu) \cdot P$
8. $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(\lambda \cdot P)Q = \lambda \cdot (PQ) = P(\lambda \cdot Q)$

Un peu de jargon

Vous connaissez déjà les 4 premiers points : couplés au fait qu'on ait un groupe commutatif, ils signifient que $\mathbf{K}[X]$ possède une structure d'*anneau*.
Les 3 suivants (toujours couplés à la structure de groupe) signifient qu'on a ce que nous nommerons bientôt un *espace vectoriel*.
Tous ensemble, et couplés au dernier point (qui garantit une certaine compatibilité entre le produit de $\mathbf{K}[X]$ et celui de $\mathbf{K}$) ils donnent à $\mathbf{K}[X]$ une structure d'*algèbre* dont vous parlerez l'an prochain.

Démonstration. Notons que cette fois, nous n'allons pas pouvoir utiliser le fait que $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \times)$ est un anneau, puisque le produit sur $\mathbf{K}[X]$ n'est pas le même que celui sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ (qui était le produit terme à terme).

Dans toute la suite, notons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{r} c_k X^k$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le changement d'indice $i = n - k$ prouve que
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i = \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}.$$
Donc le coefficient de degré n de PQ est égal à celui de QP. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, ces deux polynômes sont égaux.

2. Le coefficient de degré n de $(PQ)R$ est $\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) c_{n-k}$ et celui de $P(QR)$ est $\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j} \right)$. Or, on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) c_{n-k} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} c_{n-k} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=i}^{n} b_{k-i} c_{n-k} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j c_{n-i-j}. \end{aligned}$$
Interversion de sommes.

Chgt d'indice

On a posé
$$j = k - i \Leftrightarrow i = j + k.$$

Et donc les coefficients de $(PQ)R$ sont égaux à ceux de $P(QR)$.

3. Le coefficient de degré n de $P(Q+R)$ est
$$\sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}.$$
On reconnaît là le coefficient de degré n de $PQ + PR$.

4. Le coefficient de degré n de $\widetilde{1} \times P$ est $1 \times a_n + 0 \times a_{n-1} + \cdots + 0 \times a_0 = a_n$.

5. Pour les points 5 à 8, notons que pour $\lambda \in \mathbf{K}$, la multiplication de P par le *polynôme* $\widetilde{\lambda}$ et la multiplication de P par le *scalaire* λ produisent le même effet : elles multiplient tous les coefficients de P par λ.
Or les propriétés déjà prouvées sur le produit permettent facilement, dans le cas particulier de polynômes constants, de retrouver les points 5 à 8.

Par exemple le point 5 découle directement de la distributivité : pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, on a

$$\lambda \cdot (P+Q) = \widetilde{\lambda}(P+Q) = \widetilde{\lambda}P + \widetilde{\lambda}Q = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q.$$

Les points 6 et 7 nécessitent en plus de remarquer que $\widetilde{\lambda+\mu} = \widetilde{\lambda} + \widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\lambda\mu} = \widetilde{\lambda}\widetilde{\mu}$.

□

Notons que toutes ces vérifications, bien que fastidieuses étaient indispensables. Les résultats ne doivent en rien vous surprendre, puisqu'on retrouve des règles de calcul qu'on manipule depuis toujours sans se poser de questions.

Dans la suite, nous ne distinguerons plus la multiplication par un scalaire de la multiplication par un polynôme constant, et nous noterons généralement λP plutôt que $\lambda \cdot P$ ou $\widetilde{\lambda}P$.

Enfin, il est temps de remarquer que la notation X^k que nous avons définie est bien cohérente avec les puissances multiplicatives de X.
Déjà, $X^0 = (1, 0, 0, \dots)$ est l'élément neutre de $\times$.

Remarque
Ces puissances ne sont bien définies, que parce que $\times$ est associative.

Lemme 17.8. Soit $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n. Alors $P \times X = (0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, \dots)$.

Démonstration. Notons $(b_k)_{k\in\mathbf{N}}$ les coefficients de X et $(c_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ceux de PX. On a alors, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \underbrace{b_{k-i}}_{=0 \text{ si } i\neq k-1} = a_{k-1} \times 1 = a_{k-1}.$$

Et $c_0 = a_0 \underbrace{b_0}_{=0} = 0$. □

Donc en particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{k \text{ fois}} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ fois}}, 1, 0, \dots)$.
Et donc la notation X^k est bien cohérente avec les puissances.
On a donc tout de suite : $\forall (k, \ell) \in \mathbf{N}^2$, $X^k X^\ell = X^{k+\ell}$, comme pour toute loi associative possédant un élément neutre.

⚠ On ne notera pas de puissances négatives de X, X n'a aucune raison d'être inversible dans $\mathbf{K}[X]$, et de fait nous prouverons plus loin qu'il ne l'est pas. Donc vous ne pourrez pas noter ni X^{-1} ni $\dfrac{1}{X}$, ils ne sont pas définis dans $\mathbf{K}[X]$.

17.2.3 Degré, ensemble $\mathbf{K}_n[X]$

Définition 17.9 – Soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X] : \deg(P) \leqslant n\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré **inférieur ou égal à n.**

⚠ Attention !
Ne pas dire que $\mathbf{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré n, mais bien de degré inférieur à n.

Notons en particulier que $\mathbf{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants (polynôme nul inclus) et que si $p \leqslant q$, alors $\mathbf{K}_p[X] \subset \mathbf{K}_q[X]$.

Proposition 17.10 : *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. Alors :*

1. *pour tout $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda P) = \deg(P)$*
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
3. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
   Si de plus $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors l'inégalité est une égalité : $\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, avec $a_p \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, avec $b_q \neq 0$. On a donc $\deg P = p$ et $\deg Q = q$.

1. Le coefficient de degré n de λP est λa_n, qui est donc nul si et seulement si $a_n = 0$. Donc $\lambda a_p \neq 0$ et pour $n > p$, $\lambda a_p = 0$, de sorte que $\deg(\lambda P) = p = \deg P$.
2. Nous avons déjà prouvé que si P et Q sont non nuls, alors $\deg(PQ) \leqslant \deg(P)+\deg(Q)$. De plus, le coefficient de degré $p+q$ de PQ est $a_p b_q \neq 0$, et donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. Si l'un des deux polynômes P et Q est nul, alors $PQ = 0$ est de degré $-\infty = \deg(P) \times \deg(Q)$.
3. Le coefficient de degré n de $P + Q$ est $a_n + b_n$. Si $n > \max(p, q)$, il est donc nul, prouvant que $\deg(P + Q) \leqslant \max(p, q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

   ⚠ On n'a pas prouvé que $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$, car il se peut encore que le coefficient de degré $\max(\deg P, \deg Q)$ soit nul, auquel cas $\deg(P + Q) < \max(\deg P, \deg Q)$. C'est par exemple le cas si $P = -X^2 + 1$ et $Q = X^2 + X$. On a alors $P + Q = X + 1$, qui est de degré 1.
   En revanche si $\deg P \neq \deg Q$, les termes de plus haut degré ne peuvent plus s'annuler.
   Supposons par exemple que $p < q$. Alors le coefficient de degré $\max(p, q) = q$ de $P + Q$ est $a_p + b_q = b_q \neq 0$, et donc $P + Q$ est bien de degré $\max(\deg P, \deg Q)$.

□

Rappel
Pour tout réel p,
$$-\infty + p = -\infty$$
et
$$-\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Corollaire 17.11 – *Pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-groupe de $\mathbf{K}[X]$, stable par la multiplication par un scalaire. Autrement dit, $\forall (P, Q) \in \mathbf{K}_n[X]^2$ et $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, λP et $P - Q$ sont dans $\mathbf{K}_n[X]$.*

En revanche
Notons que le produit de deux éléments de $\mathbf{K}_n[X]$ n'est pas toujours dans $\mathbf{K}_n[X]$ (qui n'est donc pas un sous-anneau de $\mathbf{K}[X]$), mais toujours dans $\mathbf{K}_{2n}[X]$.

Proposition 17.12 : *L'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre. Autrement dit,*
$$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2,\ PQ = 0_{\mathbf{K}[X]} \Rightarrow (P = 0_{\mathbf{K}[X]} \textbf{ ou } Q = 0_{\mathbf{K}[X]}).$$

Démonstration. Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \geqslant 0$, donc PQ n'est pas nul. □

Plus généralement
Dans un anneau intègre, tout élément non nul est régulier pour la multiplication.
Ce qui ne veut pas dire qu'il soit inversible pour autant.

Corollaire 17.13 – $\forall (P, Q, R) \in \mathbf{K}[X]^3$, $(PQ = PR \textbf{ et } P \neq 0_{\mathbf{K}[X]}) \Rightarrow Q = R$.

Démonstration. $PQ = PR \Leftrightarrow P(Q - R) = 0_{\mathbf{K}[X]}$.
Et puisque $P \neq 0$, nécessairement $Q - R = 0_{\mathbf{K}[X]} \Leftrightarrow Q = R$. □

17.2.4 Composition de polynômes

Définition 17.14 – Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ deux polynômes, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On définit alors un polynôme noté $P \circ Q$ par
$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Proposition 17.15 : *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, avec Q non constant. Alors*
$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$$

Démonstration. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $n = \deg(P)$.
Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, Q^k est de degré $k \times \deg(Q)$.

Donc $\deg\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k\right) \leqslant (n-1)\deg Q$.

Et puisque $\deg(a_n Q^n) = n \deg Q$ est différent de $\deg\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^k\right)$, alors le degré de la somme est $n \deg Q$. □

Exemples 17.16

Les coefficients d'un polynôme composé $P \circ Q$ ne sont pas faciles à obtenir directement à partir de ceux de P et Q, même si le binôme de Newton peut partiellement nous aider.

Par exemple, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$, avec $p = \deg P$ et $q = \deg Q$, alors le terme de degré pq provient uniquement de

$$a_p Q^p = a_p \left(b_q X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k\right)^p = a_p b_q^p X^{pq} + \underbrace{\star}_{\in \mathbf{K}_{pq-1}[X]}.$$

Donc le coefficient dominant de $P \circ Q$ est $a_p b_q^p$.

⚠ Les composées de polynômes sont[4] rarement notées avec $\circ$, et on note par exemple $P(X+1)$ pour désigner le polynôme P composé avec $X+1$.
Le risque de confusion avec le produit $P \times (X+1)$ est alors important...
Partons du principe que si on avait souhaité parler de ce produit, on l'aurait plutôt noté $(X+1)P$ ou alors carrément $P \times (X+1)$ ou $P \cdot (X+1)$.

[4] Par habitude plus que par convention.

17.2.5 Dérivation des polynômes

Nous définissons ici la notion de polynôme dérivé, pour l'instant sans rapport avec la dérivation des fonctions.

Définition 17.17 – Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbf{K}_p[X]$. On définit alors le **polynôme dérivé** de P, noté P' par

$$P' = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} \in \mathbf{K}_{p-1}[X]$$

Plus généralement, on note $P^{(0)} = P$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$.

Cette dérivation correspond bien à ce que vous connaissez des dérivées des fonctions polynômiales dans $\mathbf{R}$.
En revanche, soyons conscients qu'il s'agit là d'une définition : à aucun moment on ne parle de limite[5] de taux d'accroissement.
La bonne nouvelle, c'est que P' est toujours défini, il n'y aura jamais besoin de se poser la question de la dérivabilité de P : à tout polynôme P est associé un autre polynôme P'. Et tous les polynômes dérivés d'ordre supérieur : P'', $P^{(3)}$, etc sont eux aussi toujours définis.

[5] Ce qui n'aurait de sens que dans $\mathbf{R}$.

Proposition 17.18 : *Soient* $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ *deux polynômes, et soit* $\lambda \in \mathbf{K}$. *Alors*

1. *Si* $\deg(P) \geqslant 1$, *alors* $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
   En revanche, si P *est constant, alors* $P' = 0$, *de degré* $-\infty$.
2. $(\lambda P + Q)' = \lambda \cdot P' + Q'$ *(linéarité de la dérivation)*
3. $(PQ)' = P'Q + PQ'$
4. $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

Démonstration.

1. Si P est constant, alors la somme définissant P' est vide, donc P' est nul.
   En revanche, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est de degré p, donc avec $a_p \neq 0$, alors $P' = \sum_{k=1}^{p} a_k X^{k-1}$ est de degré au plus $p-1$, et son coefficient de degré $p-1$ est $pa_p \neq 0$. Donc $\deg(P') = p - 1$.
2. Trivial.
3. Commençons par le vérifier pour des monômes.
   Soient donc $k, \ell \in \mathbf{N}$. Si k et ℓ sont tous deux non nuls, alors
   $$\left(X^k X^\ell\right)' = \left(X^{k+\ell}\right)' = (k+\ell)X^{k+\ell-1} = kX^{k-1}X^\ell + \ell X^k X^{\ell-1} = \left(X^k\right)' X^\ell + X^k \left(X^\ell\right)'.$$
   Il est aisé de se convaincre que ceci reste vrai si $k = 0$ ou $\ell = 0$ (l'une des dérivées est alors nulle).
   Dès lors, la linéarité de la dérivée prouvée ci-dessus nous permet d'en déduire la formule dans le cas général :
   $$\begin{aligned}(PQ)' &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k Q\right)' = \left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^k X^\ell\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell \left(X^k X^\ell\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell \left(\left(X^k\right)' X^\ell + X^k \left(X^\ell\right)'\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell \left(X^k\right)' X^\ell + \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^k \left(X^\ell\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p}\left[a_k \left(X^k\right)' \left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right)\right] + \sum_{k=0}^{p}\left[a_k X^k \left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \left(X^\ell\right)'\right)\right] \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \left(X^k\right)'\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right) + \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell \left(X^\ell\right)'\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)'\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right) + \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right)' = P'Q + PQ'.\end{aligned}$$
   C'est encore la linéarité de la dérivation.
4. Une récurrence facile à l'aide de la formule ci-dessus prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, le polynôme dérivé de Q^k est $kQ'Q^{k-1}$.
   Et alors
   $$(P \circ Q)' = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k\right)' = \sum_{k=1}^{p} a_k k Q' Q^{k-1} = Q' \times \sum_{k=1}^{p} k a_k Q^{k-1} = Q' \times (P' \circ Q).$$

□

Corollaire 17.19 (Propriétés de la dérivée $n^{\text{ème}}$) – *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et soit $n \in \mathbf{N}$.*

1. $\deg P^{(n)} = \begin{cases} \deg(P) - n & \text{si } \deg(P) \geqslant n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$
2. $(\lambda P + Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + Q^{(n)}$

La dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit est un peu plus complexe, mais il existe tout de même une formule.

Proposition 17.20 (Formule de Leibniz) : *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors*

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Danger ! Il s'agit bien de dérivées $k^{\text{èmes}}$ et $(n-k)^{\text{èmes}}$, et pas de puissances.

Démonstration. Prouvons le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, il n'y a rien à dire : $PQ = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
(PQ)^{(n+1)} &= \left((PQ)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' && \text{Hypothèse de récurrence.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left(P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' && \text{Linéarité de la dérivation.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + P^{(k)} Q^{(n-k+1)}\right) && \text{Dérivée d'un produit.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} P^{(i)} Q^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)} \\
&= PQ^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) P^{(k)} Q^{(n+1-k)} + P^{(n+1)} Q \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, la formule est valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

17.2.6 Évaluation en un point, fonctions polynomiales

Définition 17.21 – Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on note $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \in \mathbf{K}$.

Proposition 17.22 : *Pour $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a*

$$(P+Q)(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda) \text{ et } (PQ)(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda).$$

Définition 17.23 – Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. On appelle **fonction polynomiale associée à** P la fonction $\widetilde{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & P(\lambda) \end{array} \right.$.

Proposition 17.24 : *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. Alors :*

$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q},\ \widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q},\ \widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

et dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors $\widetilde{P'} = \left(\widetilde{P}\right)'$.

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$?
La restriction sur $\mathbf{K}$ vient tout simplement du fait que la notion de fonction dérivable, qui nécessite une notion de limite, n'a été définie que pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ (même si on pourrait sans grandes difficultés le faire également pour les fonctions d'une variable complexe).

17.3 DIVISIBILITÉ DANS $\mathbf{K}[X]$

17.3.1 Divisibilité

Définition 17.25 – Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$. On dit que P **divise** Q, ou que Q est un multiple de P, et on note $P \mid Q$ s'il existe $\mathbf{R} \in \mathbf{K}[X]$ tel que $Q = PR$.

Exemple 17.26

Le polynôme $X^2 + 3X - 4$ est divisible par $X + 4$ puisque $X^2 + 3X - 4 = (X+4)(X-1)$.

Remarque. Un fait souvent utile est que si $P \mid Q$, avec $Q = PR$, alors $\deg P + \deg R = \deg Q$, et en particulier, $\deg P \leqslant \deg Q$.

Proposition 17.27 : *Comme sur $\mathbf{Z}$, la relation de divisibilité est réflexive et transitive. Elle n'est pas antisymétrique, mais, pour $P, Q \in \mathbf{K}[X]$, on a*

$$(P \mid Q \textbf{ et } Q \mid P) \Leftrightarrow (P = Q = 0_{\mathbf{K}[X]} \textbf{ ou } \exists \lambda \in \mathbf{K}^*,\ P = \lambda Q).$$

De plus, si $P \mid A$ et $P \mid B$, alors $\forall (U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$, $P \mid AU + BV$ et si $P \mid Q$, alors $\forall R \in \mathbf{K}[X]$, $PR \mid QR$.

Démonstration. Pour $P \in \mathbf{K}[X]$, on a $P = 1P$, donc P est réflexive.
Et si $P \mid Q$ et $Q \mid R$, alors il existe $A, B \in \mathbf{K}[X]$ tels que $Q = AP$ et $R = BQ$, donc $R = B(AP) = (AB)P$, de sorte que $P \mid R$.
Supposons que $P \mid Q$ et $Q \mid P$. Alors il existe $R_1, R_2 \in \mathbf{K}[X]$ tel que $Q = PR_1$ et $P = QR_2$.
Donc en particulier, $\deg P \leqslant \deg Q$ et $\deg Q \leqslant \deg P$, donc $\deg P = \deg Q$ et donc $\deg R_1 = \deg R_2 = 0$.
Donc R_1 est une constante $\lambda \neq 0$.
Inversement, si $P = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$, alors $Q = \dfrac{1}{\lambda} P$, et on a donc à la fois $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

Les deux derniers points se prouvent exactement comme dans $\mathbf{Z}$. □

Notons également que multiplier un polynôme par un scalaire non nul ne change rien à l'ensemble de ses diviseurs.
Autrement, quel que soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$, $P \mid Q \Leftrightarrow P \mid \lambda Q$.
En effet, s'il existe $R \in \mathbf{K}[X]$ tel que $Q = PR$, alors $\lambda Q = P\lambda R$.
Et inversement, si $\lambda Q = PR$, alors $Q = \left(\frac{1}{R}\right) P$, donc $P \mid Q$.

17.3.2 Division euclidienne

Justifions à présent un résultat évoqué dans un chapitre antérieur : l'existence d'une division euclidienne dans l'anneau des polynômes.

Théorème 17.28 (Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$) : *Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$, avec $\deg R < \deg B$ tel que $A = BQ + R$.*
Notons que ceci s'écrit encore $(Q, R) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}_{(\deg B)-1}[X]$.

Démonstration. L'unicité est la plus facile : supposons que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$, avec $\deg R_1 < \deg B$ et $\deg R_2 < \deg B$.
Alors $R_1 - R_2 = B(Q_2 - Q_1)$. Si $Q_1 \neq Q_2$, alors $B(Q_2 - Q_1) \neq 0$, et donc $\deg B(Q_2 - Q_1) \geqslant \deg B$.
Or, $\deg(R_1 - R_2) < \deg B$, ce qui est absurde.
Donc $Q_1 = Q_2$, et par conséquent, $R_1 = R_2$.

Pour l'existence, le cas le plus facile est celui où B divise A : il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = BQ = BQ + 0$.
On suppose donc désormais que $B \nmid A$.
Soit alors $\mathscr{P} = \{\deg(A - BQ),\ Q \in \mathbf{K}[X]\}$.
Puisque tous les $A - BQ$ sont non nuls, $\mathscr{P}$ est une partie de $\mathbf{N}$, non vide puisqu'elle contient $\deg(A) = \deg(A - B \times 0)$.
Elle possède donc un plus petit élément p.
Soit alors $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg(A - BQ) = p$, et montrons que p est strictement inférieur à $\deg B$.
Supposons au contraire que $R = A - BQ$ soit de degré supérieur$p$ ou égal à $\deg B$, et notons alors $n = \deg B$, $B = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ et $R = \sum_{i=0}^{p} r_i X^i$.
Alors $R - \dfrac{r_p}{b_n} X^{p-n} B$ est encore de la forme $A - BQ$, et

$$R - \frac{r_p}{b_n} X^{p-n} B = \sum_{i=0}^{p} r_i X^i - \frac{r_p}{b_n} X^{n-p} \sum_{i=0}^{n} b_i X^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{p} r_i X^i - r_p X^p}_{\in \mathbf{K}_{p-1}[X]} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_p}{b_n} b_i X^{p-n+i}}_{\in \mathbf{K}_{p-1}[X]} \in \mathbf{K}_{p-1}[X].$$

Donc $\deg\left(R - \dfrac{r_p}{b_n} X^{n-p} B\right)$ est un élément de $\mathscr{P}$ strictement inférieur à p, contredisant la définition de p.
On en déduit bien que $A = BQ + R$, avec $\deg R < \deg B$. □

Remarque
Notons que les hypothèses faites sur les degrés impliquent que $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$.

Explication
Ce polynôme ne sort pas de nulle part : on souhaite retirer à R un multiple de B de manière à faire baisser le degré de r, c'est-à-dire à annuler son terme de plus haut degré ($r_p X^p$).

La pratique de la division euclidienne n'a pas changé par rapport à ce que nous avions dit plus tôt dans l'année.
On retrouve bien entendu, comme pour les entiers[6] le fait que B divise A si et seulement si le reste de la division de A par B est nul.

[6] Et nous verrons dans un chapitre ultérieur que l'analogie ne s'arrête pas là, et qu'à partir du moment où on a une division euclidienne, on peut reconstruire une notion de PGCD, retrouver Bézout, etc. Bref, faire de l'arithmétique.

17.4 RACINES D'UN POLYNÔME

17.4.1 Racines et multiplicités

Définition 17.29 – Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et soit $a \in \mathbf{K}$. On dit que a est **racine** de P si $P(a) = 0$.

Remarques. ► Il est bon de préciser dans quel corps on se place lorsqu'on parle de racines. Par exemple, le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines dans $\mathbf{R}$, mais en a deux dans $\mathbf{C}$.
De même, $X^3 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$ n'a aucune racine dans $\mathbf{Q}$, en a une dans $\mathbf{R}$ et trois dans $\mathbf{C}$.
► Si $P \mid Q$, alors toute racine de P est une racine de Q. En effet, si $Q = PR$ et $P(a) = 0$, alors $Q(a) = P(a)R(a) = 0$.

Exemple 17.30 **Application des racines au calcul d'une division euclidienne**

Calculons le reste de la division euclidienne (dans $\mathbf{R}[X]$) de X^n par $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$.
Cette division est de la forme $X^n=(X-1)(X+2)Q_n+R_n \quad (\star)$, avec $\deg R_n<2$.
Autrement dit, il existe deux réels a_n et b_n tels que $R_n=a_nX+b_n$.
Évaluons alors $(\star)$ en 1 :

$$1^n=(1-1)(1+2)Q_n(1)+R_n(1)=a_n+b_n.$$

Et de même, par évaluation en -2, $(-2)^n=-2a_n+b_n$.
On en déduit, par résolution d'un système, que $R_n=\frac{1}{3}\left((1-(-2)^n)X+2+(-2)^n\right)$.

Proposition 17.31 : *Soit $P\in\mathbf{K}[X]$ et soit $a\in\mathbf{K}$. Alors a est racine de P si et seulement si $X-a$ divise P.*

Démonstration. Si $X-a$ divise P, soit alors Q tel que $P(X)=Q(X)(X-a)$.
Alors en évaluant en a, il vient $P(a)=Q(a)(a-a)=0$.

Inversement, supposons que $P(a)=0$. Soit alors $P=(X-a)Q+R$ la division euclidienne de P par $X-a$, avec $\deg R<\underbrace{\deg(X-a)}_{=1}$.
Alors R est un polynôme constant λ. Mais en évaluant en a,

$$P(a)=(a-a)Q(a)+\lambda \Leftrightarrow P(a)=\lambda.$$

Et donc si $P(a)=0$, alors $\lambda=0$, et donc $P=(X-a)Q$ est divisible par $X-a$. □

Proposition-définition Soit $P\in\mathbf{K}[X]$ non nul, et soit $a\in\mathbf{K}$. Alors $\{k\in\mathbf{N}$ tel que $(X-a)^k\mid P\}$ possède un plus grand élément, qu'on appelle la **multiplicité de** a dans P.
Si cette multiplicité est nulle, alors a n'est pas racine de P.
Si elle vaut 1, alors P est divisible par $X-a$ mais pas par $(X-a)^2$, on dit que a est racine simple de P.
Si elle vaut 2, alors P est divisible par $(X-a)^2$ mais pas par $(X-a)^3$, on dit alors que a est racine double de P, etc.

Remarques. Plus généralement, a est racine de multiplicité m de P si $(X-a)^m\mid P$ et $(X-a)^{m+1}\nmid P$.
Ceci s'écrit encore : il existe $Q\in\mathbf{K}[X]$ tel que $P=(X-a)^mQ(X)$ et $Q(a)\neq 0$.

Démonstration. L'ensemble $\{k\in\mathbf{N},\ (X-a)^k\mid P\}$ est non vide puisqu'il contient toujours 0.
Et il est majoré puisque si $(X-a)^k\mid P$, alors $\deg\left((X-a)^k\right)\leqslant\deg P$, et donc $k\leqslant\deg P$.
Par conséquent, comme toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$, il possède un plus grand élément m. □

17.4.2 Multiplicité et dérivées

La formule qui suit est un exemple de formule qui n'est plus valable dans les corps finis. La raison en est que, par exemple, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p!=0$, et donc n'est pas inversible.
Nous énonçons donc les résultats pour $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais plus généralement ceci reste valable dans n'importe quel corps qui contient $\mathbf{Q}$.

Corps contenant Q.
Si je vous dis «corps qui contient $\mathbf{Q}$», vous pensez évidemment à $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Mais nous en avons déjà rencontré au moins un autre : $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
En revanche, ne pas en déduire trop rapidement que ce qui suit n'est valable que dans des corps infinis : il existe des corps infinis sur lesquels elle n'est pas valable.

Proposition 17.33 (Formule de Taylor pour les polynômes) : *Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$, et soit $n = \deg P$. Alors $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.*
En particulier, pour $a = 0$, on obtient

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

de sorte que le coefficient de degré k de P est $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Démonstration. ▸ Commençons par le cas $a = 0$.
Il est facile de prouver par récurrence sur k que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de X^i est $i(i-1)\cdots(i-k+1)X^{i-k} = \frac{i!}{(i-k)!}X^{i-k}$ si $k \leqslant i$ et est nulle si $k > i$.
Donc si $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$, $P^{(k)} = \sum_{i=k}^{+\infty} a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k}$ et donc $P^{(k)}(0) = a_k k!$.
Soit encore $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ et donc $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.
▸ Dans le cas général, posons $Q(X) = P(X+a)$.
On a alors $Q'(X) = P'(X+a)$, puis $Q''(X) = P''(X+a)$, et une récurrence rapide prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $Q^{(k)}(X) = P^{(k)}(X+a)$.
Et donc

$$Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

En composant à droite par $X - a$, on a donc

$$P(X) = Q(X-a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

□

Remarque
On a là une composée de polynômes : c'est P composé par le polynôme (unitaire, de degré 1) $X + a$.

Si a est une racine double de P, il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^2 Q$, et Q n'est pas divisible par $X - a$, donc $Q(a) \neq 0$.
On a alors $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q'$, de sorte que $P'(a) = 0$.
Et alors $P'' = 2Q + 2(X-a)Q' + 2(X-a)Q' + (X-a)^2 Q''$, de sorte que $P''(a) = 2Q(a) \neq 0$.
En fait, il s'agit là $(P(a) = P'(a) = 0$ et $P''(a) \neq 0)$ est une caractérisation des racines doubles, ce que prouve et généralise la proposition suivante.

Proposition 17.34 : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, et soit $a \in \mathbf{K}$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Alors a est racine de multiplicité $m \in \mathbf{N}^*$ de P si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Démonstration. Notons $n = \deg P$.
Si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$, alors par la formule de Taylor polynomiale,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-m}}_{=Q}$$

est bien divisible par $(X-a)^m$.
Donc déjà la multiplicité de a est supérieure ou égale à m.
Et alors $Q(a) = \frac{P^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$. Donc la multiplicité de a est égale à m.

Inversement, supposons que a soit une racine de multiplicité m de P.
Alors $P = (X-a)^m Q$, avec $Q(a) \neq 0$.
Mais par la formule de Taylor,

$$P = (X-a)^m \sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-m} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k}_{\in \mathbf{K}_{m-1}[X]}.$$

Par unicité de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$, on a donc

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-m} = Q \text{ et } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = 0.$$

Composons cette dernière relation à droite par $X+a$, de sorte que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k = 0.$$

Par identification des coefficients, on a donc pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $\dfrac{P^{(k)}(a)}{k!} = 0$, et donc $P^{(k)}(a) = 0$.
Et en évaluant la première relation en $X = a$, il vient

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(a-a)^{k-m} = Q(a) \Leftrightarrow \frac{P^{(m)}(a)}{m!} = Q(a) \Leftrightarrow P^{(m)}(a) = m!Q(a) \neq 0.$$

□

Détails
L'écriture

$$P = (X-a)^m Q + 0_{\mathbf{K}[X]}$$

satisfait les conditions d'une division euclidienne : par unicité, c'est donc **la** division euclidienne de P par $(X-a)^m$.

Exemples 17.35

2 est racine double de $P = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$.
En effet, on a $P(2) = 0$, puis $P'(X) = 4X^3 - 9X^2 + 2X$, donc $P'(2) = 0$, et $P'' = 12X^2 - 18X + 2$ et donc $P''(2) = 14 \neq 0$.

L'utilisation des dérivées permet de calculer des restes dans des divisions euclidiennes par un polynôme possédant une racine multiple.
Par exemple, cherchons le reste de la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X+1)^2$.
Nous savons que la division euclidienne cherchée est de la forme
$(\star)$ $X^n + 1 = (X+1)^2 Q_n + R_n$, avec $\deg R_n \leqslant 1$.
Autrement dit, il doit exister deux réels a_n et b_n tels que $R_n = a_n X + b_n$.
Et alors en évaluant en $X = -1$,

$$(-1)^n + 1 = (-1+1)^2 Q_n(-1) + (b_n - a_n) \Leftrightarrow b_n - a_n = (-1)^n + 1.$$

En l'absence d'autre racine de $(X+1)^2$, on ne peut pas en tirer une seconde solution.
Mais en dérivant $(\star)$, il vient,

$$nX^{n-1} = 2(X+1)Q_n + (X+1)^2 Q_n' + R_n'$$

qui après évaluation en $X = -1$ nous donne $n(-1)^{n-1} = a_n$ et donc $R_n = n(-1)^{n-1}X + (-1)^n(n-1) + 1$.

Corollaire 17.36 – *Si a est racine de P de multiplicité $m \geqslant 2$, alors a est racine de P' de multiplicité $m-1$.*

Démonstration. On a $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.
Donc en particulier,

$$P'(a) = (P')'(a) = \cdots = (P')^{(m-2)}(a) = 0 \text{ et } (P')^{(m-1)}(a) \neq 0.$$

Donc a est racine de P' de multiplicité $m-1$. □

17.4.3 Factorisation par les racines

Proposition 17.37 : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$* ***non nul****, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des racines deux à deux distinctes de P, de multiplicités respectives $m_1, \dots m_r$.*
Alors $(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$ divise P.

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $k \in [\![1, r]\!]$ que $\mathscr{P}(k)$: $(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k}$ divise P.
Pour $k = 1$, ceci découle de ce qui a été dit précédemment : λ_1 est racine d'ordre m_1 de P, qui est donc divisible par[7] $(X-\lambda_1)^{m_1}$.
Supposons donc $\mathscr{P}(k)$ soit vraie.
Alors il existe $Q_k \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} Q_k$.
Puisque λ_{k+1} est racine de P d'ordre m_{k+1}, $P = (X-\lambda_{k+1})^{r_{k+1}} A$, pour un certain $A \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A(\lambda_{k+1}) \neq 0$.
Notons par ailleurs n_{k+1} la multiplicité de λ_{k+1} en tant que racine de Q_k : $Q_k = (X-\lambda_{k+1})^{n_{k+1}} B$, avec $B(\lambda_{k+1}) \neq 0$.
Puisque Q_k divise P, $n_{k+1} \leqslant m_{k+1}$. Et alors on a

$$P = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_k)^{m_k} (X-\lambda_{k+1})^{n_{k+1}} B = (X-\lambda_{k+1})^{m_{k+1}} A.$$

Mais nous avons déjà mentionné que $\mathbf{K}[X]$ étant un anneau intègre, il est possible de simplifier par $(X-\lambda_{k+1})^{n_{k+1}}$. Et alors

$$(X-\lambda_1)^{n_1} \cdots (X-\lambda_k)^{n_k} B = (X-\lambda_{k+1})^{m_{k+1}-n_{k+1}} A.$$

Puisque λ_{k+1} n'est pas racine du membre de gauche, elle n'est pas non plus racine du membre de droite, donc $m_{k+1} - n_{k+1} = 0 \Leftrightarrow m_{k+1} = n_{k+1}$.
Donc $(X-\lambda_{k+1})^{m_{k+1}}$ divise Q_k, et donc P est multiple de $(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_{k+1})^{m_{k+1}}$.
Par le principe de récurrence, blablabla. □

[7] C'est là la définition de la multiplicité d'une racine.

Kids, don't try this !
Ces récurrences ont été rédigées par un professionnel expérimenté, il est dangereux d'essayer de reproduire de telles rédactions dans vos copies.

Exemple 17.38

Cherchons pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$ le polynôme $X^n + 1$ est divisible par $X^2 + 1$.
On $X^2 + 1 \mid X^n + 1 \Leftrightarrow i$ et $-i$ sont racines de $X^n + 1$.
Ce qui est le cas si et seulement si $i^n = -1$ et $(-i)^n = -1$.
Soit si et seulement si n est pair et $i^n = -1$ donc ssi $n \equiv 2 \ [4]$.

Corollaire 17.39 – *Avec les notations précédentes, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_k \leqslant \deg P$.*
Donc un polynôme non nul ne peut avoir plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

⚠ Ne pas confondre le nombre de racines et le nombre de racines **comptées avec multiplicité.**
Par exemple, $X^3(X+1)^4(X-2)(X+2)$ est un polynôme de degré 9, qui ne possède que 4 racines, mais qui en possède $9 = 3+4+1+1$ si on les compte avec multiplicités.

Par contraposée, on en déduit que :

Corollaire 17.40 – *Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Si P possède $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$.*

Une formulation un peu différente du même résultat, et qui ne nécessite pas d'information sur le degré de P est la suivante :

Proposition 17.41 : *Un polynôme qui possède une infinité de racines est nécessairement le polynôme nul.*

Exemple 17.42 La racine carrée n'est pas une fonction polynomiale

Il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $P(x) = \sqrt{x}$.
En effet, supposons par l'absurde qu'un tel polynôme existe, et soit $Q = P^2 - X$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q(n) = P^2(n) - n = \left(\sqrt{n}\right)^2 - n = n - n = 0$.
Donc Q possède une infinité de racines, et par conséquent est nul.
Donc $\deg P^2 = \deg X \Leftrightarrow 2\deg P = 1$, ce qui n'est pas possible.

Définition 17.43 – Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit **scindé** (sur $\mathbf{K}$) s'il est non constant et possède autant de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Autrement dit
Les polynômes scindés sont ceux qui possèdent le nombre maximal de racines.

Proposition 17.44 : *Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est scindé sur $\mathbf{K}$ si et seulement si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbf{N}^*$, ainsi que $\alpha \in \mathbf{K}^*$ tel que $P = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$.*
Et alors :

- *α est le coefficient dominant de P*
- *les λ_i sont les racines de P, de multiplicité m_i.*

Démonstration. Si P est scindé, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des racines de multiplicités $m_1, \dots, m_r$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i = \deg P$.

Donc[8] P se factorise par $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, qui a même degré que P.

Donc le quotient est de degré nul : c'est une constante non nul $\alpha \in \mathbf{K}^*$.

Puisque $\displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ est unitaire, le coefficient dominant de P est nécessairement α.

Inversement, si $P = \alpha \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des racines de P, λ_i étant de multiplicité n_i, avec $n_i \geqslant m_i$.

Mais puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i = \deg P$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i \leqslant \deg P$, nécessairement, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $m_i = n_i$.
Et P ne peut évidemment pas posséder d'autres racines que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. □

[8] C'est la proposition 17.37.

⚠ Attention à ne pas oublier le α, qui correspond au coefficient dominant dans la factorisation en produit de facteurs de degré 1.

Par exemple, $P(X) = 2X^3 - 4X^2 + 2X$ possède 0 comme racine simple[9] et 1 comme racine double.
On n'en déduit pas que $P(X) = X(X-1)^2$, mais bien que $P(X) = 2X(X-1)^2$.

[9] Il est divisible par X et pas par X^2.

Proposition 17.45 : *Soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ **avec P scindé**. Alors P divise Q si et seulement si toutes les racines de P sont racines de Q, avec une multiplicité en P inférieure ou égale à la multiplicité en Q.*

Démonstration. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de P, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, de sorte que $P = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)^{m_i}$.
Il est évident[10] que si P divise Q, alors les λ_i sont des racines de Q de multiplicité supérieure ou égale à m_i.

Inversement, si tous les λ_i sont des racines de Q, avec une multiplicité n_i supérieure ou égale à m_i. Alors il existe $R \in \mathbf{K}[X]$ tel que

$$Q = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i} R = \underbrace{\alpha \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}}_{=P} \times \frac{1}{\alpha} \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i - m_i} R$$

et donc Q est divisible par P. □

[10] Et ne nécessite pas que P soit scindé.

17.4.4 Le théorème de d'Alembert-Gauss

Il est bien connu que certains polynômes à coefficients réels, par exemple $X^2 + 1$, ne possèdent pas de racine dans $\mathbf{R}$, mais possèdent des racines dans $\mathbf{C}$.
Par ailleurs, nous avons déjà vu que tout polynôme de degré 2 à coefficients complexes possède deux racines complexes si on les compte avec leur multiplicité, et que tout nombre complexe a non nul possède exactement n racines $n^{\text{èmes}}$, c'est-à-dire que $X^n - a$ est scindé.
Le résultat suivant vient généraliser largement ceci.

Théorème 17.46 (de d'Alembert-Gauss) : *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. Alors P possède une racine.*

Démonstration. Admis. □

La preuve n'est pas au programme de MPSI, même si certaines preuves[11] nous sont abordables.
Ce résultat, parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre[12] a connu une première tentative de démonstration par d'Alembert, mais la première preuve vraiment rigoureuse[13] est dûe à Gauss, qui en donna au moins quatre preuves différentes.

[11] Il en existe des dizaines de nature parfois très très différentes.

[12] Bien qu'il s'agisse essentiellement d'un théorème d'analyse...

[13] Et presque complète.

Exemple 17.47

Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est non constant, alors la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ induit une surjection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$.
En effet, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $P - \lambda$ est un polynôme non constant, donc possède au moins une racine complexe.
Or une telle racine est un antécédent de λ par P.

Corollaire 17.48 – *Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ est scindé sur $\mathbf{C}$.*

Terminologie
On dit aussi que $\mathbf{C}$ est un corps **algébriquement clos.**

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur le degré de P.
Pour $\deg P = 1$, c'est exactement le théorème de d'Alembert-Gauss.
Supposons que tout polynôme de degré n soit scindé, et soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$.
Alors par le théorème de d'Alembert-Gauss, P possède une racine λ_1, et donc est divisible par $X - \lambda_1$: il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda_1)Q$.
Mais Q est de degré n, et donc par hypothèse de récurrence est scindé.
On en déduit que P est scindé car produit de deux polynômes scindés. Par le principe de récurrence, tout polynôme non constant est scindé. □

Corollaire 17.49 – *Soient $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, avec P non nul. Alors P divise Q si et seulement si toutes les racines de P sont des racines de Q, avec une multiplicité dans Q supérieure ou égale à la multiplicité dans P.*

Sur $\mathbf{R}$ un tel théorème n'est plus valable. Mais en notant qu'un polynôme à coefficients réels est un cas particulier de polynôme à coefficients complexes, on dispose tout de même du résultat suivant :

Proposition 17.50 : *Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ non constant. Alors P possède une racine complexe.*

La racine de la proposition précédente peut tout à fait être réelle, par exemple dans le cas d'un polynôme scindé sur $\mathbf{R}$.
Par contre, pour les racines non réelles des polynômes à coefficients réels, notons qu'elles vont toujours par deux :

Proposition 17.51 : *Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, et soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine complexe de P. Alors $\overline{\alpha}$ est racine de P, de même multiplicité que α.*

Démonstration. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

Alors pour $z \in \mathbf{C}$, $P(\overline{z}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k} = \overline{P(z)}$.
En particulier, α est racine de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de P.
Et comme le même raisonnement vaut pour $P', P'', \dots$, alors α est racine d'ordre m de P si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Et donc si et seulement si :

$$P(\overline{\alpha}) = P'(\overline{\alpha}) = \cdots = P^{(m-1)}(\overline{\alpha}) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\overline{\alpha}) \neq 0.$$

Donc si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre m de P. □

Proposition 17.52 : *Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ une racine de P.*
Alors P est divisible dans $\mathbf{R}[X]$ par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$.

Démonstration. Nous avons déjà dit que $\overline{\lambda}$ est racine de P.
Puisque λ et $\overline{\lambda}$ sont deux racines distinctes de P, celui-ci est donc divisible, dans $\mathbf{C}[X]$, par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$.
Autrement dit, il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})Q$.
Mais alors, en conjuguant cette relation , il vient $\overline{P} = \overline{(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})}\,\overline{Q}$.
Or P et $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ étant à coefficients réels, ils sont égaux à leurs conjugués.
Et donc $P = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})\overline{Q}$.
Après simplification[14], on a donc $Q = \overline{Q}$, donc $Q \in \mathbf{R}[X]$.
Et donc P est bien divisible **dans** $\mathbf{R}[X]$ par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$. □

Conjugué ?
Je n'ai pas défini ce qu'est le conjugué d'un polynôme complexe, mais disons qu'il s'agit de ce que vous pensez (on conjugue chacun des coefficients), et qu'il a les propriétés que vous imaginez (en tous cas il est compatible à la somme et au produit).

[14] $\mathbf{C}[X]$ est intègre.

17.4.5 Factorisation irréductible

Définition 17.53 – Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit **irréductible** s'il n'est pas constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les λP, $\lambda \in \mathbf{K}^*$.

Un autre moyen de le dire est le suivant : P est irréductible si et seulement si

$$\forall (Q,R) \in \mathbf{K}[X]^2,\ P = QR \Rightarrow (\deg Q = 0 \text{ **ou** } \deg R = 0).$$

Remarque
Ces polynômes sont les analogues dans $\mathbf{K}[X]$ des nombres premiers dans $\mathbf{Z}$.

Proposition 17.54 : *Tout polynôme non constant de* $\mathbf{K}[X]$ *est produit d'irréductibles.*

Démonstration. Par récurrence forte sur le degré n de P.
Pour $n = 1$, c'est évident : un diviseur d'un polynôme P de degré 1 est de degré inférieur ou égal à 1. Soit il est constant, soit il est de degré 1, mais alors doit être de la forme λP, $\lambda \in \mathbf{K}^*$.
Supposons à présent que tout polynôme de degré au plus n est produit de facteurs irréductibles et soit P de degré $n+1$.
Si P est irréductible, alors il n'y a rien à dire.
Sinon, soit Q un diviseur de P, qui ne soit ni constant, ni égal à un multiple scalaire de P, et soit $R \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = QR$.
Alors $\deg Q \in [\![1, n]\!]$, et de même pour $\deg R$. Et donc par hypothèse de récurrence, et Q et R sont produits de polynômes irréductibles, et donc il en est de même de P.
Par le principe de récurrence forte, tout polynôme non constant est produit de facteurs irréductibles. □

Autrement dit
Les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles, et ce indépendamment du corps $\mathbf{K}$ sur lequel on se place.

Théorème 17.55 (Factorisation irréductible sur C) :

1. *Les polynômes irréductibles de* $\mathbf{C}[X]$ *sont les polynômes de degré* 1.
2. *Si* $P \in \mathbf{C}[X]$ *est non constant, alors sa factorisation en produit de facteurs irréductibles unitaires est unique (à l'ordre des facteurs près) et vaut*

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{r_k}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *sont les racines distinctes de* P*,* r_k *est la multiplicité de* λ_k *et* α *est le coefficient dominant de* P*.*

Coeff dominant
Quitte à regrouper tous les coefficients dominants dans une même constante, nous pouvons supposer que tous les facteurs irréductibles sont unitaires, et que P s'écrit comme produit d'une constante et de polynômes irréductibles unitaires.

Démonstration.

1. Nous savons déjà que les polynômes de degré 1 sont irréductibles (comme sur tout corps).
Et par ailleurs, si $P \in \mathbf{C}[X]$ est irréductible, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ racine de P. Donc P est divisible par $X - \lambda$.
Par irréductibilité de P, il existe donc $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tel que $P = \alpha(X - \lambda)$.
2. Si P est non constant, alors il est scindé, et donc de la forme annoncée.
L'unicité vient tout simplement du premier point et de la proposition 17.44, qui dit que les λ_k et les r_k sont uniquement déterminés : ce sont les racines de P et leurs multiplicités.

□

Remarque. Cet énoncé est quelque peu imprécis[15] : on prouve en fait que tout polynôme s'écrit de manière unique comme le produit d'une constante non nulle (son coefficient dominant) et de facteurs irréductibles unitaires.
Si on oublie la constante, alors $2X - 2$ n'est pas produit d'irréductibles unitaires, et si on ne demande pas aux facteurs d'être unitaires, alors $2X - 2 = 2(X - 1) = \frac{1}{4}(4X - 4)$ s'écrit de plusieurs manières différentes comme produit d'une constante par un irréductible.

[15] Et le reformulerons et le reprouverons dans un corps quelconque en fin d'année lorsque nous étudierons l'arithmétique des polynômes.

Théorème 17.56 (Factorisation irréductible sur R) :

1. *les polynômes irréductibles de* $\mathbf{R}[X]$ *sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *de discriminant strictement négatif.*
2. *si* $P \in \mathbf{R}[X]$ *est non constant, alors sa factorisation en produit de facteurs irréductibles*

Autrement dit
Les polynômes irréductibles de degré 2 sont ceux qui n'ont pas de racine réelle.

unitaires est unique[16] *et est de la forme*

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{p} \left[\underbrace{\left(X-\mu_j\right)\left(X-\overline{\mu_j}\right)}_{=X^2-2\,\mathrm{Re}(\mu_j)X+|\mu_j|^2 \in \mathbf{R}[X]} \right]^{n_j}$$

où :

- α *est le coefficient dominant de* P
- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *sont les racines* ***réelles*** *de* P *de multiplicités respectives* $m_1, \dots, m_r$
- $(\mu_1, \overline{\mu_1}), (\mu_2, \overline{\mu_2}), \dots, (\mu_p, \overline{\mu_p})$ *sont les paires de racines complexes non réelles conjuguées*[17] *de* P*, de multiplicités respectives* $n_1, n_2, \dots, n_k$

[16] À l'ordre des facteurs près.

[17] Rappelons que λ et $\overline{\lambda}$ ont même multiplicité.

Démonstration. 1. Si $P \in \mathbf{R}[X]$ est irréductible, alors il possède une racine λ complexe.
Si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors P est divisible par $X-\lambda$, et étant irréductible, il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $P = \alpha(X-\lambda)$.
Si $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, alors nous avons déjà dit que P est divisible (dans $\mathbf{R}[X]$) par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2$.
Puisque P est irréductible, il existe donc $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que

$$P = \alpha\left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2\right)$$

qui est évidemment de discriminant négatif.

Inversement si P est un polynôme de degré 2 de discriminant strictement négatif, alors il ne possède pas de racine réelle, et donc n'est pas divisible par aucun polynôme de degré 1.
Et donc tout diviseur de P est soit de degré 0, soit de degré 2, donc P est irréductible.

2. Si $P \in \mathbf{R}[X]$ est non constant, il possède une unique factorisation scindée sur $\mathbf{C}$.
Et alors en regroupant les racines réelles conjuguées, on obtient bien la factorisation souhaitée.
Celle-ci est unique faute de quoi on aurait plusieurs formes scindées sur $\mathbf{C}$.

□

17.4.6 Relations racines-coefficients

Nous avons déjà vu que les coefficients d'un polynôme du second degré s'expriment aisément en fonction des racines.
Les relations qui suivent généralisent largement cet énoncé.

Définition 17.57 – Soit $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X-\lambda_k)$ un polynôme **scindé** de degré $n \geqslant 1$.
On note alors $\sigma_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$,

$$\sigma_2 = (\lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_1\lambda_n) + (\lambda_2\lambda_3 + \cdots + \lambda_2\lambda_n) + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n$$

et plus généralement, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}$$

Notons qu'en particulier, $\sigma_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

⚠ Attention !
On ne suppose pas ici que les λ_i soient distincts, il peut y avoir des racines multiples.

Exemple 17.58

Dans le cas d'un polynôme de degré 3, qui possède trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, éventuellement confondues, alors

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$$

Ainsi, σ_2 est la somme de tous les produit de deux racines, etc, σ_k est la somme de tous les produit de k racines (**attention** : je n'ai pas dit de racines distinctes !)

Exemple 17.59

Si P possède une racine double λ, alors σ_2 contiendra un terme égal à λ^2.
Si P possède une racine triple λ, alors σ_2 contiendra trois fois λ^2.

Proposition 17.60 (Relation entre racines et coefficients) : *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme* ***scindé*** *de degré n. Alors*

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Démonstration. Il s'agit d'identifier des coefficients de $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \alpha \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$.
Pour le coefficient dominant, notons que celui du produit est α, car la seule manière d'obtenir un terme en X^n en développant le produit est de multiplier tous les termes en X.
Donc déjà, $\alpha = a_n$.
Quitte à diviser P par a_n, ce qui ne change pas les racines, on peut donc supposer P unitaire.
Alors le coefficient de degré $n-1$ de $\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$ est obtenu lorsqu'en développant le produit, on choisit tous les termes égaux à X, sauf un, égal à l'un des $-\lambda_k$.
Donc $a_{n-1} = -\lambda_1 - \cdots - \lambda_n = -\sigma_1$.
Puis pour le terme de degré $n-2$, c'est le même principe : il faut choisir $n-2$ fois X et deux des $-\lambda_i$.
Le coefficient en X^{n-2} est donc $\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \lambda_i \lambda_j$.
Etc. □

Exemple 17.61

Si $P(X) = X^n - 1$. Alors les racines de P sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Nous savons déjà que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\frac{k\pi}{n}} = 0$, mais on a également
$\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n-1} e^{2i\frac{(k+\ell)\pi}{n}} = 0$, puis $\sigma_3 = 0$, etc jusqu'à

$$\sigma_n = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega = (-1)^{n+1}.$$

17.4.7 Retour sur les fonctions polynomiales

La distinction entre fonctions polynomiales et polynômes n'est pas vraiment importante lorsqu'on travaille sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.

Pourtant, dans certains contextes, elle peut s'avérer fondamentale.
Par exemple, dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$, où p est premier, les polynômes $P = X$ et $Q = X^p$ sont distincts, puisque de degré distincts.
Pourtant, par le petit théorème de Fermat, pour tout $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $x^p = x$.
Et donc les fonctions polynomiales $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont égales, bien que les polynômes soient différents.

Proposition 17.62 : *Si $\mathbf{K}$ est infini, alors l'application $P \mapsto \tilde{P}$ est une bijection entre l'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes et l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. La surjectivité est immédiate par définition d'une fonction polynomiale.
Soient donc P et Q deux polynômes tels que $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$.
Alors en particulier, tout élément λ de $\mathbf{K}$ vérifie $\widetilde{P}(\lambda) - \widetilde{Q}(\lambda) = 0$, donc est racine de $P - Q$.
Si $\mathbf{K}$ est infini, $P - Q$ possède une infinité de racines, et donc est nul.
Et donc $P = Q$, de sorte que $P \mapsto \widetilde{P}$ est injective. □

Plus généralement, si A est une partie infinie de $\mathbf{K}$, alors $P \mapsto \widetilde{P}_{|A}$ est une bijection de $\mathbf{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales sur A.
Par exemple on peut identifier $\mathbf{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}_+$ ou sur $[0, 1]$.

17.5 POLYNÔMES INTERPOLATEURS DE LAGRANGE

Dans cette partie, on considère $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ **deux à deux distincts.**
La question est alors la suivante : connaissant les valeurs que prend $P \in \mathbf{K}[X]$ en les λ_i, est-il possible de déterminer P ?

Remarque
On dispose donc de $n + 1$ scalaires.

La réponse est clairement non dans le cas général, puisque si on ajoute un multiple de $\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i)$ à un polynôme, on ne change pas sa valeur en les λ_i.
Toutefois, nous allons voir que la réponse est oui pour des polynômes de degré au plus n.

Définition 17.63 – Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts.
Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on appelle $i^{\text{ème}}$ polynôme de Lagrange associé à $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ le polynôme

$$L_i = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = \frac{X - \lambda_0}{\lambda_i - \lambda_0} \cdots \frac{X - \lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \frac{X - \lambda_{i+1}}{\lambda_i - \lambda_{i+1}} \cdots \frac{X - \lambda_n}{\lambda_i - \lambda_n}.$$

Notons tout de suite que les L_i sont tous des polynômes de degré n car produits de n termes de degré 1.

Proposition 17.64 : *Avec les notations précédentes,*

$$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2,\ L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Si $j \neq i$, alors L_i est divisible par $X - \lambda_j$, et par conséquent possède λ_j comme racine. Donc $L_i(\lambda_j) = 0$.
Et pour $j = i$, on

$$L_i(\lambda_i) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} = 1.$$

□

Notons que parmi les polynômes de $\mathbf{K}_n[X]$, il n'y a qu'un seul polynôme, à i fixé, vérifiant $P(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.
En effet, un tel polynôme doit avoir les λ_k, $k \neq i$ comme racines, et donc est divisible par $\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X-\lambda_k)$.
Mais ce produit est précisément de degré n, et $\deg P \leqslant n$: il existe donc $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $P = \lambda \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X-\lambda_k)$.

Et alors $P(\lambda_i) = \lambda \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)$.

Donc $P(\lambda_i) = 1 \Leftrightarrow \lambda \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{\lambda_i-\lambda_k}$.

Proposition 17.65 : *Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Alors P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i, c'est-à-dire qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i L_i$.*

Plus précisément, cette unique écriture est $P = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i$.

Démonstration. Soit $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Supposons que $P = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k$.

Alors pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k L_k(\lambda_i) = \alpha_i L_i(\lambda_i) = \alpha_i$.
Donc si une telle écriture existe, elle est unique.

Inversement, considérons le polynôme $Q = P - \sum_{k=0}^{n}P(\lambda_k)L_k$.
Alors pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $Q(\lambda_i) = P(\lambda_i) - P(\lambda_i)L_i(\lambda_i) = 0$.
Donc Q possède au moins $n+1$ racines distinctes. Mais il est de degré au plus n, car P et les L_k le sont, donc il est nul.
Et par conséquent, $P = \sum_{k=0}^{n}P(\lambda_k)L_k$. □

Remarque

Plus généralement, deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en $n+1$ points sont égaux.

Exemple 17.66

Il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour $i \in [\![0,n]\!]$, $P(i) = \sqrt{i}$.
En effet, notons $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_n = n$ et $L_0, \dots, L_n$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés.
Si un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ satisfaisant les conditions existe, alors nécessairement

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(i)L_i = \sum_{i=0}^{n}\sqrt{i}L_i.$$

Donc un tel polynôme, s'il existe, est unique.

Et si on pose $P = \sum_{i=0}^{n}\sqrt{i}L_i$, alors pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $P(j) = \sum_{i=0}^{n}\sqrt{i}L_i(j) = \sqrt{j}L_j(j) = 1$, de sorte que P convient.

⚠ Si on est assurés que ce polynôme coïncide avec la fonction racine en 0, 1 et 2, on n'a aucune garantie sur son comportement ailleurs qu'en ces trois points, et il n'a pas de raison d'être proche de $\sqrt{x}$, même entre 0 et 2.

Le même principe que ci-dessus s'applique pour n'importe quelle fonction f que l'on souhaiterait «approcher» par un polynôme de degré au plus n, en ce sens qu'on peut trouver un polynôme de degré au plus n qui coïncide avec f en n points fixés en avance.

Un résultat que vous connaissez bien : par deux points d'abscisses différentes passe une et une seule fonction affine[18].
Pour $n = 2$, on prouve de même que par trois points d'abscisses deux à deux distinctes passe une unique parabole[19] (ou une droite si les trois points sont alignés).
Et plus généralement, pour $n+1$ points d'abscisses distinctes, il existe un unique polynôme de degré au plus n dont la courbe représentative passe par ces points.

[18] Polynôme de degré au plus 1.

[19] Polynôme de degré 2.

Exercices du chapitre 17

Sauf mention explicite du contraire, **K** est un corps quelconque.

▸ L'anneau $\mathbf{K}[X]$

Exercice 17.1 Déterminer le groupe des unités de l'anneau $\mathbf{K}[X]$. PD

Exercice 17.2 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit pair (respectivement impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$). PD

1) Montrer qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ est pair si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
   Donner alors une condition nécessaire et suffisante portant sur les $P^{(k)}(0)$ pour que P soit pair.
2) Déterminer des conditions similaires pour qu'un polynôme soit impair.
3) Prouver qu'un polynôme P est pair si et seulement si $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(k) = P(-k)$. La même condition est-elle valable pour une fonction continue ?

Exercice 17.3 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que : PD

1) $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
2) $P \circ P = P$
3) $(P')^2 = 4P$.

Exercice 17.4 Formule de Vandermonde PD

Soient $m, n, r \in \mathbf{N}$. En développant de deux manières le produit $(1+X)^m(1+X)^n$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

▸ Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, racines d'un polynôme

Exercice 17.5 PD

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Quelle est la multiplicité de 1 comme racine de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?
3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division de $X^n(X+1)^2$ par $(X+1)(X-2)$.

Exercice 17.6 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}$ le polynôme $P_n = (X-1)^n - X^n + 2X - 1$ est-il divisible (dans $\mathbf{R}[X]$) par $Q = 2X^3 - 3X^2 + X$? PD

Exercice 17.7 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il est divisible par $X^n - 1$. PD

Exercice 17.8 Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$. PD

Exercice 17.9 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $P(a) > 0$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$. PD
Prouver que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 17.10 La fonction $z \mapsto \overline{z}$ est-elle polynomiale ? PD

Exercice 17.11 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, PD

1) $P(n) = n^2$
2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$

Exercice 17.12 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs. PD

1) Prouver que toute racine rationnelle de P est dans $\mathbf{Z}$.
2) Soient $k, d \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sqrt[k]{d}$ est soit entier, soit irrationnel.

Exercice 17.13 Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ne sont pas polynomiales. PD

Exercice 17.14 Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbf{C}[X]$. On note alors $M = \sup\{|f(z)|, |z| = 1\}$. AD

1) Justifier que M est bien défini.
2) On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. En calculant $P(1) + P(\zeta) + \cdots + P(\zeta^n)$, prouver que $|a_0| \leqslant M$.
3) Prouver que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.

EXERCICE 17.15 Montrer que $X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ possède j comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$. AD

EXERCICE 17.16 **(Banque CCP 85)** PD
Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

EXERCICE 17.17 Soient $a, b \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $X^a - 1$ divise $X^b - 1$ si et seulement si $a \mid b$. AD

EXERCICE 17.18 **La divisibilité dans $\mathbf{C}[X]$ de polynômes réels implique leur divisibilité dans $\mathbf{R}[X]$** AD

1) Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, tels que A divise B dans $\mathbf{C}[X]$. Justifier que A divise B dans $\mathbf{R}[X]$.
2) Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?

EXERCICE 17.19 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P. AD

EXERCICE 17.20 **(Oral ENS)** D
Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P(\mathbf{C}) \subset \mathbf{R}$?

EXERCICE 17.21 **(Oral Polytechnique)** AD

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (\cos(a_k) + \sin(a_k)X)$ par $X^2 + 1$.

EXERCICE 17.22 **Sommes de deux carrés dans $\mathbf{R}[X]$** D
On note $\Sigma = \{A^2 + B^2,\ (A, B) \in \mathbf{R}[X]\}$ l'ensemble des polynômes qui sont somme de deux carrés.

1) En utilisant l'application $\mathbf{C}[X] \to \mathbf{R}[X]$ définie par $Q \mapsto Q\overline{Q}$, montrer que Σ est stable par produit.
2) Montrer que si $P \in \Sigma$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
3) Inversement, soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x) \geqslant 0$.
   a) Montrer que toutes les racines réelles de P sont d'ordre de multiplicité pair.
   b) En utilisant la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles, prouver que $P \in \Sigma$.

▸ Polynômes d'interpolation de Lagrange

EXERCICE 17.23 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbf{K}$, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} L_k = 1$. PD

EXERCICE 17.24 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$. AD

EXERCICE 17.25 Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^n - 1)(X^m - 1)$ divise $(X^{mn} - 1)(X - 1)$. D
Ce résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

EXERCICE 17.26 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$, puis $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$. D

EXERCICE 17.27 **Fait suite au précédent (Oral ENS)** TD
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ qui induisent une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$.

▸ Relations racines coefficients

EXERCICE 17.28 Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, de degré n. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines (comptées avec multiplicité) de $P^{(k)}$. AD
Montrer que $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

EXERCICE 17.29 AD
1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser sur $\mathbf{C}$ le polynôme $P_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-2} + X^{n-1}$.
2) En déduire une expression de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

3) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, donner alors une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$.

4) Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k, \ell \leqslant n-1 \\ k \neq \ell}} \left(\zeta^k - \zeta^\ell\right)$.

Exercice 17.30 On note $(\mathscr{S})$ le système (non linéaire !) d'équations suivantes : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$, d'inconnues $(x, y, z) \in (\mathbf{C}^*)^3$. AD

1) Pour $(x, y, z) \in (\mathbf{C}^*)^3$, on pose $P = (X - x)(X - y)(X - z) \in \mathbf{C}[X]$.
Si (x, y, z) est solution de $\mathscr{S}$, déterminer P.

2) En déduire les solutions de $(\mathscr{S})$.

Correction des exercices du chapitre 17

Solution de l'exercice 17.1

Il est évident que si P est un polynôme constant non nul, disons λ, alors il es inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda}$.
Inversement, soit P un inversible de $\mathbf{K}[X]$. Alors il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $PQ = 1$.
Et donc en particulier, $\deg P + \deg Q = 0$, donc $\deg P = \deg Q = 0$, de sorte que P est un polynôme constant **non nul.**
Autrement dit, l'ensemble des inversibles de $\mathbf{K}[X]$ est exactement l'ensemble des polynômes constants non nul, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de degré 0.

Rappel
Le polynôme nul n'est pas de degré 0.

Solution de l'exercice 17.2

1. Notons tout de suite que par dérivations successives d'une composée, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et tout $k \in \mathbf{N}$, $(P(-X))^{(k)} = (-1)^k P^{(k)}(-X)$.
En particulier si P est pair, pour tout $k \in \mathbf{R}[X]$, $P^{(k)}(X) = (-1)^k P^{(k)}(-X)$.
Et donc en évaluant en 0, $P^{(k)}(0) = (-1)^k P^{(k)}(0)$, de sorte que pour k impair, $P^{(k)}(0) = 0$.
Mais nous savons également que $P^{(k)}(0) = k!a_k$, et donc pour k impair, $a_k = 0$.

Inversement, si les a_k, pour k impair sont nuls, alors $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}X^{2k}$, et donc $P(-X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(-X)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}X^{2k} = P(X)$, donc P est pair.
2. De même, si P est impair, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $-P^{(k)}(X) = (-1)^k P^{(k)}(-X)$, et donc $-P^{(k)}(0) = (-1)^k P^{(k)}(0)$ de sorte que pour tout k pair, $P^{(k)}(0) = 0$, et donc $a_k = 0$.
La réciproque se traite comme pour le cas des polynômes pairs.
3. Il est évident que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est pair, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(-k) = P(k)$.
Et inversement, si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k) = P(-k)$, notons $Q = P(X) - P(-X)$. Alors Q est un polynôme, qui s'annule en tous les entiers. Puisqu'il existe une infinité d'entiers, Q est dont le polynôme nul, de sorte que $P(X) = P(-X)$, et donc P est pair.

Ceci n'est pas vrai pour les fonctions continues, où la connaissance de f aux entiers relatifs ne détermine pas du tout son comportement sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et donc on peut imaginer des fonctions qui ne sont pas paires mais qui coïncident à tous les entiers. Par exemple, $f : x \mapsto \sin((2x+1)\pi)$ s'annule en tous les entiers relatifs, donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(k) = f(-k)$. Mais pourtant, f est impaire, et n'étant pas la fonction nulle[1], elle n'est pas paire.

[1] Qui est la seule fonction à la fois paire et impaire.

Solution de l'exercice 17.3

1. Un tel polynôme, s'il est non nul, doit vérifier $\deg P \times 2 = 2 + \deg P$, donc être de degré 2.
Donc il existe $a, b, c \in \mathbf{K}$ tels que $P(X) = aX^2 + bX + c$.
Et alors $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$, alors que $(X^2+1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$.
Donc par identification, $b = 0$ puis $c = -a$.
Et par conséquent, $P = a(X^2 - 1)$.
Inversement, si $P = a(X^2-1)$, alors $(X^2+1)P(X) = a(X^2-1)(X^2+1) = a(X^4-1) = P(X^2)$.
2. Les polynômes constants sont évidemment solutions.
Et si P est non constant, alors $\deg(P \circ P) = \deg P$, donc $\deg(P)^2 = \deg P \Rightarrow \deg P = 1$.
Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$ tels que $P(X) = aX + b$.
Mais alors $P \circ P = a(aX+b) + b = a^2X + ab + b$.
Donc $a^2 = a$, et puisque $a \neq 0$, $a = 1$. Et donc $ab + b = b \Leftrightarrow b = 0$.
Inversement, le polynôme X est solution, et donc les polynômes vérifiant $P \circ P = P$ sont les polynômes constants et le polynôme X.

Détails
Les deux seules solutions de $x^2 = x$ sont 0 et 1, et on a écarté le cas $\deg P = 0$, puisque P est non constant.

3. Si P est une solution non constante, alors $\deg(P')^2 = \deg(4P) = \deg(P)$.
Mais $\deg P' = \deg P - 1$, et donc $\deg(P'^2) = 2\deg P' = 2\deg P - 2$.
On en déduit que $\deg P = 2$.
Notons alors $P = aX^2 + bX + c$, avec $a \neq 0$ un polynôme de degré 2. Alors $P' = 2aX + b$ et

donc $P'^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$, de sorte que

$$P'^2 = 4P \Leftrightarrow 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab = b \\ b^2 = 4c \end{cases}$$

Donc P est solution si et seulement si $a = 1$ et $c = \frac{b^2}{4}$.
Par ailleurs, la seule solution constante est le polynôme nul, puisque si P est constant, alors $P' = 0$, et donc $4P = 0_{\mathbf{C}[X]} \Leftrightarrow P = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

Solution de l'exercice 17.4

On a clairement $(1+X)^m(1+X)^n = (1+X)^{m+n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} \binom{n+m}{k} X^k$.

En particulier, son coefficient de degré r est $\binom{n+m}{r}$.

D'autre part, ce coefficient est donné par

$$\sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}$$

où a_k (resp. b_k) est le coefficient de degré k de $(1+X)^m$ (resp. $(1+X)^n$).

Mais par le binôme, $a_k = \binom{m}{k}$ et $b_k = \binom{n}{k}$, donc

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Solution de l'exercice 17.5

1. Il s'agit donc de prouver que 1 est racine de multiplicité supérieure ou égale à 3 de $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X^{-}n$.
   Or, $P_n(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$. Donc 1 est racine de P_n.
   Puis $P_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + n + 2$, de sorte que $P_n'(1) = 0$.
   Enfin, $P_n'' = n(n+1)(n+2)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}$ et donc $P_n''(1) = 0$.
   Donc 1 est racine d'ordre au moins 3 de P_n, qui est donc divisible par $(X-1)^3$.
2. Notons $P_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
   Alors $P_n(1) = 0$, $P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) = 2n(n+1) \neq 0$.
   Donc la multiplicité de 1 est égale à 2.
3. Il suffit d'utiliser les deux racines du diviseur, on obtient $3 \times 2^n(X+1)$.

Remarque
Nul besoin de calculer $P_n^{(3)}(1)$ pour voir si elle s'annule ou non.
En effet, l'ordre de multiplicité ne nous intéresse pas vraiment, tout ce que nous voulons savoir à son égard, c'est qu'il est au moins égal à 3.

Solution de l'exercice 17.6

Les racines de Q sont 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
Si Q divise P_n, alors nécessairement ce sont des racines de P_n.
Or, $P_n(0) = (-1)^n - 1$, qui est nul si et seulement si n est pair.
Donc déjà les valeurs impaires de n ne conviennent pas.

Si n est pair, on a $P_n(1) = 0$, et $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 1 = 0$.

Donc P_n est divisible par $\left(X - \frac{1}{2}\right)(X-1)X$, et donc[2] par $2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X-1)X = Q$.
Donc au final, P_n est divisible par Q si et seulement si n est pair.

[2] $2 \in \mathbf{R}^*$ est un inversible de $\mathbf{R}[X]$.

Solution de l'exercice 17.7

Puisque $P(X^n)$ est divisible par $X-1$ si et seulement si $P(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si 1 est racine de P.
Et donc il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X-1)Q$.
Mais alors par composition $P(X^n) = (X^n - 1)Q(X^n)$ est divisible par $X^n - 1$.

Solution de l'exercice 17.8

Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (P(X)^k - X^k).$$

Mais pour $k \geqslant 1$, $P(X)^k - X^k = (P(X) - X)\left(\sum_{i=0}^{k-1} P(X)^i X^{k-1-i}\right)$.
Donc $P(X) - X$ divise $P(X)^k - X^k$.

Solution de l'exercice 17.9

Appliquons la formule de Taylor en a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

En particulier, pour $x \geqslant a$, $P(x) = P(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\geqslant 0} \geqslant P(a) > 0$.

Et donc P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Solution de l'exercice 17.10

Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = \overline{z}$.
Alors en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = x$.
Donc $P - X$ s'annule en tous les réels, donc est nul.
Et par conséquent, $P = X$.
Mais alors pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $\overline{z} = P(z) = z$, ce qui est absurde.
Donc la fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas polynomiale.

Solution de l'exercice 17.11

1. Soit P un tel polynôme, et soit $Q = P - X^2$.
Alors $Q(n) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc Q possède une infinité de racines, et par conséquent est nul.
Et donc $P = X^2$. Inversement, $P = X^2$ est évidemment solution.
Donc seul le polynôme X^2 convient.
2. Soit P un tel polynôme, et soit $Q(X) = P(X) - X^2 - 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Q(2n) = P(2n) - (2n)^2 - 1 = (2n)^2 + 1 - (2n)^2 - 1 = 0$.
Comme précédemment, on en déduit que Q est nul, et donc que $P(X) = X^2 + 1$.
Mais alors $P(3) = 10 \neq 3^2 - 1$, ce qui est absurde.
Autrement dit, il n'existe pas de tel polynôme.

Solution de l'exercice 17.12

1. Soit $r = \frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P, avec $p \wedge q = 1$.
Notons alors $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, avec $a_i \in \mathbf{Z}$ et $a_n = 1$.
Alors $0 = P(r) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i}$. Après multiplication par q^n, il vient donc $p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} = 0$.
Mais q divise $\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i}$, et donc divise p^n.
Puisque p et q sont premiers entre eux, q et p^n sont premiers entre eux, donc $q = 1$.
Et par conséquent, $r = p \in \mathbf{Z}$.
2. $\sqrt[k]{d}$ est racine de $X^k - d$, qui est bien un polynôme unitaire à coefficients entiers.
Donc soit c'est un irrationnel, soit il est rationnel, auquel cas la question 1 prouve qu'il s'agit d'un entier.

Remarque
On retrouve notamment l'irrationnalité de tous les $\sqrt{k}$, où k n'est pas un carré parfait.

Solution de l'exercice 17.13

La fonction sin s'annule une infinité de fois[3] et ne saurait donc être polynomiale, puisqu'elle aurait une infinité de racines.
Même remarque pour $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, qui est nulle sur tout $]0, 1[$, qui contient bien une infinité de réels.
Enfin, le même raisonnement ne vaut plus pour l'exponentielle.
Mais s'il existait $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x) = e^x$, alors $P_n^{(n+1)} = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $\exp^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $e^x = 0$, ce qui est absurde.

[3] En tous les $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.14

1. Si $|z| = 1$, alors $|P(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.
Donc $\{|P(z)|, |z| = 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, elle admet donc un plus grand élément.

2. Rappelons que $1 + \zeta + \cdots + \zeta^n = 0$.
Et que le même calcul prouve que pour $1 \leqslant k < n+1$, $1 + \zeta^k + \cdots + \zeta^{kn} = \dfrac{1-\zeta^{k(n+1)}}{1-\zeta^k} = 0$.
En revanche, ceci ne fonctionne plus pour $k = n+1$ ou $k = 0$, puisqu'il s'agit alors d'une somme de termes tous égaux à 1, qui vaut donc $n+1$.
On en déduit que

$$P(1) + P(\zeta) + \cdots + P(\zeta^n) = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^{k\ell} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{k\ell} = a_0(n+1).$$

Et donc

$$|a_0|(n+1) = |P(1) + \cdots + P(\zeta^n)| \leqslant |P(1)| + \cdots + |P(\zeta^n)| \leqslant (n+1)M$$

et donc $|a_0| \leqslant M$.

3. On a

$$P(1)+\zeta^{-1}P(\zeta)+\zeta-2P(\zeta^2)+\cdots+\zeta^{-n}P(\zeta^n) = \sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{-\ell} \sum_{k=0}^{n} a_k\zeta^{k\ell} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{-\ell}\zeta^{k\ell} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{(k-1)\ell}.$$

Donc comme précédemment,

$$\sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{(k-1)\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta^{k-1} \neq 1 \\ (n+1) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Mais $-1 \leqslant k-1 \leqslant n$, donc $\zeta^{k-1} = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
Donc $\sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{-\ell} P(\zeta^\ell) = (n+1)a_1$.
Et donc $(n+1)|a_1| \leqslant (n+1)M$, si bien que $|a_1| \leqslant M$.

Plus généralement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{-k\ell} P(\zeta^{k\ell}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{(k-i)\ell}.$$

Or, $\sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{(k-i)\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \zeta^{k-i} \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$ si bien que $\sum_{\ell=0}^{n} \zeta^{-k\ell} P(\zeta^{k\ell}) = (n+1)a_k$.
Et donc toujours par l'inégalité triangulaire, $(n+1)|a_k| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n} |\zeta^{-k}||(\zeta^{k\ell})| \leqslant (n+1)M$.
Et donc $|a_k| \leqslant M$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.15

On a $P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0$.
Donc j est racine de P.
Par ailleurs, $P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$, et donc

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0.$$

Donc j est racine de multiplicité au moins 2 de P.
Notons que si j est racine double, alors $\overline{j}$ l'est aussi.
Donc on a déjà 4 racines comptées avec multiplicité parmi les 8 que compte P.
Mais puisque P est pair, $-j$ est aussi racine de P. Et même $-j$ est racine double, puisque si P est pair, alors P' est impair, et donc si x est racine de P', $-x$ l'est aussi.
Mais si $-j$ est racine double, alors $\overline{-j} = -\overline{j} = -j^2$ l'est aussi.

> **Remarque**
> À ce stade, il se pourrait que j soit racine de multiplicité 3 ou plus.

Donc nous avons bien un total de 8 racines lorsque comptées avec leurs multiplicités.
Donc $P = 1(X-j)^2(X-\bar{j})^2(X+j)^2(X+\bar{j})^2$ est la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

Puisque $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2+X+1$ et $(X+j)(X+\bar{j}) = X^2-X+1$, la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ est donc $P = (X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.16

On a $P(1) = 1+a+b$, et $P'(1) = 5+2a+b$.
Ces deux quantités seront nulles si et seulement si[4] $a = 4$ et $b = -3$.
On a alors $P(X) = X(X-1)^2(X^2+2X+3)$, et il est facile de constater que ce dernier polynôme est irréductible sur $\mathbf{R}[X]$.

[4] Après résolution d'un système.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.17

Si a divise b, notons $b = aq$. Alors

$$X^b - 1 = (X^a)^q - 1^q = (X^a-1)\sum_{k=0}^{q-1} X^{ak}$$

et donc X^a-1 divise X^b-1.

Remarque
Puisque $\mathbf{K}[X]$ est un anneau commutatif, la troisième identité remarquable généralisée y est valable.

Plus généralement, notons $b = aq+r$ la division euclidienne de b par a.
Alors

$$X^b-1 = X^{aq+r}-X^r+X^r-1 = X^r(X^{aq}-1)+X^r-1 = X^r(X^a-1)(1+X^a+\cdots+X^{a(q-1)})+X^r-1.$$

Puisque $\deg(X^r-1) < \deg(X^a-1)$, on a donc la division euclidienne de X^b-1 par X^a-1, dont le reste est X^r-1.
En particulier, X^a-1 divise X^b-1 si et seulement si ce reste est nul, donc si et seulement si $r = 0$, soit si et seulement si a divise b.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.18

1. Soit donc $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = BP$.
D'autre part, notons $A = BQ+R$ la division euclidienne de A par B dans $\mathbf{R}[X]$, c'est-à-dire avec $Q, R \in \mathbf{R}[X]$, et $\deg R < \deg B$.
Puisque ces polynômes sont également dans $\mathbf{C}[X]$, l'écriture $A = BQ+R$ est également une division euclidienne de A par B dans $\mathbf{C}[X]$.
Or, $A = BP+0$ est aussi une division euclidienne de A par B dans $\mathbf{C}[X]$.
Par unicité de cette division, on a donc $Q = P$ et $R = 0$.
Puisque $R = 0$, B divise A dans $\mathbf{R}[X]$.

Remarque
Notons qu'on a prouvé au passage que nécessairement, P est à coefficients réels.

2. Ce que nous enseigne la question précédente, c'est que la divisibilité dont il est question, a priori dans $\mathbf{R}[X]$, est aussi une divisibilité dans $\mathbf{C}[X]$.
Or, dans $\mathbf{C}[X]$, il est aisé de tester la divisibilité : elle se lit sur les racines.
Les racines complexes de X^2+X+1 sont j et $\bar{j} = j^2$.
Il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de n j et j^2 sont des racines de $X^{2n}+X^n+1$.
Étant conjugués, et $X^{2n}+X^n+1$ étant à coefficients réels, l'un sera racine si et seulement si l'autre l'est.
On cherche donc les valeurs de n pour lesquelles $j^{2n}+j^n+1 = 0$.
▸ Si $n \equiv 0 \ [3]$, alors $j^n = j^{2n} = 1$, donc $1+j^n+j^{2n} = 3 \neq 0$.
▸ Si $n \equiv 1 \ [3]$, alors $j^n = j$, donc $j^{2n} = j^2$ et donc $1+j+j^2 = 0$.
▸ Si $n \equiv 2 \ [3]$, alors $j^n = j^2$ et $j^{2n} = j^4 = j$, de sorte que $1+j+j^2 = 0$.
Donc X^2+X+1 divise $X^{2n}+X^n+1$ si et seulement si n n'est pas divisible par 3.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.19

Il est évident que les polynômes constants conviennent.
Si P est non constant et divisible par P', puisque $\deg P' = \deg P - 1$, il existe $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ tels que $P = (aX+b)P'$.

Notons n le degré de P, de sorte que par identification des coefficients dominants[5], $a = \dfrac{1}{n}$.
Donc quitte à changer b, on a $nP = (X+b)P'$.
En dérivant cette relation $nP' = (X+b)P''+P' \Leftrightarrow (n-1)P' = (X+b)P''$.
Puis de proche en proche, on arrive à $P^{(n-1)} = (X+b)P^{(n)}$.

[5] Le coefficient dominant de P' est n fois celui de P : le n provenant de la dérivée de X^n.

Or, $P^{(n)}$ est une constante : c'est le coefficient dominant de P multiplié par $n!$.
Notons le $\lambda \times n!$.
Donc en remontant, $P^{(n-1)} = (X+b)\lambda n!$.
Puis $2P^{(n-2)} = (X+b)P^{(n-1)} = (X+b)^2\lambda n!$...
De proche en proche, on en déduit que $P = \lambda(X+b)^n$.
Inversement, il est facile de prouver que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$, tout $b \in \mathbf{C}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $P = \lambda(X+b)^n$ est divisible par son polynôme dérivé.
Alternative : donnons une autre preuve, un peu moins calculatoire, mais spécifique à $\mathbf{C}[X]$, puisqu'elle utilise le fait que P est scindé.
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant, tel que P' divise P.
Alors P est scindé, notons n le nombre de ses racines distinctes, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ces racines et $m_1, \dots, m_n$ leur multiplicités.

Remarque

Le raisonnement que nous avons tenu ici n'est pas spécifique à $\mathbf{C}[X]$, et reste valable dans $\mathbf{R}[X]$ ou dans $\mathbf{Q}[X]$.

On a alors $P = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}$, avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$.

On a donc $\sum_{i=1}^{n} m_i = \deg P$.

Puisque P' divise P, toutes les racines de P' sont racines de P. Autrement dit, les racines de P' sont parmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Or nous savons que λ_i est racine de P', de multiplicité $m_i - 1$ (avec cette multiplicité éventuellement nulle si λ_i n'est pas racine de P').

Et donc $\sum_{i=1}^{n}(m_i - 1) = \deg P'$.

Soit encore $\sum_{i=1}^{n} m_i - n = \deg P - 1 \Leftrightarrow n = 1$.

Autrement dit, P possède une unique racine, et donc est de la forme $P = \alpha(X-\lambda)^k$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.20

Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est non constant, alors, par le théorème de d'Alembert-Gauss, il réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$.
En effet, pour tout $y \in \mathbf{C}$, $P - y$ possède au moins une racine, donc y possède au moins un antécédent par P.
Et donc en particulier, on ne peut avoir $P(\mathbf{C}) \subset \mathbf{R}$ que si P est constant. Et alors, il faut nécessairement que la constante en question soit réelle.
Inversement, si P est un polynôme constant à coefficient réel, nécessairement, l'image de $\mathbf{C}$ est incluse dans $\mathbf{R}$ (elle est même réduite à un singleton de $\mathbf{R}$).
Donc les solutions sont les polynômes constants à coefficient(s) réel(s).

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.21

Notons $Q \in \mathbf{R}[X]$ et $R(X) = aX + b \in \mathbf{R}_1[X]$ le quotient et le reste de cette division euclidienne.
Alors, dans $\mathbf{C}[X]$, on a toujours $P = (X^2+1)Q + R$, donc Q et R sont également les quotient et reste de la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$.
Donc en particulier, on peut évaluer cette relation en un complexe, prenons donc i et $-i$, les racines de X^2+1.

$$P(i) = Q(i)\underbrace{(i^2+1)}_{=0} + ai + b \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} e^{ia_k} = ai + b \Leftrightarrow e^{i(a_1+\cdots+a_n)} = ai + b.$$

De même, l'évaluation en $-i$ nous conduit à $-ai + b = e^{-i(a_1+\cdots+a_n)}$.
Reste à déterminer a et b, c'est-à-dire à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, qui nous donne

$$b = \frac{e^{i(a_1+\cdots+a_n)} + e^{-i(a_1+\cdots+a_n)}}{2} = \cos(a_1+\cdots+a_n) \text{ et } a = \sin(a_1+\cdots+a_n).$$

Donc le reste cherché est $\sin(a_1+\cdots+a_n)X + \cos(a_1+\cdots+a_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.22

1. Soient P, Q deux polynômes de Σ, avec $P = A^2 + B^2$, $Q = C^2 + D^2$, où A, B, C, D sont des polynômes à coefficients réels.

Alors $P = (A+iB)(A-iB)$, et de même $Q = (C+iD)(C-iD)$.
Donc $PQ = [(A+iB)(C+iD)]\overline{[(A+iB)(C+iD)]} = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2 \in \Sigma$.

2. C'est assez clair...

3.a. Soit α une racine de P, soit m sa multiplicité, et soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
Alors en considérant la limite quand x tend vers α par valeurs supérieures, on constate que

$$Q(\alpha) = \lim_{x\to\alpha^+} Q(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m} \geqslant 0.$$

Donc $Q(\alpha) > 0$. Puisque Q est continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[$, $Q(x) > 0$.
Et donc, pour $x \in]\alpha-\eta,\alpha+\eta[$, $P(x) = (x-a)^m Q(x)$ est du signe de $(x-a)^m$.
Si m est impair, alors $(x-a)^m$ change de signe en a, et donc P aussi.
Plus précisément, $P(x) < 0$ pour $x \in]\alpha-\eta,\alpha[$ et $P(x) > 0$ pour $x \in]\alpha,\alpha+\eta[$.
Mais ceci vient contredire notre hypothèse, donc m est pair.

> **Remarque**
> Sur cet intervalle, α est donc la seule racine de P.

3.b. Nous savons que P s'écrit $\alpha \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^{q} Qj(x)$, avec Q_j irréductible de degré 2.
Donc déjà, α est positif, donc somme de deux carrés
$(X-\alpha_i)^{2m_i}$ est un carré, et donc s'écrit $0^2 + ((X-\alpha_i)^{m_i})^2$.
Enfin, si $P = X^2 + bX + c$ est irréductible[6], alors sa mise sous forme canonique est

$$\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\Delta^2}{4a^2} = \left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2a}\right)^2.$$

Donc un tel polynôme est somme de carrés.
Donc tous les facteurs de la décomposition de P sont dans Σ, par la question 1, P l'est aussi.

[6] Et unitaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.23

Notons $P = \sum_{i=0}^{n} L_i - 1$. Alors pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$P(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{n} L_i(\lambda_j) - 1 = L_i(\lambda_i) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

> **Rappel**
> $$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc P possède $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ comme racines : il possède $n+1$ racines distinctes.
Mais les L_i sont de degré exactement n, donc P est de degré au plus n.
Donc P possède strictement plus de racines que son degré : c'est le polynôme nul.
Et par conséquent, $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$.

> **⚠ Attention !**
> Ne pas dire que P est de degré exactement n : la somme de polynômes de même degré peut être de degré strictement inférieur, et c'est bien ce qui se produit ici.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.24

Notons $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux $\frac{k}{n}, k \in [\![0, n]\!]$.
Alors tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) L_k$.
Et donc par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 L_k(t)\,dt.$$

En posant $\lambda_k = \int_0^1 L_k(t)\,dt$, on a alors le résultat souhaité.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.25

Les racines de $X^n - 1$ (resp. $X^m - 1$) sont les racines $n^{\text{èmes}}$ (resp. $m^{\text{èmes}}$) de l'unité.
Mais m, n étant premiers entre eux, il existe deux entiers p et q tels que $np + mq = 1$. Et alors si $z \in \mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_m$, alors $z = z^1 = z^{np+mq} = (z^n)^p (z^m)^q = 1$.
Autrement dit, $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_m = \{1\}$.
Ainsi, $(X^n-1)(X^m-1)$ possède $n+m-1$ racines simples (qui sont les éléments différents

de 1 de $\mathbf{U}_m \cup \mathbf{U}_n$) et une racine double, qui est 1.
Mais 1 est racine $mn^{\text{ème}}$ de l'unité, donc racine de $X^{mn}-1$, et donc racine au moins[7] double de $X^{mn}-1$.
De plus, si $z \in \mathbf{U}_m$, alors $z^{mn} = (z^m)^n = 1^n = 1$, donc $z \in \mathbf{U}_{mn}$.
Autrement dit, toutes les racines simples de $(X^n-1)(X^m-1)$ sont racines de $(X^{mn}-1)$.
Ainsi, ce dernier polynôme est divisible par

$$(X-1)^2 \prod_{z\in\mathbf{U}_n\setminus\{1\}}(X-z)\prod_{z\in\mathbf{U}_m\setminus\{1\}}(X-z) = \prod_{z\in\mathbf{U}_n}(X-z)\prod_{z\in\mathbf{U}_m}(X-z) = (X^n-1)(X^m-1).$$

Ce résultat ne vaut plus si p et q ne sont plus premiers entre eux, par exemples pour $p=2$ et $q=4$, -1 est racine de X^2-1 et de X^4-1, donc est racine double de $(X^2-1)(X^4-1)$, alors qu'il n'est que racine simple de X^8-1.
Donc $(X^2-1)(X^4-1)$ ne divise pas $(X-1)(X^8-1)$.

[7] Il n'est pas très dur de prouver que c'est une racine double, et donc de multiplicité exactement égale à 2, mais ce n'est pas vraiment nécessaire ici.

Mieux
Prouver qu'en fait, dès que $p \wedge q \neq 1$, $(X^p-1)(X^q-1)$ ne divise pas $(X-1)(X^8-1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.26

Il est clair que les polynômes à coefficients réels satisfont $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.
Inversement, soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un tel polynôme. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(\overline{x}) = \overline{P}(x)$.
Ainsi, les polynômes $\overline{P}$ et P coïncident en une infinité de nombres[8] : ils sont donc égaux.
Et donc P est à coefficients réels.

[8] Tous les réels.

Il est évident que les polynômes à coefficients rationnels conviennent.
Inversement, soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$, de degré n.
Notons alors $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux entiers $0, 1, \dots, n$.
Alors $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-k}{i-k} \in \mathbf{Q}[X]$.

Mais nous savons que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \underbrace{P(i)}_{\in\mathbf{Q}} L_i \in \mathbf{Q}[X]$.

Et donc $P \in \mathbf{Q}[X]$.

Remarque
Prendre les polynômes d'interpolation associés à $n+1$ rationnels distincts aurait fonctionné tout aussi bien, il n'est pas nécessaire de prendre précisément ceux associés à $0, 1, \dots, n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.27

Par l'exercice précédent, P est à coefficients rationnels.
Nous allons prouver que son degré ne peut pas être supérieur ou égal à 2 c'est-à-dire que P est de la forme $aX+b$.
Soit donc $P \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Quitte à multiplier P par le PPCM des dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer que P est à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

Remarque
Noter qu'une telle multiplication ne change pas la surjectivité : en effet, si tout rationnel r possède un antécédent par P, c'est en particulier le cas de $\frac{r}{n}$, de sorte que r possède un antécédent par nP.

Notons alors $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, avec les a_i entiers.

Soit alors $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel, avec $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$ et $p \wedge q = 1$.

Alors $P(r) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i r^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i}$.

Et en particulier, $q^n P(r) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i q^{n-i} p^i$.

Soit m un nombre premier, et supposons qu'il existe $r = \dfrac{p}{q}$ un antécédent de $\dfrac{1}{m}$.

Alors $q^n \dfrac{1}{m} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i q^{n-i} p^i \Leftrightarrow q^n = m \sum_{i=0}^{n} a_i q^{n-i} p^i$.
Ainsi, m divise q^n, et m étant premier, il divise donc q.
Par conséquent, m^n divise q^n.

Si $n \geqslant 2$, alors m divise $\dfrac{q^n}{m} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_n q^{n-i} p^i$.

Donc m divise $\dfrac{q^n}{m}$ et divise[9] $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i q^{n-i}$, donc il divise leur différence qui est $a_n p^n$.
Mais $p \wedge q = 1$, donc par le lemme de Gauss, m divise a_n.

[9] Il s'agit d'une somme d'entiers dont tous les termes sont divisibles par q, donc par m.

Ainsi, si m est un nombre premier qui ne divise pas[10] a_n, alors $\frac{1}{m}$ n'a pas d'antécédent, et donc P n'est pas surjectif.

Inversement, il est évident qu'un polynôme de degré 1 à coefficients rationnels réalise une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$.
Donc les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ qui réalisent une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$ sont les polynômes de degré 1 à coefficients rationnels.

[10] Et il en existe puisque a_n n'a qu'un nombre fini de diviseurs premiers.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.28

Notons $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}$ est de degré $n-k$, son coefficient dominant est $a_n \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et son coefficient de degré $n-k-1$ est $a_{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(n-k-1)!}$.
Donc $s_k = -\dfrac{a_{n-1}(n-1)!}{(n-k-1)!}\dfrac{(n-k)!}{n! a_n} = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$.
On reconnaît là une suite arithmétique de raison $\dfrac{a_{n-1}}{n a_n}$.

Détails
Calculer les dérivées successives de X^i si vous avez besoin d'être convaincu de la validité de ces formules.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.29

1. Si $z \in \mathbf{U}_n$ est différent de 1, alors $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1} = 0$.
Donc les $n-1$ éléments de $\mathbf{U}_n \setminus \{1\}$ sont racines de P_n, qui est de degré $n-1$. Il n'y a donc pas d'autres racines, et P_n étant unitaire

$$P_n = \prod_{\substack{z \in \mathbf{U}_n \\ z \neq 1}} (X - z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right).$$

Attention !
Ne jamais oublier le coefficient dominant lors d'une factorisation par les racines ! Ici ça : il vaut 1.

2. Il s'agit de remarquer que

$$\begin{aligned}
P_n(1) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(-2i \sin\frac{k\pi}{n}\right)\\
&= (-2i)^{n-1} e^{i\frac{\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\\
&= (-2i)^{n-1} \underbrace{e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}}_{i^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}\\
&= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Puisque d'autre part, $P_n(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, on en déduit que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3. Même principe en utilisant le polynôme $Q_n = X^n - e^{2in\theta}$.
On a alors $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{i\left(2\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$.
Et alors[11] $Q_n(1) = 1 - e^{i2n\theta} = -2i\sin(n\theta)e^{in\theta}$.
Et d'autre part,

$$\begin{aligned}
Q_n(1) &= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{i\left(2\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} e^{i\frac{k\theta}{n}} \prod_{k=1}^{n}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)\\
&= (-2i)^n e^{i\frac{n(n+1)\theta}{2n}} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)\\
&= (-2i)^n i^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right).
\end{aligned}$$

[11] Toujours par factorisation par l'angle moitié.

Et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right) = -\frac{\sin n\theta}{2^{n-1}}$.

4. Il s'agit donc de calculer

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{\ell=0\\k\neq\ell}}^{n-1}\left(\zeta^k - \zeta\ell\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\zeta^k\left(1-\zeta^{\ell-k}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(\left(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n-1}\zeta^k\right)\left(\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n-1}\left(1-\zeta^{\ell-k}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Or, $\{\zeta^{\ell-k},\, 0\leqslant \ell\leqslant n-1, l\neq k\} = \mathbf{U}_n\setminus\{1\}$.

On en déduit que $\displaystyle\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n-1}\left(1-\zeta^{\ell-k}\right) = P_n(1) = n$.

Donc $\displaystyle P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(n\zeta^{k(n-1)}\right) = n^n\prod_{k=0}^{n-1}\zeta^{-k}$.

Soit encore $P = n^n\zeta^{-(0+1+\cdots+(n-1))} = n^n\zeta^{-\frac{n(n-1)}{2}} = n^n e^{-i(n-1)\pi} = (-1)^{n-1}n^n$.

Solution de l'exercice 17.30

1. Notons $P = X^3+aX^2+bX+c$.
Nous savons, via les relations racines coefficients, que $a = -\sigma_1 = -x-y-z = -1$.
D'autre part, $b = \sigma_2 = xy+yz+xz$. Il s'agit donc de déterminer cette quantité. Mais nous savons que

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz) \Leftrightarrow 1^2 = 21+2\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_2 = -10.$$

Donc $b=-10$.
Enfin, nous avons[12] $c = -\sigma_3 = -xyz$.
Mais $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} = \dfrac{yz+xz+yz}{xyz} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}$.
Et donc $\sigma_3 = \sigma_2 = -10$.
Ainsi, $P = X^3-X^2-10X+10$.

2. Il est clair que 1 est racine de P, et donc $P = (X-1)(X^2-10) = (X-1)\left(X-\sqrt{10}\right)\left(X+\sqrt{10}\right)$.
Donc si on a une solution, $\{x,y,z\} = \left\{1,\sqrt{10},-\sqrt{10}\right\}$.
Inversement, on vérifie que si $\{x,y,z\} = \left\{1,\sqrt{10},-\sqrt{10}\right\}$, alors le système est bien satisfait, donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(1,\sqrt{10},-\sqrt{10}\right),\left(1,-\sqrt{10},\sqrt{10}\right),\left(\sqrt{10},-\sqrt{10},1\right),\right.$$
$$\left.\left(\sqrt{10},1,-\sqrt{10}\right),\left(-\sqrt{10},1,\sqrt{10}\right),\left(-\sqrt{10},\sqrt{10},1\right)\right\}.$$

[12] Toujours par les relations racines-coefficients.

Ensemble
Noter que nous donnons ici un ensemble, et pas un triplet : l'ordre des trois solutions n'est pas imposé, et de toutes façons, vu que les trois variables jouent un rôle symétrique dans le système, elles sont complètement interchangeables : dès qu'on a une solution, on en a jusqu'à 6, en permutant les trois variables.

Analyse asymptotique

18

Dans ce chapitre, nous donnons des outils performants pour décrire des concepts que nous manipulons déjà depuis quelques temps : l'idée qu'une suite/fonction «l'emporte sur une autre», et donc impose sa limite.
Par exemple lorsqu'on dit que $\lim_{n\to+\infty} -2n^4+n^3+5n = \lim_{n\to+\infty}(-2n^4) = -\infty$, ou encore que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x+1} = +\infty$.
Nous introduisons donc trois notations : ~ (équivalent), o («petit o») et O («grand O»), ce dernier étant celui que vous avez déjà rencontré en informatique.

18.1 Négligeabilité

18.1.1 Définition

Définition 18.1 – Soient (u_n), (v_n) deux suites à valeurs réelles. On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ si il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$, de limite nulle, telle que

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n v_n.$$

À l'oral
On lira $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ en disant «(u_n) est un petit o de (v_n)».

Exemple 18.2

On a $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\right)$ puisque pour $n \geqslant 1$, $n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\varepsilon_n} n^2$.

Sur le même principe, on a $\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^2}$.

Remarques. ► Les exemples précédents donnent une bonne intuition de la signification des o :

— dans le cas où (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, celle qui est négligeable devant l'autre est celle qui tend «le moins vite» vers $+\infty$

— dans le cas de deux suites qui tendent vers 0, c'est celle[1] qui tend «le plus vite» vers 0 qui est négligeable devant l'autre.

[1] Si elle existe.

► Si (v_n) est la suite nulle alors les seules suites négligeables devant (v_n) sont les suites stationnaires de limite nulle, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang.
► La présence du n_0 n'est en fait indispensable que pour englober le cas où (v_n) peut s'annuler. En effet, dans le cas où (v_n) ne s'annule pas, on peut toujours supposer que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, en posant simplement $\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$.
► De manière équivalente, en utilisant la définition de limite, on peut prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|.$$

En pratique, on pourra prendre la proposition suivante comme définition de la négligeabilité, à condition de se souvenir qu'elle n'est valable que dans certains[2] cas.

[2] Qui englobent 99, 9% des cas que vous serez amenés à traiter.

Proposition 18.3 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, soit alors (ε_n) telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Inversement, si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il suffit de poser, pour n suffisamment grand, $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. □

Et si n petit ?
Nous ne disons rien des valeurs de ε_n lorsque n «n'est pas suffisamment grand» (autrement dit pour un nombre fini de valeurs de n) car elles n'ont aucune incidence sur la limite. Vous pouvez donc les choisir comme bon vous semble, la suite (ε_n) conviendra toujours !

Exemples 18.4

- Si (u_n) est bornée et si $|v_n| \to +\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
- $n\sin(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n\sqrt{n} - 3n\right)$.
En effet, on a $\dfrac{n\sin(\sqrt{n})}{n\sqrt{n}-3n} = \dfrac{\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n})}{1-\frac{3}{\sqrt{n}}}$.
Mais $\dfrac{1}{n}\sin(\sqrt{n})$ tend vers 0 car produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle. Et le dénominateur tend clairement vers 1.

Proposition 18.5 : *Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
Autrement dit, la notation $o(1)$ désigne n'importe quelle suite de limite nulle.

Démonstration. On a[3] $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{1} = 0$. □

[3] La suite constante égale à 1 ne s'annule pas.

Exemple 18.6

Puisque $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, ce qu'on notera $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$.

18.1.2 Opérations sur les o

⚠ La notation o est pleine de subtilités, et pour commencer, il faut bien comprendre qu'elle ne désigne pas un objet de manière unique, mais qu'il peut y avoir une infinité de suites négligeables devant une même suite.
Par exemple, les suites de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^2+1}, \dfrac{1}{n^2+2\sin n}, \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ sont toutes négligeables devant la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$.
Donc on va noter $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, mais on n'en déduira surtout pas que $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$!
Autrement dit, $\underset{n\to+\infty}{=} o(\cdot)$ n'est pas une égalité, c'est une relation binaire sur l'ensemble des suites.
Et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n$

Une fois qu'on a accepté ce principe, les règles de calcul suivantes ne sont pas trop difficiles à assimiler.
Il n'est probablement pas intelligent de tout apprendre par cœur bêtement, et en cas de doute dans un exercice, un retour rapide à la définition[4] devrait suffire à dissiper vos doutes.

[4] Via la limite du quotient.

Constantes
Ce premier point signifie que les constantes multiplicatives ne servent à rien dans des o et on ne fera pas de différence entre $o(n)$, $o(-2n)$ et $o(n/100)$.

Proposition 18.7 : *Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites.*

1. $\forall \lambda \in \mathbf{R}^*$, *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$ *et* $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
2. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, *alors* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$
3. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ *(transitivité des o)*
4. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, $u'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$, *alors* $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n v'_n)$
   En particulier, si $k \in \mathbf{N}$, *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n^k \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n^k)$.
5. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, *alors* $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n w_n)$.
6. *si* (u_n) *et* (v_n) *ne s'annulent pas, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.
7. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|v_n|)$.

Démonstration.
1. soit (ε_n) de limite nulle telle que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon_n v_n$.
   Alors en posant $\varepsilon'_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda}$, qui tend toujours vers 0, alors pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \varepsilon'_n(\lambda v_n)$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$.
   De même, en posant $\varepsilon''_n = \lambda\varepsilon_n$, alors $\lambda u_n = \varepsilon''_n v_n$.
2. Si pour n suffisamment grand, $u_n = \varepsilon_n w_n$ et $v_n = \theta_n w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$, alors pour n suffisamment grand $u_n + v_n = (\varepsilon_n + \theta_n) w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n + \theta_n) = 0$.

Suffisamment gd.
Essayez d'écrire les détails si vous en ressentez le besoin. Ici il y a une subtilité : les «n suffisamment grand» ne veulent pas forcément dire la même chose pour (u_n) et pour (v_n) !

Dans la suite, pour simplifier les preuves, on suppose que les suites en jeu ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, de sorte qu'on peut utiliser la limite du quotient pour caractériser la négligeabilité.

3. On a
$$\frac{u_n}{w_n} = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{v_n}{w_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
4. $\dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{u'_n}{v'_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. $\dfrac{u_n w_n}{v_n w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. $\dfrac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \dfrac{u_n}{v_n}$, et donc l'un tend vers 0 si et seulement si l'autre tend vers 0.
7. Il suffit de se rappeler qu'une suite tend vers 0 si et seulement si sa valeur absolue tend vers 0.
   Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = 0$.

□

⚠ On n'a de résultat que pour la somme de deux suites négligeables **devant une même suite**, et **on ne somme rien à l'intérieur du** o.
Par exemple, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{=} o(-n)$, mais
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\neq} o(n + (-n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(0).$$

Exemples 18.8

Supposons qu'on dispose de deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_nv_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2 - \frac{2}{n} + \underbrace{o\left(\frac{2}{n}\right)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underbrace{-o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{=o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underbrace{- \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

On a utilisé ici à la fois les règles 4 et 5 de la proposition précédente pour faire le produit.

▸ Souvenons nous que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = 1$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$.
Alors $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et donc

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Proposition 18.9 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors pour toute extractrice φ, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} v_{\varphi(n)}$.*

Démonstration. Si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la suite extraite $\left(\frac{u_{\varphi(n)}}{v_{\varphi(n)}}\right)_n$ tend aussi vers 0. □

Exemple 18.10

Puisque $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sin \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

18.1.3 Les croissances comparées usuelles

Lemme 18.11. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, et supposons qu'il existe un réel $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, il existe[5] $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Et donc pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} < u_n$, de sorte que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.
Puisqu'elle est minorée par 0, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $L \geqslant 0$.
Si on avait $L > 0$, alors par quotient de limites, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{L}{L} = 1$, ce qui est absurde.
Donc $L = 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

[5] Prendre $\varepsilon = 1 - \ell$ dans la définition de limite.

Théorème 18.12 (Croissances comparées usuelles) :

1. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \alpha < \beta \Rightarrow n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$
2. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall q \in]0,1[, q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
   $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall q > 1, n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right)$
3. $\forall (q, q') \in (\mathbf{R}_+^*)^2, q < q' \Rightarrow q^n \underset{n\to+\infty}{=} o((q')^n)$
4. $\forall q \geqslant 0, q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
5. $n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

Intérêt

La première assertion de 2. n'est vraiment utile que si $\alpha < 0$, auquel cas q^n et n^α tendent tous deux vers 0. De même, la seconde assertion n'a d'intérêt que pour $\alpha > 0$.

Démonstration. 1. Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Alors $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha - \beta < 0$.

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $q \in]0,1[$. Appliquons le lemme à la suite de terme général $\dfrac{q^n}{n^\alpha}$.

   On a alors $\dfrac{q^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\dfrac{n^\alpha}{q^n} = \dfrac{q}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q \in]0,1[$.

   Dans le cas $q > 1$ il suffit de faire de même avec $\dfrac{n^\alpha}{q^n}$.

3. Nul besoin du lemme ici, il suffit de connaître les suites géométriques :

$$\frac{q^n}{q'^n} = \left(\frac{q}{q'}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Encore une fois le lemme : $\dfrac{q^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{q^n} = \dfrac{q}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Donc $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Remarque

Ce résultat avait déjà été prouvé, avec la même méthode, dans le chapitre de suites.

5. Toujours pareil : $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

   Or, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

   Mais il est classique[6] que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = 1$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

   On en déduit, par continuité de l'exponentielle, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1$.

   Et donc $n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$.

□

[6] Il s'agit de reconnaître un taux d'accroissement.

Ces résultats, couplés à la transitivité des o permettent déjà de comparer beaucoup de suites. Par exemple, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\right)$. En effet, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\right)$.

18.2 Équivalents

18.2.1 Définition

Définition 18.13 – Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes**, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe une suite (θ_n) qui tend vers 1 telle que

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = \theta_n v_n.$$

Remarques. ▶ L'intuition qui se cache là-derrière est que deux suites équivalentes doivent «se comporter de la même manière au voisinage de $+\infty$». Ou au moins «avoir le même ordre de grandeur», et donc au moins avec les mêmes vitesses de convergence/divergence.
▶ Si (v_n) est la suite nulle, alors les seules suites équivalentes à (v_n) sont les suites nulles à partir d'un certain rang.
Ce qui signifie qu'à moins que vous ne soyez en train de manipuler la suite nulle[7], **je ne veux pas voir écrit** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$**.**
Si vous en arrivez à écrire ceci, cherchez l'erreur dans vos calculs, ça ne devrait pas arriver ! Généralement ce n'est pas une erreur de calcul, mais plutôt que vous avez réalisé une opération qui n'était pas autorisée.

La proposition suivante se prouve exactement comme la proposition analogue pour les o.

[7] Et généralement on s'en rend compte !

⚠ Attention !
«On n'est jamais équivalent à 0 sauf si on est complètement nul !»

Proposition 18.14 : *Si (v_n) est non nulle (à partir d'un certain rang), alors on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*

Exemples 18.15

$n + \sqrt{n}\sin(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puisque

$$\frac{n+\sqrt{n}\sin(n)}{n} = 1 + \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Proposition 18.16 (Lien entre o et $\sim$) : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Intuition
Au fond, cette proposition est assez intuitive, si une suite est négligeable devant l'autre, alors la somme se comporte comme celle qui domine l'autre.

Démonstration. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors soit $(\theta_n)_n$ une suite qui tend vers 1 telle que pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors $u_n - v_n = \underbrace{(\theta_n - 1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} v_n$.
Donc $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Et inversement, si pour $n \geqslant n_0$, $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, alors, toujours pour $n \geqslant n_0$, $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\varepsilon_n = 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. ◻

Exemple 18.17

Cherchons un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{n} + n\ln(n) + \sqrt{n} + \dfrac{e^n}{n}$.
Intuitivement, il s'agit d'isoler le terme «le plus fort» de u_n, qui doit être $\dfrac{e^n}{n}$.
En effet, d'après les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$, donc déjà $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
De même, $n\sqrt{n} = n^{3/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$, donc $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
Le même raisonnement prouve que $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, si bien que $n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ et donc $n\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{e^n}{n}\right)$.

Intuition
Il faut un peu d'intuition pour être efficace dans ce type de question, et être capable de reconnaître rapidement le terme qui domine les autres, mais si on ne le voit pas tout de suite, quelques calculs permettent de le trouver.

Et donc au final, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{e^n}{n} + o\left(\frac{e^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n}$.

18.2.2 Propriétés des équivalents

Proposition 18.18 : *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites, on a donc, pour (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites :*

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
3. *si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$*, alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Démonstration. Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
En prenant $\theta_n = 1$, on a bien $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \theta_n u_n$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors soit (θ_n) qui tend vers 1 et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\theta_n \geqslant \frac{1}{2}$, et en particulier $\theta_n \neq 0$.
Alors pour $n \geqslant n_1$, $v_n = \frac{1}{\theta_n} u_n$, et puisque $\frac{1}{\theta_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a bien $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Enfin, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, soient alors $(\theta_n), (\theta'_n)$ telles que pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n v_n$ et $v_n = \theta'_n w_n$.
Alors pour n suffisamment grand, $u_n = \theta_n \theta'_n w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n\theta'_n = 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

□

⚠ Attention ! Ce résultat ne vaut plus si $\ell = \pm\infty$, auquel cas il ne reste que l'implication $\Rightarrow$ (si deux suites sont équivalentes et que l'une possède une limite, alors l'autre tend vers la même limite).

Proposition 18.19 : *Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbf{R}^*$. Alors pour toute suite (v_n), on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Démonstration. Notons que (u_n) possédant une limite non nulle, elle est non nulle à partir d'un certain rang. Et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

□

Les deux propositions suivantes nous permettent d'en dire un peu plus sur l'intérêt des équivalents.
Jusqu'à présent, nous disposions d'un premier moyen de faire le tri parmi toutes les suites : la limite.
Il y avait donc d'un côté les suites qui tendent vers 0, puis les suites qui tendent vers 1, celles qui tendent vers π, celles qui tendent vers $+\infty$, et celles qui n'ont pas de limite.
La notion d'équivalence permet donc de partitionner l'ensemble de toutes les suites en classes d'équivalence.
Ce que dit la proposition ci-dessus, c'est que pour les suites de limite finie non nulle, il n'y a pas grand chose de nouveau : toutes les suites qui tendent vers $\ell \neq 0$ sont dans la même classe d'équivalence.
C'est en revanche pour les suites de limite nulle ou infinie que cela devient plus intéressant : il y a d'une part la classe d'équivalence de $\frac{1}{n}$, qui contient $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\frac{1}{n} + \frac{\cos n}{n^2}$, puis d'autre part la classe d'équivalence de $\frac{1}{2^n}$, qui contient $\frac{1}{2^n+2}$ et $\frac{n^2+4n+1}{2^n(n^2-7n)}$etc.
On a donc une classification plus fine que celle établie uniquement à l'aide de la limite.

Remarque La notion d'équivalence permet tout de même de caractériser plus finement les suites qui tendent par exemple vers 1 : il suffit alors de chercher un équivalent de $u_n - 1$.
Ainsi, si $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et si $v_n = 1 + e^{-n}$, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Mais $u_n - 1 \not\sim v_n - 1$, car ces deux suites tendent vers 1 à des vitesses très différentes

Proposition 18.20 : *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes, alors, à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.*

Démonstration. Soit $(\theta_n)_n$ qui tend vers 1 telle que pour $n \geqslant n_0$, $u_n = \theta_n v_n$.
Alors[8] il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \frac{3}{2}$.
Et en particulier, puisque $\theta_n > 0$, v_n et $u_n = \theta_n v_n$ sont de même signe[9]. □

[8] Par définition d'une limite, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
[9] Et quand je dis ça, je parle des trois signes : positif, négatif ou nul !

Proposition 18.21 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et si (u_n) a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors (v_n) aussi, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. Cela découle directement des théorèmes opératoires sur les limites puisque $u_n = \theta_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 1$. □

Proposition 18.22 : *Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (z_n) quatre suites.*

1. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$, alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n z_n$.*
   En particulier, pour $k \in \mathbf{N}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$.
2. *Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.*
3. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang[10], alors pour tout $a \in \mathbf{R}$, $u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$.*
4. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors pour toute extractrice φ, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_{\varphi(n)}$.*

[10] Ce qui garantit que v_n le soit également à partir d'un certain rang, cf la proposition 18.20.

Démonstration. Prouvons le point 3, qui est le seul à ne pas ressembler à des propositions analogues sur les o.
On a $\frac{u_n^a}{v_n^a} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^a$, avec $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc par continuité de $x \mapsto x^\alpha$ en 1, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$. □

Remarques. ► Le point 3 est notamment valable pour $a = \frac{1}{2}$: on peut élever des équivalents à une puissance positive **fixée**, c'est-à-dire qui ne dépend pas de n.
Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, mais on n'en déduit pas que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

⚠ **On ne somme pas des équivalents !**
Par exemple, $n^3 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $-n^3 + n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^3$, mais $n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\not\sim} 0$

Proposition 18.23 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.*

Démonstration. Plaçons nous une fois encore dans le cas de suites qui ne s'annulent pas.
On a par hypothèse $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc par produit, $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. □

Exemple 18.24

Soit $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-n+1}$.
Alors $n^3+2n^2+1 \underset{n\to+\infty}{=} n^3 + o(n^3) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$.
Et donc $\sqrt[3]{n^3+2n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n^3} = n$.
De même, $n^2-n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, et donc $\sqrt[3]{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n^2} = n^{2/3}$.
Mais $n^{2/3} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, si bien que $\sqrt[3]{n^2-n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}\right)$.
Et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt[3]{n^3+2n^2+1}+o\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n^3+2n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Rappel
On peut élever les équivalents à une puissance fixée, ici $\frac{1}{3}$.

18.2.3 Un équivalent classique : la formule de Stirling

Reste alors une dernière formule, complètement à part puisqu'elle ne ressemble à aucune autre : la formule de Stirling, qui donne un équivalent de la factorielle :

Proposition 18.25 (Formule de Stirling) :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Nous admettons cette formule pour l'instant, même si vous en avez déjà rencontré une preuve en DM.
Nous en donnerons une preuve un tout petit peu plus facile[11] dans un chapitre de fin d'année.

[11] Mais utilisant tout de même les intégrales de Wallis.

⚠ Aussi belle[12] soit cette formule, elle ne sert pas si souvent que ça. A priori, ça ne doit pas forcément être votre premier réflexe dans des exercices contenant des factorielles, essayer d'abord de les simplifier !

Exemple 18.26

Cherchons un équivalent de $u_n = \binom{2n}{n}$.
On a $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

Remarque
Notons que $\binom{2n}{n}$ n'est rien d'autre que le coefficient médian d'une ligne du binôme de Newton. Nous savons que ce coefficient est plus grand que tous les autres de la même ligne.
Et 2^{2n} n'est rien d'autre que la somme de tous les coefficients de cette même ligne.
Il s'agit donc de quantifier l'impact de ce coefficient médian sur la somme de toute une ligne.
Ceci n'est pas étranger aux motivations qui ont conduit à l'élaboration de la formule de Stirling.

18.3 Le cas des fonctions

18.3.1 Définitions

Dans toute la suite, on considère des fonctions définies sur un même ensemble I et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ adhérent à I.

Définition 18.27 – Soient f et g deux fonctions définies sur I.
▸ On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de a** et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$, qui tend vers 0 en a et telle qu'il existe un voisinage V_a de a tel que $\forall x \in V_a$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
▸ On dit que f est **équivalente à g au voisinage de** a et on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbf{R}$, qui tend vers 1 en a et un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) = \theta(x)h(x)$.

Terminologie
Autant pour les suites il était évident que tout se passait au voisinage de $+\infty$ (le seul endroit où il est pertinent de parler de limite), autant pour les fonctions il est important de préciser au voisinage de quel point on se place.

On retrouve alors les mêmes résultats que pour les suites pour des fonctions qui ne s'annulent pas.

Proposition 18.28 : *Si g est non nulle sur I, alors*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ et } f(x) \underset{x\to a}{\sim} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Autrement dit

Les notions de o et d'équivalent sont locales : elles ne regardent que les comportements de f et g au voisinage de a.

Notons qu'il n'est pas nécessaire que g ne s'annule pas sur tout son ensemble de définition, mais seulement qu'elle ne s'annule pas sur un voisinage de a.
Si g est non nulle sur $I \setminus \{a\}$ mais que $g(a) = 0$, alors, sous réserve que $f(a) = 0$, ces résultats restent valables.
En effet, si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, soit alors V_a un voisinage de a et $\varepsilon : V_a \to \mathbf{R}$ de limite nulle telle que pour tout $x \in V_a$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.
Alors le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est défini sur $V_a \setminus \{a\}$, et y est égal à $\varepsilon(x)$, si bien que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Et inversement, si g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, que $f(a) = g(a) = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Définissons une fonction ε sur I par $\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

Alors on a bien $\displaystyle\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, et pour $x \in I$:

- soit $x \neq a$, et alors par définition $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$
- soit $x = a$, et alors $f(a) = 0 = 0 \times g(a) = \varepsilon(a)g(a)$.

Donc on a bien $\forall x \in I$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, et donc $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Et les mêmes résultats restent valables pour des équivalents.

Ceci nous servira notamment lorsqu'on utilisera des équivalents de la forme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (x-a)^n$.
En effet, $(x-a)^n$ ne s'annule qu'en a, et donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (x-a)^n \Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 1$.

18.3.2 Règles de calcul

C'est bien simple, toutes les règles de calcul énoncées pour les suites restent valables pour les fonctions.

Exemple 18.29

On a $1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, et donc $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x\ln(x))$.
On en déduit que $x\ln x + \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)$.
De même, $\cos(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, donc $x - \cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Donc $\dfrac{x\ln x + \ln x}{x - \cos x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En revanche, il n'y a plus de notion de suite extraites, mais la proposition suivante :

Proposition 18.30 (Composition à droite dans les $\sim$ / o) :
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et si $\displaystyle\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $(f\circ\varphi)(x) \underset{x\to b}{=} o((g\circ\varphi)(x))$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\displaystyle\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $(f\circ\varphi)(x) \underset{x\to b}{\sim} (g\circ\varphi)(x)$.

Démonstration. C'est de la composition de limites : si $\displaystyle\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$ et $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to b} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = 0$, et de même pour les limites 1. □

Exemple 18.31

Nous allons voir tout de suite que $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$. Comme de plus[13] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors

$$\sin\left(\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}.$$

[13] Voir ci-dessous si vous ne connaissez pas déjà ce résultat.

De même, on peut utiliser les relations connues sur les fonctions pour en déduire des relations sur les suites :

Proposition 18.32 :
- *Si* $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, *alors* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(g(u_n))$.
- *Si* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, *alors* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} o(g(u_n))$.

Démonstration. C'est la caractérisation séquentielle des limites. □

Exemple 18.33

Nous allons voir tout de suite que $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

Ainsi, si $u_n = \sqrt{n^3 - 3n} - \sqrt{n^3} = \sqrt{n^3}\left(\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} - 1\right)$, on a, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{n^3}\frac{3}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

⚠ On ne compose pas les équivalents à gauche : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, il n'y a pas de raison pour que $\varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$.

Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais $e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^x$ puisque $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$.
Mentionnons tout de même deux cas où la composition à gauche est autorisée, avec certaines précautions :

Proposition 18.34 : *Si* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, *alors* $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$.
Si f *et* g *sont strictement positives, que* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et que ces deux fonctions possèdent en* a *une limite dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *différente de* 1, *alors* $\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x))$.

Démonstration. Par composition de limites, $e^{f(x)-g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} e^0 = 1$, donc $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
D'autre part, on a

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \ln(g(x))}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \neq 1$, $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) \neq 0$, et donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1$. □

Remarque
On pourrait restreindre les hypothèses et demander par exemple que $|g(x) - 1|$ soit minorée par un réel strictement positif au voisinage de a, c'est-à-dire que g ne s'approche pas trop près de 1.

18.3.3 Croissances comparées et équivalents usuels

Vous connaissez déjà de nombreuses croissances comparées, mais peu ont été redémontrées cette année. Les voici.

Proposition 18.35 (Croissances comparées en $+\infty$) :

1. *Soient* $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. *Alors* $\alpha<\beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$
2. *Soient* $(a,b)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. *Alors* $a<b \Leftrightarrow a^x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(b^x\right)$.
3. *Soient* $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. *Alors* $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$.
4. *Soient* $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$. *Alors* $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$.

Démonstration. 1. On a $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=x^{\alpha-\beta}$, qui tend vers 0 si et seulement si $\alpha-\beta<0\Leftrightarrow\alpha<\beta$.

2. On a $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=e^{x(\ln(a)-\ln(b))}$, qui tend vers 0 si et seulement si

$$\ln(a)-\ln(b)<0\Leftrightarrow a<b.$$

3. On sait déjà[14] que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Or

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta=\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

qui tend vers 0 par opérations sur les limites.

4. Par le point précédent, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}=0$.
Mais puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, par composition de limites,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x)^\alpha}{(e^x)^\beta}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=0.$$

□

[14] Cf le chapitre sur la continuité.

Proposition 18.36 (Croissances comparées usuelles en 0) :

1. *Soient* $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. *Alors* $\alpha>\beta\Leftrightarrow x^\alpha\underset{x\to0}{=}o\left(x^\beta\right)$
2. *Pour* $\alpha>0$ *et* $\beta\in\mathbf{R}$, $x^\alpha\underset{x\to0}{=}o\left(|\ln x|^\beta\right)$.

Démonstration. 1. Il suffit de calculer le quotient.

2. Procédons au changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$ (qui nous ramène donc en $+\infty$), de sorte que $\ln(X)=-\ln(x)$: il vient alors

$$\frac{x^\alpha}{|\ln x|^\beta}=\frac{1}{X^\alpha|\ln X|^\beta}.$$

Si $\beta>0$, il n'y a rien à dire. Et si $\beta<0$, alors c'est égal à

$$\frac{|\ln X|^{-\beta}}{X^\alpha}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

□

Remarque. Notons que le second point n'est rien d'autre que $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\ln(x)^\beta=0$, et notamment $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln(x)=0$.

Proposition 18.37 : *Soit f une fonction polynomiale non nulle. Alors elle est équivalente en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré, et est équivalente en 0 à son terme de plus bas degré.*

Plus précisément, si $f : x \mapsto a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$; avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.$$

⚠ Attention ! On n'entend pas par là le terme constant, mais le terme **non nul** de plus bas degré.

Démonstration. Puisque pour $0 \leqslant k < p$, $x_k \underset{x\to\pm\infty}{=} o(x^p)$, on

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} a_p x^p + o\left(x^p\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p.$$

Et de même au voisinage de 0, en se rappelant que cette fois, tous les termes de degré $> p+1$ sont négligeables devant x^p. □

La formule qui suit sera largement généralisée dans quelques temps.

Proposition 18.38 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1) : *Soit f une fonction dérivable en a.*
Alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Interprétation

Vous avez peut-être reconnu que $y = f(a)+f'(a)(x-a)$ est une équation de la tangente à f en a.
Donc la formule de Taylor quantifie l'écart entre f et sa tangente : il est négligeable quand x tend vers a, donc la tangente est une bonne approximation du graphe de f au voisinage de a.

Démonstration. C'est quasiment immédiat : dire que f est dérivable en a, de dérivée $f'(a)$, c'est dire que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

Soit encore

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{x\to a}{=} o(1) \Leftrightarrow f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{=} o(x-a) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

□

Corollaire 18.39 (Équivalents usuels en 0) :

1. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ *et donc* $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ *et donc* $\ln(1+x) \underset{x\to a}{\sim} x$
4. *pour* $\alpha \in \mathbf{R}$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ *et donc* $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
5. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
7. $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
8. $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
9. $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x + o(x)$, *donc* $\operatorname{Arccos}(x) - \dfrac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x$
10. $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
11. $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, *donc* $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Démonstration. Il s'agit à chaque fois d'appliquer la formule de Taylor. □

Remarque. Notons que l'équivalent de $(1+x)^\alpha - 1$ donne en particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$.
Et que pour $\alpha = -1$, on retrouve celui de $\frac{1}{1+x}$.

Corollaire 18.40 :

1. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *donc* $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
2. $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ *donc* $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Démonstration. $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o\left(x^2\right).$$

La seconde se prouve de la même manière à l'aide de $\operatorname{ch}(x) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(2x)$. □

Exemples 18.41

- $$\frac{e^{1/x} - e^{1/x^2}}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)) - 1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}.$$
- Un calcul de limite :
$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$.
Commençons par noter que $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc
$$\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
D'autre part, on a
$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$
Et par conséquent
$$\frac{\ln\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Astuce

Voici une astuce qui nous servira tout le temps : on connait le comportement de $\ln(1+x)$ lorsque $x \to 0$. Autrement dit, nous avons des informations sur $\ln(x)$, lorsque x est au voisinage de 1.
Lorsqu'on est confrontés au ln d'une quantité qui tend vers 1, il n'est pa rare de devoir utiliser cette astuce : ajouter 1 et retrancher 1, pour faire apparaître 1 plus une quantité qui tend vers 0.

L'astuce utilisée pour le logarithme se généralise sous la forme suivante :

Proposition 18.42 : $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.

Démonstration. Donnons-en deux démonstrations :

- $\ln(x) = \ln(1+(x-1))$, avec $x-1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, et donc $\ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.
- si on applique la formule de Taylor à la fonction ln, qui est dérivable en 1,

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} \ln(1) + \ln'(1)(x-1) + o(x-1) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{1}(x-1) + o(x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1.$$

□

18.4 Domination

Définition 18.43 – ▸ Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ si il existe une constante K telle que, pour n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant K|v_n|$.
▸ Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a, on dit que f est **dominée** par g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si il existe une constante K et un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, |f(x)| \leqslant K|g(x)|$.

Nous ne traitons ici que le cas des fonctions, mais tous ces résultats restent valables sur les suites. La proposition suivante ne pose aucune difficulté.

Exemple 18.44

Un exemple dérangeant au premier abord est le suivant : si $u_n = n^2 + n$ et $v_n = 2n^2$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
Mais par ailleurs, pour $v_n \leqslant 2u_n$, et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

Proposition 18.45 : *Pour une fonction g qui ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si et seulement si $\dfrac{f}{g}$ est bornée **au voisinage de** a.*

Notons que $f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ est équivalent au fait que f soit bornée au voisinage de a.
Bien entendu, pour une suite, il n'est plus nécessairement de dire «pour n suffisamment grand», puisqu'une suite bornée au voisinage de $+\infty$ est bornée (sur $\mathbf{N}$ tout entier).

Toutes les règles de calcul vues avec les o (proposition 18.7) restent valables en les remplaçant par des O.
Ajoutons deux petits résultats :

Proposition 18.46 : *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Soit $K \geqslant 0$ tel que pour n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant K|v_n|$.
Alors $K|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

□

Proposition 18.47 : *S'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$ ou si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.*

Démonstration. Dans les deux cas, on a $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ convergente (dans un cas vers λ, dans l'autre vers 0), et donc bornée. □

Remarque. Plus généralement, toute suite équivalente à un multiple de (u_n) est dominée par (u_n).
Donc cette proposition nous dit que l'ensemble des suites dominées par une suite donnée est très vaste : il contient déjà toutes les suites dominées par (u_n) ou équivalentes à un multiple de (u_n).
Nous verrons en TD que ce ne sont pas les seules.

18.5 EXTENSION AUX SUITES/FONCTIONS COMPLEXES

Toutes les définitions données ci-dessus restent valables sans rien changer[15] pour des suites ou des fonctions à valeurs complexes.
On a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o(|v_n|)$ et de même $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{=} O(|v_n|)$.
Le principal avantage de ces propositions est qu'elles nous ramènent au cas réel.
En revanche, pour les équivalents, on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
En réalité, on a bien l'implication $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$, c'est la réciproque qui est fausse.

[15] Si ce n'est les valeurs absolues en modules.

Pas de surprise
Cette réciproque était déjà fausse pour les suites réelles, puisqu'on n'a pas $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n$.

Plus dangereux est le fait suivant : contrairement à ce qui se produit pour les limites, on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $\operatorname{Re} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{Re} v_n$ et $\operatorname{Im} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{Im} v_n$.
Par exemple, pour $u_n = n^2 - ni$ et $v_n = n^2 + ni$, on a $in \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^2 + o(n^2)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.
Et de même, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors que les parties imaginaires de u_n et v_n ne sont pas équivalentes.

Je vous laisse bien entendu le soin de retranscrire tout ça pour des fonctions à valeurs complexes.

EXERCICES DU CHAPITRE 18

▶ Comparaison des suites

EXERCICE 18.1 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ PD

EXERCICE 18.2 Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. AD

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) En déduire un équivalent simple de (u_n).

EXERCICE 18.3 Classer les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante : PD

- $\frac{1}{n}$
- $\frac{\ln n}{n}$
- $n\ln(n)$
- $\frac{2}{\sqrt{n}}$
- n^2+1
- n^3+n
- $e^n\sqrt{n}$
- $e^{-n}n^2$
- $\frac{n!}{n^4}$
- $\frac{1}{n\ln n}$

EXERCICE 18.4 Simplifier autant que possible les expressions suivantes : PD

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o\left(e^{-n}\right) - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

2) $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

3) $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n\ln(n)\sqrt{n} + o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$.

EXERCICE 18.5 Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$. PD

EXERCICE 18.6 Déterminer les limites des suites suivantes : PD

1) $u_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$

2) $u_n = \dfrac{2^n \sin n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$

3) $u_n = \sqrt[n]{n}$

4) $u_n = \dfrac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n}$

5) $u_n = \left(1 + \sin\left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1}\right)\right)^{n^2-n}$

6) $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)}$

7) $u_n = \dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(n))}{\operatorname{sh}(\operatorname{ch}(2n))}$

EXERCICE 18.7 Déterminer les limites des suites suivantes : AD

1) $u_n = \dfrac{n\sin n}{1+n^2}$

2) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

3) $u_n = n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$

4) $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

5) $u_n = \dfrac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}+\ln(n)}$

EXERCICE 18.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ et telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. PD
Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

EXERCICE 18.9 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}$.

EXERCICE 18.10 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à termes strictement positifs, et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Que dire de (v_n) ? F

EXERCICE 18.11 Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses : PD

1) Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.

2) Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.

3) Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0.

4) Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$, alors (v_n) converge.

5) Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n^4}{2}\right)$.

6) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors :

☐ $\ln(u_n) = o(n)$ ☐ $\ln(u_n) = o(u_n)$ ☐ $\ln(n) = o(u_n)$

7) Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

8) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2v_n$ ☐ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$

☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$

9) Soit (u_n) une suite strictement positive. Laquelle des situations suivantes est équivalente au fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$?

☐ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ ☐ $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (a) $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$ (b) $\frac{u_n}{2^n} - 1 = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

EXERCICE 18.12 Déterminer des équivalents des suites suivantes : **AD**

1) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

2) $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}} - 1$

3) $e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$

4) $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}}$

5) $\binom{n}{k}$, où $k \in \mathbf{N}$ est fixé.

6) $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$

7) $\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$

8) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n}$

9) $\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$.

EXERCICE 18.13 Développement asymptotique d'une suite définie implicitement **AD**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n.

2) Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

3) Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

EXERCICE 18.14 Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ mais qu'on n'aie ni $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ni $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$. **PD**

EXERCICE 18.15 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbf{R}[X]$. **AD**

1) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$ assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

2) Prouver alors successivement :

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,\ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n,\ b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2,\ a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

EXERCICE 18.16 (Oral Polytechnique) **TD**

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Déterminer un équivalent de (u_n).

▸ Comparaison des fonctions

EXERCICE 18.17 Du calcul, rien que du calcul **AD**

Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan x}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$
3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2}$
6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x - e^x}$
7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}}$
8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$.

Exercice 18.18 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes : AD

1) $\dfrac{\cos x}{1+x} - 1$ en 0
2) $(x+1)^x - x^x$ en $+\infty$.
3) $x^2\ln(1+x) + x\cos x$ en $+\infty$
4) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\operatorname{Arctan}(x^3)}$ en 0
5) $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}$ en 0
6) $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ en 1
7) $\dfrac{xe^x - x^2}{\operatorname{ch}(x)}$ en $+\infty$
8) $\dfrac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1}$ en 0
9) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$ en 0

Exercice 18.19 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on déterminera au voisinage de $+\infty$. AD

Exercice 18.20 Soit $f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$. PD

1) Prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln x}$.
2) En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln(x)$.
3) Soit $g(x) = \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 18

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.1

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-1} k! + n!$, il s'agit de prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Soit encore que $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

S'il est clair que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il n'est pas question de sommer ces limites, **qui ne sont pas en nombre fixé.**

Essayons plutôt d'encadrer la somme : on a, pour $n \geqslant 3$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} = 0$.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.2

1. Puisque (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ.
   Mais $u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ell + \ell = 0$, donc $\ell = 0$.

   Remarque
   On a sommé des limites, et pas des équivalents !

2. Par décroissance de (u_n), on a $u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$.
   Mais $u_n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   Donc $n(u_n + u_{n-1}) \leqslant 2nu_n \leqslant n(u_n + u_{n+1})$, et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2nu_n = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.3

Notons $u_n \prec v_n$ pour signifier que $u_n = o(v_n)$.
On a alors

$$e^{-n}n^2 \prec \frac{1}{n\ln n} \prec \frac{1}{n} \prec \frac{\ln n}{n} \prec \frac{2}{\sqrt{n}} \prec n\ln n \prec n^2+1 \prec n^3+n \prec e^n\sqrt{n} \prec \frac{n!}{n^4}$$

⚠ Attention !
La notation n'est pas complètement judicieuse : la négligeabilité n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble des suites : elle n'est ni réflexive ni antisymétrique.

Les seules qui ne découlent pas directement du cours sont la première et la dernière.

On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, de sorte que $e^n n^2 = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.

Et pour la dernière, il s'agit de prouver que $\dfrac{e^n\sqrt{n}n^4}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, $e^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n!}{n^4}\right)$.

Il s'agit donc de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n n^4\sqrt{n}}{n!} = 0$.

Mais $\sqrt{n}n^4 = n^{9/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$.

Et donc $e^n\sqrt{n}n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{2n}\right)$.

Mais $e^{2n} = \left(e^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

D'où le résultat annoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.4

L'idée général est de «nettoyer» les termes inutiles : à partir du moment où une expression contient un $o(n)$, tous les termes négligeable devant n peuvent «rentrer» dans le $o(n)$.

1. Puisque tous les termes tendent vers 0, celui qui est prépondérant devant les autres est celui qui tend «le moins vite» vers 0.
En l'occurrence ici c'est $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Viennent ensuite $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, puis $\frac{1}{n}$, puis $\frac{-2}{n\sqrt{n}}$.
Et enfin, $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Nous pourrions aussi dire directement que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$
Toutefois c'est moins précis, par exemple car cela ne nous fournit pas la limite de $u_n + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ ou de $\sqrt{n}\left(u_n + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Sur le même principe,
$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Remarque
Garder le terme en $\frac{1}{n^2}$ est inutile puisqu'il «rentre» dans le $o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$ présent dès le départ.

3. Tous les termes sont des $o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\ \ln(\ln n)\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.5

On a $u_n = e^{n\ln(\sqrt{n})} + e^{\sqrt{n}\ln(n)} + e^{\frac{n}{2}\ln(n)} = 2e^{\frac{n}{2}\ln n} + e^{\sqrt{n}\ln(n)}$.
Mais
$$\frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{\frac{n}{2}\ln(n)}} = \exp\left(\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right)\ln(n)\right)$$
et $\sqrt{n} - \frac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2}$ si bien que
$$\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right)\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$
Et donc on en déduit par composition de limites que
$$\frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{\frac{n}{2}\ln(n)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{\frac{n}{2}\ln(n)}\right).$$
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2e^{\frac{n}{2}\ln(n)} + o\left(e^{\frac{n}{2}\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{\frac{n}{2}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.6

1. Puisque $(-1)^n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, il vient $2^n + (-1)^n = 2^n + \underset{n\to+\infty}{o}(2^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
De même, on a $3n + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. On a $|u_n| \leqslant \frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$.
Or, $n^5 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$ et donc $n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^n}{n}\right)$.
On en déduit que $n^4 + \frac{e^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.
Et alors $\frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n2^n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\frac{2}{e}\right)^n$.
Puisque $0 < \frac{2}{e} < 1$, les croissances comparées usuelles nous informent que $n \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{e}{2}\right)^n$ et donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$.
Par majoration, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Attention !
On a envie de dire (et on a raison) que e^n l'emporte sur n.
C'est vrai, au sens où $n = o(e^n)$.
En revanche, on n'en déduira pas que $\frac{e^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que le quotient $\frac{\frac{e^n}{n}}{e^n}$ vaut $\frac{1}{n}$, et ne tend donc pas vers 1.
Au moindre doute, revenez au quotient !

Alternative : pour ne pas s'embêter à trouver un équivalent du dénominateur, on peut tout simplement noter que $\frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \leqslant \frac{2^n}{\frac{e^n}{n}}$...

3. On a $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Or, par croissance comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 = 1$.

4. Puisque par croissances comparées, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, $n! + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.
De même, $3 < 4$ et donc $3^n \underset{n\to+\infty}{=} o(4^n)$, et donc $3^n + 4^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$.
On en déduit que $\dfrac{n!+\sqrt{n}}{3^n+4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{4^n}$, qui, par croissances comparées, tend vers$+\infty$.

5. Il s'agit de revenir à la forme exponentielle, pour se débarrasser de la forme indéterminée 1^∞.
On a donc $u_n = \exp\left((n^2-n)\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right)\right)$.
Déjà, $\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, de sorte que $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Donc $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\sin\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que

$$\ln\left(1+\sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Après multiplication par $n^2 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, on en déduit que

$$(n^2-n)\ln\left(1+\sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc par composition de limites[1], $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

[1] Et surtout pas par composition d'équivalents à gauche : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

6. Puisque $\frac{2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.
Et donc[2], $\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
Et donc enfin, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}$ de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.

[2] On peut passer à la racine dans des équivalents.

7. Au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ et donc $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
De même, $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
Et donc $\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\mathrm{sh}(n)}}{2}$ et $\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(2n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\mathrm{ch}(2n)}}{2}$.
On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\mathrm{sh}(n)}}{e^{\mathrm{ch}(2n)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\mathrm{sh}(n)-\mathrm{ch}(2n)}.$$

Mais $\mathrm{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{2}$ et $\mathrm{sh}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$, de sorte que $\mathrm{sh}(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{ch}(2n))$ et donc $\mathrm{sh}(n) - \mathrm{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par composition de limite[3], on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[3] $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.7

1. Puisque $|\sin n| \leqslant 1$, il vient $0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{n}{1+n^2}$. Mais $\frac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, le théorème des gendarmes, on a donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, il faut passer par la forme exponentielle :

$$u_n = e^{(n+2)\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}.$$

Or, $(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2(n+2)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$.
Alternative : si on ne voit pas que $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, il est possible de remarquer que

$\frac{n-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Et donc

$$\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1} - 1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n+1} - 1 = -\frac{2}{n+1}.$$

3. Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Et de même,

$$\cos\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Après multiplication par n^2, il vient

$$u_n = \underbrace{\frac{-2n^3 - n^2}{2n^2(n+1)^2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{o(1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. En revenant à la forme exponentielle, on a $u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$.

Or, puisque $\cos\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \cos\frac{1}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Et donc $n^2 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

5. On a $3n^2 + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$.

D'autre part, $\sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc $\ln(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n^2+2}\right)$.

On en déduit donc que $\sqrt{n^2+2} + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Par conséquent, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n^2}{n}$, donc $u_n \to +\infty$.

> **Détails**
> Puisque $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, on a
> $$o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
> et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul : $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

> **Détails**
> On a utilisé ici le fait que lorsque $u \to 1$,
> $\ln(u) = \ln(1+(u-1)) \sim u-1$.

> **Rédaction**
> Le fait que si $u_n \to \ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$ n'est vrai que si f est continue en ℓ. Il ne faut alors pas oublier de le mentionner.

> **Détails**
> $u_n \sim v_n$ si et seulement si
> $$u_n = v_n + o(v_n).$$

Solution de l'exercice 18.8

Puisque les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, elles sont strictement positives à partir d'un certain rang.

Et donc $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons alors $w_n = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}}v_n = \sqrt{u_n v_n}$, de sorte que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Et alors $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n v_n}} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Solution de l'exercice 18.9

Voici un cas où la formule de Stirling semble toute indiquée !

On a $(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}$.

Et de même, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)$.

Donc il vient

$$\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n+1)^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{3/2}n^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}.$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

Mais une fois de plus[4], on a

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right).$$

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

[4] Archi-classique !

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.10

Puisque tout est positif, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{w_n}{u_n}$.

Par le théorèmes des gendarmes, on a donc $\frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.11

1. Si $u_n = (2n+1)^2$, alors :

✗ $\underline{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)}$: en effet, $\frac{(2n-1)^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 0$.

✓ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3}$: voir ci-dessus.

✓ $\underline{u_n = o(n^4)}$: on a $u_n \sim 8n^3$ et donc $\frac{u_n}{n^4} \sim \frac{8n^3}{n^4} = \frac{8}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

✗ $\underline{u_n \sim n^3}$: les constantes ont leur importance dans les équivalents.
En effet, on a $\frac{u_n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 1$.

✓ $\underline{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n^4}{2}\right)}$: les constantes ne servent à rien dans les o : être négligeable devant n^4 est pareil qu'être négligeable devant $\frac{n^4}{2}$.

Détails
Pour s'en convaincre, on peut revenir au quotient : on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^4/2} = 0$$
si et seulement si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^4} = 0.$$

2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors :

✗ $\underline{\ln(u_n) = o(n)}$: par exemple, si $u_n = e^n$, alors $\ln(u_n) = n$, qui n'est évidemment pas négligeable devant n.

✓ $\underline{\ln(u_n) = o(u_n)}$: revenons à la définition d'un o : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ par composition de limites[5].

✗ $\underline{\ln(n) = o(u_n)}$: prendre par exemple $u_n = \ln(n)$.

[5] Il est bien connu que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

3. ✗ Par exemple, prenons $u_n = e^n$. Alors $u_{n+1} = e^{n+1} = e \times u_n$, de sorte que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \neq 1$, et donc $u_n \nsim u_{n+1}$.
Notons toutefois que pour une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$, le résultat est vrai car $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$.

En revanche
Si $\ell = 0$, le résultat est faux, comme le prouve $u_n = e^{-n}$.

4. Si $u_n \sim v_n$, alors :

✗ $\underline{u_n + 1 \sim v_n + 1}$: en effet, si $u_n = -1 + \frac{1}{n}$, et $v_n = -1$, alors $u_n \sim v_n$, mais pourtant $v_n + 1 = 0$ alors que $u_n + 1 \neq 0$, et donc $u_n \nsim v_n$.

✓ $\underline{2u_n \sim 2v_n}$: on a bien le droit de multiplier les équivalents. Et en particulier de les multiplier par une constante.

✗ $\underline{u_n - v_n \sim 0}$: prenons $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$ et $v_n = 1$. Alors $u_n \sim v_n$, et $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 0.

Équivalent à 0
Rappelons que seule la suite nulle est équivalent à 0.

✓ $\underline{-u_n \sim -v_n}$: comme précédemment, on peut multiplier les équivalents.

✓ $\underline{u_n v_n \sim u_n^2}$: on peut multiplier les équivalents.
Or, $u_n \sim v_n$ et $u_n \sim u_n$, donc par produit d'équivalents, $u_n v_n \sim u_n u_n = u_n^2$.

✗ $\underline{e^{u_n} \sim e^{v_n}}$: prenons $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Alors $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = \dfrac{e^n}{e^{n+1}} = \dfrac{1}{e} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$ et donc $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.

Quest. subsidiaire
Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \to 0$.

5. ✗ $\underline{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$
Par exemple si $u_n = n2^n$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, et pourtant $\dfrac{u_n}{2^n} = n$, de sorte que $u_n \not\sim 2^n$.

✗ $\underline{u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$: la condition donnée est suffisante, puisque si $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\dfrac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Toutefois, elle n'est pas nécessaire. Par exemple, si on pose $u_n = 2^n + n$, alors $u_n = 2^n + \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
Mais pourtant, $u_n - 2^n = n \not\to 0$.

✗ $\underline{\ln u_n \sim n\ln(2)}$: puisqu'on ne peut pas composer les équivalents, il n'est pas possible de passer à l'exponentielle pour en déduire que $u_n = e^u \sim e^{n\ln 2} = 2^n$.
Par exemple, si $u_n = 3\times 2^n$, alors $\ln u_n = \ln(3) + n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$, mais pourtant $u_n \not\sim 2^n$.

✓ $\underline{\dfrac{u_n}{2^n} - 1 = \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$
Ceci est équivalent à $\dfrac{u_n}{2^n} = 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Et donc, après multiplication par 2^n, à $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.12

1. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

2. Puisque $\tan\dfrac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$e^{\tan\frac{\pi}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}.$$

3. Notons que $\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, et que les seules informations dont nous disposons au sujet de e^x sont lorsque $x \to 0$.

Il s'agit alors d'écrire $e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}}$.
Cette fois, $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}+o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mais $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ de sorte que $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc $o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Et donc

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{n}} &= e^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}}-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}+o\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

4. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $\sqrt{n}-1 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$, et donc en divisant par n, $1-\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}} \leqslant 1$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}} = 1$, et donc $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Puisque d'autre part $n^3+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $\sqrt{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^3} = n^{3/2}$.

Et donc $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

5. On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Le numérateur est un polynôme de degré k en n, dont le coefficient dominant vaut 1.
Il est donc équivalent à n^k. Et par conséquent, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

6. On a $(n+1)^{1/n}-n^{1/n} = n^{1/n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}-1\right)$.

Mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

Puisque $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc $e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
D'autre part, il est facile, en revenant aux exponentielles, de prouver que $n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $(n+1)^{1/n}-n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

7. Notons que $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc il vient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8. On a $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\right)$.
Or, nous savons que $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u+\underset{u\to0}{o}(u)$. Donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(1-\frac{1}{3n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Plus généralement

Le même encadrement permet de prouver que pour toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$, $\lfloor u_n\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
En revanche, rien de tel ne reste valable pour des suites qui ne tendraient pas vers $+\infty$.

Méthode

La présence de factorielles ne doit pas vous faire automatiquement penser à Stirling, qui doit plutôt être un dernier recours, si aucune simplification ne peut être effectuée.

Détails

Il s'agit d'utiliser l'équivalent usuel

$$e^x-1 \underset{x\to0}{\sim} x.$$

Notons que pour l'utiliser, il était indispensable de commencer par s'assurer que la quantité dans l'exponentielle tend bien vers 0.

$$= \frac{5}{6n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{6n^2}.$$

Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{6n}$.

9. Commençons par noter que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n}{2^n}\right) = \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$.

Puisque $n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$.

On en déduit donc que

$$u_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.13

1. Il suffit de dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbf{R}_+^*$.
Elle y est strictement croissante[6], continue, et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$.

2. Notons que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$, et donc que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Par croissance de f_{n+1}, ceci implique que $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ.

Mais alors, on a $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1-u_n^5}{n}$.

Or la suite $(1-u_n^5)$ est convergente, donc bornée, et donc $\dfrac{1-u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et ainsi, $\ell = 0$.

Alternative : si la méthode ci-dessus a l'avantage de fonctionner avec beaucoup de suites semblables à celles-ci, mentionnons tout de même une méthode plus rapide.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5} + n\dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$.

Et donc par stricte croissance de f_n, $u_n < \dfrac{1}{n}$, si bien que $P \leqslant u_n < \dfrac{1}{n}$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Nous avons $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. C'est la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Mais alors, $u_n - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^6}$, et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.14

La première idée pour avoir une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et pas $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ serait de prendre une suite équivalente à (u_n), ou même à un multiple[7] de u_n. Mais dans ce cas, on aurait $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

L'énoncé veut donc nous faire dire qu'il existe davantage d'autres suites dominées par (v_n)...

Cherchons une solution avec (u_n) et (v_n) non nulles.

On veut donc $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ bornée mais qui ne tend pas vers 0, et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_n$ non bornée.

Il faut donc que $\dfrac{v_n}{u_n}$ puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, mais elle ne peut pas pour autant tendre vers $+\infty$, faute de quoi son inverse tendrait vers 0.

Nous connaissons de telles suites, par exemple $w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

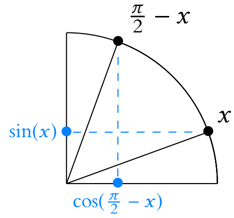
Donc posons $u_n = 1$ et $v_n = u_n w_n = w_n$, de sorte que $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{w_n}$ qui est bornée par 1 (et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$) et $\dfrac{v_n}{u_n} = w_n$ qui est non bornée puisque $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte qu'on n'a pas $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

Trigo

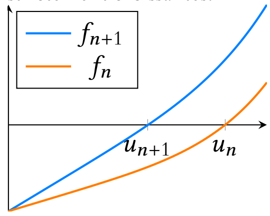
Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

peut se retrouver sur un dessin



[6] Inutile de dériver : c'est une somme de fonctions strictement croissantes.



f_{n+1} est au dessus de f_n, donc coupe l'ax des abscisses plus tôt

Rappel

$u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

[7] Non nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.15

1. On peut s'en tirer avec un tableau de variation et le théorème de la bijection.
Plus simplement, notons que pour $n \geqslant 4$ (condition nécessaire pour avoir $3 < \frac{2n+1}{3}$), on a $P_n(0) = -1$, $P_n(1) = n-1 > 0$, $P_n(3) = 11 - 3n < 0$ et

$$P_n\left(\frac{2n+1}{3}\right) = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^3 - (n+2)\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 + (2n+1)\frac{2n+1}{3} - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9}\left(\frac{2n+1}{3} - (n+2) + 3\right) - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9}\frac{4-n}{3} - 1 < 0.$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$.
Donc par applications du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine de P dans $]0,1[$, une dans $]1,3[$ et une dans $]\frac{2n+1}{3}, +\infty[$.
Notons que ce sont les seules[8] puisque nous avons là trois racines pour un polynôme de degré 3.

[8] Et donc qu'il n'y a pas ambiguïté sur ce qu'on note a_n, b_n, c_n.

2. Il s'agit à présent d'utiliser les relations racines coefficients. En effet, celles-ci nous disent que

$$a_n + b_n + c_n = n+2,\ a_nb_n + a_nc_n + b_nc_n = 2n+1,\ a_nb_nc_n = 1.$$

Puisque $c_n \geqslant \frac{2n+1}{3}$, on a tout de suite $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Alors $a_n = \dfrac{1}{b_nc_n}$, avec $2c_n \leqslant b_nc_n \leqslant 3c_n$, donc $b_nc_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque (a_n) et (b_n) sont bornées, elles sont négligeables devant (c_n).
Et donc $a_n + b_n + c_n \underset{n\to+\infty}{=} c_n + o(c_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$.
Puisque par ailleurs, $a_n + b_n + c_n = n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on en déduit que $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Par ailleurs, par la seconde relation racines-coefficients, $b_n = \dfrac{2n+1-a_nc_n}{b_n+c_n}$.
Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $a_nc_n \underset{n\to+\infty}{=} o(c_n) \underset{\to n}{=} +\infty o(n)$.
Et donc $2n+1-a_nc_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Par ailleurs, $a_n + c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$, et donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
Ceci prouve donc que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Enfin, grâce à la dernière relation $a_nb_nc_n = 1$, on a $a_n = \dfrac{1}{b_nc_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Détails
Puisque $c_n \sim n$, toute suite négligeable devant c_n est négligeable devant n (et vice-versa).

Rappel
Être équivalent à une constante non nul, c'est tendre vers cette constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.16

Il est évident que (u_n) est croissante. Si elle convergeait vers un réel ℓ, on aurait $\ell = \lim\limits_{n} +\infty\, u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n} = \ell + e^{-\ell}$ (par continuité de l'exponentielle).
Mais ceci est impossible, donc nécessairement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Posons alors $v_n = e^{u_n}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n + \frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

Puisque (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$, on a

$$v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} v_n\left(1 + \frac{1}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = v_n + 1 + o(1).$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Appliquons alors le théorème de sommation de Césaro[9]

$$\frac{(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + v_{n+1} - v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Soit encore $\dfrac{v_{n+1} - v_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que $\dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Puisque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a bien le droit de composer les équivalents par le logarithme : $u_n = \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

[9] Oui je sais, ce n'est pas explicitement au programme, mais tout le monde l'a fait un jour en TD, et c'est le genre de choses qu'il peut être bon de savoir pour l'X...

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.17

1. Aucune difficulté ici : $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, et donc par produit et quotient d'équivalents, $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

2. On a $\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)$.

Puisque $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\cos\dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Écrivons alors $\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right) = \ln\left(1+\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}-1\right)\right)$, avec $\cos\dfrac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a alors $\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\dfrac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\ln^2(x)}$.

Et donc $x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{2\ln(x)^2}$.

Par croissances comparées, ceci tend vers $-\infty$, et donc $\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> **Astuce**
> Voici une astuce qui sert très souvent : on connaît un équivalent de $\ln(1+x)$ quand x tend vers 0.
> Donc pour $\ln(x)$, avec $x \to 1$, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(1+(x-1))$, et alors $x-1 \to 0$, donc l'équivalent précité fonctionne.

3. On a $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{1+(1-x^2)}$ avec $1-x^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\sqrt{2-x^2} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1-x^2}{2} \underset{x\to 1}{\sim} 1-x$.

Puisque d'autre par, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, on en déduit, par quotient d'équivalents que

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1-x}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} -1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -1.$$

4. Commençons par noter que $\sqrt[3]{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3} = x$ et de même $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Donc nous pouvons factoriser par x, le terme «prépondérant».
Il vient alors

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{2x^2}\right) = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Après multiplication par x, on en vient donc à

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

5. On a $\cos(2x) - \cos(5x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{4x^2}{2} - 1 + \dfrac{25x^2}{2} + o(x^2)$ et donc

$$\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{21}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{21}{2}.$$

6. On a $\ln(1+x) - \sqrt{1+x} + 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x) - 1 - \dfrac{1}{2}x + o(x) + 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.
De même,

$$\cos x - e^x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - o(x) \underset{x\to 0}{=} -x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

Et donc $\dfrac{\ln(1+x) - \sqrt{1+x} + 1}{\cos x - e^x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.

7. On a $\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right)\right)$.

Mais $\ln(e+x) = 1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)$, avec $\ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\ln\left(\ln(e+x)\right) = \ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{e}$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{x}{e} = \frac{1}{e} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle[10], $\lim\limits_{x\to 0}\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1/e}$.

[10] Toujours nécessaire pour composer des limites.

8. On a $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)\right)$.

Mais $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1+\frac{2x}{x^2-x+1}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-x+1} = 0$.

Et donc $\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

On en déduit que $x\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.18

1. On a

$$\frac{\cos x}{1+x}-1 = \frac{\cos x - 1 - x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

2. On a $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right)$.

Mais $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e-1$.

Et donc $(x+1)^x - x^x \underset{x\to+\infty}{\sim} (e-1)x^x$.

3. Puisque $x\cos x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2\ln(1+x))$, on a $x^2\ln(1+x)+x\cos x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(1+x)$.

Et de plus, $1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc[11] $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc $x^2\ln(1+x)+x\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(x)$.

[11] On a le droit de composer à gauche les équivalents par le ln si les fonctions tendent vers $+\infty$.

4. On a $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\tan x \operatorname{Arctan}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ de sorte que

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\operatorname{Arctan}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^3\sqrt{x}}.$$

5. Une fois de plus, écrivons

$$\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1\right)\right) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1 = 0.$$

Alors $\ln\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1$.

Mais $1+\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 2+\frac{x^2}{2}+o(x)$, donc

$$\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}.$$

Et donc $\ln\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$.

6. On a $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.

Et $1-x^2 = (1-x)(1+x)$.

Et donc $\frac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{x+1} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{2}$.

7. Puisque $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et que $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
D'autre part, $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(xe^x)$ donc $xe^x - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^x$.
Et donc, par quotient $\dfrac{xe^x - x^2}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\frac{e^x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

8. Puisque $x - x\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\tan(x - x\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x - x\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{2}$.
D'autre part, $\sin x + \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x) - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Et donc $\dfrac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

9. Commençons par une identité remarquable :

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 = \left(\ln(1+x) + \ln(1-x)\right)\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right).$$

Or, $\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$.
Et d'autre part, $\ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x + o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.
Et donc, par produit d'équivalents,

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3.$$

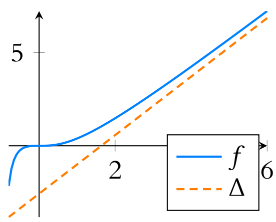
Solution de l'exercice 18.19

Et donc ?
Si une telle asymptote existe, elle a pour coefficient directeur $\frac{\pi}{2}$.

On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2}{x^2+x}\operatorname{Arctan} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.
De plus, on a

Rappel
Pour $x > 0$,
$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{\pi}{2}x &= \frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}x \\
&= \frac{x^2}{x+1}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{x^2}{x+1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{\pi}{2}x \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}\frac{-x}{x+1} - \frac{x}{1+x} + o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} -\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{x}{x+1} + o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x+1}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$



Et donc la droite Δ d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2} - 1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

Solution de l'exercice 18.20

1. Lorsque $x \to +\infty$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, de sorte que

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$.
Après multiplication par x, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.

2. En particulier, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$e^{f(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Et donc $\lim\limits_{x+\infty} \left(e^{f(x)} - 1\right)\ln(x) = 1$.

3. Par définition, on a

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 = \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) - 1.$$

Mais $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.
Et donc $g(x) = \ln(x)\left(e^{f(x)} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

19 Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne soit $\mathbf{R}$ soit $\mathbf{C}$, mais tous les résultats annoncés restent valables pour un corps quelconque.
Les éléments de $\mathbf{K}$ seront appelés les **scalaires.**

19.1 Structure d'espace vectoriel

19.1.1 Définition

Définition 19.1 – Soit E un ensemble. On dit que E est un **K-espace vectoriel** (ou un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$) s'il est muni de deux opérations notées $+ : \left| \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$ (loi de composition interne) et $\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$ (appelée loi de composition externe) telles que :

1. $(E,+)$ soit un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0_E et est appelé **le vecteur nul** de E.
2. $\forall x\in E,\ 1\cdot x = x$
3. $\forall \lambda\in\mathbf{K},\ \forall (x,y)\in E^2,\ \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y$
4. $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$
5. $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

Les éléments de E sont alors appelés des **vecteurs.**

Remarque

Ce simple point requiert en fait la vérification de 4 axiomes (associativité, commutativité, élément neutre, existence d'un inverse).

Exemples 19.2

- $\mathbf{K}$ lui-même est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de sa somme et de son produit[1].
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbf{K}[X]$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, de même que $\mathbf{K}_n[X]$.

[1] Qui peut donc être vu soit comme une loi de composition interne, soit comme une loi de composition externe.

Proposition 19.3 : *Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A est un ensemble quelconque, alors sur $\mathcal{F}(A,E)$, on définit une loi de composition interne $+$ et une loi de composition externe $\cdot$ en posant*

$$\forall (f,g)\in\mathcal{F}(A,E)^2,\ f+g : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

et

$$\forall f\in\mathcal{F}(A,E),\ \forall\lambda\in\mathbf{K},\ \lambda\cdot f : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array} \right. .$$

Alors, muni de ces lois, $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est la fonction nulle.

Démonstration. On sait déjà qu'il s'agit d'un groupe abélien[2], d'élément neutre la fonction nulle.
Il suffit donc de prouver que la multiplication externe vérifie bien les points 2 à 5 ci-dessus. C'est assez évident vu qu'ils sont vérifiés dans E.
Prouvons par exemple les deux premiers : soit $f\in\mathcal{F}(A,E)$.

[2] Cf ce qui a été fait dans le cas des fonctions sur un anneau.

Alors pour tout $x \in A$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, donc $1 \cdot f = f$. Donc 2) est vérifié.
Soient $f, g \in \mathscr{F}(A, E)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors pour tout $x \in A$, on a

$$(\lambda \cdot (f+g))(x) = \lambda \cdot (f+g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + (x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $\lambda \cdot (f+g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$.
Donc 3) est vérifié. Etc. □

Proposition 19.4 : *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $E \times F$, muni des opérations $(e_1, y_1) + (e_2, y_2) = (e_1 + e_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ est encore un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé[3] que $(E \times F, +)$ est un groupe abélien, dont le vecteur nul est $(0_E, 0_F)$.
Soit $(x, y) \in E \times F$. Alors $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.
Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et soient $(e_1, y_1), (e_2, y_2) \in E \times F$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((e_1, y_1) + (e_2, y_2)) &= \lambda \cdot (e_1 + e_2, y_1 + y_2) = (\lambda \cdot (e_1 + e_2), \lambda \cdot (y_1 + y_2)) = (\lambda \cdot e_1 + \lambda \cdot e_2, \lambda \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2) \\ &= (\lambda \cdot e_1, \lambda \cdot y_1) + (\lambda \cdot e_2, \lambda \cdot y_2) = \lambda \cdot (e_1, y_1) + \lambda \cdot (e_2, y_2).\end{aligned}$$

Les deux autres points se prouvent de la même manière, en exploitant le fait qu'ils soient vrais dans E et dans F. □

[3] Cf le produit direct de deux groupes.

Ceci se généralise bien entendu au produit de n espaces vectoriels.
En particulier, $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.

Remarque
On note bien 0 : le scalaire nul, à ne pas confondre avec 0_E, le vecteur nul.
0 est dans $\mathbf{K}$, 0_E est dans E.

Proposition 19.5 (Règles de calcul dans un espace vectoriel) :
► *Pour $(\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E$, on a $\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0$ **ou** $x = 0_E)$.*
► *Pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$. Autrement dit, $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x : $(-1) \cdot x + x = 0_E$.*

Démonstration. ► On a déjà $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, et donc[4] $0 \cdot x = 0_E$.
De même, pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$, et donc $\lambda \cdot 0_E$.
Enfin, si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors $x = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) \cdot x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = 1 \cdot 0_E = 0_E$.

► $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$.
Et donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x. □

[4] On peut simplifier par $0 \cdot x$: tout élément d'un groupe est régulier.

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention explicite du contraire, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

19.1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 19.6 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit F une partie de E.
On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si :

1. F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
2. F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda \cdot x \in F$
3. muni des lois induites $+$ et $\cdot$, F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Proposition 19.7 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) : *Une partie F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

i) $0_E \in F$

ii) *F est stable par combinaison linéaire[5] : $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + y \in F$.*

[5] La définition précise de combinaison linéaire viendra en temps voulu, pour l'instant c'est un package «stable par combinaison linéaire».

Démonstration. Si F est un sous-espace vectoriel, alors $0_E \in F$ puisqu'il s'agit d'un sous-groupe. Et pour $(x, y) \in F^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\lambda x \in F$ puisque $x \in F$ et que F est stable par la multiplication externe.
Ensuite, F étant stable par somme, $\lambda x + y \in F$.

Inversement, supposons que F contienne le vecteur nul et soit stable par combinaison linéaire.
Alors , en prenant $\lambda = 1$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$, donc F est stable par $+$.
Et en prenant $y = 0_E$, alors $\forall x \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot x + 0_E = \lambda \cdot x \in F$.
Puisqu'en particulier, pour tout $(x, y) \in F^2$, on a $(-1) \cdot x + y = y - x \in F$, alors F est un sous-groupe abélien de E.
Et alors les quatre derniers points sont évidents, puisqu'ils découlent directement du fait que E soit un espace vectoriel.
Par exemple, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$. □

Exemples 19.8

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$.
- L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Remarques. ► Vous trouverez parfois la condition $0_E \in F$ remplacée par $F \neq \emptyset$.
C'est équivalent car si $0_E \in F$, alors $F \neq \emptyset$. Et inversement s'il existe $u \in F$, alors en prenant $\lambda = -1$ et $x = y = u$ dans le point 2), il vient $-u = u = 0_E \in F$.
► De même, il se peut que vous croisiez la stabilité par combinaison linéaire sous la forme suivante :

$$2') \qquad \forall(x, y) \in F^2,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F.$$

Déjà $2') \Rightarrow 2)$, puisqu'il suffit de prendre $\mu = 1$.
Inversement, supposons 2) vrai, et soient $(x, y) \in F^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Alors $\mu \cdot y + 0_E \in F$, et donc $\lambda \cdot x + (\mu \cdot y) \in F$. Donc $2) \Rightarrow 2')$.

Proposition 19.9 : *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.
Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Puisque 0_E est dans tout sous-espace vectoriel, il est dans $\bigcap_{i \in I} F_i$.

Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, pour tout $i \in I$, puisque F_i est stable par combinaison linéaire, $\lambda \cdot \underbrace{x}_{\in F_i} + \underbrace{y}_{\in F_i} \in F_i$.

Et donc $\lambda \cdot x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
Donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarques. ► Notons que ceci vaut en particulier pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels, ou de $n \in \mathbf{N}^*$ sous-espaces vectoriels.
► En revanche, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est que rarement un sous-espace vectoriel. Ce n'est pas une grande surprise, puisque nous avons déjà prouvé en TD qu'une union de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un est inclus dans l'autre[6].

[6] Et le même résultat reste valable pour des sous-espaces vectoriels.

19.2 FAMILLES DE VECTEURS

19.2.1 Combinaisons linéaires, sous-espace engendré par une partie

Définition 19.10 – Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de** $(e_1, \ldots, e_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On note alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, \ldots, e_n$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}.$$

Remarque. Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille, puisque quels que soient $e_1, \ldots, e_n \in E^n$, $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$.

Exemple 19.11

► Dans $\mathbf{R}^4$, considérons la famille de deux vecteurs $u = (1, 2, -1, 3)$ et $v = (4, 1, 0, 1)$.
Alors $(-10, 1, -2, 3)$ est combinaison linéaire de (x, y) puisque

$$(-10, 1, -2, 3) = 2 \cdot (1, 2, -1, 3) - 3 \cdot (4, 1, 0, 1).$$

En revanche, $(1, 0, 1, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de u et v.
En effet, $(1, 0, 1, 2)$ est combinaison linéaire de u et v si et seulement si

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ (1, 0, 1, 2) = \lambda u + v \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2,\ \begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 1 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

donc si et seulement si le système $\begin{cases} \lambda + 4\mu = 1 \\ \lambda = -1 \\ \mu = 2 \\ 3\lambda + \mu = 2 \end{cases}$ possède des solutions. Ce qui n'est pas le cas.

► Tout polynôme de $\mathbf{C}_n[X]$ est combinaison linéaire des $(X+1)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. En effet, par la formule de Taylor,

$$\forall P \in \mathbf{C}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{P^{(k)}(-1)}{k!}}_{\in \mathbf{C}} (X+1)^k.$$

Proposition 19.12 :

1. *$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient $e_1, \ldots, e_n$.*
2. *$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est le plus petit, au sens de l'inclusion, sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i : si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in F$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \subset F$.*

On dit alors que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est le ***sous-espace vectoriel engendré par*** *$e_1, \ldots, e_n$.*

Démonstration. 1. Le vecteur nul 0_E est bien dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ car

$$0_E = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_n.$$

Soient $x, y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.
Et alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il contient tous les e_i puisque $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_{i-1} + 1 \cdot e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \cdots + 0 \cdot e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient les e_i, et soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

   Alors, par stabilité de F par combinaison linéaire,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{e_i}_{\in F} \in F.$$

   Donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset F$.

□

Proposition 19.13 :

1. *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille de vecteurs de* E*, alors pour tout* $m \leqslant n$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
2. *Si* $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$*, alors* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Autrement dit
Si on prend moins de vecteurs, l'espace engendré est plus petit, et enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.

Démonstration. 1. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.
Donc il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$.

2. Par le point précédent, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Mais $e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc tous les e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.
Et donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est un sous-espace vectoriel qui contient $e_1, \dots, e_n$: il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Et donc par double inclusion, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

□

Exemple 19.14

Revenons sur le dernier point, et considérons la famille de vecteurs de $\mathbf{R}^3$
$u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (3, 1, 4)$, $u_3 = (1, -3, 6)$.
Alors $u_3 = -2 \cdot u_1 + u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
Cela se comprend bien car un vecteur $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ s'écrit encore

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3(-2u_1 + u_2) = (\lambda_1 - 2\lambda_3)u_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

19.2.2 Familles génératrices

Familles
On décrira souvent les familles de vecteurs de E comme des n-uplets d'éléments de E, mais en réalité, l'ordre est rarement important.

Définition 19.15 – Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est dite **génératrice de** E si $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.
Autrement dit, si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $(e_1, \dots, e_n)$.

Exemples 19.16

▶ La famille $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$.
En effet, si on note e_i le vecteur de $\mathbf{K}^n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, alors

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{K}^n,\ (x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i.$$

Et donc tout vecteur de $\mathbf{K}^n$ est combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_n)$.
▶ Si M est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ alors il existe $(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$ tels que

$$M=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Comb. lin.
Remarquons que nous avons là une combinaison linéaire.

Et donc l'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$ des matrices symétriques est inclus dans $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
L'inclusion réciproque est évidente puisque $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel contenant ces trois matrices.
Donc $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbf{K})$.
▶ La famille $(1,X,\dots,X^n)$ est génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

Notons que trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est écrire F sous forme de Vect. Ce qui permet de prouver à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel[7] et d'en déterminer une famille génératrice.

[7] Si cela n'a pas déjà été fait avant.

Exemples 19.17

▶ Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x-2y+3z=0\}$.
Soit alors $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F&\Leftrightarrow x-2y+3z=0\\&\Leftrightarrow x=2y-3z\\&\Leftrightarrow (x,y,z)=(2y-3z,y,z)\\&\Leftrightarrow (x,y,z)=y\cdot(2,1,0)+z\cdot(-3,0,1)\\&\Leftrightarrow (x,y,z)\in\operatorname{Vect}((2,1,0),(-3,0,1)).\end{aligned}$$

Donc $F=\operatorname{Vect}((2,1,0),(-3,0,1))$. Ceci prouve à la fois que F est un sous-espace vectoriel[8] de $\mathbf{R}^3$, et qu'il est engendré par la famille de deux vecteurs $(2,1,0),(-3,0,1)$.

[8] Comme tout Vect.

▶ Soit $F=\{P\in\mathbf{R}_2[X]\mid P-(X+1)P'=0\}$.
Pour $P=aX^2+bX+c\in\mathbf{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned}P\in F&\Leftrightarrow P-(X+1)P'=0\\&\Leftrightarrow aX^2+bX+c-(X+1)(2aX+b)=0\\&\Leftrightarrow -aX^2+-2aX+(c-b)=0\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=b\end{cases}\\&\Leftrightarrow P=bX+b=b(X+1)\\&\Leftrightarrow P\in\operatorname{Vect}(X+1).\end{aligned}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ainsi, $F=\operatorname{Vect}(X+1)$, ce qui prouve à la fois que F est[9] un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, mais en plus que la famille formée du seul polynôme $X+1$ en est une famille génératrice.

[9] Comme tout Vect.

Définition 19.18 – Un sous-espace vectoriel D de E engendré par un seul vecteur non nul, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $D = \text{Vect}(x)$, est appelé une **droite** (vectorielle).

Exemple 19.19

Dans $\mathbf{R}[X]$, considérons $F = \text{Vect}((1,1),(-1,-1))$.
A priori, il ne s'agit pas d'une droite, puisqu'engendré par deux vecteurs.
Mais $(-1,-1) = -1\cdot(1,1)$, de sorte que $F = \text{Vect}((1,1))$, qui est doc bien une droite.

19.2.3 Familles libres

Définition 19.20 – Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est **libre**, ou encore que $e_1,\dots,e_n$ sont **linéairement indépendants** si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i\cdot e_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.$$

Remarque. En fait, lorsqu'elle est vérifiée, l'implication ci-dessus est une équivalence puisque si les λ_i sont tous nuls, alors on a toujours[10] $\sum_{i=1}^n \lambda_i\cdot e_i = 0_E$.

[10] Que la famille soit libre ou non.

Exemples 19.21

► Dans $\mathbf{R}_2[X]$, la famille $(P_1,P_2,P_3) = (X^2+X+1, X^2-1, X-2)$ est libre.
En effet, soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ trois réels tels que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2)X^2+(\lambda_1+\lambda_3)X+(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

Alors $\lambda_2=\lambda_3=-\lambda_1$, et donc la dernière équation est $4\lambda_1=0$, donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
► Dans $\mathbf{R}^2$, la famille $((2,1),(-1,3),(0,2))$ est liée.
En effet, $(2,1)+2(-1,3)-\frac{7}{2}(0,2)=(0,0)$ est une combinaison linéaire nulle dont tous les coefficients ne sont pas nuls.
► Une famille formée d'un seul vecteur non nul x est libre puisque $\lambda\cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$.

Définition 19.22 – Si $(e_1,\dots,e_n)$ n'est pas libre, on dit qu'il s'agit d'une **famille liée**, ou encore que $e_1,\dots,e_n$ sont linéairement dépendants.

Proposition 19.23 : *Une famille $(e_1,\dots,e_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres :*

$$\exists i\in[\![1,n]\!],\ \exists(\lambda_j)_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}},\ e_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \lambda_j\cdot e_j.$$

Démonstration. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est liée, alors il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i\cdot e_i = 0_E$.

Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$.
Alors $e_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \cdot e_j$.
Donc e_i est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$.

Et inversement, si $e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j$, alors $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \cdot e_j + (-1) \cdot e_i = 0_E$ est une combinaison linéaire nulle des e_k, à coefficients non tous nuls, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est liée. □

Définition 19.24 – Deux vecteur x et y sont dits **colinéaires** si la famille (x, y) est liée. Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbf{K},\ x = \lambda \cdot y \textbf{ ou } y = \lambda \cdot x.$$

> **Remarque**
> Si x et y sont non nuls, alors un tel λ est toujours non nul.

Proposition 19.25 : *Une famille contenue dans une famille libre est libre.*
Par contraposée, une famille qui contient une famille liée est liée.

Démonstration. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et prouver que pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(e_1, \dots, e_p)$ est encore libre.

Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i = 0_E$.

Alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p \cdot e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \cdots + 0 \cdot e_n = 0_E$.
Par définition d'une famille libre, on a donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
Et donc $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. □

Corollaire 19.26 – *Une famille qui contient le vecteur nul est liée.*

Démonstration. La famille formée du seul vecteur nul est liée, car $1 \cdot 0_E = 0_E$, avec $1 \neq 0$.
Donc toute famille contenant le vecteur nul est liée car contient la famille liée $\{0_E\}$. □

En pratique, il suffit de savoir étudier la liberté des familles finies, pour étudier la liberté des familles infinies, comme le montre la proposition suivante.

> **Remarque**
> Le point important ici est l'unicité, l'existence découle de la définition même d'un Vect.

Proposition 19.27 : *Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur de* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ *s'écrit de manière **unique** comme combinaison linéaire des e_i :*

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i).$$

Démonstration. Supposons $(e_1, \dots, e_n)$ libre, et soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)$ deux familles de scalaires telles que $\sum_{i=1} \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i$.

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot e_i = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \cdot e_i = 0_E.$$

Mais par définition d'une famille libre, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$.

Inversement, si tout vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i, en particulier, c'est le cas du vecteur nul : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = 0_E = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot e_i$$

alors par unicité de l'écriture, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. □

Autrement dit, les familles libres sont celles dans lesquelles le principe d'identification des coefficients d'une combinaison linéaire est valable.
L'exemple qui suit est souvent utile :

Proposition 19.28 : *Toute famille finie de $\mathbf{K}[X]$ formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.*

Démonstration. Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que $\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$ $(\star)$.
Alors, le terme de degré $\deg P_n$ est λ_n fois le coefficient dominant a_n de P_n, qui est non nul par définition.
Donc[11] $\lambda_n a_n = 0$, et donc $\lambda_n = 0$.
Mais alors le terme de degré $\deg P_{n-1}$ est λ_{n-1} fois le coefficient dominant de P_{n-1} qui est non nul. Donc $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche[12], on prouve que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. □

[11] Par identification des coefficients dans $(\star)$.

[12] Mon astuce préférée pour masquer une récurrence...

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux λ_i.
Alors les L_i sont tous de degré n. Pourtant il s'agit d'une famille libre de $\mathbf{K}_n[X]$.

En effet, soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i = 0_{\mathbf{K}[X]}$.
Alors en particulier, pour $j \in [\![0, n]\!]$, par évaluation en λ_j,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0.$$

Donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$: la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre.

19.2.4 Généralisation aux familles infinies

Définition 19.29 – Soit X une partie de E non vide. On peut supposer[13] que $X = \{e_i,\ i \in I\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit **combinaison linéaire de** X s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in X^n$ tels que x soit combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$.

[13] Cela revient à «numéroter» les éléments de X, ce qui est toujours possible, quitte à les numéroter par eux-mêmes...

Remarque
Une combinaison linéaire est donc toujours une somme d'un nombre **fini** de vecteurs.

Pourquoi veut-on des sommes finies ? Tout simplement parce qu'on ne sait pas ce que serait une somme infinie ! On pourra lui donner du sens par exemple dans $\mathbf{R}$, en utilisant des limites de sommes finies, mais dans un espace quelconque, ce n'est pas toujours possible. Par exemple dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, que serait une somme infinie de suites ?

Un moyen pratique de manipuler les combinaisons linéaires de X dans le cas où X est infini est la notion de famille presque nulle :

Définition 19.30 – Soit I un ensemble quelconque. Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires est dite **presque nulle**[14] si tous ses éléments, **sauf un nombre fini** sont nuls.
On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.
Ainsi, pour $X = \{e_i,\ i \in I\}$ partie de E, un vecteur $y \in E$ est combinaison linéaire de X si et seulement si il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telles que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

[14] On parle aussi parfois de famille à support fini.

Notation
Le fait d'écrire $X = \{e_i,\ i \in I\}$ est particulièrement pratique lorsque X est fini de cardinal n, où on peut alors prendre $I = [\![1, n]\!]$, et «numéroter» les éléments de X :

$$X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Exemple 19.31

Dans $\mathbf{K}[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire des éléments de $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.
En effet, un tel polynôme est dans l'un des $\mathbf{K}_n[X]$, et donc est combinaison linéaire de $1, X, \dots, X^n$, c'est-à-dire d'un nombre fini d'éléments de $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Définition 19.32 – Soit X une partie de E. On note alors $\mathrm{Vect}(X)$, et on appelle **sous-espace engendré par** X l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de X.

On a alors encore les résultats suivants :

Proposition 19.33 : *Pour toute partie non vide X de E, $\mathrm{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E.*
C'est même le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel qui contient X : si F est un sous-espace vectoriel de E avec $X \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset F$.

Démonstration. On a toujours $0_E \in \mathrm{Vect}(X)$, et si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot f_j$ sont deux combinaisons linéaires de X, alors pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$\alpha \cdot x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) \cdot e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \cdot e_j$$

est encore combinaison linéaire de X.
Donc $\mathrm{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire, et est un sous-espace vectoriel de E.
Il est trivial qu'il contient tous les éléments de X car pour $x \in X$, $x = 1 \cdot x \in \mathrm{Vect}(X)$.

Inversement, si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient x, soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i \in \mathrm{Vect}(X)$.
Alors $e_1, \dots, e_n$ sont dans F, et par stabilité de F par combinaison linéaire, $x \in F$.
Donc $\mathrm{Vect}(X) \subset F$. □

Proposition 19.34 :
1. *Si $X \subset Y$ sont deux parties de E, alors $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(Y)$.*
2. *Si $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\}) = \mathrm{Vect}(X)$.*

Intuition
On peut toujours enlever un vecteur combinaison linéaire des autres sans changer l'espace engendré.

Démonstration.
1. Toute combinaison linéaire d'éléments de X est en particulier combinaison linéaire d'éléments de Y.
2. On a toujours $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(X)$.
D'autre part, $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$ par hypothèse, et si $y \in X$ est différent de x, alors $y \in X \setminus \{x\}$, donc tout élément de X est dans $\mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$, de sorte que $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$.

□

Définition 19.35 – Une partie X est **génératrice de** E si $\mathrm{Vect}(X) = E$.

Exemple 19.36

La famille $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est génératrice de $\mathbf{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire[15] des X^k.

La notion de liberté se généralise également :

Définition 19.37 – Soit $X = \{e_i,\ i \in I\}$. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Une famille contenue dans une famille libre est toujours libre, et une famille qui contient le vecteur nul est toujours liée.

Proposition 19.38 : *Une famille infinie[16] $(e_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-famille finies sont libres.*

Démonstration. Prouvons plutôt[17] qu'une famille est liée si et seulement si elle possède une sous-famille finie liée.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est liée, alors il existe une combinaison linéaire, nécessairement finie, nulle à coefficients non tous nuls.
Et donc la sous-famille finie des vecteurs qui forment cette combinaison linéaire est liée (par la même relation de dépendance linéaire).

Inversement, s'il existe une sous-famille finie de $(e_i)_{i\in I}$ qui est liée, alors il existe une combinaison linéaire des vecteurs de cette sous-famille, nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc il existe une combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$, qui est nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc $(e_i)_{i\in I}$ est une famille liée. □

Exemple 19.39

Dans $\mathbf{K}[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre. En effet, toute sous-famille finie est formée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts, donc est libre.

19.2.5 Bases

Définition 19.40 – Une **base** de E est une famille qui est à la fois libre et génératrice de E.

Proposition 19.41 : *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit* ***de manière unique*** *comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$.*

Démonstration. L'existence vient de l'aspect générateur : $E = \mathrm{Vect}(e_i,\ i \in I)$, et l'unicité de la liberté. □

[15] Donc combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'entre eux.

[16] Le résultat reste vrai pour les familles finies, mais n'est d'aucun intérêt.

[17] Ce qui est équivalent.

Exemple 19.42

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés.
Alors nous avons prouvé que tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Nous serons surtout amenés à manipuler les bases finies[18]. Dans ce cas, on dispose de la notion suivante, qui nous permet de nous ramener à $\mathbf{K}^n$:

[18] L'existence d'une telle base n'est pas toujours vraie et fera l'objet d'un chapitre à part.

Définition 19.43 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
On dit alors que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Autant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs d'une famille n'influe pas sur le fait qu'elle soit libre ou génératrice, autant il est important lorsqu'on manipule une base, puisque les coordonnées dépendent de l'ordre dans laquelle on a ordonné les vecteurs de la base.

Exemples 19.44 **Bases canoniques**

- La famille $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{K}^n$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}^n$.**
En effet, nous avons déjà vu qu'elle est à la fois libre et génératrice.
- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.**
En effet, tout polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$.
- Plus généralement, la famille $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

⚠ «Canonique» veut dire standard, et désigne donc une base qui est sans doute un peu plus naturelle que les autres. Elles sont ainsi appelées par convention, et ce n'est pas vous qui décidez si une base est canonique ou non : les bases ci-dessus sont appelée bases canoniques, et ce sont les seules.
Pour un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas de raison qu'une base soit privilégiée par rapport à une autre et mérite le qualificatif de «canonique».
En particulier, je ne veux surtout pas voir de raisonnement du type : «soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{B}$ **une** base canonique».
Soit on est dans l'un des cas ci-dessus, et il y a **la** base canonique, et c'est celle-ci et aucune autre que l'on peut nommer ainsi, soit on est dans un espace quelconque et il y a[19] des bases, mais aucune n'est plus canonique que les autres.

[19] Ce qui sera prouvé plus tard.

19.3 SOMMES DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

19.3.1 Sommes de deux sous-espaces

Définition 19.45 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors **somme de** F **et** G, et on note $F + G$ la partie de E définie par :

$$F + G = \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}.$$

Donc par définition, tout vecteur de $F+G$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G.
En revanche, rien n'indique qu'une telle écriture soit unique.

Exemple 19.46

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons les deux sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x-y=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x+2z+y=0\}$.
Alors $(4,-2,0) \in F+G$ puisque

$$(4,-2,0) = \underbrace{(2,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(2,-4,1)}_{\in G} = \underbrace{(1,1,0)}_{\in F} + \underbrace{(3,-3,0)}_{\in G}.$$

Donc il s'écrit de deux[20] manières différentes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

[20] Au moins. On montrerait en fait qu'il y en a une infinité.

Proposition 19.47 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

1. *$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient à la fois F et G.*
2. *Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$, alors $F+G \subset H$.*

Autrement dit, $F+G$ est le plus petit[21] sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.

[21] Au sens de l'inclusion.

Démonstration.

1. Puisque $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, $0_E \in F+G$.

   Soient $x, y \in F+G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ et $(y_F, y_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$.
   Alors

   $$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G} \in F+G.$$

   Donc $F+G$ est stable par combinaisons linéaires, et donc est un sous-espace vectoriel de E.

   Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$.
   Donc $F \subset F+G$, et de même $G \subset F+G$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.
   Alors, $\forall (x,y) \in F \times G$, $\underbrace{x}_{\in H} + \underbrace{y}_{\in H} \in H$, et donc $F+G \subset H$.

□

Proposition 19.48 : *Soient X et Y deux parties de E. Alors* $\mathrm{Vect}(X \cup Y) = \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y)$.
Ainsi, si X est une famille génératrice de F et Y est une famille génératrice de G, alors $X \cup Y$ est une famille génératrice de la somme $F+G$.

Démonstration. Il est évident que $\mathrm{Vect}(X) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$ et $\mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, donc $\mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y) \subset \mathrm{Vect}(X \cup Y)$.
Inversement, si $x \in \mathrm{Vect}(X \cup Y)$, alors il existe $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_p \in Y$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i}_{\in \mathrm{Vect}(X)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \mu_k \cdot y_k}_{\in \mathrm{Vect}(Y)} \in \mathrm{Vect}(X) + \mathrm{Vect}(Y).$$

□

19.3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 19.49 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe** si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E.$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Notation
$F \oplus G$ n'est pas un nouvel objet : c'est le sous-espace vectoriel $F + G$. Mais la notation $F \oplus G$ nous donne une information supplémentaire : F et G sont en somme directe.

Exemple 19.50

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$, et soit $G = \operatorname{Vect}(I_n) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbf{R}\}$.
Alors F et G sont en somme directe. En effet, soit $M \in F$ et soit $N \in G$, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $N = \lambda I_n$. Alors

$$M + \lambda I_n = 0_n \Rightarrow \operatorname{tr}(M + \lambda I_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}(M) + \lambda \operatorname{tr}(I_n) = 0 \Rightarrow \lambda n = 0.$$

Et donc $\lambda = 0$, donc $N = 0_n$, et il vient donc $M + 0 \cdot I_n = 0_n \Leftrightarrow M = 0_n$.

Proposition 19.51 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :*

1. *F et G sont en somme directe*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$*
3. *tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que F et G soient en somme directe, et soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $-x \in G$. Or $x + (-x) = 0_E$, donc $x = -x = 0_E$. Et donc $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Soit $x \in F + G$, et supposons que $x = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$.
Alors $f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
Mais $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, donc $f_1 - f_2 \in F \cap G = \{0_E\}$ et donc $f_1 - f_2 = 0_E \Leftrightarrow f_1 = f_2$.
Et de même, $g_1 = g_2$.
Donc l'écriture de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

3) $\Rightarrow$ 1). Supposons unique l'écriture des vecteurs de $F + G$, et soient $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x + y = 0_E$.
Comme on a d'autre part $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, alors, par unicité de la décomposition de 0_E, $x = 0_E$ et $y = 0_E$.
Donc F et G sont en somme directe. □

19.3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 19.52 – Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires dans** E si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire s'ils sont en somme directe, et que leur somme est égale à E tout entier.

Proposition 19.53 : *Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G.*

Démonstration. L'existence d'une telle écriture est équivalente au fait que $E = F+G$, l'unicité est équivalente au fait que F et G soient en somme directe. □

Exemple 19.54

Pour l'instant, la proposition précédente est le meilleur outil dont nous disposions pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, et nécessite souvent des raisonnements par analyse-synthèse.
▶ Par exemple, nous savons déjà prouvé que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Cela signifie donc que les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ formés des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
▶ De même, nous avons prouvé que les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
▶ Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est non nul, alors $F = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid \deg Q < \deg P\}$ et $G = \{PQ, Q \in \mathbf{K}[X]\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{K}[X]$. En effet, c'est tout simplement la division euclidienne.

⚠ Si $E = F \oplus G$, on dit bien que G est **un** supplémentaire de F, mais jamais **le** supplémentaire de F, tout simplement car il n'y a pas unicité : il y a généralement[22] une infinité de supplémentaires de F.
Par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y\}$.
Soit alors $G = \text{Vect}(1, -1, 0)$.
Alors $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.
En effet, si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, supposons que $(x, y, z) = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v = \lambda(1, -1, 0)$, et u est de la forme $u = (a, a, b)$.
Alors $(x, y, z) = (a, a, b) + \lambda(1, -1, 0)$, de sorte que $b = z, x = a + \lambda, y = a - \lambda$.
Donc $a = \dfrac{x+y}{2}$, et donc $\lambda = \dfrac{x-y}{2}$.
Donc si une telle écriture $(x, y, z) = u + v$ existe, c'est

$$(x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)}_{\in F} + \underbrace{\frac{x-y}{2}(1, -1, 0)}_{\in G}.$$

Inversement, il est facile de vérifier que cette écriture convient, et qu'on a alors la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Mais on pourrait sur le même principe prouver que $G' = \text{Vect}(1, -2, 0)$ et $G'' = \text{Vect}(-2, 1, 0)$ sont des supplémentaires de F.

De manière générale, ne confondez surtout pas un supplémentaire avec le complémentaire : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel ne contient pas 0_E. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

[22] Sauf dans les cas $F = E$ et $F = \{0_E\}$.

Méthode
Notons que le raisonnement que nous venons de tenir n'est rien d'autre qu'une analyse-synthèse, qui est souvent un bon outil pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires.

19.3.4 Somme et somme directe de n sous-espaces

Définition 19.55 – Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle alors **somme de** $F_1, \dots, F_n$, et on note

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i,\ (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n \right\}.$$

On généralise alors sans difficultés les propriétés rencontrées dans le cas de deux sous-espaces vectoriels :

Proposition 19.56 :

1. *$\sum_{i=1}^{n} F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les F_i.*
2. *si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i est une partie génératrice (finie ou non) de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ est une partie génératrice de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.*

Définition 19.57 – La somme $F_1 + \cdots + F_n$ de n sous-espaces vectoriels est dite **directe** si

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots F_n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_E.$$

On note alors $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

⚠ Attention !
Toujours comme pour le cas de deux sous-espaces vectoriels, on ne définit pas ici de nouvel objet.

⚠ Contrairement aux sommes directes de deux sous-espaces vectoriels, on n'a pas de caractérisation facile de la somme directe de $n \geqslant 3$ sous-espaces vectoriels à l'aide d'une intersection.
En particulier, il ne suffit pas que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \{0_E\}$ ni que $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

Exemple 19.58

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $F_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$, $F_2 = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ et $F_3 = \mathrm{Vect}((0,1,0))$.
Alors $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ puisque si $x \in F_1 \cap F_2$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $x = \lambda_1(1,1,1) = \lambda_2(1,0,1)$.
Donc $\lambda_1(1,1,1) - \lambda_2(1,0,1) = 0_{\mathbf{R}^3}$. Mais $(1,1,1)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, si bien que la famille $(1,1,1),(1,0,1)$ est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si bien que $x = 0_E$.
Le même raisonnement, en remarquant que $(0,1,0)$ n'est colinéaire ni à $(1,1,1)$ ni à $(1,0,1)$ prouve que $F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Pourtant, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe puisque

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\in F_1} + \underbrace{(-1,0,-1)}_{\in F_2} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_3} = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

Proposition 19.59 : *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors la somme $\sum_{i=1} F_i$ est directe si et seulement si tout vecteur de $\sum_{i=1}^{n} F_i$ s'écrit de manière **unique** comme somme d'éléments des F_i.*

Démonstration. Supposons la somme directe, et soit $x \in F_1 + \cdots + F_n$, qui s'écrit de deux manières $x = x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$, avec $x_i, y_i \in F_i$.
Alors $0_E = x - x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)$.
Et donc, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i - y_i = 0_E \Leftrightarrow x_i = y_i$.

L'autre implication se prouver en remarquant que $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$ est la seule décomposition possible du vecteur nul. □

Exemple 19.60

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors pour tout $p \leqslant n$ les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1), \mathrm{Vect}(e_2), \dots, \mathrm{Vect}(e_p)$ sont en somme directe.
En effet, si $0_E = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, avec $x_i \in \mathrm{Vect}(e_i)$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x_i = \lambda_i e_i$.
Et alors $0_E = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre[23] il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, et donc $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$, donc la somme est directe.

Si de plus $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i)$.

[23] Car sous-famille d'une famille libre.

Remarque. Sans chercher à trop formaliser, il est facile de se convaincre que la notion de somme directe est stable par sous-famille : si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, alors la somme de toute sous-famille de $(F_1, \dots, F_n)$ est directe.
En particulier, deux quelconques des F_i sont en somme directe, et donc $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
En fait, on a même mieux : par exemple si $F_1+F_2+F_3$ est directe, alors on a $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = F_1 \oplus (F_2 \oplus F_3)$, ce qui signifie que :

- la somme $F_2 + F_3$ est directe
- la somme $F_1 + (F_2 \oplus F_3)$ est directe.

19.4 APPLICATIONS LINÉAIRES

19.4.1 Définition, premières propriétés

Définition 19.61 – Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est appelée **application linéaire** si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Remarque
Il est important que le corps $\mathbf{K}$ soit le même pour E et F : deux espaces vectoriels réels ou deux espaces vectoriels complexes.

Remarques. ▸ Notons qu'une application linéaire n'est rien d'autre qu'un morphisme de groupes[24] vérifiant en plus $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.
▸ On dit parfois $\mathbf{K}$-linéaire au lieu de linéaire, mais cette distinction n'a lieu d'être que lorsqu'il y a ambiguïté sur le corps.
Par exemple, l'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}\right.$ est $\mathbf{R}$-linéaire, c'est-à-dire est une application linéaire du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ dans lui-même.
Mais elle n'est pas $\mathbf{C}$-linéaire :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*,\ f(iz) = \overline{iz} = -i\overline{z} \neq i\overline{z}.$$

[24] Prendre $\lambda = 1$ dans la définition pour s'en convaincre.

Exemples 19.62

▸ L'application constante $E \to F$ égale à 0_F est linéaire.
▸ L'identité $\mathrm{id}_E : E \to E$ est linéaire puisque

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \mathrm{id}_E(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x + y = \lambda \cdot \mathrm{id}_E(x) + \mathrm{id}_E(y).$$

Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est une application linéaire de E dans E.
Une application linéaire de la forme $\lambda \mathrm{id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ.
▸ L'application $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + P(0) - XP' \end{array}\right.$ est linéaire.
▸ Nous avons déjà vu que la trace et la transposition sont des applications linéaires

sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (à valeurs dans $\mathbf{K}$ pour la trace, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ pour la transposition).

▸ Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors l'application $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire, appelée application linéaire canoniquement associée à A.

Proposition 19.63 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

1. $f(0_E) = 0_F$
2. *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. 1. Ceci a déjà été prouvé pour les morphismes de groupes, donc reste en particulier vrai pour une application linéaire.

2. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, prouvons

$$\mathcal{P}(n) : \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Pour $n=1$, il suffit de prendre $y = 0_E$ dans la définition de la linéarité : pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(\lambda x) = f(\lambda \cdot x + 0_E) = \lambda \cdot f(x) + f(0_E) = \lambda \cdot f(x).$$

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in E^{n+1}, (\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

C'est la définition de la linéarité.

Hypothèse de récurrence.

Donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

Proposition 19.64 : *Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda f + g$ est encore linéaire, c'est-à-dire dans $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ et soit $\mu \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned} (\lambda f + g)(\mu x + y) &= \lambda f(\mu x + y) + g(\mu x + y) \\ &= \lambda\left(\mu f(x) + f(y)\right) + \mu g(x) + g(y) \\ &= \mu\left(\lambda f(x) + g(x)\right) + \left(\lambda f(y) + g(y)\right) \end{aligned}$$

□

Corollaire 19.65 – *Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. En particulier, c'est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 19.66 (Composition d'applications linéaires) : *Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.*

Démonstration. Soient $(x,y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$(g\circ f)(\lambda x+y) = g(f(\lambda x+y)) = g(\lambda f(x)+f(y)) = \lambda g(f(x))+g(f(y)) = \lambda(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y).$$

Donc $g \circ f$ est linéaire. □

Définition 19.67 – Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme** de E.
On note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 19.68 : *$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

Danger ! Généralement, cet anneau n'est pas commutatif

Démonstration. Nous savons déjà que $(\mathscr{L}(E), +)$ est un groupe abélien[25], d'élément neutre l'application linéaire nulle $0_{\mathscr{L}(E)}$.
La proposition précédente prouve que $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition, et la composition est associative[26], et possède pour élément neutre id_E. De plus, pour $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E)^3$ et $x \in E$, on a

$$(f \circ (g+h))(x) = f(g(x)+h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f\circ g)(x) + (f \circ h)(x).$$

Donc $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.
On prouve de même la distributivité à droite. □

[25] Puisque $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.

[26] Puisqu'elle l'est sur $\mathscr{F}(E, E)$.

Remarques. ▸ Les inversibles de cet anneau sont les endomorphisme bijectifs (du moins ceux dont la bijection réciproque est encore linéaire, mais ceci est automatique et sera prouvé dans un instant).
▸ Toutes les règles de calculs valables dans un anneau le sont donc dans $\mathscr{L}(E)$, et en particulier le binôme de Newton et la troisième identité remarquable généralisée, sous réserve qu'on soit en présence de deux endomorphismes **qui commutent.**

Proposition 19.69 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable[27] par f.
Alors l'application induite par f sur F, qu'on notera $f_{|F}$ (au lieu de $f_{|F}^{|F}$) est un endomorphisme de F.*

[27] C'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$.

Démonstration. Il s'agit simplement de prouver la linéarité, mais elle est évidente et découle de celle de F.
En effet, si $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors

$$f_{|F}(\lambda x+y) = f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f_{|F}(x) + f_{|F}(y).$$

Donc $f_{|F}$ est linéaire. □

Exemple 19.70

Dans $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$, soit u l'application $f \mapsto f''$.
Alors pour tout $\omega \in \mathbf{R}^*$, $F_\omega = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(\omega x), x \mapsto \sin(\omega x))$ est stable par u et $u_{|F_\omega} = -\omega^2 \mathrm{id}_{F_\omega}$.

19.4.2 Noyau et image

La définition qui suit n'est pas nouvelle : une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes, et donc son noyau a déjà été défini.

Définition 19.71 – Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle alors **noyau de** f et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

De même, comme toute application, une application linéaire possède une image :

Définition 19.72 – Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle **image de** f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Proposition 19.73 : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

1. $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de* E
2. $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration.
1. Commençons par noter que $\operatorname{Ker} f \subset E$ par définition.
Puisque $f(0_E) = 0_F$, $0_E \in \operatorname{Ker} f$.
Soient $x, y \in \operatorname{Ker} f$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) = \lambda \cdot 0_F + 0_F = 0_F$$

et donc $\lambda \cdot x + y \in \operatorname{Ker} f$.
Donc $\operatorname{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Puisque $f(0_E) = 0_F$, 0_F est bien[28] dans $\operatorname{Im} f$.
Soient $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Et donc

$$f(\lambda \cdot x_1 + x_2) = \lambda \cdot f(x_1) + f(x_2) = \lambda \cdot y_1 + y_2.$$

Donc $\lambda \cdot y_1 + y_2$ possède un antécédent par f, et donc est dans $\operatorname{Im} f$.
Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

□

[28] Les éléments de $\operatorname{Im} f$ sont ceux qui possèdent au moins un antécédent par f.

Remarque. Le premier point permet souvent de gagner du temps lorsqu'il s'agit de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : si on arrive à l'écrire comme le noyau d'une application linéaire, c'est automatique.
Par exemple, $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, puisque c'est le noyau de l'application linéaire $\operatorname{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R})$.
De même, l'ensemble des matrices symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ puisqu'il s'agit du noyau de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ $M \mapsto {}^tM - M$.

Remarque

A priori il faut tout de même prouver que cette application est bien linéaire, mais nous savons déjà que la transposition est linéaire, que l'identité est linéaire, et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires l'est encore, donc en fait, il n'y a rien à dire.

Proposition 19.74 : *Soit $F : E \to F$ une application linéaire. Alors :*

1. f *est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$
2. f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.
1. Une application linéaire est un morphisme de groupes, et donc est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Redonnons tout de même la preuve. Si f est injective, alors pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \Leftrightarrow x = 0_E$$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Et si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, alors pour $(x, y) \in E^2$,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x)-f(y) = 0_E \Leftrightarrow f(x-y) = 0_E \Leftrightarrow x-y \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x-y = 0_E \Leftrightarrow x = y$$

donc f est injective.

2. C'est juste la définition de la surjectivité, la linéarité n'est ici d'aucune importance.

□

La proposition suivante est plus évidente, mais mérite d'être mentionnée : multiplier une application linéaire par un scalaire non nul ne change ni son noyau, ni son image.

Proposition 19.75 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. Alors*

$$\operatorname{Ker}(\lambda f) = \operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$x \in \operatorname{Ker}(\lambda f) \Leftrightarrow \lambda f(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f.$$

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = f\left(\lambda \frac{x}{\lambda}\right) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im}(\lambda f)$.
Et alors $\operatorname{Im}(\lambda f) \subset \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) = \operatorname{Im} f$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\lambda f)$. □

Proposition 19.76 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Alors $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.*

Démonstration. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Par définition, ceci signifie que y possède un antécédent $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais puisque $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i$.
Et alors, par linéarité de f,

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) \in \operatorname{Vect}(f(e_i), i \in I).$$

Ainsi, tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ est combinaison linéaire des $f(e_i)$, donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(f(e_i), i \in I)$.
Mais puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F qui contient les $f(e_i)$, on a[29] $\operatorname{Vect}(f(e_i), i \in I) \subset \operatorname{Im} f$.
Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_i), i \in I)$, de sorte que $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$. □

[29] $\operatorname{Vect}(f(e_i))$ est le plus petit sous-espace vectoriel de F qui contient tous les $f(e_i)$.

19.4.3 Isomorphismes

Définition 19.77 – Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un **isomorphisme** si elle est bijective.
Dans le cas où $E = F$, on dit que f est un **automorphisme de E**.

Autrement dit
Un automorphisme est une application linéaire qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.

Proposition 19.78 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire bijective. Alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire, donc est dans $\mathscr{L}(F, E)$.*

Démonstration. Soient $(x, y) \in F^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = \lambda x + y.$$

En appliquant f^{-1}, il vient $\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right)\right) = f^{-1}(\lambda x + y)$.
Donc f^{-1} est linéaire. □

Définition 19.79 – On appelle **groupe linéaire sur** E, et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
C'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$.

Démonstration. L'application identité id_E, qui est l'élément neutre de $\mathfrak{S}(E)$ est bien dans $GL(E)$.
Si f, g sont deux éléments de $GL(E)$, alors $f \circ g^{-1}$ est encore linéaire car composée d'applications linéaires, et est évidemment bijective, donc est dans $GL(E)$.
Et ainsi, $GL(E)$ est bien un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$. □

Proposition 19.80 : *Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si* $f_{\mathscr{B}} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array}\right.$ *est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur E.*

Démonstration. Il s'agit de commencer par prouver la linéarité de $f_{\mathscr{B}}$, ce qui est sans difficulté.
On a alors

$$\begin{aligned} f_{\mathscr{B}} \text{ bijective } &\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = f_{\mathscr{B}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \\ &\Leftrightarrow \mathscr{B} \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$

□

Détails
Il s'agit de l'une des caractérisation des bases : $(e_1, \dots, e_n)$ est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i.

Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que si on a une base de E de cardinal n, alors E a les mêmes propriétés, en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel, que $\mathbf{K}^n$.

Proposition 19.81 : *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F.*

Démonstration. Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{Im}(f) = F$, et donc $(f(e_i))_{i \in I}$ est génératrice de F.
De plus, si $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ est telle que $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$, alors $f\left(\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$.
Donc $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$, et donc $\forall i \in I, \lambda_i = 0$.
Donc la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre, donc est une base de F.

Inversement, supposons que $(f(e_i))_{i \in I}$ soit une base de F.
Alors en particulier elle est génératrice de F, et donc $\mathrm{Im}\, f = F$: f est surjective.
Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Alors, de manière unique, $x = \displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$.

Mais alors $f\left(\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, et donc $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$, donc[30] $\forall i \in I, \lambda_i = 0$.
Donc f est injective, et donc est un isomorphisme. □

[30] Par liberté de la famille des $f(e_i)$.

Remarque. Cette proposition dit notamment que si l'image d'une base[31] de E est une base de F, alors f est un isomorphisme, et donc l'image de toute base de E est une base de F.

[31] Une seule, peu importe laquelle.

19.4.4 Endomorphismes remarquables

Définition 19.82 – Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On appelle **homothétie de rapport** λ l'application linéaire $\lambda \mathrm{id}_E$.

Les homothéties sont en quelques sorte les endomorphismes les plus simples que l'on puisse imaginer. En particulier, l'application nulle et l'identité sont deux homothéties (de rapports respectifs 0 et 1).

Définition 19.83 – Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G, x_F \in F, x_G \in G$.
On appelle **projection sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{array} \right. .$$

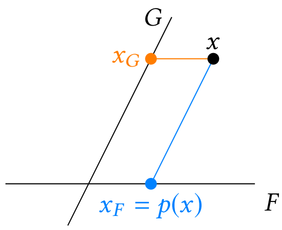


FIGURE 19.1– La projection sur F parallèlement à G.

Notons tout de suite que si p est la projection sur F parallèlement à G et si q est la projection sur G parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F$ et $q(x) = x_G$, donc $p(x) + q(x) = x = \mathrm{id}_E$.

Proposition 19.84 : *La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.*

Démonstration. Prouvons que p est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors, de manière unique, $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ et de même, $y = y_F + y_G$, avec $y_F \in F$ et $y_G \in G$.
Alors

$$\lambda \cdot x + y = \lambda \cdot (x_F + x_G) + (y_F + y_G) = \underbrace{\lambda \cdot x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda \cdot x_G + y_G}_{\in G}.$$

Nous avons donc là l'unique décomposition de $\lambda \cdot x + y$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Et donc $p(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot x_F + y_F = \lambda \cdot p(x) + p(y)$.
Donc p est linéaire.

De plus, pour $x = x_F + x_G \in E$, on a $p(x) = x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et donc $p(p(x)) = x_F = p(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $p \circ p = p$. □

Définition 19.85 – On appelle **projecteur de** E tout $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Exemple 19.86

L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $M \mapsto \dfrac{M + {}^tM}{2}$ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
En effet, elle est clairement[32] linéaire, et

$$f^2(M) = \frac{f(M) + {}^tf(M)}{2} = \frac{1}{4}\left(M + {}^tM + {}^t(M + {}^tM)\right) = \frac{M + {}^tM}{2} = f(M).$$

Ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f^2 = f$.

[32] C'est une combinaison linéaire des deux applications linéaires $M \mapsto {}^tM$ et $M \mapsto M$.

A priori, projecteurs et projections sont deux notions différentes. Le théorème suivant prouve qu'il s'agit en fait de la même chose :

Théorème 19.87 : *Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si p est une projection.*
Dans ce cas, p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Remarque
En particulier, si p est un projecteur, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Supposons que $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Nous allons pour cela prouver que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$.
Procédons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$ et supposons que $x = x_1 + x_2, x_1 \in \operatorname{Im} p, x_2 \in \operatorname{Ker} p$.
Alors

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1).$$

Mais $x_1 \in \operatorname{Im} p$, donc il existe $y_1 \in E$ tel que $x_1 = p(y_1)$, et alors $p(x_1) = p^2(y_1) = p(y_1) = x_1$.
Donc $p(x) = x_1$, et alors $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$.

Or, pour tout $x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$.
Mais $p(x) \in \operatorname{Im} p$ par définition et $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ car

$$p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0.$$

Donc tout vecteur de E s'écrit bien d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} p$.
Ainsi, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$ et d'un élément de $\operatorname{Ker} p$: $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.
Enfin, si $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}$ et $p(x) = p(x)$.
Donc p est l'application qui à x associe sa composante $p(x)$ suivant $\operatorname{Im} p$: c'est donc la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Inversement, si p est la projection sur F parallèlement à G, avec $E = F \oplus G$, nous avons déjà prouvé que p est un projecteur.
Et alors, $\operatorname{Ker} p = \{x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in G \mid x_1 = 0_E\} = \{x_2, x_2 \in G\} = G$.
De même, il est clair que $\operatorname{Im} p \subset F$.
Soit $x \in F$. Alors $p(x) = x$, et donc $x \in \operatorname{Im} p$. Ceci prouve que $F \subset \operatorname{Im} p$, et donc $\operatorname{Im} p = F$. □

Exemple 19.88

Si f est le projecteur $M \mapsto \dfrac{M + {}^tM}{2}$, alors

$$M \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \frac{M + {}^tM}{2} = 0 \Leftrightarrow M = -{}^tM$$

et donc $\operatorname{Ker}(f)$ l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
D'autre part, il est clair que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $f(M)$ est une matrice symétrique, puisque ${}^tf(M) = {}^t\left(\dfrac{M + {}^tM}{2}\right) = \dfrac{M + {}^tM}{2} = f(M)$.
Donc déjà $\operatorname{Im}(f) \subset \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. De plus, pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, on a $f(M) = M$, et donc $M \in \operatorname{Im}(f)$.
Ainsi, $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
Puisque nous savons déjà que f est un projecteur, il vient donc $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, et f est la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 19.89 : *Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors*

$$\operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

Autrement dit
$\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des points fixes de p.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que si $x \in \operatorname{Im} p$, alors $p(x) = x$.
Et inversement, si x est un point fixe de p, $x = p(x)$, alors $x \in \operatorname{Im} p$.
Le fait que l'ensemble des points fixes de p soit le noyau de $p - \mathrm{id}_E$ est en fait vrai pour tout endomorphisme :

$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 0_E\} = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E).$$

□

Définition 19.90 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G, x_F \in F$, $x_G \in G$.
On appelle alors **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G l'application
$$s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right. .$$

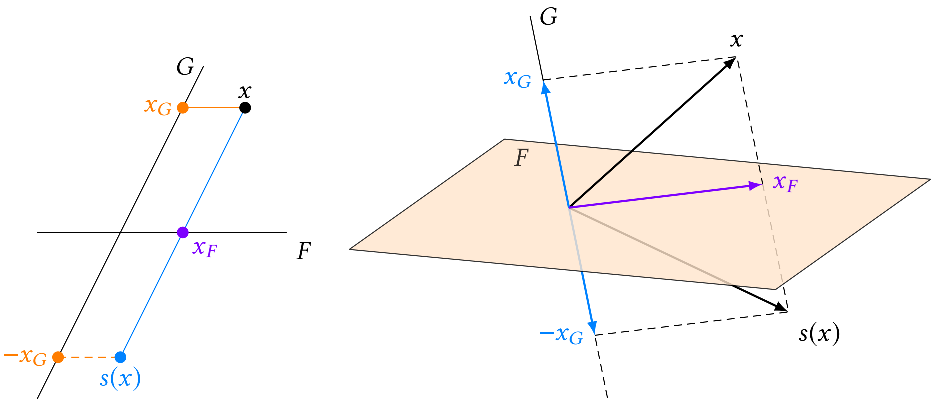


FIGURE 19.2 – Deux symétries par rapport à F parallèlement à G, dans le plan et dans l'espace.
Notons que x_F est la projection de x sur F parallèlement à G.

Proposition 19.91 : *La symétrie s par rapport à F parallèlement à G est un endomorphisme de E, qui vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$.*

Démonstration. Notons simplement que si p désigne la projection sur F parallèlement à G, alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.
En effet, pour $x \in E$, qui s'écrit $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$, on a

$$2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x).$$

Donc s est linéaire car combinaison linéaire d'applications linéaires, et

$$s \circ s = (2p - \mathrm{id}_E) \circ (2p - \mathrm{id}_E) = 4p^2 - 4p + \mathrm{id}_E = 4p - 4p + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E.$$

Remarque
On a ici utilisé le fait que p et id_E commutent.

□

Remarque. Les applications dont le carré est égal à l'identité, ou de manière équivalente, qui sont égales à leur propre bijection réciproque sont nommées involutions.
Ce que dit la proposition qui suit, c'est que les involutions **linéaires** sont exactement les symétries.

Proposition 19.92 : *Si s est un endomorphisme de E tel que $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors*

1. $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *et* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ *sont supplémentaires dans E*
2. *s est la symétrie par rapport à* $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ *parallèlement à* $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Démonstration. Notons $p = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2}$.
Alors $p^2 = \dfrac{s^2 + 2s + \mathrm{id}_E}{4} = \dfrac{s + \mathrm{id}_E}{2} = p$.
Donc p est un projecteur dont l'image et le noyau sont supplémentaires dans E.
Mais $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
D'autre part, on a

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker}\left(\frac{s - \mathrm{id}_E}{2}\right) = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E).$$

Donc $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, ce qui prouve 1).
De plus, pour $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_I + x_K$ avec $x_I \in \operatorname{Im} p$ et $x_K \in \operatorname{Ker} p$.
Et donc $s(x) = 2p(x) - \mathrm{id}_E(x) = 2x_I - (x_I + x_K) = x_I - x_K$.
On reconnaît bien là l'expression de la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. □

19.4.5 Détermination d'une application par restriction à des supplémentaires

Proposition 19.93 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, et soit H un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*
Alors pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(F, H) \times \mathcal{L}(G, H)$, il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E, H)$ tel que $f_{|F} = u$ et $f_{|G} = v$.

Démonstration. Supposons qu'un tel f existe, et soit $x \in E$. Alors, de manière unique $x = x_F + x_G$.
Et donc $f(x) = u(x_F) + v(x_G)$.

Inversement, soit $f : x_F + x_G \mapsto u(x_F) + v(x_G)$.
Prouvons que f est linéaire : soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\lambda x + y = \underbrace{\lambda x_F + y_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda y_F + y_G}_{\in G}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= u(\lambda x_F + y_F) + v(\lambda x_G + y_G) \\ &= \lambda u(x_F) + u(y_F) + \lambda v(x_G) + v(y_G) \\ &= \lambda(u(x_F) + v(x_G)) + u(y_F) + v(y_G) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Donc f est bien un élément de $\mathcal{L}(E)$.
Si $x \in F$, alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ de sorte que $f(x) = u(x) + v(0_E) = u(x)$, et donc $f_{|F} = u$.
De même, $f_{|G} = v$. □

En particulier, la projection sur F parallèlement à G aurait pu être définie comme l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est l'application nulle.
Et de même, la symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'unique endomorphisme de E dont la restriction à F est id_F et la restriction à G est $-\mathrm{id}_G$.

Cette proposition se généralise sans difficulté au cas d'une somme directe de n sous-espaces vectoriels.
Vous passerez une bonne partie de l'année prochaine à déterminer quand, étant donné un endomorphisme f de E, E se «casse» en une somme directe de sous-espaces vectoriels sur lesquels la restriction de f est une homothétie.
Un tel endomorphisme sera appelé *diagonalisable*.

EXERCICES DU CHAPITRE 19

► Sous-espaces vectoriels

EXERCICE 19.1 Le corps $\mathbf{K}$, muni de son addition et sa multiplication, peut être vu comme un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Déterminer tous ses sous-espaces vectoriels. F

EXERCICE 19.2 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels (munis de leurs opérations usuelles) ? F

1) l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ qui tendent vers 1 en $+\infty$.
2) l'ensemble des suites croissantes
3) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
4) l'ensemble des matrices triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1.
5) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de trace nulle.
6) l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
7) l'ensemble des polynômes à coefficients réels possédant à la fois 1 et 3 comme racines de multiplicité supérieure ou égale à 2.
8) l'ensemble des fonctions 2π-périodiques
9) l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $f(0)+2f(1)=3f'(2)$
10) l'ensemble des polynômes de degré 2.

EXERCICE 19.3 Parmi les parties suivantes de $E=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ? PD

1) $F_1=\{(u_n)\in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0\}$
2) $F_2=\left\{(u_n)\in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$
3) $F_3=\left\{(u_n)\in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$
4) $F_4=\left\{(u_n)\in E \mid \exists k\in\mathbf{R}, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n}\right\}$

EXERCICE 19.4 Une union de sous-espaces peut être un sous-espace PD
Soit E un espace vectoriel et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $\forall (i,j)\in I^2$, $\exists k\in I$, $F_i\cup F_j\subset F_k$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

► Familles de vecteurs

EXERCICE 19.5 Dans chacun des cas suivants, préciser si on est en présence ou non d'une famille libre de E, et donner une base de l'espace vectoriel engendré par cette famille. F

1) $E=\mathbf{R}^3$, $(0,-2,1),(2,-1,-3),(1,1,-2)$
2) $E=\mathbf{C}^2$, $(1,i),(2i,i),(1,1)$
3) $E=\mathbf{R}^3$, $(1,2,-3),(3,2,-2),(-1,2,-4),(-6,-8,11)$
4) $E=\mathbf{R}_n[X]$, $(X+k)^k$, $0\leqslant k\leqslant n$.
5) $E=\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $f_0 : x\mapsto 2$, $f_1 : x\mapsto \cos(x)$, $f_2 : x\mapsto \cos^2(x)$, $f_3 : x\mapsto\cos(2x)$.
6) $E=\mathbf{C}_n[X]$, $(X-a)^k(X-b)^{n-k}, 0\leqslant k\leqslant n$, où $a\neq b$ sont deux complexes.
7) $E=\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&i\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+2i&-1\\1+i&1\end{pmatrix}$

EXERCICE 19.6 Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbf{R}$ la famille $(1,1,\alpha),(1,\alpha,1),(\alpha,1,1)$ est liée dans $\mathbf{R}^3$. AD

EXERCICE 19.7 Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants : PD

1) $\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 | x+y+2z-t=0 \text{ et } x+z+t=0\}$
2) $\{P\in\mathbf{R}_4[X] \mid P(0)=P(4)=0\}$
3) $\mathrm{Vect}((1,2,-1,0),(1,6,-5,-6),(1,0,1,3))$
4) $\{y\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid y''-2y'+2y=0\}$
5) $\left\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \,\middle|\, \begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}M=M\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\right\}$
6) $\{(u_n)\in\mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n\}$
7) $\left\{P\in\mathbf{R}_n[X] \,\middle|\, \int_0^1 P(t)\,dt=0\right\}$

EXERCICE 19.8 Pour $k\in\mathbf{N}$, on pose $f_k : x\mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. AD

EXERCICE 19.9 Soit $E=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour $k\in\mathbf{N}$, on note $v^{(k)}$ la suite définie par $v_n^{(k)}=\begin{cases}1 & \text{si } n=k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ AD
Montrer que $(v^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de E. Est-ce une base de E ? Déterminer $\mathrm{Vect}(v^{(k)},\ k\in\mathbf{N})$.

EXERCICE 19.10 Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. AD

1) Montrer que A est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

2) Montrer que si une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 19.11 Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. On considère $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires, et on pose $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=e_k+y$. Déterminer à quelle condition la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre. **D**

► Sommes de sous-espaces vectoriels

EXERCICE 19.12 Dans $\mathbf{R}^4$, soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } y-z+t=0\}$ et soit $G=\mathrm{Vect}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$. **PD**

EXERCICE 19.13 Soit $F=\{f\in\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ telles que } f(0)=f(1)\}$. **AD**

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2) Soit $g: x\mapsto x$. Montrer que F et $\mathrm{Vect}(g)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

EXERCICE 19.14 Soient F,G,H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. **D**
Montrer que $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$, et que si $F\subset G$, alors l'inclusion précédente est une égalité.

EXERCICE 19.15 Soit $n\geqslant 1$ fixé. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on pose $F_i=\{P\in\mathbf{R}_n[X] \mid \forall j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\},\ P(j)=0\}$. **AD**

1) Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$. En donner une base.
2) Montrer que la somme $F_0+F_1+F_2+\cdots+F_n$ est directe.
3) En déduire que $\mathbf{R}_n[X]=F_0\oplus F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_n$.

EXERCICE 19.16 Soit E un espace vectoriel, et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. **AD**

1) Montrer que $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{k-1}F_i\right)\cap F_k=\{0_E\}$.
2) Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels F_1,F_2,F_3 tels que $\forall(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow F_i\cap F_j=\{0_E\}$ mais où F_1,F_2,F_3 ne sont pas en somme directe. Est-ce que si $F_1\cap F_2\cap F_3=\{0_E\}$, alors la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe ?

► Applications linéaires

EXERCICE 19.17 Soit p l'application $\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ définie par $p(x,y)=\frac{1}{5}(x+2y,2x+4y)$. **F**

1) Montrer que p est un endomorphisme.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}p$. L'application p est-elle injective ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im}p$.
4) Montrer que $p\circ p=p$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}p$ et $\mathrm{Im}p$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$?

EXERCICE 19.18 Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire de E dans F ou non, et le cas échéant, déterminer une base de son noyau. En cas de présence du symbole ♣, déterminer aussi une base de son image. **F**

1) $E=\mathbf{R}^3$, $F=\mathbf{R}^2$, $f:(x,y,z)\mapsto(2x+y,x+y-3z)$ (♣)
2) $E=F=\mathbf{R}^3$, $f:(x,y,z)\mapsto(2x,0,y+z)$ (♣)
3) $E=F=\mathbf{R}^3$, $f:(x,y,z)\mapsto(x+1,2x-y,z+3y)$ (♣)
4) $E=F=\mathbf{R}[X]$, $f:P\mapsto P(1)+P'+X$
5) $E=F=\mathbf{R}_3[X]$, $f:P\mapsto P(-1)+2XP'$ (♣)
6) $E=F=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f:M\mapsto \mathrm{tr}(M)I_2$ (♣)
7) $E=F=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f:M\mapsto M^2+2\,{}^tM$
8) $E=F=\mathbf{R}[X]$, $f:P\mapsto P''$

EXERCICE 19.19 Soit $\alpha\in\mathbf{R}$, et soit $f_\alpha\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$ définie par $(x,y,z,t)\mapsto(x+y+\alpha z+t,x+z+t,y+z)$. Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(f_\alpha)$. **PD**

EXERCICE 19.20 Montrer que l'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}\times\mathbf{K}[X]\\ P & \longmapsto & (P(0),P')\end{array}\right.$ est un isomorphisme. **PD**

EXERCICE 19.21 Soient E,F,G trois espaces vectoriels, et soit $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications linéaires. **PD**

1) Montrer que $g\circ f=0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}\,g$.

2) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

EXERCICE 19.22 Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par g. PD

EXERCICE 19.23 Projecteurs associés AD
Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p + q = \mathrm{id}_E$. Montrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

EXERCICE 19.24 Soit E un espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. AD

EXERCICE 19.25 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ non nulle, et soit $u \notin \operatorname{Ker}(\varphi)$. AD
Prouver alors que $E = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Vect}(u)$.

EXERCICE 19.26 Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. AD

On note π : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i \end{array}\right.$

1) Montrer que π est un projecteur de $\mathbf{R}[X]$, dont on déterminera le noyau et l'image.

2) Montrer que $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - \lambda_k),\ Q \in \mathbf{R}[X] \right\}$ est un supplémentaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$.

EXERCICE 19.27 (Oral X) D
Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ et soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur et trouver son image et son noyau.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 19

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.1

Nous savons déjà que $\{0\}$ et $\mathbf{K}$ tout entier sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}$.
Nous allons en fait prouver qu'il s'agit des seuls. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, non réduit à $\{0\}$.
Alors il existe $x \neq 0$ dans F. Et par stabilité de F par multiplication par un scalaire, $1 = \dfrac{1}{x} \cdot x \in F$.
Et, toujours pas stabilité par la multiplication par un scalaire, pour tout $x \in \mathbf{K}$, $x = x \cdot 1 \in F$.
Donc $F = \mathbf{K}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.2

1. Non : la fonction nulle n'en fait pas partie.
2. Non : si une suite (u_n) est croissante strictement, $(-u_n) = (-1) \cdot (u_n)$ n'est plus croissante.

Remarque

Notons que cette fois, il y avait stabilité par somme (la somme de deux suites croissantes est croissante), mais que c'est la stabilité par la multiplication externe qui n'est pas vérifiée.

3. Oui : la matrice nulle est symétrique. Et si A, B sont symétriques, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la transposition :
$$^t(\lambda A + B) = \lambda\, ^tA + {}^tB = \lambda A + B$$
donc $\lambda A + B$ est encore symétrique.
4. Non : la matrice nulle n'en fait pas partie.
5. Oui : la matrice nulle est de trace nulle. Si $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 0$ et si$\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la trace,
$$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \lambda\, \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0.$$
6. Non : la matrice nulle n'est pas inversible.
7. Oui. Le plus facile est de voir qu'il s'agit des polynômes divisibles par $(X-1)^2(X-3)^2$.
8. Oui.
9. Oui : la fonction nulle satisfait évidemment cette relation. Et si f, g sont deux telles fonctions, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
$$(\lambda f+g)(0)+2(\lambda f+g)(1) = \lambda(f(0)+2f(1))+g(0)+2g(1) = 3\lambda f'(2)+3g'(2) = 3(\lambda f+g)'(2).$$
10. Non : le polynôme nul n'est pas de degré 2.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.3

1. F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ puisque la suite nulle tend vers 0 et que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. La suite nulle n'est pas dans F_2, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
3. La suite nulle est dominée par $\frac{1}{n}$, et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc F_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
4. Prenons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, qui sont toutes deux dans F_4 car $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$.
Alors $u_n + v_n = \frac{1}{n^2}$ qui n'est équivalente à aucun $\frac{k}{n}$.
Donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.4

Notons $H = \bigcup_{i\in I} F_i$.
Le vecteur nul de E étant dans chacun des F_i, il est dans leur union H.
Soient $(x, y) \in H^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(i, j) \in I^2$ tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$.
Et donc il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$, de sorte que $x \in F_k$ et $y \in F_k$.
Puisque F_k est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $\lambda x + y \in F_k \subset H$.
Et donc H est un sous-espace vectoriel de E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.5

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que
$$\lambda_1 \cdot (0,-2,1) + \lambda_2 \cdot (2,-1,-3) + \lambda_3 \cdot (1,1,-2) = (0,0,0).$$
Alors, il vient
$$\begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
Donc la famille $(0,-2,1), (2,-1,-3), (1,1,-2)$ est libre. Étant par définition une famille génératrice de l'espace qu'elle engendre, c'en est une base.

Méthode
Pour prouver qu'une famille est libre, on revient toujours à la définition. C'est-à-dire qu'on considère une famille de scalaires telle que la combinaison linéaire soit nulle, et on prouve que ces scalaires sont tous nuls.
Notons au passage que si lors des calculs on trouve une solution avec des scalaires non tous nuls, alors la famille est liée.

2. Soit on remarque directement qu'une combinaison linéaire des trois vecteurs, à coefficients non nuls, est nulle, comme par exemple
$$(1,i) + (1+i)\cdot(2i,i) + (1-2i)\cdot(1,1) = 0_{\mathbf{C}^2} = (0,0).$$
Et alors la famille est liée.

Mais si on ne voit pas[1] une telle combinaison linéaire, alors il suffit de faire un calcul : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{C}^3$. Alors
$$\lambda_1 \cdot (1,i) + \lambda_2 \cdot (2i,i) + \lambda_3 \cdot (1,1) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2i\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ i\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$
Après calculs[2], on trouve que les solutions du système sont les $\lambda_1 \cdot (1, 1+i, 1-2i)$, $\lambda_1 \in \mathbf{C}$.
Notons que ceci peut encore s'écrire $\mathrm{Vect}((1,1+i,1-2i))$...
Bref, il existe des solutions non nulles, donc la famille n'est pas libre.
Et en prenant $\lambda_1 = 1$, on retrouve la combinaison linéaire donnée plus haut.

[1] Soit qu'il n'en existe pas, soit qu'elle ne «saute pas aux yeux».

[2] Appliquer la méthode du pivot, on peut par exemple commencer par $L_1 - L_3$.

Elle est toujours génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Mais la combinaison linéaire nulle que nous venons de calculer prouve par exemple que $(1,i)$ est combinaison linéaire de $(2i,i)$ et de $(1,1)$.
Donc $F = \mathrm{Vect}((1,i),(2i,i),(1,1)) = \mathrm{Vect}((2i,i),(1,1))$.
Donc $(2i,i),(1,1)$ est encore génératrice de F.
Étant formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et donc est une base de F.

Détails
Il s'agit là d'une propriété du cours : un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne sert à rien dans un Vect.

Danger !
Prouver la liberté à l'aide d'un argument de non colinéarité (ou ce qui revient au même, de non proportionnalité) n'est valable que pour une famille de **deux** vecteurs. Il n'y a pas d'analogue pour les familles plus grandes.

3. Notons e_1, e_2, r_3, e_4 nos vecteurs. Pour la liberté, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des réels. Alors
$$\lambda_1(1,2,-3) + \lambda_2(3,2,-2) + \lambda_3(3,-1,2,-4) + \lambda_4(-6,-8,11) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 - \lambda_3 - 6\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 8\lambda_4 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 + 11\lambda_4 = 0 \end{cases}$$
Après résolution[3], on trouve que l'ensemble des solutions de ce système est
$$\{(-2\lambda_3 + 3\lambda_4, \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_3, \lambda_4), (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^2\}.$$
Donc déjà le fait qu'il existe des solutions non triviales[4] nous apprend que la famille n'est pas libre.
Par ailleurs, nous connaissons de telles solutions : $(-2,1,1,0)$ et $(3,1,0,1)$ sont solutions.
La première signifie qu'on a la relation de dépendance linéaire $2e_1 + e_2 + e_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$, la seconde que $3e_3 + e_2 + e_4 = 0_{\mathbf{R}^3}$.
Donc $e_3 = -2e_1 + e_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_4)$, si bien que $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_4)$.
De même, $e_4 = -3e_3 - e_2 \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Et donc $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_4) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.
Enfin, (e_1,e_2) est libre, car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

[3] Via la méthode du pivot. Notons tout de suite que 4 inconnues pour 3 équations, il va nous falloir passer par des inconnues secondaires.

[4] Différentes de $(0,0,\dots,0)$.

4. Il s'agit d'une famille de polynômes de degrés deux à eux distincts, elle est donc libre. Et donc forme une base de l'espace qu'elle engendre.
5. On a $f_3 = 2f_2 - \frac{1}{2}f_0$, donc la famille n'est pas libre.
En revanche, on a donc $\mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3) = \mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2)$.
Prouvons que (f_0,f_1,f_2) est libre.

Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ des réels tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_E$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2\lambda_0 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos^2(x) = 0$.
Et puisque cos prend toutes les valeurs entre -1 et 1, pour tout $t \in [-1,1]$, $2\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 = 0$.
Nous sommes donc en présence d'un polynôme $(2\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2)$ qui s'annule une infinité de fois, et donc est nul.
Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$, si bien que (f_0, f_1, f_2) est libre, et donc est une base de $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

6. Cette fois il s'agit d'une famille de polynômes qui sont tous de même degré, donc on ne peut s'en tirer aussi facilement qu'à la question précédente.
Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0.$$

En évaluant cette relation en a, il vient $\lambda_0 (a-b)^n = 0$, et puisque $a \neq b$, $\lambda_0 = 0$.

Il ne reste donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0$, ce qui après simplification[5] par $X - a$, il reste

$$\lambda_1 (X-b)^{n-1} + \lambda_2 (X-a)(X-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_n (X-a)^{n-1} = 0.$$

De nouveau en évaluant en a, il vient $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on prouve alors que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Et donc il s'agit d'une famille libre.

7. En nommant E_1, E_2, E_3 nos trois matrices, elles sont liées par la relation[6] $E_3 = (1+i)E_1 + iE_2$.
Et donc $\mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3) = \mathrm{Vect}(E_1, E_2)$, de sorte que E_1, E_2 est une base de $\mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$.

[5] $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre, donc tout élément est régulier (pour le produit).

[6] Résoudre un système pour la trouver.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.6

On cherche donc pour quelles valeurs de α le système $\mathscr{S}_\alpha \ : \ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \alpha\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$, d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ possède une solution différente de $(0,0,0)$.
Commençons alors la résolution avec $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque :

$$(\mathscr{S}_\alpha) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ (\alpha - 1)\lambda_2 + (1-\alpha)\lambda_3 = 0 \\ (1-\alpha)\lambda_2 + (1-\alpha^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

► **Si** $\alpha = 1$, alors les deux dernières équations deviennent $0 = 0$ et donc le système possède une infinité de solutions.
► **Supposons donc** $\alpha \neq 1$. Alors L_2 est équivalente à $\lambda_2 = \lambda_3$, et L_3 devient, après division par $1 - \alpha$: $\lambda_2 + (1+\alpha)\lambda_3 = 0$. En substituant λ_3 par λ_2 on a donc $(2+\alpha)\lambda_2 = 0$.
Si $\alpha \neq -2$, alors cette équation n'a que $\lambda_2 = 0$ comme solution. Et donc $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.
En revanche, pour $\alpha = -2$, alors $(1,1,1)$ est solution du système, donc la famille n'est pas libre.

Au final, la famille $(1,1,\alpha), (1,\alpha,1), (\alpha,1,1)$ est liée si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$.
Il n'est d'ailleurs pas difficile de vérifier que dans ces deux cas, la famille est liée :

$$(1,1,1) + (-1)\cdot(1,1,1) + 0\cdot(1,1,1) = 0_{\mathbf{R}^3} \text{ et } (1,1,-2) + (1,-2,1) + (-2,1,1) = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.7

Notons à chaque fois F l'espace en question.

1. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2t - z \\ x = -z - t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-z-t, 2t-z, z, t) = z(-1,-1,1,0) + t(-1,2,0,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,z) \in \mathrm{Vect}((-1,-1,1,0),(-1,2,0,1)).\end{aligned}$$

Donc $(-1,-1,1,0), (-1,2,0,1)$ est une famille génératrice de F.
Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires C'est donc une base de F.

⚠ Attention !
Ce critère de liberté est très pratique, mais il ne vaut que pour les familles de deux vecteurs, il n'y a pas d'analogue facile pour les familles de trois vecteurs ou plus.

2. Soit $P \in \mathbf{R}_4[X]$. Alors $P \in F$ si et seulement si il est divisible par $X(X-4)$, soit encore si et seulement si il est de la forme $P = X(X-4)(aX^2+bX+c)$, avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.
Autrement dit,

$$\begin{aligned} F &= \left\{X(X-4)(aX^2+bX+c),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\} \\ &= \{aX^3(X-4) + bX^2(X-4) + cX(X-4),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\right). \end{aligned}$$

Donc $(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$ est une famille génératrice de F. Elle est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de F.

3. Nous avons directement une famille génératrice de F.
Elle n'est pas libre car le second vecteur est combinaison linéaire des deux autres : $(1,6,-5,-6) = 3(1,2,-1,0) - 2(1,0,1,3)$.
Donc $\operatorname{Vect}((1,2,-1,0),(1,6,-5,-6),(1,0,1,3)) = \operatorname{Vect}((1,2,-1,0),(1,0,1,3))$.
Cette famille de deux vecteurs est libre, car ils sont non colinéaires, et donc c'est une base de F.

> **Méthode**
> Rappelons que lorsqu'une famille est liée, enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.
> Et donc en particulier, enlever un tel vecteur à une famille génératrice fournit encore une famille génératrice.

4. Nous savons résoudre cette équation différentielle, et $f \in F$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que

$$f : x \mapsto \lambda e^x \cos x + \mu e^x \sin x.$$

Donc en notant $f_1 : x \mapsto e^x \cos x$ et $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$, on a $F = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$.
Il reste à vérifier que (f_1, f_2) est libre : soient λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.
Alors en évaluant en 0, on a $\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.
Donc (f_1, f_2) est libre : c'est une base de F.

5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Alors $M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} M$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ic & id \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0.$$

Donc si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + dE_{2,2}$.
Donc $E_{1,1}, E_{2,2}$ est une famille génératrice de F, elle est évidemment libre[7], donc c'est une base de F.

> **Autrement dit**
> L'ensemble cherché est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

[7] Car formée de deux matrices non colinéaires, mais aussi car il s'agit d'une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, qui est libre comme toute base.

6. Nous savons que toute suite de F est de la forme $u_n = 3^n(\lambda n + \mu) = \lambda 3^n n + \mu 3^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$. Donc $F = \operatorname{Vect}(v, w)$ où $v_n = 3^n n$ et $w_n = 3^n$.
Il est alors aisé de vérifie que (v, w) est une famille libre de F, et donc en est une base.

7. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbf{R}_n[X]$.

Alors $P \in F \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$. Soit encore si et seulement si $a_0 = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+1}$.

Donc $P \in F \Leftrightarrow P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \left(X^i - \frac{1}{i+1}\right)$.

Donc $F = \operatorname{Vect}\left(X - \dfrac{1}{2}, X^2 - \dfrac{1}{3}, \dots, X^n - \dfrac{1}{n+1}\right)$.
Cette famille est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de F.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.8

Puisqu'il s'agit d'une famille infinie, il faut prouver que toute sous-famille finie est libre.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, ce qui suffira car toute sous-famille finie de la famille de départ est incluse dans une telle famille.

> **Rappel**
> Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Soient donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$.

Alors, en divisant par f_n, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lambda_0 e^{-nx} + \lambda_1 e^{-(n-1)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{-x} + \lambda_n = 0.$$

Donc par passage à la limite, $\lambda_n = 0$.
Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$. Divisons alors de nouveau par f_{n-1}, puis effectuons un passage à la limite. On obtient alors $\lambda_{n-1} = 0$.
De proche en proche[8]
Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, de sorte que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, et donc $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre.

[8] Encore une fois : une récurrence serait tout indiquée, en prouvant $\mathscr{P}(n)$: «la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre ».

Solution de l'exercice 19.9

Notons que nous sommes en présence d'une famille infinie de suites. Elle est donc libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.
Or, une sous-famille finie de $(v^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est incluse dans $(v^{(k)})_{0\leqslant k\leqslant n}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$. Il suffit donc de prouver que toutes ces familles sont libres.

Soit donc $n \in \mathbf{N}$, et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)} = 0_{\mathbf{R}^\mathbf{N}}$.

Intuition
Notons que cette combinaison linéaire n'est autre que la suite

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots).$$

En particulier, pour $i \in [\![0, n]\!]$, on a

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)}\right)_i = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_i^{(k)} = \lambda_i.$$

Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc la famille $(v^{(0)}, \dots, v^{(n)})$ est libre.

Les $v^{(k)}$ sont toutes presque nulles[9]. Donc toute combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui est combinaison linéaire (d'un nombre fini) des $v^{(k)}$ est presque nulle.
En particulier, la suite constante égale à 1 n'est pas une combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui ne forment donc pas une base de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.
Mieux : nous venons de prouver que $\mathrm{Vect}(v^{(k)}) \subset \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, l'ensemble des suites presque nulles.
Inversement, si (u_n) est une suite presque nulle, alors elle est nulle à partir d'un certain rang. Notons par exemple $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $u_n = 0$.
Alors $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} u_k v^{(k)} \in \mathrm{Vect}(v^{(k)}, , k \in \mathbf{N})$.
Et donc l'espace engendré par les $v^{(k)}$ est l'ensemble $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles[10].

[9] Au sens du cours : tous les termes, sauf un nombre fini, sont nuls.

[10] Ou ce qui revient au même, des suites nulles à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 19.10

1. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, qui sont donc des éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$.

On sait alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

Donc si A est inversible, on a $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$, si bien que $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$, soit encore $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc si A est inversible, $(C_1, \dots, C_n)$ est libre.

Rappel
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, A est inversible si et seulement si

$$AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}.$$

Et inversement, si $(C_1, \dots, C_n)$ est libre, alors pour $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, si $AX = 0_{n,1}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = 0_{n,1}$, et donc par liberté de $(C_1, \dots, C_n)$, $x_1 = \cdots = x_n = 0$, si bien que $X = 0_{n,1}$.
Donc A est inversible.

Conséquence : si vous voyez qu'une colonne de A est une combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible puisque $C_1 + 2C_2 = C_3$.

2. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A. Alors $L_1^T, \dots, L_n^T$ sont les colonnes de A^T.
Et pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, on a

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{1,n} \Leftrightarrow (\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n)^T = 0_{n,1} \Leftrightarrow \lambda_1 L_1^T + \cdots + \lambda_n L_n^T = 0_{n,1}.$$

Donc s'il existe ue combinaison linéaire nulle des L_i dont les coefficients ne sont pas tous nuls, alors il existe une combinaison linéaire des C_i qui est nulle et dont tous les coefficients ne sont pas nuls.
Ainsi, $(L_1^T, \dots, L_n^T)$ est liée, donc A^T n'est pas inversible.
Or A est inversible si et seulement si A^T l'est, donc A n'est pas inversible.

Notons que toutes les implications qui précèdent sont des équivalences : l'un des L_n est une combinaison linéaire des autres si et seulement si $(L_1, \dots, L_n)$ est liée.
Donc si et seulement si $(L_1^T, \dots, L_n^T)$ est liée. Soit si et seulement si A^T n'est pas inversible, donc si et seulement si A n'est pas inversible.

En particulier, si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible, et donc la famille de ses lignes est liée, donc l'une de ses lignes est combinaison linéaire des autres. Et vice-versa !

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.11

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, et supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$.

On a alors

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right) y = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)\alpha_i\right) e_i.$$

Et donc par liberté de $(e_1, \dots, e_n)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)\alpha_i = 0.$$

Notons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k$, de sorte que la relation ci-dessus s'écrit simplement $\lambda_i + S\alpha_i = 0$.
En sommant ces relations lorsque i varie de 1 à n, il vient alors

$$S + S\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \Leftrightarrow S\left(1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = 0.$$

► Si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$, alors $S = 0$, et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i + S\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$.

Ainsi, on a prouvé que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, et donc $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

► Si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = -1$, posons alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \alpha_i$, de sorte que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$.
On a alors $\lambda_i + S\alpha_i = \alpha_i - \alpha_i = 0$.
Et donc grâce aux équivalences précédemment prouvées, il vient $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$.

Puisque les α_i ne sont pas tous nuls[11], nous venons donc de prouver que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

[11] Faute de quoi leur somme serait nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.12

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ t=z-y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-y-z,y,z,z-y) = y(-1,1,0,-1)+z(-1,0,1,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \operatorname{Vect}\left((-1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\right).\end{aligned}$$

Donc $F = \operatorname{Vect}\left((-1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, et nous en avons une famille génératrice.
Remarque *: il aurait bien entendu été possible de prouver que F est un sous-espace vectoriel à l'aide de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (stabilité par combinaisons linéaires).*

Et puisque G est déjà sous forme d'un Vect, c'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Pour prouver qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, nous allons prouver que tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de G.
Soit donc $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$, et soient $u \in F$ et $v \in G$. Alors il existe des réels a,b,λ,μ tels que

$$u = a(-1,1,0,-1)+b(-1,0,1,1) \text{ et } v = \lambda(1,0,0,1)+\mu(0,1,1,0).$$

Et alors $(x,y,z,t) = u+v = (-a-b+\lambda, a+\mu, b+\mu, -a+b+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+\lambda = x \\ a+\mu = y \\ b+\mu = z \\ -a+b+\lambda = t \end{cases}$.

Après résolution de ce système d'inconnues (a,b,λ,μ), on obtient comme unique solution $a = y-z+\frac{t-x}{2}, b = \frac{t-x}{2}, \lambda = t+y-z, \mu = z+\frac{x-t}{2}$.
Donc tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit d'une unique manière comme un élément de F plus un élément de G.
Et donc $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

> **Méthode**
> Pour déterminer l'ensemble des solutions d'un tel système (2 équations, 4 inconnues), il faut choisir deux inconnues secondaires en fonction desquelles on exprime les deux autres. Il y a plusieurs choix possibles, et aucun n'est meilleur que les autres.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.13

1. Prouvons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
Par définition, $F \subset \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, et la fonction nulle est dans F, puisqu'elle vaut 0 en $x=0$ et en $x=1$.
Soient f et g deux éléments de F, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f+g$ est continue et
$$(\lambda f+g)(0) = \lambda f(0)+g(0) = \lambda f(1)+g(1) = (\lambda f+g)(1).$$
Ainsi, $\lambda f+g \in F$, et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Nous allons prouver que toute fonction continue s'écrit de manière unique comme un élément de F plus un élément de $\operatorname{Vect}(g)$.

Procédons par analyse-synthèse : soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, et supposons que $f = f_1+f_2$, avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in \operatorname{Vect}(g)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f_1 = \lambda g$.
On a alors $f(0) = f_1(0)+\lambda\cdot 0 = f_1(0)$ et $f(1) = f_1(1)+\lambda = f_1(0)+\lambda$.
Et donc $f(1) = f(0)+\lambda \Leftrightarrow \lambda = f(1)-f(0)$.
On en déduit que $f_1 = f-f_2 = f-(f(0)-f(1))\cdot g$.

> **Détails**
> On a utilisé ici le fait que $f_1 \in F$, et donc $f_1(0) = f_1(1)$.

> **Explications**
> Nous venons de prouver que si f était somme d'un élément f_1 de F et d'un élément f_2 de $\operatorname{Vect}(g)$, alors il n'y avait qu'une seule décomposition possible.
> Autrement dit, que f s'écrit **d'au plus** une manière comme un élément de F et un élément de $\operatorname{Vect}(g)$. Il reste à vérifier l'existence d'une telle décomposition.

Inversement, posons $f_2 = (f(1)-f(0))\cdot g$ et $f_1 = f-f_2$.
Alors il est évident que $f_2 \in \operatorname{Vect}(g)$, et $f_1 \in F$ car f_1 est continue car différence de fonctions continues, et

$$f_1(0) = f(0)-(f(1)-f(0))\underbrace{g(0)}_{=0} = f(0) \text{ et } f_1(1) = f(1)-(f(1)-f(0))\underbrace{g(1)}_{=1} = f(0) = f_1(0).$$

Enfin, on a bien
$$f_1+f_2 = f-f_2+f_2 = f.$$
Ainsi, f s'écrit de manière unique comme une fonction de F plus une fonction de $\operatorname{Vect}(g)$, et donc $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) = F \oplus \operatorname{Vect}(g)$.

Solution de l'exercice 19.14

Soit $x \in F + (G \cap H)$. Alors il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G \cap H$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Mais alors $x \in F + G$ car $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, et de même, $x \in F + H$.
Donc on a bien $x \in (F + G) \cap (F + H)$.

Alternative : on sait que $F + G$ et $F + H$ sont des sous-espaces vectoriels de E, donc leur intersection est encore un sous-espace vectoriel de E.
De plus, F est inclus à la fois dans $F+G$ et dans $F+H$, donc il est inclus dans leur intersection. Et de même, $G \cap H$ est inclus dans G, donc dans $F + G$, et dans H, donc dans $F + H$. Et donc dans $(F + G) \cap (F + H)$.
Donc $(F+G)\cap(F+H)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient les deux sous-espaces vectoriels F et $G \cap H$, donc il contient $F + (G \cap H)$.

Rappel
$F+G$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel qui contient à la fois F et G.

Si $F \subset G$, on a $F + G = G$, puisqu'il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient à la fois F et G.
Soit $x \in (F + G) \cap (F + H) = G \cap (F + H)$.
Alors $x \in G$, et $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in H$. Mais alors $v = x - u \in G$. Donc $v \in G \cap H$.
Et donc $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$, donc $x \in F + (G \cap H)$.
On en déduit donc que $(F + G) \cap (F + H) \subset F + (G \cap H)$, d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 19.15

1. Un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ est dans F_j si et seulement si tous les $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$ en sont racines, c'est-à-dire si et seulement si il est divisible par $P_i = \displaystyle\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}(X - i)$.
Mais puisque P_i est de degré n, le quotient de P par P_i est nécessairement de degré 1, c'est-à-dire une constante.
Et donc $F_i = \mathrm{Vect}(P_i)$: ce qui prouve à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, et qui en donne une base : c'est la famille formée du seul polynôme (non nul[12]) P_i.

[12] Une famille formée d'un seul vecteur **non nul** est libre.

2. Soient $Q_0, \dots, Q_n \in F_0 \times \dots \times F_n$ tels que $0 = Q_0 + \dots + Q_n$.
Alors, pour $i \in [\![0, n]\!]$, en évaluant cette relation en $X = i$, il vient
$$Q_0(i) + Q_1(i) + \dots + Q_n(i) = 0 \Leftrightarrow Q_i(i) = 0.$$
Mais alors Q_i, qui est de degré au plus n possède $0, 1, \dots, n$ comme racines, et donc possède $n + 1$ racines distinctes. C'est donc le polynôme nul : $Q_i = 0$.
Et donc la seule façon d'écrire le polynôme nul comme somme d'éléments des F_i est $0 = 0 + \dots + 0$.
Donc la somme $F_0 + \dots + F_n$ est directe.

3. Puisque nous savons déjà que la somme est directe, il ne reste qu'à prouver qu'elle est égale à $\mathbf{R}_n[X]$ tout entier, c'est-à-dire que tout polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ est somme d'éléments des F_i.
Soit donc $P \in \mathbf{R}_n[X]$, et supposons qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$.
Alors en évaluant en $j \in [\![0, n]\!]$, il vient $P(j) = \lambda_j P_j(j)$, soit encore $\lambda_j = \dfrac{P(j)}{P_j(j)}$.
Inversement, $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{P_i(i)} P_i$ est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $Q(j) = P(j)$.
Donc $P - Q$ possède au moins $n + 1$ racines, il est donc nul : donc $P = Q$ est bien dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_i$.
Et donc $\mathbf{R}_n[X] = F_0 + \dots + F_n = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$.

Question subsidiaire
Avez-vous remarqué que les polynômes qu'on a notés P_i sont quasiment des polynômes de Lagrange (ceux associés aux scalaires $(0, 1, \dots, n)$) ? Ils n'en diffèrent que par une constante multiplicative.

Solution de l'exercice 19.16

1. Supposons que les F_i sont en somme directe. Soit alors $k \in [\![2, n]\!]$, et soit $x \in \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k$.
Alors il existe $e_1, \dots, e_{k-1}$, avec $e_i \in F_i$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} e_i$.

Mais alors $0_E = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{e_i}_{\in F_i} + \underbrace{(-x)}_{\in F_k}$, et donc $e_1 = \cdots = e_{k-1} = -x = 0_E$, et en particulier $x = 0_E$.
Donc $\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k = \{0_E\}$.
Inversement, supposons la condition de l'énoncé vérifiée, et soient $(e_1, \dots, e_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0_E$.
Alors $\underbrace{e_n}_{\in F_n} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n-1} e_i}_{\in \sum_{i=1}^{n-1} F_i} \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap F_n$.
Donc $e_n = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n-1} e_i = 0_E$.
Puis $e_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-2} e_i \in \left(\sum_{i=1}^{n-2} F_i\right) \cap F_{n-1}$.
Donc $e_{n-1} = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n-2} e_i = 0_E$.
De proche en proche on prouve que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = 0_E$, et donc que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

Détails
Plus généralement, si u et v ne sont pas colinéaires, alors
$$\text{Vect}(u) \cap \text{Vect}(v) = \{0_E\}.$$

2. Dans $\mathbf{R}^2$, prenons $F_1 = \text{Vect}(1,0)$, $F_2 = \text{Vect}(0,1)$ et $F_3 = \text{Vect}(1,1)$.
Alors, il n'est pas dur de constater que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
Pourtant, F_1, F_2 et F_3 ne sont pas en somme directe car $(0,0) = (1,0) + (0,1) - (1,1)$.
A fortiori, l'intersection des trois sous-espaces est réduite au vecteur nul, et la somme n'est toujours pas directe...

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.17

1. p est clairement définie de $\mathbf{C}^2$ dans lui-même, donc il reste à prouver que p est linéaire.
Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbf{C}^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors
$$p(\lambda(x,y)+(x',y')) = p(\lambda x + x', \lambda y + y') = \frac{1}{5}(\lambda x + x' + 2(\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')) =$$
$$\lambda \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) + \frac{1}{5}(x'+2y', 2x'+4y') = \lambda p(x,y) + p(x',y').$$
Ainsi p est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbf{C}^2$.
2. Par définition,
$$\text{Ker} p = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : p(x,y) = (0,0)\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}\right\} = \{(-2y, y), y \in \mathbf{C}\} = \text{Vect}(-2,1).$$
On en déduit qu'une base de $\text{Ker} p$ est donnée par $(-2,1)$. En particulier, $\text{Ker} p$ est de dimension 1, et donc p n'est pas injective.
3. D'après le théorème du rang, $\text{Im} p$ est de dimension 1, donc est engendré par n'importe lequel de ses vecteur non nuls.
Par exemple, $p(5,0) = (1,2) \in \text{Im} p$, donc une base de $\text{Im} p$ est formée par $(1,2)$.
4. Soit $(x,y) \in \mathbf{C}^2$. On a
$$\begin{aligned} p(p(x,y)) &= p\left(\frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)\right) \\ &= \frac{1}{5}p(x+2y, 2x+4y) = \frac{1}{25}(x+2y+2(2x+4y), 2(x+2y)+4(2x+4y)) \\ &= \frac{1}{25}(5x+10y, 10x+20y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) = p(x,y). \end{aligned}$$
Nous avons donc bien $p \circ p = p$.
p est donc un projecteur, de sorte que $\text{Ker} p$ et $\text{Im} p$ sont supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$.

Alternative
Nous pourrions également retrouver ce résultat en prouvant par exemple que la juxtaposition d'une base de $\text{Ker} p$ et d'une base de $\text{Im} p$ est une base de $\mathbf{C}^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.18

1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbf{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') + \lambda y + y', \lambda x + x' + \lambda y + y' - 3(\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(2x+y) + (2x'+y'), \lambda(x+y-3z) + (x'+y'-3z')) \\ &= \lambda(2x+y, x+y-3z) + (2x'+y', x'+y'-3z') \\ &= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire.

Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(x,y,z) = 0_{\mathbf{R}^2} = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (2x+y, x+y-3z) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-y \\ y=-3z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = -3z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{3}{2}z, -3z, z\right) = z\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right) \in \operatorname{Vect}\left(\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right)\right). \end{aligned}$$

Donc la famille formée du seul vecteur $\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right)$ est génératrice de $\operatorname{Ker} f$, étant formée d'un seul vecteur non nul elle est libre donc c'est une base.

Par ailleurs, nous savons que $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et donc en est génératrice.
Donc $f(1,0,0) = (2,1), f(0,1,0) = (1,1), f(0,0,1) = (0,-3)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
La question est donc de savoir si elle est libre ou non.
Or ici on a $(2,1) = 2(1,1) - \frac{1}{3}(0,-3)$.
Donc $(2,1) \in \operatorname{Vect}((1,1),(0,-3))$. On en déduit que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1),(1,1),(0,-3)) = \operatorname{Vect}((1,1),(0,-3)).$$

Donc la famille $(1,1), (0,-3)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, puisqu'elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre et donc est une base de $\operatorname{Im} f$.

2. On vérifie que f est bien linéaire.
Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (2x, 0, y+z) = (0,0,0) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y+z=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} &\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,y,-y) = y(0,1,-1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \in \operatorname{Vect}(0,1,-1). \end{aligned}$$

Donc la famille formée du seul vecteur $(0,1,-1)$ est génératrice de $\operatorname{Ker} f$, étant formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre donc en est une base.

Comme précédemment, $f(1,0,0) = (2,0,0), f(0,1,0) = (0,0,1), f(0,0,1) = (0,0,1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Les deux derniers vecteurs étant égaux, on peut en supprimer un, de sorte que $(2,0,0), (0,0,1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Cette famille est évidemment libre, donc est une base de $\operatorname{Im} f$.

3. On a $f(0,0,0) = (1,0,0) \neq 0_{\mathbf{R}^3}$, donc f n'est pas linéaire.
4. On a $f(0_{\mathbf{R}[X]}) = X \neq 0_{\mathbf{R}[X]}$, donc f n'est pas linéaire.

Remarque

À ce stade, on a dit que $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

la recherche d'une base se fait donc de manière similaire à ce qui a été fait dans l'exercice 7.

Méthode

Encore une fois : si vous trouvez (comme je le fais ici) une combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui est nulle, profitez-en. Et sinon, partez de la définition de la liberté, avec trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que la combinaison linéaire

$$\lambda_1(2,1) + \lambda_2(1,1) + \lambda_3(0,-3)$$

soit nulle et résolvez le système qui apparaît alors.
Si $(0,0,0)$ en est l'unique solution, alors la famille est libre.
Sinon vous trouverez une solution non triviale qui vous donnera une relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs.

5. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(-1)+2X(\lambda P+Q)' = \lambda(P(-1)+2XP')+Q(-1)+2XQ' = \lambda f(P)+f(Q).$$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$. Alors

$$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (-a+b-c+d) + 2(3aX^3 + 2bX^2 + cX) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 0 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ -a+b-c+d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Base de $\{0_E\}$? Dans ce cas, pas la peine de chercher une base de $\{0_E\}$, il n'y en a pas.

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, de sorte que f est injective.
Une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ est

$$f(1) = 1, f(X) = -1 + 2X, f(X^2) = 1 + 4X^2, f(X^3) = -1 + 6X^3.$$

Puisqu'il s'agit de polynômes de degrés deux à deux distincts, ils forment une famille libre de $\mathbf{R}_3[X]$, et donc une base de $\operatorname{Im} f$.

Remarque Avec un peu plus de travail, on pourrait prouver que $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}_3[X]$, et donc que f est bijective.

6. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors par linéarité de la trace,

$$f(\lambda M + N) = \operatorname{tr}(\lambda M + N)I_2 = (\lambda \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N))I_2 = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est linéaire.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors

$$M \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow a+d = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
Il s'agit d'une famille libre car car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois réels tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2$$

alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Donc il s'agit d'une base de $\operatorname{Ker} f$.

⚠ Attention ! Pour plus de deux vecteurs, plus question d'évoquer un argument du type «ces matrices ne sont pas proportionnelles !

Pour l'image, on peut noter que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(I_2)$. Et puisque $I_2 = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \operatorname{Im} f$, alors $\operatorname{Vect}(I_2) \subset \operatorname{Im} f$, de sorte que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(I_2)$.
Donc la famille formée de la seule matrice I_2 est génératrice de $\operatorname{Im} f$, et donc[13] est une base de $\operatorname{Im} f$.

[13] Formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre.

7. La présence du carré doit nous laisser penser que f n'est pas linéaire. Reste à le prouver, et pour une fois on ne peut pas s'en tirer en calculant l'image de la matrice nulle, qui ici est bien nulle.
Notons plutôt que $f(I_n) = 3I_n$, $f(2I_n) = 8I_n \neq f(I_n) + f(I_n)$. Donc f n'est pas linéaire.

8. f est bien linéaire, car carré[14] de l'endomorphisme $P \mapsto P'$ de $\mathbf{R}[X]$.
Et nous savons que pour $P \in \mathbf{R}[X]$, $P'' = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \deg P \leqslant 1 \Leftrightarrow P \in \mathbf{R}_1[X]$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_1[X]$, qui a pour base $(1, X)$.

[14] Au sens de la composition, qui est la seconde loi de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

Bien que ce ne soit pas demandé, il est facile de se convaincre que f est surjective. Par exemple car si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$ est un polynôme tel que $Q'' = P \Leftrightarrow f(Q) = P$.

Donc $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}[X]$, qui a pour base la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.
On peut aussi utiliser la base canonique de $\mathbf{R}[X]$, de sorte que

$$(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^k), \dots) = (0, 0, 2, 6X, 12X^2, \dots, k(k-1)X^{k-2}, \dots)$$

est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Une fois qu'on enlève les deux premiers qui sont nuls, on obtient une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, qui est donc libre, et par conséquent est une base de $\operatorname{Im} f$.

Solution de l'exercice 19.19

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha$ si et seulement si $f_\alpha(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + \alpha z + t &= 0 \\ x + z + t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t &= 0 \\ x + y + \alpha z + t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t &= 0 \\ y + z &= 0 \\ (\alpha - 2)z &= 0 \end{cases}$$

▸ Si $\alpha \neq 2$, alors de la dernière équation on déduit $z = 0$. Et donc $y = 0$, et donc $x = -t$.
Donc $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-t, 0, 0, t) = t(-1, 0, 0, 1) \in \operatorname{Vect}(-1, 0, 0, 1)$.
Donc une base de $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est la famille formée du seul vecteur $(-1, 0, 0, 1)$.

De plus, on sait alors l'image de la base canonique[15] de $\mathbf{R}^4$ par f_α est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f_\alpha$. C'est la famille

$$\big(f_\alpha(1, 0, 0, 0), f_\alpha(0, 1, 0, 0), f_\alpha(0, 0, 1, 0), f_\alpha(0, 0, 0, 1)\big) = \big((1, 1, 0), (1, 0, 1), (\alpha, 1, 1), (1, 1, 0)\big).$$

Le premier et le dernier vecteur étant égaux, il ne sert à rien de les garder les deux.
Reste donc à vérifier que la famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (\alpha, 1, 1))$ est libre.
Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(\alpha, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - 2)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$.

Puisque $\alpha - 2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si bien que la famille est libre, et donc est une base de $\operatorname{Im} f_\alpha$.

▸ Si $\alpha = 2$, alors le système obtenu précédemment pour $\operatorname{Ker} f_\alpha$ devient

$$\begin{cases} x + z + t &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - t \\ y = -z \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-z - t, -z, z, t) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = z(-1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}((-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Cette famille de deux vecteurs non colinéaires est libre, et donc est une base de $\operatorname{Ker} f_2$.

Et comme précédemment, la famille $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f_2$.
Cette fois elle n'est pas libre puisque $(2, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1)$.
Donc $\operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, et cette fois, il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc d'une famille libre, et donc d'une base de $\operatorname{Im} f_2$.

[15] Ou de n'importe quelle autre famille génératrice de $\mathbf{R}^4$.

Solution de l'exercice 19.20

Commençons par la linéarité : soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)') = (\lambda P(0)+Q(0), \lambda P'+Q') = \lambda(P(0), P')+(Q(0), Q') = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q).$$

Donc φ est bien linéaire.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $\varphi(P) = 0$, c'est-à-dire $P(0) = 0$ et $P' = 0$.

Puisque $P' = 0$, P est constant, et puisque $P(0) = 0$, P est le polynôme nul.
Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$, de sorte que φ est injective.
Soit à présent $(\lambda, Q) \in \mathbf{K}\times\mathbf{K}[X]$, avec $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, et soit $P = \lambda + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$.
Alors $P(0) = \lambda$ et $P' = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = Q$, de sorte que $\varphi(P) = (\lambda, Q)$.
Donc φ est surjective, et donc est un isomorphisme.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.21

1. Supposons que $g\circ f = 0$, et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et donc $g(y) = g(f(x)) = 0_G$. Et alors, $y \in \operatorname{Ker} g$, de sorte que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

   Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} p$.
2. Si p est un projecteur, nous avons déjà prouvé en cours que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

   Inversement, si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, alors par la question 1,
$$(p - \mathrm{id}_E)\circ p = 0 \Leftrightarrow p\circ p - p = 0 \Leftrightarrow p\circ p = p$$
   donc p est un projecteur.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.22

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et alors
$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$
Donc $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$, et donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, de sorte que $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

Méthode

Un tel exercice n'a rien de difficile, mais il faut être très méthodique, et maîtriser parfaitement ses définitions.
Par exemple, comment prouver que $\operatorname{Ker} f$ est stable par g ? Cela signifie que si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Mais que veut dire ce dernier point ? Que $g(f(x)) = 0_E$. Il est donc naturel de calculer $g(f(x))$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.23

Nous savons que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
Autrement dit, si $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) = x_1$.
Alors $q(x) = \mathrm{id}(x) - p(x) = x - x_1 = x_2$.
Ainsi, q est la projection sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$, et donc $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$.
On en déduit donc que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Plus généralement

De la même manière, on prouve que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{id} - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.24

Supposons que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, et soit alors $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
On a donc $f(x) = 0_E$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
Mais alors $f^2(y) = f(x) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
Par conséquent, $y \in \operatorname{Ker} f$, et donc $x = f(y) = 0_E$.
On en déduit que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque étant toujours vraie[16], on a bien l'égalité $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

[16] Tout sous-espace vectoriel de E contient 0_E.

Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Pour commencer, si $f(x) = 0_E$, alors $f^2(x) = 0_E$, de sorte que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, et soit $y = f(x)$.
Alors $y \in \operatorname{Im}(f)$ par définition de l'image, et puisque $f(y) = f^2(x) = 0_E$, de sorte que $y \in \operatorname{Ker}(f)$.
Donc $y \in \operatorname{Im}(f)\cap\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Et ainsi, $y = f(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$, d'où l'égalité.

Remarque

Cette inclusion est vraie pour tout endomorphisme, sans hypothèse supplémentaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.25

Procédons par analyse-synthèse pour prouver que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$, et supposons que $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $z \in \operatorname{Vect}(u)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $z = \lambda\cdot u$.

En appliquant φ, il vient $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(y)}_{=0} + \lambda \underbrace{\varphi(u)}_{\neq 0}$, égalité qui a lieu dans $\mathbf{K}$.

Et donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$.

Et alors nécessairement, $y = x - z = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$.

Donc si une telle décomposition existe, elle est unique.

Inversement, posons $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$ et $z = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \cdot u$.

Alors $z \in \mathrm{Vect}(u)$ puisqu'il s'agit d'un multiple de u.

Et $\varphi(y) = \varphi\left(x - \underbrace{\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}}_{\in \mathbf{K}} u \right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$.

Donc y est bien dans $\operatorname{Ker} \varphi$.

Et bien entendu, on a $x = y + z$, de sorte que x s'écrit d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ et d'un élément de $\mathrm{Vect}(u)$.

Et donc x s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ et d'un élément de $\mathrm{Vect}(u)$: $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.26

1. Commençons par prouver que π est linéaire.
   Soient donc $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\pi(\alpha P + Q) &= \sum_{i=0}^{n} (\alpha P + Q)(\lambda_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha P(\lambda_i) + Q(\lambda_i)) L_i \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i + \sum_{i=0}^{n} Q(\lambda_i) L_i = \alpha \pi(P) + \pi(Q).\end{aligned}$$

Linéarité de l'évaluation.

   Puisque les L_i sont tous de degré n, il est évident que π est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.
   Mais par ailleurs, pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a, d'après un résultat du cours sur les polynômes de Lagrange,

$$\pi(P) = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i = P.$$

   Donc pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\pi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$ et donc $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$, de sorte que $\pi^2 = \pi$.
   Donc π est un projecteur.

   Nous avons déjà prouvé que son image est incluse dans $\mathbf{R}_n[X]$, et puisque l'image d'un projecteur est exactement l'ensemble de ses points fixes, nous venons donc de prouver que $\mathbf{R}_n[X] \subset \operatorname{Im}\pi$.
   Donc $\operatorname{Im}\pi = \mathbf{R}_n[X]$.

   Enfin, $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base de $\mathbf{R}_n[X]$, il s'agit en particulier d'une famille libre, et donc pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on a

$$P \in \operatorname{Ker}\pi \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\lambda_i) = 0.$$

   Donc $\operatorname{Ker}\pi$ est l'ensemble des polynômes qui possèdent tous les λ_i comme racines.

2. Puisque π est un projecteur, nous savons que $\operatorname{Im}\pi$ et $\operatorname{Ker}\pi$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.
   Nous avons déjà prouvé que $\operatorname{Im}\pi = \mathbf{R}_n[X]$, et un polynôme possède les λ_i comme racines si et seulement si il est divisible par $\prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i)$, donc $\operatorname{Ker}\pi = \left\{ Q \prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i),\ Q \in \mathbf{R}[X] \right\}$.
   Ce qui prouve bien le résultat demandé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.27

Commençons par noter que puisque $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q \circ p = 0$.
Le fait que r soit linéaire est évident, prouvons qu'il s'agit bien d'un projecteur, c'est-à-dire que $r \circ r = r$.
On a

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 + q^2 - (p \circ q)^2 + p \circ q + q \circ p - p^2 \circ q - q \circ p \circ q - p \circ q \circ p - p \circ q^2 \\ &= p + q - \underbrace{p \circ q \circ p \circ q}_{=0} + p \circ q + \underbrace{q \circ p}_{=0} - p \circ q - \underbrace{q \circ p \circ q}_{=0} - \underbrace{p \circ q \circ p}_{=0} - p \circ q \\ &= p + q - p \circ q = r. \end{aligned}$$

Donc r est un projecteur de E.
On a $p \circ r = p^2 + p \circ q - p^2 \circ q = p + p \circ q - p \circ q = p$.
Donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p$, puisque si $r(x) = 0_E$, $p(x) = p(r(x)) = p(0_E) = 0_E$.
De même, $q \circ r = q$, et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} q$.
Et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, alors $p(x) = q(x) = 0_E$, donc $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, et donc il y a égalité.

Il est clair que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ puisque $q(x) = \underbrace{p(x) - p(q(x))}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Im} q}$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, alors $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q$.
Mais alors $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = x_2$, puisque $q \circ p = 0$.
Donc

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - (p \circ q)(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - p(x_2) \\ &= x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x. \end{aligned}$$

Et donc $x \in \operatorname{Im} r$.
Donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
Notons qu'il est possible d'aller un peu plus loin et de prouver que cette somme est directe.
En effet, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors, puisque $x \in \operatorname{Im} q$, $q(x) = x$. Mais puisque $x \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$, et donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

Détails
C'est la question 1 de l'exercice 21.

Rappel
L'image d'un projecteur est l'ensemble de ses points fixes.

Développements limités

20

Nous avons déjà rencontré la notion de développement limité d'ordre 1 pour les fonctions dérivables.
Il s'agissait alors d'approximer, au voisinage de a, une fonction f par sa tangente en a. C'est-à-dire par un polynôme de degré 1
Les développements limités viennent généraliser cette approximation, en donnant des polynômes de degré quelconque qui approchent localement à f.

Les développements limités nous fourniront notamment un outil pour résoudre certaines des formes indéterminées pour lesquelles les équivalents usuels ne suffisaient pas.

Même si dans ce chapitre, nous nous concentrons essentiellement sur la pratique du calcul, les développements limités n'ont pas pour seul utilité de vous faire calculer. Vous serez en permanence amenés à utiliser des développements limités, non seulement pour trouver des équivalents ou calculer des limites, mais aussi plus tard pour étudier l'existence de certaines sommes infinies, de certaines intégrales, ou encore pour étudier l'allure de certaines courbes. Ne négligez donc pas ce chapitre, il est central en analyse.

20.1 Définitions, premières propriétés

Définition 20.1 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie I de $\mathbf{R}$, soit a un réel adhérent à I, et soit $n \in \mathbf{N}$.
On dit que f possède un **développement limité d'ordre n au voisinage de a** s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

En abrégé
On notera souvent $DL_n(a)$ pour désigner un développement limité à l'ordre n en a.

Pour le dire autrement, f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o\left((x-a)^n\right)$.

Exemples 20.2

► Une formule bien connue nous dit que pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Mais $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
Donc $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$ est un développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$.

► Notons que chercher un développement limité en a de f revient, quitte à composer par $x-a$, à chercher le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto f(x+a)$.
Par exemple, nous connaissons le développement limité d'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$: c'est $x + o(x)$.
Mais alors pour $x \geqslant 0$, $\ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{=} x - 1 + o(x-1)$.
Nous avons là un développement limité à l'ordre 1 de ln au voisinage de 1.

Notons tout de suite que si f possède un développement limité à l'ordre n, alors elle possède un développement limité à tout ordre $m \leqslant n$.

En effet,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m + \underbrace{c_{m+1}(x-a)^{m+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)}_{=o((x-a)^m)} \\ &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m + o\left((x-a)^m\right). \end{aligned}$$

On dit alors qu'on a **tronqué** le développement limité à l'ordre m.

Rappel
En 0, si $k \leqslant p$, alors

$$x^p \underset{x\to 0}{=} x^k.$$

Par changement de variable,

$$(x-a)^p \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^k\right).$$

Proposition 20.3 : *Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, alors celui-ci est unique : si*

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \\ &\underset{x\to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

alors $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $b_i = c_i$.
La fonction polynomiale $x \mapsto c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelée ***partie régulière*** *du développement limité.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que les deux développements limités sont différents, et soit p le plus petit entier de $[\![0,n]\!]$ tel que $b_p \neq c_p$.
Alors, en tronquant les développements limités à l'ordre p, il vient

$$f(x) \underset{x\to a}{=} b_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \underset{x\to a}{=} c_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$$

et donc par différence, $(b_p - c_p)(x-a)^p \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^p\right)$, ce qui est impossible puisque $b_p - c_p \neq 0$. □

Pas convaincu ?
Calculez la limite du quotient !

Un développement limité nous donne tout de suite un équivalent :

Proposition 20.4 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de $a \in I$: $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$.*
On suppose que la partie régulière du développement limité n'est pas nulle, et on note p le plus petit entier tel que $c_p \neq 0$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p.$$

Démonstration. Par hypothèse, $p \leqslant n$.
Divisons la relation indiquée par $c_p(x-a)^p$:

$$\frac{f(x)}{c_p(x-a)^p} = 1 + \frac{c_{p+1}}{c_p}(x-a) + \cdots + \frac{c_n}{c_p}(x-a)^{n-p} + \frac{1}{c_p}\frac{o((x-a)^{n-p})}{(x-a)^{n-p}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

□

C'est là une grande partie de l'intérêt des développements limités : ils vont nous aider à trouver des équivalents simples[1] de certaines quantités.
Notons tout de suite que ce résultat ne vaut que pour des fonctions dont on a poussé le développement limité à un ordre suffisamment important pour que sa partie régulière soit non nulle.

[1] Car polynomiaux.

Exemple 20.5

En utilisant le $DL_1(0)$ de l'exponentielle, et en composant à droite par $x \mapsto x^2$, on obtient $e^{x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$, qui est donc le $DL_2(0)$ de e^{x^2}.

Et alors $e^{x^2} - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}x^2$.
Un développement limité d'ordre 1 n'aurait en revanche pas suffit à déterminer un

équivalent, puisque ce développement limité possède une partie régulière nulle :
$e^{x^2} - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x) - 1 + o(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Proposition 20.6 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et soit $a \in I$. Alors :*

1. *f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de a si et seulement si elle est continue en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.*
2. *f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a si et seulement si elle est dérivable en a, et alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.*

Démonstration.

1. f possède un développement limité d'ordre 0 au voisinage de a si et seulement si elle possède une limite en a. C'est le cas si et seulement si f est continue en a, et alors cette limite vaut $f(a)$.
2. Si f est dérivable en a, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} f'(a) + o(1).$$

Et donc $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a)+o(x-a)$ donc $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$, si bien que f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a.

Inversement, si elle possède un tel développement limité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + o(x-a),$$

alors $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + o(1)$, de sorte que $c_0 = f(a)$.
Et alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} c_1 + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c_1$.

□

⚠ Pour $n \geqslant 2$, il n'y a pas de lien entre l'existence d'un développement limité d'ordre n au voisinage de a et le fait que f soit n fois dérivable.

Exemple 20.7

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin\frac{1}{x} \end{array} \right.$.
Alors f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
On a alors, pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2 \sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f'(x) = -x\cos\frac{1}{x} + 3x^2\sin\frac{1}{x}$, qui tend vers 0 en 0.
Donc f' est continue sur $\mathbf{R}_+$.
En revanche, $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = -\cos\dfrac{1}{x} + 3x\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, donc f n'est pas deux fois dérivable.

Par ailleurs, $\sin\frac{1}{x}$ étant borné, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} O\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.
Et donc f possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, qui est simplement $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$.
La fonction f est donc un exemple de fonction possédant un développement limité d'ordre 2 en 0 et qui n'est pas deux fois dérivable sur un voisinage de 0.

Détails
Produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.

Proposition 20.8 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ensemble symétrique, tel que 0 soit adhérent à I.*
On suppose que f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + \cdots + c_n x^n + o(x^n).$$

1. *Si f est paire, alors tous les coefficients de degré impair de son développement limité sont nuls : si k impair, $c_k = 0$.*
2. *Si f est impaire, alors tous les coefficients de degré pair de son développement limité sont nuls : si k pair, $c_k = 0$.*

Autrement dit
La partie régulière a même parité que f.

Démonstration. Il s'agit essentiellement de se rappeler que la composition à droite est autorisée dans les o, et donc que si on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

alors $f(-x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1(-x) + \ldots c_n(-x)^n + o((-x)^n) = c_0 - c_1 x + \cdots + (-1)^n c_n x^n + o(x^n)$.
Ceci prouve notamment que la fonction $x \mapsto f(-x)$ possède un développement limité d'ordre n en 0.
Si f est paire, alors $f(x) = f(-x)$, et donc par unicité du développement limité d'ordre n, par identification des coefficients : $c_1 = -c_1, c_3 = -c_3, \ldots$, et donc tous les coefficients de degré impair sont nuls.
On raisonne de même si f est impaire. □

20.2 Développements limités usuels

20.2.1 La formule de Taylor-Young

Le résultat qui suit est admis pour l'instant, car il nécessite un résultat[2] qui sera prouvé dans le chapitre de dérivation.

[2] Le théorème des accroissements finis.

Proposition 20.9 (Intégration de développements limités) : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors F possède un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, donné par

$$\begin{aligned} F(x) &\underset{x\to a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

⚠ Attention !
Ne pas oublier la constante d'intégration, qui dépend de la primitive choisie.

⚠ Il n'y a pas de résultat analogue sur la dérivation des développements limités : dériver un développement limité de f ne fournit pas toujours un développement limité de f'.

Définition 20.10 – Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est n fois dérivable, et que $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque. Notons tout de suite qu'une fonction qui est $n+1$ fois dérivable est automatiquement de classe $\mathscr{C}^n$. En effet, elle est n fois dérivable, et $f^{(n)}$ est encore dérivable, donc en particulier est continue.
Par conséquent, une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Nous reviendrons en détail sur la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dans le chapitre de dérivation.

Théorème 20.11 (Formule de Taylor-Young) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, donné par*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, nous avons déjà prouvé ce résultat.
Supposons donc le résultat vrai pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$, et soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
Alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$, et donc par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

Mais alors, par primitivation[3] de développement limité,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

[3] Ce mot n'existe pas, mais il est tellement pratique !

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ au voisinage de a, f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a, donné par la formule annoncée. □

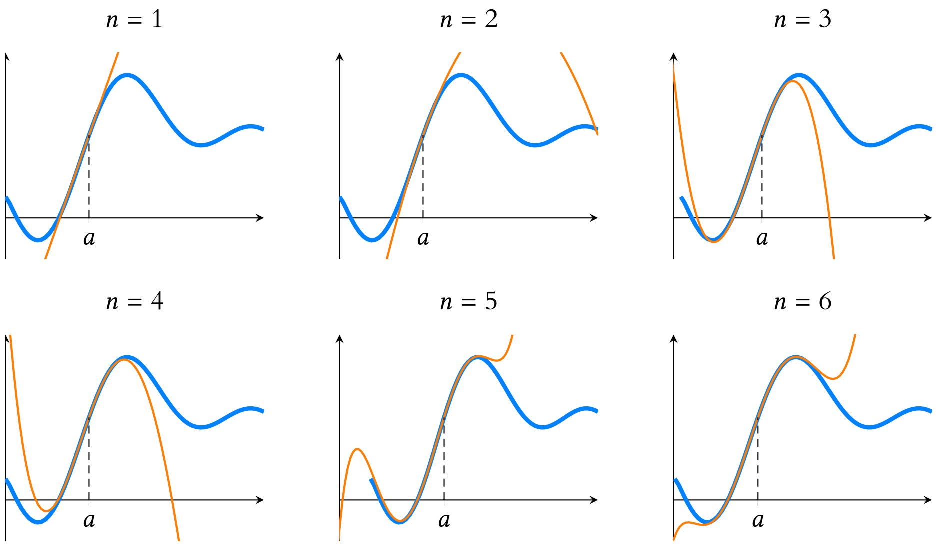


FIGURE 20.1 – Les premiers développements limités d'une fonction f.
On constate qu'au voisinage de a, f est très bien approximée par ses développements limités, et que plus n est grand, plus l'approximation reste correcte «loin» de a.

Remarques. ► Pour $n = 1$, on retrouve bien la formule déjà vue précédemment.
► En particulier, une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ possède des développements limités de tout ordre en tout point.
► Le lien avec la formule de Taylor polynomiale est assez évident. La principale différence

vient du fait que cette formule ne s'applique pas qu'aux fonctions polynomiales.
Le reste (le $o((x-a)^n)$) vient donc quantifier la différence entre f et la partie régulière de son développement limité, alors que pour Taylor polynomial, pour un ordre suffisamment grand, on avait directement une égalité entre f et son développement limité.

20.2.2 Développements limités usuels

Tous les développements limités qui suivent sont à connaître **par cœur**[4].

[4] Et généralisent très largement les développements limités d'ordre 1 que vous connaissiez déjà.

Théorème 20.12 (Développements limités usuels au voisinage de 0) :
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

- $$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
- $$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
- $$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- $$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$
- $$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + o\left(x^{2n+2}\right)$$
- $$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$
- $$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$
- $$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Astuce
Dans le développement limité de l'exponentielle, on ne garde que les termes de degré pair (car cos est pair), avec alternance de signe.

Astuce
Idem que pour le cos, mais avec les termes de degré impair.

Astuce
Si $\alpha \in \mathbf{N}$, alors
$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$
n'est autre que le coefficient binomial $\binom{\alpha}{k}$.
On retrouve ainsi une formule qui ressemble beaucoup au binôme de Newton.

Astuce
On ne garde que les termes de degré pair (car ch est paire) du DL de e^x.

Remarquons que le développement de $(1+x)^\alpha$ nous fournit notamment

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdot\frac{3-2n}{2}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{-1}{2}\dfrac{-3}{2}\dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n).$

Démonstration. La totalité de ces développements limités peuvent se prouver à l'aide de la formule de Taylor, même si les preuves données ci-dessous emploient parfois d'autres méthodes.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$. En particulier, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, et donc

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

2. Rappelons une formule classique : pour $x \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
Et donc $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
Or au voisinage de 0, $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
3. Il suffit de changer[5] x en $-x$ pour obtenir le développement de $\dfrac{1}{1+x}$.
4. Notons que $x \mapsto \ln(1+x)$ est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0.
Et donc, en intégrant le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$, il vient

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

5. Rappelons que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de cos est $x \mapsto \cos\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)$, et donc en particulier,
$\cos^{(k)}(0) = \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.
Donc par la formule de Taylor-Young, à l'ordre $2n+1$, qui s'applique car cos est $\mathscr{C}^\infty$, et donc en particulier $\mathscr{C}^{2n+1}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \cos^{(2p)}(0)\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

6. C'est le même principe.
7. La dérivée $k^{\text{ème}}$ en de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, qui en 0 vaut $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$.
La formule de Taylor permet alors de conclure.
8. Une récurrence immédiate prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, ch est k fois dérivable, que $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{ch}$ si k est pair, et $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{sh}$ si k est impair.
Donc par la formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\mathrm{ch}^{(k)}(0)}{k!}x^k + o\left(x^{2n+1}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{pair}}}^{2n+1} \frac{x^k}{(k)!} + o(x^{2n+1}) \\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

[5] Opération qui est permise, nous avons déjà justifié ceci dans le chapitre 18.

Remarque
Notons que ce DL ne contenant pas de termes de degré impair, il ne coûte pas plus cher de le donner à l'ordre $2n+1$ qu'à l'ordre $2n$, seul le o change.

9. Sur le même principe, dans $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, les termes pairs se simplifient, et il ne reste donc que les termes de degré impair de l'exponentielle.

□

Ne sont pas à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement : les développements limités en 0 des fonctions trigonométriques réciproques.
On sait que Arctan est la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),$$

Détails C'est de la composition : on a remplacé les x par x^2 dans le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$.

et donc par intégration,

$$\text{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\text{Arctan}\, 0}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Et de même, Arcsin est la primitive qui s'annule en 0 de

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

de sorte que

$$\text{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\text{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots(2n)(2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

On peut faire un petit peu mieux en se souvenant que

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{(1\cdot 2\cdots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Et donc $\text{Arcsin}\, x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k(2k+1)}\binom{2k}{k}x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$.
On obtient le développement limité de Arccos sur le même principe, ou à l'aide de la relation $\text{Arcsin} + \text{Arccos} = \dfrac{\pi}{2}$.
Si la fonction tangente possède des développements limités en 0 à tout ordre par la formule de Taylor, il est difficile de donner une formule close pour son développement limité d'ordre n.
En revanche, il est bon de connaître son développement limité à l'ordre 3 :

Remarque Une telle formule existe, mais elle est compliquée, et fait apparaître une suite classique (et mystérieuse) : les nombres de Bernoulli.

Proposition 20.13 : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

Démonstration. Si la formule de Taylor s'applique, personne n'a envie de calculer la dérivée troisième de la tangente...
Notons plutôt que nous savons déjà, par la formule de Taylor à l'ordre 1 que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Et donc $\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} (x + o(x))^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$.
Mais $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$, donc par intégration de développement limité,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Notons que cette méthode permettrait d'aller plus loin[6] *: maintenant que nous avons le* $DL_3(0)$ *de* tan, *on peut en déduire le* $DL_4(0)$ *de* $1 + \tan^2$, *puis intégrer...* □

[6] Et nous le ferons en TD.

20.3 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous ne ferons aucune théorie, et conformément au programme officiel il s'agit surtout de comprendre sur des exemples comment bien calculer avec des développements limités.

20.3.1 Somme

La somme de développements limités ne pose pas de problème, en gardant à l'esprit que la somme d'un $DL_n(a)$ de f et d'un $DL_m(a)$ de g, avec $m \geqslant n$, ne donne qu'un développement limité à l'ordre n de $f+g$.
En effet, les termes de degré supérieur strict à n sont «absorbés» par le $o\left((x-a)^n\right)$.

Exemple 20.14

Cherchons le $DL_3(0)$ de $\operatorname{Arctan}(x) + 2\ln(1+x)$.
On a $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Et $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Donc le développement limité de la somme est

$$\operatorname{Arctan}(x) + 2\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 3x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

20.3.2 Produits

Les produits ne posent pas non plus de difficultés. Notons tout de même que lorsqu'on multiplie deux développements limités à l'ordre n, des termes d'ordre $n+1$ ou plus risquent d'apparaître. On n'oubliera donc pas de tronquer le développement limité obtenu : lorsqu'on fait le produit de deux développements limités d'ordre n tous les termes en $(x-a)^{n+1}$, $(x-a)^{n+2}$, etc ne sont pas pertinents car ils sont «absorbés» par le $(x-a)^n$.

> ⚠ **Attention !**
> On n'en déduira pas non plus un DL_{2n} à l'aide du produit de deux DL_n.

Exemple 20.15

Cherchons le $DL_2(0)$ de $e^x\sqrt{1+x}$. On a

$$\begin{aligned} e^x\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2) + \underbrace{\frac{1}{8}x^3 + o(x^3) - \frac{x^4}{16} + o(x^4)}_{=o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

> ⚠ **Attention !**
> Soyez attentifs dans les calculs, ici les termes de degré 2 proviennent de 3 endroits : les deux termes de degré 2 de chacun des facteurs, et le produit des deux termes de degré 1.

Ceci s'applique bien entendu à l'obtention du développement limité d'une puissance.

Exemple 20.16

On a

$$\begin{aligned} \cos^2 x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)^2 \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\cos^3 x \underset{x\to 0}{=} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o\left(x^4\right).$$

> **Parité**
> Notons que la fonction $\cos^3$ étant paire, il n'est pas surprenant (et même il était prévisible) qu'il n'y ait aucun terme de degré impair.

20.3.3 Composition

Comme tout ce que nous avons dit sur les compositions de o reste valable ici, on peut bien entendu composer des développements limités.

Exemple 20.17

Cherchons le $DL_4(0)$ de $\ln(1+\sin(x))$. Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin(x) - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{4} + o\left(\sin x^4\right).$$

Or, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\sin^4 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, et donc $o\left(\sin^4 x\right) = o\left(x^4\right)$.

De plus, $\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - 2\frac{x^4}{6} + o(x^4)$ et

$$\sin^3(x) = \sin^2(x)\sin x \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^4).$$

$$\sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\sin^2 x\right)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^4}{12} + o(x^4).\end{aligned}$$

Un bon moyen de présenter les calculs est de faire un tableau avec $DL_4(0)$ des puissances successives de $\sin x$, et dans lequel on ne s'embête pas avec les o.

$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6}$
$\sin^2(x)$	$x^2 - \frac{x^4}{3}$
$\sin^3(x)$	x^3
$\sin^4(x)$	x^4

Chacune des lignes de ce tableau est alors obtenue en multipliant la ligne précédente par la première ligne.

Un cas très particulier de composition : les quotients de développements limités.
Notons tout de suite que le quotient de deux fonctions admettant un développement limité en a n'admet pas forcément de développement limité, même à l'ordre 0.
Par exemple, $\frac{e^x}{\sin x}$ n'a pas de limite en 0, et donc ne peut pas posséder de développement limité à aucun ordre en 0.
Malgré tout, nous serons souvent amenés à étudier des développements limités de quotients, l'outil fondamental dans ce cas étant alors le développement limité de $\frac{1}{1 \pm x}$, qui nous ramène à de la composition/du produit de développements limités.

Exemples 20.18

▸ Cherchons un $DL_4(0)$ de th. On a $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$ et

$$\text{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \text{ et } \text{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}$.

En se souvenant que $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o(u^4)$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^3\\ &\quad+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4+o\left(\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

Et donc par produit,

$$\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o\left(x^4\right)\right) = x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).$$

Oui, je sais ce que vous pensez : tous ces calculs pour en arriver là ? On avait vraiment besoin du $\frac{5}{24}x^4$?
Non, pas si on s'y prend bien, mais c'est la suite...

► Cherchons un $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

On a $e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$.

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{2x}} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\left(x+x^2+\frac{2}{3}x^3\right)+\left(x+x^2\right)^2-x^3+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Dans le cas d'un dénominateur qui tend vers 0, cette méthode fonctionne encore dans la plupart des cas, mais il y a des précautions à prendre.

Exemple 20.19

Cherchons le $DL_2(0)$ de $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.

On sait que $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ et $e^x-1 \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)$.

Donc dans le quotient $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$, on peut simplifier numérateur et dénominateur par x.

On prendra alors garde au fait que ceci diminue les ordres des développements limités.

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\end{aligned}$$

On va à l'ordre 3 car la simplification par x va faire baisser les ordres d'une unité.

$$\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1-\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

20.3.4 Optimisation des calculs

Un premier bon réflexe, pour éviter ce qui s'est produit sur th peut être de s'intéresser à la parité[7] de la fonction qui nous intéresse.
Par exemple, si on cherche, comme sur l'exemple de th un développement limité à l'ordre 4 en 0, on sait qu'il suffit d'obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0.

[7] Dans le cas de développements limités en 0.

Une autre bonne habitude est, dans les produits, de s'intéresser au degré du premier terme non nul[8].
Par exemple, si on cherche un $DL_3(0)$ de $e^x \sin x$, on sait que le développement limité de $\sin x$ va commencer par x. Et donc il suffit d'utiliser un $DL_2(0)$ de e^x pour faire le produit :

[8] C'est-à-dire au degré de l'équivalent.

$$e^x \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x^2+\underbrace{x\cdot o(x^2)}_{=o(x^3)}+o(x^3).$$

Notons qu'en revanche, il nous a bien fallu[9] le $DL_3(0)$ de $\sin(x)$.

[9] Car le DL de e^x possède un terme constant.

Par exemple ceci ne vaut plus pour un $DL_3(0)$ de $e^x\cos(x)$n puisque cos possède un terme constant non nul.

Et par exemple, pour un $DL_4(0)$ de $\sin(x)\ln(1+x^2)$ il suffit d'un $DL_2(0)$ de $\sin(x)$ et d'un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x^2)$.

Détails ?
Faites-le, vous devriez comprendre !

De manière générale, avoir une idée de ce qui peut se produire dans les calculs, avant d'avoir à les faire permet souvent d'anticiper, et de calculer les développements limité juste au bon ordre. C'est-à-dire sans trop en faire, mais également sans rien oublier.

20.3.5 Et ailleurs qu'en 0 ?

Quasiment tous les exemples que nous avons donnés ici sont des développements limités en 0, mais ce ne sont pas les seuls que nous sachions calculer.
Dans le cas d'un développement limité en $a \neq 0$, la formule de Taylor-Young reste valable en a.
Sinon un changement de variable $x = a + h$ est souvent pertinent.

Exemple 20.20

Cherchons un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 3 de $\ln(x)$.
On a $\ln(x) = \ln(3+h) = \ln(3) + \ln\left(1+\frac{h}{3}\right)$.
Et donc puisque $h \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln(x) \underset{x\to 3}{=} \ln(3) + \left(\frac{h}{3}-\frac{h^2}{18}+\frac{h^3}{81}+o\left(h^3\right)\right)$$
$$\underset{x\to 3}{=} \ln(3)+\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{18}(x-3)^2+\frac{1}{81}(x-3)^3+o\left((x-3)^3\right).$$

20.4 APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

20.4.1 Les équivalents et les limites

Le principal intérêt des développements limités est l'obtention d'équivalents et par conséquent, le calcul de limites.
Rappelons encore une fois la règle : une fonction qui possède un développement limité

non nul en a est équivalente, au voisinage de a, au terme non nul de plus bas degré de son développement limité.

Exemple 20.21

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\tan(x)}{\sin x - \tan x}$.

On a $\ln(1+x)-\tan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

D'autre part, on a

$$\sin(x)-\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}.$$

Et donc $\dfrac{\ln(1+x)-\tan x}{\sin x - \tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^3}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

20.4.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente et nature de points critiques

Soit f une fonction possédant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de a.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + c_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right).$$

Alors nous savons que f est dérivable en a, et que l'équation de la tangente à Γ_f en a est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

La position de la courbe par rapport à la tangente est donc donnée par le signe de $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

Or $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{=} c_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$.

Si $c_2 \neq 0$, on a donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} c_2(x-a)^2$.

Mais souvenons nous que deux fonctions équivalentes au voisinage de a sont de même signe au voisinage de a.

Donc si $c_2 > 0$, pour tout x au voisinage de a, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$, et donc $\mathscr{C}_f$ est, au voisinage de a, au-dessus de sa tangente.

Si $c_2 < 0$, on prouve de même que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente en a.

En revanche, dans le cas où $c_2 = 0$, on ne peut pas conclure sur la base du développement limité d'ordre 2.

Une solution serait alors d'aller chercher le terme suivant non nul dans un développement limité d'ordre supérieur[10] de f.

☠ Danger !

Toute la subtilité est cachée dans le «au voisinage de a» : on ne sait pas si le voisinage en question est $\mathbf{R}$, $]a-1, a+1[$ ou $]a-10^{-10}, a+10^{-10}[$. Donc il n'est pas question d'en déduire des inégalités «pour tout x». Si on souhaite une telle inégalité, il n'y a guère d'autre solution que d'étudier la fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$.

[10] S'il existe.

Exemple 20.22

Prenons l'exemple du sinus en 0 : sa tangente est la droite d'équation $y = x$.

On a alors $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.

Donc $\sin(x) - x$ est, au voisinage de 0, du même signe que $-\dfrac{x^3}{6}$, c'est-à-dire du signe opposé à x.

Le fait que ce signe ne soit pas constant signifie que le graphe de f traverse sa tangente.

Ceci s'applique particulièrement pour l'étude des points critiques d'une fonction. En effet, nous savons que si f possède un extremum local en a, alors elle possède un point critique en a. Mais que la réciproque est fausse.

Soit donc f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et a un point critique de f.

Alors au voisinage de a, $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du même signe que $f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2}$.

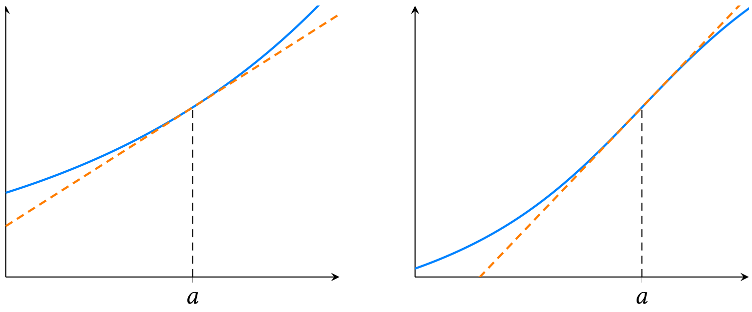


FIGURE 20.2 – Une fonction qui reste au dessus de sa tangente et une fonction qui traverse sa tangente.

Autrement dit, c'est le signe de $f''(a)$ qui déterminera si f est au dessus de sa tangente horizontale.
Si $f''(a) > 0$, alors $f''(a)(x-a)^2$ est strictement positif au voisinage de a, donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente. Et possède donc un minimum local en a.
De même, si $f''(a) < 0$, on prouve que f possède un minimum local en a.
Enfin, si $f''(a) = 0$, et si f est $\mathcal{C}^n$, alors il faut pousser la formule de Taylor-Young un (ou plusieurs) ordre(s) plus loin, jusqu'à obtenir un $f^{(k)}(a)$ non nul. Si k_0 désigne la plus petite valeur[11] de k telle que $f^{k_0}(a) \neq 0$, alors :

1. si k_0 est pair, f possède un extremum local en a, dont la nature est donnée par le signe de $f^{(k_0)}(a)$.
   En effet, au voisinage de a, $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!}(x-a)^{k_0}$, qui est de signe constant.
2. si k_0 est impair, $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f^{(k_0)}(a)}{k_0!}(x-a)^{k_0}$ n'est pas de signe constant au voisinage de a, et donc f ne possède pas d'extremum local en a.

[11] Si elle existe.

20.4.3 Développements asymptotiques

Enfin, les développements limités permettent d'exprimer le comportement de fonctions qui n'ont pas forcément de développement limité, ou en $\pm\infty$.

Prenons par exemple la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \sin(x\ln(x))$.
Elle est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. Et possède donc un développement limité à l'ordre 0.
Il n'est pas très dur de constater que $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, et donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f n'est pas dérivable en 0.
Elle n'a donc de développement limité à aucun ordre plus grand que 1.
Pourtant, on peut avoir envie d'en trouver des équivalents plus simples, ou de l'exprimer à l'aide de fonctions plus simples.
C'est possible à l'aide du développement limité de sin en 0 :

$$\sin(x\ln x) \underset{x\to 0}{=} x\ln(x) - \frac{1}{6}(x\ln(x))^3 + o\left(x^3\ln(x)^3\right).$$

Ceci nous donne un équivalent $(x\ln(x))$, mais nous permettrait aussi de quantifier la différence en f et son équivalent.

On appelle alors **développement asymptotique** tout développement de ce type, faisant intervenir une gamme de fonctions plus large que celles que l'on s'autorise dans les développements limités, à savoir les fonctions polynomiales.

Exemple 20.23

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln(1+x)}{\sin^2 x}}$.

On a alors , au voisinage de 0,

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)$$

Et alors, il vient

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{\sin^2(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1-\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{29}{96}x^2+o(x^2)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{4}+\frac{29}{96}x\sqrt{x}+o\left(x\sqrt{x}\right).$$

On parle alors de développement asymptotique à la précision $x\sqrt{x}$, même si je ne donnerai aucune définition rigoureuse de ceci.

Détails

Je vous épargne le détail du calcul du développement limité, le seul moyen de vous convaincre qu'il est juste est de le calculer....

Enfin, il est possible d'obtenir des «développement limités en $\pm\infty$», c'est-à-dire des développements asymptotiques faisant apparaître des $\frac{1}{x^k}$.

Exemple 20.24

Considérons la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$.
Alors, lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, et donc nous pouvons utiliser le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$e^{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et donc

$$(x+1)e^{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{=} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{x\to\pm\infty}{=} x+1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\underset{x\to\pm\infty}{=} x+2+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

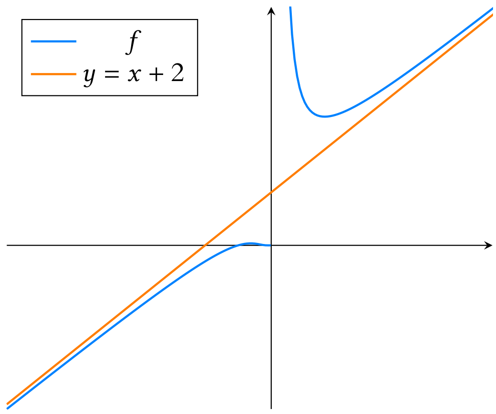
En particulier, ceci nous dit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-x-2=0$, et donc Γ_f possède pour asymptote, en $-\infty$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y=x+2$.
De plus, on a $f(x)-(x+2) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$, qui est du signe de x.
Donc au voisinage de $+\infty$, Γ_f est au dessus de son asymptote, et au voisinage $-\infty$, Γ_f est en dessous de son asymptote.

⚠ Attention !

Soyez vigilants sur les o, ici les termes en $\frac{1}{x^2}$ sont «absorbés» par le terme en $\frac{1}{x}$.

Remarque

Bien que nous ayons ici utilisé d'autres moyens, la méthode classique pour trouver une asymptote oblique aurait fonctionné ici.



f
$y = x + 2$

Exercices du chapitre 20

▶ Calcul niveau 1

Exercice 20.1 **Des sommes** F

Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1) $\cos(x) - \sin(x)$, $n = 4$
2) $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $n = 3$
3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x)$, $n = 3$
4) $e^{-x} + \ln(1+x)$, $n = 5$

Exercice 20.2 **Des produits** PD

Calculer les développements limités suivants en 0, à l'ordre n indiqué

1) $\sin(x)\tan(x)$, $n = 3$
2) $\dfrac{e^x}{1-x}$, $n = 3$.
3) $\sin(x)\sqrt{1+x}\ln(1-2x)$, $n = 4$
4) $x^3\sqrt{1+x}$, $n = 5$
5) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 5$.

Exercice 20.3 **Encore des produits (anticipation des ordres)** AD

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités suivants en 0 à l'ordre n.

1) $\left(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right)(\cos x - 1)$, $n = 6$
2) $(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin(x))$, $n = 7$

Exercice 20.4 **Avec des composées** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué.

1) $e^{\sin x}$, $n = 4$
2) $\sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$
3) $\operatorname{Arctan}(e^x)$, $n = 3$.
4) $e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.
5) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.

Exercice 20.5 **Avec des quotients** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n

1) $\dfrac{1}{1+e^x}$, $n = 3$
2) $\dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 2$
3) $\operatorname{th}(x)$, $n = 5$
4) $\dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$, $n = 3$

Exercice 20.6 **Et ailleurs qu'en zéro ?** AD

Calculer les développements limités suivant en a à l'ordre n.

1) e^x, $a = 1$, $n = 4$
2) $\ln(x)$, $a = e$, $n = 3$
3) $\sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.
4) $\operatorname{Arcsin}(x)^2$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$.
5) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$.

▶ Calcul niveau 2

Exercice 20.7 Calculer les développements limités à l'ordre n indiqué, en 0. AD

1) $\ln(3e^x + e^{-x})$, $n = 3$
2) $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$
3) $(1+x)^{1/x}$, $n = 3$
4) $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$, $n = 4$
5) $\operatorname{Arcsin}(\sin^2 x)$, $n = 6$
6) $\dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x\cos x\sqrt{1-\sin x}}$, $n = 2$

Exercice 20.8 **Développement limité de la tangente** AD

1) Justifier que la tangente possède un développement limité à l'ordre 7 en 0.
2) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer ce développement limité.
3) Proposer au moins deux autres méthodes pour obtenir le développement limité de la tangente, et les essayer à l'ordre 5.

Exercice 20.9 Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$. D

Exercice 20.10 AD

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sa partie régulière.
2) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.
3) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 20.11 Déterminer le développement limité à l'ordre 22 au voisinage de 0 de $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$. AD

► Applications des développements limités

Exercice 20.12 Calculer les les limites suivantes : AD

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$
2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x}$
4) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(2)}$.

Exercice 20.13 Déterminer des équivalents des suites suivantes : AD

1) $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2) $u_n = \dfrac{n \sin \frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} - 1$
3) $(\star)$ $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 20.14 Montrer que $f : \left|\begin{array}{ccc}]0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \end{array}\right.$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. PD

Exercice 20.15 Soit $\Phi : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{e^t - 1} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. PD

On note alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\,dt$. Montrer que F admet un développement limité d'ordre 3 en 0, que l'on déterminera.

Exercice 20.16 Soit $f : x \mapsto \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$. PD

Sans calculer f', déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en 0, et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 20.17 Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$, à la précision $x^2 \ln^2(x)$. PD

Exercice 20.18 Former un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, à la précision $\frac{1}{x^6}$.

Exercice 20.19 Sans calculer directement sa dérivée, prouver que $f : x \mapsto \dfrac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$ se prolonge par continuité en 1, et que ce prolongement admet un point critique en 1. AD

Déterminer la nature locale de ce point critique.

Exercice 20.20 Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à Γ_f. AD

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 20.21 **(Oral X)** TD

Soit $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue admettant un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - a x^\alpha + o(x^\alpha)$, avec $a > 0$, $\alpha > 1$.

1) Montrer que pour u_0 assez petit, une suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.
2) Déterminer alors un équivalent de u_n. Traiter le cas d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Correction des exercices du chapitre 20

Solution de l'exercice 20.1

1. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$, et donc

$$\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

2. On a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$

Et alors, en changeant[1] x en $-x$, on a

[1] C'est de la composition à droite !

$$\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

et donc par somme

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 2 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right).$$

3. On a $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o\left(x^3\right) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Donc par somme, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}x^2 + \frac{113}{48}x^3 + o\left(x^3\right)$.

4. On a $e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.

Et donc en sommant avec $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.

Donc

$$e^{-x} + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + \frac{23x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

Solution de l'exercice 20.2

1. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Et donc

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(x + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right).$$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.

Donc par produit,

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

3. Notons que le développement limité de $\sin(x)$ comme celui de $\ln(1-2x)$ ne contiennent pas de termes constants. Donc il suffit de faire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2, et les deux autres à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(1-2x)\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -2x^2 - 3x^3 - \frac{37}{12}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

4. Puisque nous avons déjà un x^3, il suffit de faire le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$.
C'est $1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$, de sorte que

$$x^3\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{8}+o(x^5).$$

5. Puisque le premier terme non nul du développement limité de $\ln(1+x)$ est de degré 1, il suffit d'utiliser un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et un $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x^5+o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\frac{137}{60}x^5+o(x^5).\end{aligned}$$

Question subsidiaire *: au vu des calculs précédents, pensez-vous pouvoir exprimer le développement limité à n'importe quel ordre de* $\ln(1+x)/(1+x)$ *en fonction des nombres harmoniques* $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *?*

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.3

Pour faire le moins de calculs possibles, il faut être capable d'anticiper les ordres auxquels réaliser nos développements limités afin de ne pas manipuler plus de termes que nécessaire.

1. Puisque les deux premiers termes du $DL_6(0)$ de $\ln(1+x)$ sont $x-\frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ va commencer par un terme en x^3.
Donc il suffit d'obtenir un $DL_3(0)$ de $\cos x-1$.
Et puisque $\cos x-1$ va commencer par un terme en x^2, il suffit d'un $DL_4(0)$ de $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.
Donc

$$\begin{aligned}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)(\cos x-1) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+o(x^6)+o(x^7) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+o(x^6).\end{aligned}$$

2. De même, $1-\cos(2x)$ va commencer par un terme en x^2, et donc il suffit d'un $DL_5(0)$ de $(e^{-x}-1)(x-\sin x)$.
Et puisque $e^{-x}-1$ commence par x, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $x-\sin(x)$.
Puisque $x-\sin(x)$ commence par un x^3, il suffit d'un $DL_2(0)$ de $e^{-x}-1$.
Et puisque $(e^{-x}-1)(x-\sin x)$ commence par un x^4, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $1-\cos(2x)$.
Ceci étant dit, il n'y a plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{(2x)^2}{2}+o(x^3)\right)\left(-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^6}{3}+\frac{x^7}{6}+o(x^7).\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.4

1. Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+\sin(x)+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3(x)}{6}+\frac{\sin^4(x)}{24}+\underbrace{o\left(\sin^4(x)\right)}_{=o(x^4)}$.

> **Détails**
> L'égalité des o provient simplement du fait que $\sin^4 x \sim x^4$.

Mais $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4),\ \sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3+o(x^4),\ \sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} x^4+o(x^4).$$

Donc

$$e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

2. De même, $\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{\sin^2(x)}{8} + \dfrac{\sin^3 x}{16} + \underbrace{o(\sin^3 x)}_{=o(x^3)}$.

Donc en reprenant les développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des puissances de sin calculées à la question précédente,

$$\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

3. Une petite subtilité ici : lorsque $x \to 0$, $e^x \to 1$.
Donc il nous faut un développement limité à l'ordre 3 de l'arctangente au voisinage de 1.
La formule de Taylor-Young, qui s'applique puisque l'arctangente est bien $\mathscr{C}^3$, peut nous fournir ce développement limité, en notant que

$$\text{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } \text{Arctan}^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Il vient donc

$$\text{Arctan}(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Et par composition avec le $DL_3(0)$ de e^x,

$$\text{Arctan}(e^x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

Alternative : on peut faire le changement de variable $h = x-1$, de sorte que $\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(1+h)$, et chercher alors un développement limité en 0 de $f(h) = \text{Arctan}(1+h)$.
Il est toujours possible d'utiliser Taylor, mais on peut également intégrer un $DL_2(0)$ de $f'(h) = \dfrac{1}{1+(1+h)^2}$. On a alors

$$\frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + h^2 + o(h^2)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$

Et donc par intégration,

$$f(h) \underset{h\to 0}{=} \underbrace{f(0)}_{=\frac{\pi}{4}} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + o(h^3).$$

La conclusion est alors la même, en composant par le $DL_3(0)$ de e^x.

4. $e^{\sqrt{1+x}} = e \times e^{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right)$.

5. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)}.\end{aligned}$$

Notons $u = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x^3}{32}$, de sorte que $u^2 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x^3}{32} + o(x^3)$ et $u^3 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^3}{64} + o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)} &= \sqrt{1+u} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{64}-\frac{x^2}{128}+\frac{x^3}{256}+\frac{x^3}{1024}+o(x^3)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{8}-\frac{5x^2}{128}+\frac{21}{256}x^3+o(x^3).$$

Et donc enfin,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\sqrt{2}\frac{x}{8}-\sqrt{2}\frac{5x^2}{128}+\sqrt{2}\frac{21}{256}x^3+o(x^3).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.5

1. On a $1+e^x \underset{x\to 0}{=} 2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$.
Et par conséquent,

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^3\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3)$$

2. Notons tout de suite que le premier terme non nul de e^x-1 va être x, qui va se simplifier avec le numérateur.
Il est donc judicieux de partir d'un développement limité de e^x-1 à l'ordre 3,

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2).$$

3. On a $\operatorname{th}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Il nous faut donc un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ et un $DL_5(0)$ de $\operatorname{sh}(x)$.

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).$$

Et $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$.
Donc par produit, $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

Alternative : on peut aussi noter que la dérivée de th est $\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$, et donc calculer un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et l'intégrer.

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{12}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4 + o(x^4)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Et donc $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\mathrm{th}(0)} = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

4. Encore une fois, essayons d'être prévoyants pour ne faire ni pas assez, ni trop de calculs.
Le numérateur va commencer par un terme en x^2, quand le numérateur va commencer par un terme en x.
Comme nous allons devoir simplifier par x, il faut donc commencer nos développements limités à l'ordre 4.

$$\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 +\right.$$
$$\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

> **Optimal ?**
> Peut-être avez vous remarqué que le terme en x^3 du second facteur ne nous a en fait pas servi (car le terme qui provenait du numérateur commençait toujours par x). Autrement dit, il suffit de faire un DL_2 du dénominateur. Avec un peu d'entraînement, vous pourrez peut-être le repérer et économiser un peu de temps sur les calculs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.6

1. Notons $h = x - 1$. Alors

$$e^x \underset{x\to 1}{=} e^{h+1} \underset{x\to 1}{=} ee^h \underset{x\to 1}{=} e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right).$$

2. Notons $h = x - e$. Alors

$$\ln(x) = \ln(e+h) = 1 + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \underset{x\to e}{=} 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3).$$

3. Posons $h = x - \frac{\pi}{4}$, de sorte que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(h) + \cos(h)\right).$$

Puisque $h \to 0$, on a donc, utilisant les DL de sin et cos en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to\pi/4}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

4. Notons $h = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors par la formule de Taylor-Young, on obtient

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}h + h^2 + o(h^2).$$

> **Détails**
> Les deux premières dérivées de l'arcsinus sont $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Et donc par produit,

$$\mathrm{Arcsin}(x)^2 \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}h + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2).$$

5. Posons $h = x - 1$. Alors

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+h)}{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)}$$

> **Astuce**
> Le numérateur commence par h, donc on n'a besoin que d'un $DL_2(0)$ du dénominateur.

$$\underset{h\to 0}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right)$$
$$\underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} + \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{4} + o(h^3)$$
$$\underset{h\to 0}{=} h - h^2 + \frac{23}{24}h^3 + o(h^3).$$

Et donc
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} (x-1) - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.7

1. Au voisinage de 0, on a
$$3e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{6}.$$
Donc $\ln(3e^x + e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)$.
En utilisant alors le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$, on arrive à
$$\ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

2. $\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + o(x^6)$.
Donc $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{16} + o(x^4)}$.
On reprendre alors $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$, avec $u = \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{16}$, et on obtient après calculs,
$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \frac{7}{128}x^4 + o(x^4)\right).$$

3. Par définition, $(x+1)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Mais
$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Méthode
On va jusqu'à l'ordre 4 pour le $\ln(1+x)$, puisque la division par x va nous faire perdre un ordre.

Et donc
$$(1+x)^{1/x} = e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)$$
$$= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)\right).$$

4. Commençons par noter que nous savons que les fonctions Arcsin et Arctan sont toutes deux équivalentes à x en 0.
Et que donc pour calculer un développement limité du quotient, nous allons commencer par diviser par x pour pouvoir utiliser le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Donc il va nous falloir des $DL_5(0)$ de Arctan et Arcsin.
Rappelons que le développement limité de Arctan s'obtient en intégrant celui de $\frac{1}{1+x^2}$.
Pour avoir Arctan à l'ordre 5, il suffit d'avoir celui de $\frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
Or, $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$, et donc
$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Donc en intégrant,

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\mathrm{Arctan}(0)}_{=0} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

De même, on obtient le $DL_5(0)$ de Arcsin en intégrant le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Mais $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\mathrm{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

Reste alors à calculer le quotient :

$$\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\mathrm{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \dfrac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{6} + + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \dfrac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}.$$

Commençons par calculer le DL de $\dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}$. La méthode est classique : composer avec le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$.

Il vient donc

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)} = 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^2$$
$$\underbrace{-\left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^3 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^4}_{=o(x^4)} + o(x^4)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)$$

Et donc en multipliant ensuite par $1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + o(x^4)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{Arctan}\, x}{\mathrm{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Remarque

Notons que nous sommes en fait en train de calculer le $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\mathrm{Arcsin}(x)}$.

Remarque

Si l'on voit tout de suite que les deux derniers termes ne vont faire apparaître que des degrés supérieurs à 4, il n'est pas utile de les calculer.

5. La question précédente rappelle comment obtenir le développement limité de l'arcsinus.
Avant de nous lancer dans des calculs, remarquons que le terme de plus bas degré de $\sin^2 x$ est de degré 2.
Et donc que pour obtenir un développement limité à l'ordre 6 de $\mathrm{Arcsin}(\sin^2(x))$, il suffit de composer un $DL_3(0)$ de Arcsin avec le $DL_6(0)$ de $\sin^2(x)$.
On a donc $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6).$$

Et $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, de sorte que par composition,

$$\mathrm{Arcsin}(\sin^2(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin^2(x) + \frac{1}{6}(\sin^2 x)^3 + \underbrace{o(\sin^3(x))}_{=o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{19}{90}x^6 + o(x^6).$$

Autrement dit

Pour $k \geqslant 4$,

$$(\sin^2 x)^k \underset{x\to 0}{=} o(x^6).$$

6. Commençons par nous intéresser au dénominateur : on a $x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$, de sorte que le terme non nul de plus petit degré dans un développement limité de $x\cos(x)\sqrt{1-\sin x}$ sera de degré 1.
Donc pour calculer un développement limité du quotient, il nous faudra commencer par diviser par x pour composer avec le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Nous avons donc besoin d'un $DL_3(0)$ du numérateur et du dénominateur.
On a

$$\ln(1+e^x)-\ln(2) = \ln(2+e^x-1)-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^3).$$

Puis $x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).\end{aligned}$$

Détails
On a ici composé avec le DL de $\frac{1}{1-x}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} = (1-\sin(x))^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{3}{8}\sin^2(x)+o(\sin^2(x))\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Et donc enfin, par produit,

$$\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.8

1. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc possède des développements limités de tout ordre.
Notons dès à présent que la tangente étant impaire, il est inutile de chercher des termes de degré pair.
2. Nous connaissons déjà le terme de degré 1 du DL, c'est x.
Donc notons $\tan x \underset{x\to 0}{=} x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7)$ le développement limité cherché.
Alors $1+\tan^2 \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+2a_3x^4+(a_3^2+2a_5)x^6+o(x^6)$.
Mais $\tan' = 1+\tan^2$, donc en intégrant ce développement limité, ce qui fait apparaître la constante $\tan(0)=0$, il vient

$$x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2a_3}{5}x^5+\frac{a_3^2+2a_5}{7}x^7+o(x^7).$$

Par identification des parties régulières, on en vient à

$$c_3=\frac{1}{3},\ c_5=\frac{2}{15},\ c_7=\frac{17}{315}.$$

3. Une autre option serait de noter que $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Or, $\dfrac{1}{\cos^2 x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2}$.
Or un calcul nous donne $\dfrac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^4)$.

Ne reste alors qu'à intégrer.

Une autre méthode est de revenir à la définition, en posant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et en calculant un développement limité de ce quotient.
Enfin, une option encore différente serait de noter que tan étant impaire, elle admet un développement limité de la forme $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$.
Donc $\tan(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2a_3x^4 + o(x^5)$, puis $\tan(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + 3a_3x^5 + o(x^5)$, et

$$\tan(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o(x^5).$$

Mais par ailleurs, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$.
Donc par composition de développements limités,

$$x \underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan(x)^3}{3} + \frac{\tan(x)^5}{5} + o(x^5)$$

soit encore

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{3a_3}{3} + \frac{1}{5}\right) + o(x^5).$$

Et donc par identification des coefficients, $a_3 = \dfrac{1}{3}$ et $a_5 - a_3 + \dfrac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow a_5 = \dfrac{2}{15}$.
Lorsque vous avez le choix, vous privilégierez la première des trois méthodes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.9

Il faut être assez soigneux sur les ordres. En effet, on a $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)\right)$.
Pour pallier à la division par x^2, il va nous falloir un $DL_5(0)$ de $\ln\dfrac{\tan x}{x}$, ce qui nécessitera donc un $DL_6(0)$ de $\tan(x)$.

On a[2] $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.

[2] Cf l'exercice précédent.

Donc $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)$.
Donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)\right)$.
Posons alors $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)$, de sorte que

$$u^2 = \frac{x^4}{9} + o(x^5),\ u^3 = u^4 = u^5 = o(x^5).$$

Et donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + \dfrac{u^5}{5} + o(u^5) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{90}x^4 + o(x^5)$.
Donc $\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{90}x^2 + o\left(x^3\right)$.
En composant par l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}e^{\frac{7}{90}x^2 + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}\left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.10

1. C'est du cours, c'est $(1+t)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.
   On a donc $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$.
2. Remarquons que $P = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2$ est un polynôme[3].
   Notons alors $P = X^4Q + R$ sa division euclidienne par X^4.
   En pratique, R est la troncature à l'ordre 3 de P : on n'a gardé que les termes de degré inférieur ou égal à 3.
   Alors, au voisinage de 0, $t^4Q(t)$ est équivalent à son terme de plus bas degré, qui est de

[3] De degré 6 mais peu importe.

degré supérieur ou égal à 4, et donc est négligeable devant t^3.

D'autre part, par produit de développements limités, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $1+t$ est le carré de celui de $\sqrt{1+t}$, c'est-à-dire R.
Donc $1+t \underset{t\to 0}{=} R(t)+o(t^3)$ est le $DL_3(0)$ de $1+t$.
Mais par ailleurs, on a évidemment $1+t \underset{t\to 0}{=} 1+t+o(t^3)$.
Donc par unicité du développement limité, $R(t)=1+t$, et donc

$$1+X=R(X)=(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)^2-X^4Q(X).$$

3. Par la question précédente, on a

$$I_n+N=(a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3)^2+\underbrace{N^4}_{=0}Q(N)=(a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3)^2.$$

Et donc une racine carrée de I_n+N est $a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.11

Il y a bien entendu une astuce. Il s'agit de reconnaître que l'expression dans la parenthèse est la partie régulière du développement limité d'ordre 20 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$.

On a donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k+o\left(x^{20}\right)$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\ln(1+x)-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} e^{\ln(1+x)}\exp\left(-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} (1+x)\left(1-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} (1+x)-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}-\frac{x^{22}}{21}+o\left(x^{22}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{1}{21}x^{21}-\frac{1}{462}x^{22}+o\left(x^{22}\right).
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.12

1. On a $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}=\exp\left(\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Un développement limité à l'ordre 2 des termes dans la parenthèse nous donne

$$\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\underset{x\to 0}{=}-\frac{1}{3}+o(1).$$

Et donc par composition par l'exponentielle, la limite cherchée est $e^{-1/3}$.

> ⚠ Attention !
> Il n'est pas nécessaire ici de faire un développement limité de l'exponentielle.

2. On a $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}e^{-x}=\exp\left[x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x\right)$.
On $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
Donc $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x\underset{x\to+\infty}{=}-\frac{1}{2x}+o(x)$.

On en déduit que $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}e^{-x}=1$.

3. Le début est similaire à ce que nous aurions fait sans les développements limités : on factorise par le terme prépondérant (qui ici se trouve être x dans chacun des deux termes) :

$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x}=x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Posons alors $X = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+X^2+X^3} - \sqrt{1+X^2} &\underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}X^2 + o(X^2) - 1 - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\\ &\underset{X\to 0}{=} -\frac{1}{6}X^2 + o(X^2).\end{aligned}$$

Remarque
Nous n'avons finalement utilisé que les développements limités à l'ordre 1. Donc nous aurions déjà été capables de calculer cette limite avant ce chapitre.

Et donc $\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Posons $h = x-2$, de sorte que $h \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$.
Alors $2^x = e^{x\ln 2} = e^{(h+2)\ln(2)} = \underbrace{e^{2\ln 2}}_{=4} e^{h\ln(2)}$.
Soit encore $2^x \underset{x\to 2}{=} 4\left(1 + h\ln(2) + o(h)\right)$.
Par ailleurs, $x^2 = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2 \underset{h\to 0}{=} 4 + 4h + o(h)$.
Et donc $x^2 - 2^x \underset{h\to 0}{=} 4(1-\ln 2)h + o(h)$.
C'est-à-dire $x^2 - 2^x \underset{x\to 0}{\sim} 4(1-\ln(2))(x-2)$.
Par ailleurs, par Taylor-Young à l'ordre 1 en 2,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 2}{=} \operatorname{Arctan}(2) + \frac{1}{5}(x-2) + o(x-2).$$

Donc $\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(2) \underset{x\to 2}{\sim} \frac{1}{5}(x-2)$. Et donc par quotient[4]

[4] D'équivalents.

$$\frac{x^2-2^x}{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(2)} \underset{x\to 2}{\sim} 20(1-\ln(2)) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 20(1-\ln(2)).$$

Solution de l'exercice 20.13

1. Commençons par factoriser par $\sqrt{n}$: $u_n = \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$. Et alors en utilisant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(2 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

2. On a donc $n\sin\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{6n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)$ et de même

$$e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{n\sin\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}}-1} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Et donc en retranchant 1, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

3. On a $\sqrt[n+1]{n+1} = e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)}$ et de même $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$.
Mais par croissances comparées, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right).$$

Sur le même principe,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Mais

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1)-(n+1)\ln n}{n(n+1)} = \frac{-\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Il vient donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Malheureusement, puisque $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, ceci ne suffit pas à trouver un équivalent, seulement à dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$...

Remarque

Puisque $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ on a

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul.

Poussons donc le développement limité un ordre plus loin :

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et de même,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)(1+o(1)) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Caramba, encore raté ! $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.

Toutefois, on semble s'approcher, mais sans avoir très envie de faire apparaître les termes d'ordre 3 dans le développement limité.
Rusons un peu et notons que

$$e^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Détails

La clé, c'est que cette fois, on a

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.14

On a

$$f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x}{6} \xrightarrow[x\to0]{} 0.$$

Donc déjà f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

Étudions la dérivabilité en 0 de ce prolongement : pour $x>0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{6}.$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0)=-\dfrac{1}{6}$.

Par ailleurs, il est évident que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car différence de deux fonctions qui le sont, et alors pour $x>0$,

$$f'(x)==-\frac{1}{x^2}+\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}=\frac{x^2\cos x-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}.$$

Cette dérivée est évidemment continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Enfin, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{x^4+o(x^4)}\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^3)}{x^4+o(x^4)}\\&\underset{x\to 0}{=}\frac{-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{6}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{6}=f'(0).\end{aligned}$$

Et donc f' est continue en 0, et donc est continue sur $\mathbf{R}_+$.
Donc f se prolonge bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque
Nous avons ici du calculer 3 limites. Nous verrons bientôt un théorème (dit de la limite de la dérivée) qui nous permettra de n'en calculer que 2 pour prouver le même résultat.

Alternative : on a

$$f(x)=\frac{\sin x - x}{x\sin(x)}\underset{x\to 0}{=}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}\underset{x\to 0}{=}\frac{-\frac{x}{6}+o(x)}{1+o(x)}\underset{x\to 0}{=}-\frac{x}{6}+o(x).$$

Ainsi, nous avons là le développement limité en 0 à l'ordre 1 de f.
Si on prolonge f en posant $f(0)=0$ (ce qui est légitime puisque le terme constant du DL ci-dessus est nul), alors f possède un développement limité d'ordre 1 en 0, donc est non seulement continue, mais elle est en plus dérivable, avec $f'(0)=-\dfrac{1}{6}$.
Et alors pour prouver la continuité de f' en 0, il faut, comme ci-dessus, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.15

On a $\dfrac{t^2}{e^t-1}\underset{t\to 0}{=}t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)$.
En particulier, $\dfrac{t^2}{e^t-1}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$, et donc Φ est continue en 0, et donc possède bien au moins une primitive sur $\mathbf{R}_+$. Ce qui justifie la définition de F.
Et alors, par intégration de développements limités[5] :

$$F(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

[5] La constante d'intégration est ici nulle puisque nous cherchons la primitive qui s'annule en 0.

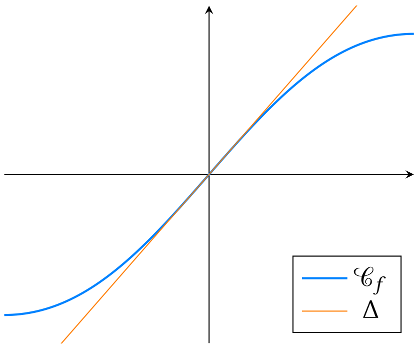
SOLUTION DE L'EXERCICE 20.16

Notons que

$$f(x)=\frac{1}{3}\frac{-x^3+5x}{1+\frac{x^2}{3}}\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{3}(5x-x^3)\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)\underset{x\to 0}{=}\frac{5x}{3}-\frac{8x^3}{9}+o\left(x^3\right).$$

Donc en particulier, le développement limité d'ordre 1 en 0 de $f(x)$ est $f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{5x}{3}+o(x)$, si bien que l'équation de la tangente en 0 est $y=\dfrac{5x}{3}$.
Par ailleurs, $f(x)-\dfrac{5x}{3}\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{8x^3}{9}$.
Et deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe sur un voisinage de 0.
Donc si V est un tel voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de Δ sur $V\cap\mathbf{R}_-$ et en dessous sur $V\cap\mathbf{R}_+$.
Autrement dit, $\mathscr{C}_f$ traverse Δ en 0.

Remarque
En revanche, sans davantage de calculs, il n'est pas possible de déterminer V, l'information que nous avons est juste locale.
Pour en savoir plus, il faudrait étudier le signe de $x\mapsto f(x)-\frac{5}{3}x$ (ce qui se fait ici très bien).



SOLUTION DE L'EXERCICE 20.17

Souvenons nous que $(ex)^x = e^x e^{x\ln(x)}$.
Mais lorsque $x \to 0$, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2\ln^2(x)}{2} + o\left(x^2\ln^2(x)\right)$.

Puisque d'autre part, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, il vient, par produit

$$\begin{aligned}
(ex)^x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln^2(x))\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{1}{2}x^3\ln^2(x) + \frac{1}{4}x^4\ln^2(x) + o(x^2)}_{=o(x^2\ln^2(x))}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + o(x^2\ln^2(x)).
\end{aligned}$$

Rédaction
Une bonne habitude dans les développements asymptotiques est, comme dans les développements limités, d'ordonner les termes de sorte que chacun soit négligeable devant le précédent.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.18

Il s'agit de remarquer que $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'utiliser alors le développement limité de la tangente en 0 (voir l'exercice 8) :

$$\tan\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{2}{15}\frac{1}{x^5} + \frac{17}{315}\frac{1}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right).$$

Il s'agit ensuite de multiplier par x puis de composer avec le développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1+x)$.

$$\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{3x^2} + \frac{7}{90x^4} + \frac{62}{2835x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.19

A priori, une option serait de montrer que f se prolonge par continuité, puis montrer que ce prolongement par continuité est $\mathscr{C}^2$, par exemple à l'aide du théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, pour espérer obtenir un développement limité à l'ordre 2 de f, qui pourrait[6] nous aider à déterminer la nature du point critique.
Toutefois, pour appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, il nous faut calculer les deux premières dérivées de f (ce que l'énoncé nous demande explicitement de ne pas faire), et prouver qu'elles ont toutes deux une limite finie en 1.

[6] Si son terme de degré 2 est non nul.

Faisons tout d'un coup en cherchant un développement limité de f au voisinage de 1.
Pour cela, procédons au changement de variable habituel $x = 1+h$, avec $h \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f(1+h) &\underset{h\to 1}{=} \frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2}\\
&\underset{h\to 1}{=} (1+h)\frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{2h+h^2}\\
&\underset{h\to 1}{=} (1+h)\frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{2+h}
\end{aligned}$$

Méthode
On a repéré que le dénominateur commence par h, donc qu'il faudra diviser par h, et donc on cherche directement un développement limité à l'ordre 3 du numérateur.

$$\underset{h\to 1}{=} (1+h)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$
$$\underset{h\to 1}{=} \left(1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)$$
$$\underset{h\to 1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}h^2+o(h^2).$$

Autrement dit, $f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$.

En particulier, $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=\frac{1}{2}$.
Par ailleurs f possède un développement limité d'ordre 1 en 1, qui est $f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2}+0\times(x-1)+o(x-1)$.
Donc f (prolongée par continuité) est dérivable en 1, et $f'(1)=0$.
Voici donc qui prouve l'existence du point critique.
Enfin, $f(x)-f(1) \underset{x\to 1}{=} -\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{12}(x-1)^2$.

Donc au voisinage de 1, $f(x)-\frac{1}{2}$ est du signe de $-\frac{1}{12}(x-1)^2$, c'est-à-dire négatif.
Autrement dit, il existe un voisinage V de 1 tel que $\forall x\in V,\ f(x)-f(1)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\leqslant f(1)$.
Donc f possède un maximum local en 1.

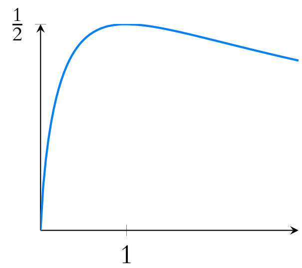


FIGURE 20.1– La fonction f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.20

1. On a $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}} = x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$.

   Mais $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Et donc $\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+o(1)$.

   Donc $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à Γ_f au voisinage de $+\infty$.
   Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il nous faut pousser le développement limité un ordre plus loin : pour simplifier les notations, posons $X=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

   $$\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{1-X}} \underset{X\to 0}{=} \sqrt{1+X+X^2+o(X^2)} \underset{X\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}(X+X^2)-\frac{1}{8}X^2+o(X^2).$$

   Soit encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Donc en particulier, $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$.
   Puisque cet équivalent est positif, au voisinage de $+\infty$, $f(x)-(x+\frac{1}{2})$ est aussi positif, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote oblique.

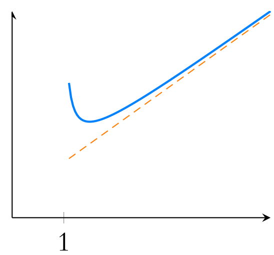


FIGURE 20.2– Γ_f et son asymptote

2. On a $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, et donc au voisinage de $+\infty$,

   $$\frac{x^2}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x-1\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Par ailleurs, on a $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$, de sorte qu'au voisinage de $+\infty$,

   $$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et par produit, il vient donc

$$\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, on en déduit que $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Et d'autre part, $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x}$ est du signe de x au voisinage de $+\infty$, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.21

1. Puisque f est continue, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Par ailleurs, $f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -ax^\alpha$, qui est négatif au voisinage de 0.
Donc il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0,\eta]$, $f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) < x$.
Et donc pour $u_0 \in [0,\eta]$, (u_n) est décroissante et à valeurs positives donc elle converge vers un point fixe de f, qui est encore[7] dans $[0,\eta]$. Mais par définition de η, 0 est le seul tel point fixe.

[7] C'est la limite d'une suite à valeurs dans $[0, \eta]$.

2. Nous allons essayer de trouver une valeur de β pour laquelle $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers un réel non nul ℓ.
L'idée étant que si c'est le cas, nous pourrons appliquer le théorème de Césaro qui nous dira que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^\beta - u_k^\beta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow u_n^\beta \sim n\ell.$$

Remarque
Il s'agit d'une somme télescopique.

On a donc

$$\begin{aligned} f(x)^\beta - x^\beta &\underset{x\to 0}{=} (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^\beta - x^\beta \\ &\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left[\left(1 - ax^{\alpha-1} + o\left(\left(x^{\alpha-1}\right)\right) - 1\right]\right. \\ &\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left(-a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right) \underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Choisissons donc $\beta = 1-\alpha$, de sorte que $f(x)^\beta - f(x)^\beta \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a(\alpha-1)$.
Et donc puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien

$$u_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} na(\alpha-1) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a(\alpha-1)n)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dans le cas d'une suite qui vérifie $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

donc ici $a = \frac{1}{6}$ et $\alpha = 3$.
On obtient donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$.

DIMENSION FINIE

21

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne un corps.

21.1 Dimension d'un espace vectoriel

21.1.1 Définition

Définition 21.1 – Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie[1].
Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.

[1] Où $\{0_E\} = \operatorname{Vect}(\emptyset)$ est considéré comme possédant une famille génératrice à 0 éléments.

Exemples 21.2

- $\mathbf{K}^n, \mathbf{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont de dimension finie, puisqu'on en connaît des bases[2] finies.
- En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie car aucune famille finie $(P_1, \dots, P_r)$ n'est génératrice de $\mathbf{K}[X]$. En effet si on note $d = \max\{\deg P_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$, alors $\operatorname{Vect}(P_1, \dots, P_r) \subset \mathbf{K}_d[X]$.
Et donc par exemple $X^{d+1} \notin \operatorname{Vect}(P_1, \dots, P_r)$.

[2] Les bases que nous avons appelées canoniques.

Proposition 21.3 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie qui possède une famille génératrice à n éléments. Alors toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n+1$ est liée.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat pour les familles de $n+1$ vecteurs, puisque toute famille contenant une famille liée est liée.
Nous allons procéder par récurrence sur n en prouvant la propriété $\mathcal{P}(n)$: «pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel E admettant une famille génératrice à n éléments, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.»

► **Initialisation** : supposons que $E = \operatorname{Vect}(x)$ soit engendré par un seul vecteur x, et soit (y_1, y_2) une famille de deux vecteurs de E. Alors $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ tels que $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$.
Si $\lambda_1 = 0$, $y_1 = 0_E$, donc (y_1, y_2) est liée.
Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $y_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} y_1$ et donc (y_1, y_2) est liée.

► **Hérédité** : supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_n)$, et soit $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on peut écrire $y_i = Y_i + \lambda_i x_n$ avec $Y_i \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\lambda_i \in \mathbf{K}$.
Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, et donc par hypothèse de récurrence, forment une famille liée.
Si l'un des λ_i est non nul, quitte à renuméroter[3], supposons qu'il s'agit de λ_1.
Posons alors pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $y_i' = y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 = Y_i - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} Y_1 \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.
Alors par hypothèse de récurrence, $(y_2', \dots, y_{n+1}')$ est liée.

[3] Ce qui ne change rien à la liberté de la famille

Il existe donc $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbf{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i y_i' = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \left(y_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} y_1 \right) = 0_E.$$

Soit encore

$$\left(-\sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i y_i = 0_E.$$

Les α_i n'étant pas tous nuls, $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est liée. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Corollaire 21.4 – *Si E est engendré par n éléments, alors toute famille libre est de cardinal au plus n.*

Autrement dit
Toute famille libre possède un cardinal inférieur à celui de toute famille génératrice.

Exemple 21.5

Dans $\mathbf{R}^3$, la famille $(1,0,1), (0,2,-3), (4,1,3), (2,2,2)$ est nécessairement liée, car $\mathbf{R}^3$ est engendré par les trois vecteurs de la base canonique.

Corollaire 21.6 : *Si E est un espace vectoriel qui possède une base finie de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, alors toutes les bases de E sont finies et de cardinal n.*
On dit alors que n est ***la dimension de*** *E, et on la note $\dim_{\mathbf{K}} E$, ou plus simplement*[4]*, $\dim E$.*
Par convention[5]*, on pose $\dim\{0_E\} = 0$.*

[4] Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur $\mathbf{K}$.

[5] $\{0_E\}$ ne possède pas de base, ou alors c'est la famille vide.

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E de cardinal n, et soit $\mathscr{B}'$ une autre base de E.
Par le corollaire précédent, qui s'applique car $\mathscr{B}$ est génératrice et $\mathscr{B}'$ est libre, $\mathscr{B}'$ est finie, de cardinal au plus n.
Notons m le cardinal de $\mathscr{B}'$, de sorte que $m \leqslant n$.
Puis, $\mathscr{B}'$ étant génératrice et $\mathscr{B}$ libre, il vient[6] $n \leqslant m$.
Et donc $m = n$. □

[6] Toujours par le corollaire.

Notons que cette définition nécessite d'avoir déjà l'existence d'une base de E.
Tout l'enjeu de la suite va être de prouver qu'une telle base existe toujours si E est de dimension finie.

Exemple 21.7

La dimension d'un espace vectoriel E doit être comprise comme le nombre de «degrés de liberté» dans le choix d'un élément de E.

Par exemple, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.
Alors pour choisir un élément de F, on peut choisir y et z comme on le souhaite, mais alors la valeur de $x = -2y + 3z$ est imposée.
Donc «moralement», F doit être de dimension 2.
Plus rigoureusement, on prouve que $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ est dans F si et seulement si

$$(x,y,z) = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(3,0,1) \in \mathrm{Vect}((-2,1,0),(3,0,1)).$$

Donc la famille $(-2,1,0),(3,0,1)$ est génératrice de F, et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F, de cardinal 2, donc $\dim F = 2$.

De même, pour choisir une matrice symétrique $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on

peut choisir comme on le souhaite les éléments sur la diagonale, et ceux en dessous de la diagonale, mais cela fixe alors la valeur des éléments au dessus la diagonale.
Autrement dit, on peut choisir comme on le souhaite tous les éléments de la première colonne de M (et cela impose alors la valeur de tous ceux de la première ligne : $m_{1,2} = m_{2,1}$, etc), puis comme on veut tous ceux de la seconde colonne sauf le premier $m_{2,1}$ qui a déjà été fixé), etc, le dernier élément de la dernière colonne de M.
Ainsi, intuitivement, $\dim \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Plus formellement, soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. Alors

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{2,1} & \dots & m_{n,1} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{n,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_{n,n-1} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right).$$

Donc la famille formée des $E_{i,i}$ et des $E_{i,j} + E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$ est génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
On prouve facilement qu'elle est libre, et donc est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. Étant de cardinal $n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Sur le même principe, on prouve que $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques, est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
En effet, il suffit de choisir les coefficients sous la diagonale, qui sont au nombre de $n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Plus rigoureusement, une base de $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ est la famille des $E_{i,j} - E_{j,i}$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Définition 21.8 – Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une **droite (vectorielle)**, un espace de dimension 2 est appelé un **plan (vectoriel)**.

Notons en particulier que si x est un vecteur non nul d'un espace vectoriel E, alors $\operatorname{Vect}(x)$ est une droite.
En effet, la famille formée du seul vecteur x est libre car $x \neq 0_E$, et elle est génératrice de $\operatorname{Vect}(x)$, donc c'en est une base : $\dim \operatorname{Vect}(x) = 1$.
De même, si x et y sont deux vecteurs non colinéaires, alors $\operatorname{Vect}(x, y)$ est un plan.

Les seules vraies confusions possibles sur le corps $\mathbf{K}$ sont pour les $\mathbf{C}$-espaces vectoriels, qui peuvent aussi être vus comme des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

Proposition 21.9 : *Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, c'est-à-dire tel que $\dim_{\mathbf{C}} E = n$. Alors $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n$.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E (en tant que $\mathbf{C}$-espace vectoriel).
Considérons alors la famille $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$.
Soient alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ des **réels** tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot i \cdot e_k = 0_E$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + i\mu_k) \cdot e_k = 0_E$, et par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$, vue comme famille du $\mathbf{C}$-espace vectoriel E, pour tout k, $\lambda_k + i\mu_k = 0$ et donc $\lambda_k = \mu_k = 0$.
Donc $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$ est une famille libre du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et donc

$$x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Re}(\lambda_k)}_{\in \mathbf{R}} \cdot e_k + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Im}(\lambda_k)}_{\in \mathbf{R}} \cdot i \cdot e_k.$$

Et donc $(e_1, \dots, e_n, i \cdot e_1, \dots, i \cdot e_n)$ est une famille génératrice du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
C'est donc une base, de sorte que $\dim_{\mathbf{R}} E = 2n = 2\dim_{\mathbf{C}} E$. □

Exemple 21.10

Une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}$.

21.1.2 Existence de bases

La proposition qui suit nous dit essentiellement que de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Proposition 21.11 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, engendré par $(x_1, \dots, x_n)$.*
On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre ($1 \leqslant p \leqslant n$). Alors il existe une base de E formée de $x_1, \dots, x_p$ et de certains des éléments de $(x_{p+1}, \dots, x_n)$.

Remarque

On a supposé ici que ce sont les p premiers vecteurs qui forment une famille libre, mais quitte à réordonner, ce résultat reste valable pour toute sous-famille libre de $(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration. Soit $A = \{\mathrm{Card}(J) \mid [\![1,p]\!] \subset J \subset [\![1,n]\!]$ **et** $(x_j)_{j\in J}$ libre$\}$ l'ensemble des cardinaux des sous-familles libres de $(x_1, \dots, x_n)$ contenant $(x_1, \dots, x_p)$.
Alors A est une partie non vide[7] de $\mathbf{N}$, donc elle possède un plus grand élément $q \in [\![p,n]\!]$.
Soit alors J une partie de $[\![1,n]\!]$, de cardinal q contenant $[\![1,p]\!]$, et telle que $(x_j)_{j\in J}$ soit une famille libre.

[7] Elle contient $p = \mathrm{Card}(x_1, \dots, x_p)$.

Soit alors $i \in [\![1,n]\!]$. Prouvons que $x_i \in F = \mathrm{Vect}(x_j, j \in J)$.
Si $i \in J$, c'est évident.
Sinon, la famille $\{x_j, j \in J\} \cup \{x_i\}$, de cardinal $q+1$ ne peut être libre par maximalité de q dans A.
Donc elle est liée : il existe $(\lambda_j)_{j\in J}$ et λ_i des scalaires non tous nuls tels que $\lambda_i x_i + \sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E$.
Si on avait $\lambda_i = 0$, alors $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0_E$. Par liberté de $(x_j)_{j\in J}$, les λ_j sont donc tous nuls, ce qui n'est pas le cas.
Donc $\lambda_i \neq 0$, de sorte que $x_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \in F$.
Nous avons donc prouvé que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in F$, donc $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$.
Or, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$, et donc $F = E$.
Ainsi, $(x_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, et étant déjà libre, c'est une base de E. □

Remarque. Il serait également possible de donner une preuve algorithmique de ce théorème, l'idée étant de partir de la famille $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p)$ et, pour chacun des vecteurs de $(x_{p+1}, \dots, x_n)$, regarder s'il est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ ou non.
S'il ne l'est pas, alors on l'ajoute à $\mathcal{B}$.
On prouve[8] alors qu'à chaque étape, la famille $\mathcal{B}$ est libre, et qu'après ajout (ou non) de x_k, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
À la fin, la famille $\mathcal{B}$ obtenue est donc libre et génératrice de E.

[8] C'est un invariant de boucle.

Corollaire 21.12 (Théorème de la base extraite) :
Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice finie on peut extraire une base de E.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E.
Puisque $E \neq \{0_E\}$, l'un au moins des x_i est non nul.
Quitte à renuméroter les x_i, on peut supposer qu'il s'agit de x_1.
Et alors la famille formée du seul vecteur x_1 est libre[9], et donc par la proposition précédente, on peut compléter cette famille à l'aide de certains vecteurs de $(x_2, \dots, x_n)$ de manière à former une base de E.
La base ainsi obtenue est bien extraite de $(x_1, \dots, x_n)$. □

[9] La non nullité de x_1 est indispensable ici.

Et en dim. infinie ?
Ce résultat reste valable en dimension infinie, sous réserve que l'on accepte l'axiome du choix, et la preuve est alors autrement plus technique, et ne tient alors plus dans la marge (ni dans le programme de MPSI).

Corollaire 21.13 : *Un espace vectoriel de dimension finie et distinct de $\{0_E\}$ possède des bases.*

Théorème 21.14 (Théorème de la base incomplète) : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice finie de E et soit $\mathscr{L}$ une famille libre[10] de E. Alors il existe une partie finie $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{H}$ soit une base de E.*
Autrement dit, on peut compléter $\mathscr{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ de manière à former une base de E.

[10] Nécessairement finie puisque E est de dimension finie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la famille $\mathscr{L} \cup \mathscr{G}$, qui est encore génératrice de E car elle contient la famille génératrice $\mathscr{G}$. □

21.1.3 Dimension des espaces vectoriels usuels

Nous connaissons déjà des bases[11] d'un certain nombre d'espaces vectoriels. Et donc le cardinal de ces bases nous donne des dimensions :

- $\dim \mathbf{K}^n = n$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p$. En particulier, $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$.
- $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1$

[11] Les bases dites «canoniques».

En revanche, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
De même, $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie : nous avons prouvé en TD qu'il existe des familles libres de cardinal infini.
De même pour $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Exemples 21.15

Certains résultats d'analyse se reformulent en termes de dimension.
Nous avons prouvé que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y'(t) + a(t)y = 0$ est un espace vectoriel.
De plus, nous savons que les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a, et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Donc nous avons là un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1, et dont une base est formée de la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}$.

De même, on prouve que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension 2.
Il faut pour cela distinguer plusieurs cas. Par exemple pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, dans le cas où le polynôme caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2, il faut prouver que les fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont linéairement indépendantes, et forment une base[12] de l'ensemble des solutions.
Et de même pour les autres cas.

[12] Nous savons déjà qu'il s'agit d'une famille génératrice !

Proposition 21.16 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{K}$. Alors $E \times F$ est encore de dimension finie et* $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Soit alors $(x, y) \in E \times F$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$. Et donc

$$(x, y) = (x, 0_F) + (0_E, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, 0_F\right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (0_E, f_j).$$

Donc la famille $(e_1, 0_F) \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)$ est génératrice de $E \times F$.
Il n'est pas difficile [13] de prouver qu'elle est libre, et donc est une base de $E \times F$, de cardinal $n + p = \dim E + \dim F$. □

[13] Et je vous invite à essayer de le faire.

21.1.4 Cardinal des familles libres et génératrices

Proposition 21.17 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :*

1. *toute famille libre est de cardinal au plus n.*
2. *toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n.*

Démonstration.

1. C'est le corollaire 21.4.
2. Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice, alors on peut en extraire une base, qui sera nécessairement de cardinal n, donc $n \leqslant p$.

□

Proposition 21.18 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors*

1. *toute famille libre de cardinal n est une base de E.*
2. *toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.*

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E de cardinal n.
   Par le théorème de la base incomplète, on peut lui ajouter des vecteurs de $\mathscr{B}$ pour en faire une base de E, qui sera alors nécessairement de cardinal n.
   Mais $(x_1, \dots, x_n)$ est déjà de cardinal n, donc on ne lui aura ajouté aucun vecteur : c'est déjà une base de E.
2. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E de cardinal n. Alors on peut en extraire une base de E, qui sera alors de cardinal n.
   Mais $(x_1, \dots, x_n)$ étant déjà de cardinal n, la base extraite est nécessairement $(x_1, \dots, x_n)$ tout entier.

□

Exemple 21.19

La famille $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 1)$ est libre[14] dans $\mathbf{R}^3$.
Étant de cardinal $3 = \dim \mathbf{R}^3$, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

[14] Il faut écrire le système pour le prouver proprement, mais la position des 0 permet de se convaincre facilement de sa liberté.

21.2 SOUS-ESPACES VECTORIELS EN DIMENSION FINIE

21.2.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 21.20 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit F un sous-espace vectoriel de E.*
Alors F est de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Démonstration. Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à dire. Nous supposons donc $F \neq \{0_E\}$.
Une famille libre d'éléments de F est une famille libre de vecteurs de E, et donc de cardinal inférieur ou égal à $\dim E$.
L'ensemble des cardinaux possibles des familles libres de vecteurs de F est donc une partie de $\mathbf{N}^*$, non vide (car F contient des vecteurs non nuls), et majorée par $\dim E$.
Il possède donc un plus grand élément $p \in [\![1, n]\!]$.
Soit alors $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de F.
Pour tout $x \in F$, $(e_1, \dots, e_p, x)$ n'est pas libre, et donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_x$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_x x = 0_E.$$

Si $\lambda_x = 0$, alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$, avec les λ_i non tous nuls, ce qui contredit la liberté de $(e_1, \dots, e_p)$.

Donc $\lambda_x \neq 0$, si bien que $x = -\dfrac{1}{\lambda_x}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Donc $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de F. Ceci prouve donc que F est de dimension finie, et que $p = \dim F \leqslant \dim E$.

Si $F = E$, il est évident que $\dim F = \dim E$.
Inversement, si $\dim F = \dim E$, alors une base $\mathcal{B}$ de F est une famille libre de vecteurs de E, de cardinal $\dim E$. C'est donc une famille génératrice de E, de sorte que $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = E$. □

Exemple 21.21

Voici une autre preuve du fait que $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, de dimension $n+1$, donc si $\mathbf{K}[X]$ était de dimension finie, sa dimension serait supérieure ou égale à tout entier $n \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde.

21.2.2 Dimension d'une somme

Proposition 21.22 : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie ou non), de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.*
Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F+G) \leqslant \dim F + \dim G$.
De plus, on a équivalence entre :

1. *la somme $F + G$ est directe*
2. *la concaténation[15] de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$*
3. $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$

Démonstration. Notons $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_p)$ une base de G.
Alors nous avons déjà prouvé que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F + G$, qui est donc de dimension finie[16] et avec

$$\dim(F+G) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p) = n + p = \dim F + \dim G.$$

[15] Qui est la famille obtenue en mettant bout à bout les vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et ceux de $\mathcal{B}_G$, en gardant les éventuels doublons (à la différence d'une union).

[16] Car il possède une famille génératrice finie.

Pour le cas d'égalité, pour une fois, ne procédons pas par un raisonnement circulaire :
1) ⇒ 2) Nous savons déjà que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F+G$, il s'agit de prouver qu'elle est libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ des scalaires tels que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j}_{\in G} = 0_E$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, et par liberté de $\mathscr{B}_F$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. De même, $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$.

2) ⇒ 1). Supposons $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ libre, et soit $x \in F \cap G$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j$.

Et donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0_E$, donc par liberté de $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et donc $x = 0_E$.
2) ⇒ 3) Évident par définition de la dimension.

3) ⇒ 2) Nous savons que $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de $F+G$. Elle est de cardinal $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$, donc c'est une base de $F+G$. □

Définition 21.23 – Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie, en somme directe, alors on appelle **base adaptée à la somme directe** $F \oplus G$ toute base de $F \oplus G$ obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G.

⚠ Une proposition précédente nous dit que lorsque la somme est directe, la concaténation de toute base de F avec toute base de G est une base de $F+G$, il n'y a pas de réciproque : toutes les bases de $F \oplus G$ ne sont pas forcément adaptées à la somme directe.

L'inégalité que nous venons d'obtenir peut être précisée par la formule suivante.

Théorème 21.24 (Formule de Grassmann) : *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$.
Alors il s'agit d'une famille libre, et par le théorème de la base incomplète, nous pouvons la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ de F.
Notons qu'alors $\dim F = p + r$.
De même, il est possible de compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_m)$ de G, avec $\dim G = p + m$.

La famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est alors une famille génératrice de $F+G$ car concaténation d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G.

Remarque
En réalité, la concaténation de ces deux familles génératrices contient deux fois chacun des e_i, mais les doublons peuvent évidemment être éliminés d'une famille génératrice tout en préservant l'aspect générateur.

Il nous reste donc à prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est une famille libre.
Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_m$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{m} \nu_k g_k = 0_E.$$

Alors
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r}\mu_j f_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{m}\nu_k g_k}_{\in G}.$$

Et donc les deux membres de l'égalité ci-dessus sont dans $F \cap G$.
En particulier, il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{m}\nu_k g_k = \sum_{i=1}^{p}\beta_i e_i.$$

Or $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_m)$ est libre[17], et donc

$$\beta_1 = \cdots = \beta_p = \nu_1 = \cdots = \nu_m = 0.$$

Et donc il vient
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r}\mu_j f_j = 0_E.$$

Mais la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est également libre[18] et donc

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_1 = \cdots = \mu_r = 0.$$

Ceci achève bien de prouver que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m)$ est libre, et donc est une base de $F + G$.

Par définition de la dimension, il vient donc

$$\dim(F+G) = p + r + m = (p+r) + (p+m) - p = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

soit encore
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$

□

[17] Car c'est une base de G.

[18] C'est une base de F.

Corollaire 21.25 – *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si F et G sont supplémentaires dans E, alors :*

1. $F \cap G = \{0_E\}$
2. $E = F + G$
3. *E est de dimension finie et* $\dim E = \dim F + \dim G$.

Inversement, dès que deux de ces trois propriétés sont vraies, alors la troisième l'est aussi et F et G sont supplémentaires dans E.

Démonstration. Le sens direct ne pose pas de problèmes : les deux premiers points ont déjà été vus, dimension finie ou non, et le dernier découle directement de la formule de Grassmann : $\dim E = \dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

Inversement :

1. Supposons que 1) et 2) sont vrais. Alors F et G sont en somme directe, et la somme directe est égale à E. Donc ils sont supplémentaires, et donc 3) est vrai.
2. Supposons que 1) et 3) soient vrais. Alors F et G sont en somme directe par 1), et $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, qui, par la formule de Grassmann, est de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$.
   Donc $E = F + G$, et donc $E = F \oplus G$.
3. Supposons que 2) et 3) soient vrais. Alors par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = 0$, et donc $F \cap G = \{0_E\}$, donc F et G sont en somme directe, et par 2) sont supplémentaires dans E.

□

Corollaire 21.26 – *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

Le lemme suivant caractérise les sommes directes de n sous-espaces vectoriels, où il est l'analogue du bien connu «F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$». Si je l'utilise dans la preuve suivante, il est en pratique assez peu exploitable[19]

[19] Ce qui justifie qu'il ne possède que le statut de lemme.

Lemme 21.27. Soit E un espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E ($n \geqslant 2$).
Alors la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i la somme $F_1 + \cdots + F_{n-1}$ est directe

ii $F_1 + \cdots + F_{n-1}$ et F_n sont en somme directe (autrement dit si $(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0_E\}$.)

Démonstration. Supposons $F_1, F_2, \dots, F_n$ en somme directe.
Soient alors $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_{n-1} \in F_{n-1}$ tels que $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0_E$. Alors

$$\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} + \cdots + \underbrace{x_{n-1}}_{\in F_{n-1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_n} = 0_E$$

si bien que $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0_E$.
Donc déjà $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe.
De plus, soit $x \in (F_1 + \cdots + F_{n-1}) \cap F_n$.
Alors il $x_1, \dots, x_{n-1} \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1}$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_{n-1}$. Et donc

$$0_E = x - x = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_{n-1}}_{\in F_{n-1}} + \underbrace{(-x)}_{\in F_n}$$

de sorte que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = -x = 0_E$.
Ceci prouve bien que $F_1 + \cdots + F_{n-1}$ et F_n sont en somme directe.

Réciproquement, supposons $F_1, \dots, F_{n-1}$ en somme directe et $\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap F_n = \{0_E\}$.
Soient alors $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ tels que $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0_E$.
Alors $\underbrace{x_1 + \cdots + x_{n-1}}_{\in F_1 \oplus \cdots \oplus F_{n-1}} + \underbrace{x_n}_{\in F_n} = 0_E$.
Et donc par définition d'une somme directe, $x_1 + \cdots + x_{n-1} = x_n = 0_E$.
Puisque $F_1, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe, $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0_E$.
Et donc on a bien prouvé que $x_1 = \cdots = x_n = 0_E$, de sorte que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. □

Proposition 21.28 : *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie, avec*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

Démonstration. L'inégalité est facile : nous savons déjà que la concaténation de familles génératrices de F_i est une famille génératrice de $F_1 + \cdots + F_n$.
Et donc en particulier, la concaténation de bases, qui est de cardinal $\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ est génératrice, donc de cardinal supérieur ou égal à $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)$.

Alternative
Voir l'exercice 20 du TD21 pour une preuve alternative utilisant un théorème (le théorème du rang) prouvé un peu plus loin.

Pour le cas d'égalité, procédons par récurrence sur n, en prouvant la propriété :
$\mathscr{P}(n)$: «si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\dim(F_1 + \dots + F_n) = \dim F_1 + \dots + \dim F_n$, si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe».

Pour $n = 2$, le résultat a déjà été prouvé à la proposition 21.22.
Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie et soient $F_1, \dots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

S'ils sont en somme directe, alors par le lemme précédent, $\bigoplus_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) \oplus F_{n+1}$. Et donc

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n+1} F_i = \dim\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) \oplus F_{n+1}\right) = \dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i + \dim F_{n+1}$$

C'est le cas $n = 2$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \dim F_i + \dim F_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i.$$

C'est l'hypothèse de récurrence.

Et inversement, supposons que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$.

Nous savons déjà que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) \leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + \dim F_{n+1}$ et que $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.
Si l'une de ces inégalités était stricte, alors on aurait

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) < \sum_{i=1}^{n+1} \dim F_i$$

ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc en fait, les deux inégalités sont des égalités, de sorte que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i \text{ et } \dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} F_i\right) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + \dim F_{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, la première égalité nous dit que $F_1 + \dots + F_n$ est directe, et la seconde que $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ et F_{n+1} sont en somme directe.

Par le lemme précédent, ceci signifie donc que $\sum_{i=1}^{n+1} F_i$ est directe.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Corollaire 21.29 – *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i.*
Alors $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n$ est libre (et donc est une base de $F_1 + \dots + F_n$).

Démonstration. Nous savons déjà que la concaténation $\mathscr{B}$ des $\mathscr{B}_i$ est génératrice de $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Elle sera donc libre si et seulement si

$$\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \operatorname{Card}(\mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Par la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe. □

21.2.3 Existence de supplémentaires

Proposition 21.30 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe au moins un supplémentaire de F dans E, et tous les supplémentaires de F dans E ont même dimension* $\dim E - \dim F$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Alors, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre et $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
Donc par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \dots, f_p)$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathscr{B}$.
Notons $(e_1, \dots, e_q)$ ces vecteurs, de sorte que $(f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_q)$ est une base de E, et notons $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$.
Alors la concaténation de la base $(f_1, \dots, f_p)$ de F et de la base $(g_1, \dots, g_q)$ de G est une base de $F + G = E$.
Donc[20] F et G sont en somme directe.
Et donc sont supplémentaires dans E.

[20] C'est la proposition 21.22.

Enfin, par la formule de Grassmann, si G' est un supplémentaire de F dans E, alors

$$\dim F + \dim G' = \dim E \Leftrightarrow \dim G' = \dim E - \dim F.$$

□

21.3 Applications linéaires en dimension finie

21.3.1 Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$

Commençons par un résultat qui n'est pas spécifique à la dimension finie.

Proposition 21.31 : *Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Alors une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est nulle si et seulement si elle est nulle sur $\mathscr{B}$, c'est-à-dire si et seulement si $\forall i \in I$, $f(e_i) = 0_F$.*

Démonstration. Si f est nulle, il est évident que les $f(e_i)$ le sont.
Et inversement, si tous les $f(e_i)$ sont nuls, soit $x \in E$. Alors il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ de scalaires telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.
Et alors, par linéarité de f, $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.
Donc f est l'application linéaire nulle. □

Corollaire 21.32 – *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors deux applications linéaires $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base de E.*

Démonstration. Appliquer la proposition précédente à $f - g$. □

Ceci implique notamment que pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur une base : étant donnée une base $(e_i)_{i \in I}$ de E, et étant donnés des vecteurs $(y_i)_{i \in I}$ de F, il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I$, $f(e_i) = y_i$.
Cette application est l'application qui à $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ associe $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i$.

Proposition 21.33 : *Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension finie, et*

$$\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on pose alors

$$\varphi_{i,j} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k & \longmapsto & \alpha_i f_j \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que $\varphi_{i,j}$ est linéaire, et que $\varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{k,i} f_j$.

Soient $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j}\varphi_{i,j} = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$.

Alors pour $k \in [\![1,n]\!]$, en évaluant en e_k, il vient

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j}\delta_{k,i} f_j = \sum_{j=1}^p \lambda_{k,j}.$$

Et donc par liberté de $(f_1, \dots, f_p)$, $\lambda_{k,1} = \cdots = \lambda_{k,p} = 0$.
Donc la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est libre.

Prouvons à présent qu'elle est génératrice de $\mathscr{L}(E,F)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et pour $i \in [\![1,n]\!]$, notons $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p})$ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $(f_1, \dots, f_p)$, de sorte que $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} f_j$.

Prouvons qu'alors $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}$.

Par le corollaire ci-dessus, il suffit de prouver que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f(e_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}(e_k)$.

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j}\varphi_{i,j}(e_k) = \sum_{j=1}^p \alpha_{k,j} f_j = f(e_k)$.

Ainsi, la famille $(\varphi_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{L}(E,F)$, de cardinal $n \times p = \dim E \times \dim F$. □

Autrement dit
$\varphi_{i,j}$ est l'unique application linéaire qui à e_i associe f_j et à e_k, $k \neq i$ associe 0_F.

Détails
Par définition,

$$\varphi_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

21.3.2 Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 21.34 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie. S'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.*

Remarque
Le résultat reste valable si c'est F qui est supposé de dimension finie : il suffit de considérer φ^{-1}.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors nous savons que $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F.
Donc F est de dimension finie, et $\dim F = \operatorname{Card}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = n = \dim E$. □

Exemple 21.35

Soient a, b deux réels, et soit $E = \left\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$.
Soit alors $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$.
Alors Φ est un isomorphisme, et donc E est un espace vectoriel de dimension 2.
Notons que nous en connaissons déjà des bases, par exemple dans le cas où $X^2 - aX - b$ possède une racine double r, une base est formée des deux suites $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 21.36 : *Deux espaces vectoriels de dimensions finies E et F sont isomorphes*[21] *si et seulement si* $\dim E = \dim F$.

[21] C'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$

Démonstration. Il suffit de prouver que si $\dim E = \dim F$, alors il existe un isomorphisme de E dans F.
Supposons donc que $\dim E = \dim F = n$, et soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Nous savons que $f_{\mathscr{B}_E} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans E,

et de même $f_{\mathscr{B}_F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dans F.

Alors $f_{\mathscr{B}_E}^{-1} \circ f_{\mathscr{B}_F}$ est un isomorphisme[22] de E dans F. □

[22] Car composée d'isomorphismes.

21.3.3 Le théorème du rang

Le théorème du rang va nous donner une relation entre la dimension du noyau d'une application linéaire et celle de son image.
Essayons de nous faire une intuition avant de l'énoncer proprement : soit $\varphi : \mathbf{K}^n \to F$ une application linéaire.

Nous savons que $f(1,0,\dots,0), f(0,1,0,\dots,0), \dots, f(0,\dots,0,1)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à n.
Mais si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbf{K}^n}$ est un élément du noyau de f, alors

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0_F \Leftrightarrow \alpha_1 f(1,0,\dots,0) + \cdots + \alpha_n f(0,\dots,0,1) = 0_F.$$

Donc nous avons une combinaison linéaire des $f(e_i)$, nulle et à coefficients non tous nuls.
Donc l'un des $f(e_i)$ est combinaison linéaire des autres, et donc $(f(e_j))_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}$ est encore génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension au plus $n-1$.
Si le noyau contient un autre élément, non colinéaire à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors il existe une autre[23] relation de dépendance linéaire entre les $f(e_i)$.
Et donc on peut enlever un autre vecteur de notre famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, de sorte que $\dim \operatorname{Im} f \leqslant n-2$. Etc
L'idée sous-jacente au théorème du rang est donc que plus le noyau de f est gros, plus son image est petite.

[23] Au sens où ce n'est pas un multiple de celle déjà utilisée ci-dessus.

Proposition 21.37 : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Supposons qu'il existe S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors $f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.*

Remarque
L'existence d'un tel supplémentaire est toujours vérifiée si E est de dimension finie

Démonstration. Il est clair que $u = f_{|S}^{|\operatorname{Im} f}$ est une application linéaire bien définie de S dans $\operatorname{Im} f$.
Montrons que u est surjective : soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais alors x s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in S$. Et donc

$$y = f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{=0_F} + f(x_2) = f(x_2) = u(x_2).$$

Donc u est surjective.

Soit à présent $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_F \Leftrightarrow f(x) = 0_F$.
Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Mais $x \in S$ par définition, et donc $x \in S \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, de sorte que u est injectif. □

Théorème 21.38 (Théorème du rang) : *Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Remarque
$\operatorname{Ker} f$ est automatiquement de dimension finie car sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie.

Démonstration. Par le lemme précédent, un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E, et il en existe si E est de dimension finie, est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.
Mais $\dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, donc

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

□

⚠ On n'a surtout pas dit que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E. Cela peut bien entendu se produire, mais il n'est pas obligatoire d'avoir $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Par exemple, si f est non nul et vérifie $f^2 = 0$, comme c'est par exemple le cas de $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array} \right.$, alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X) \neq \{0_E\}$.

21.3.4 Rang d'une application linéaire

Définition 21.39 – Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on dit que f est **de rang fini** si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on appelle **rang de** f et on note $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.

Remarques. Si F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, donc est de dimension finie, donc f est de rang fini.
Le théorème du rang nous dit aussi que si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.
Si E et F sont tous deux de dimension infinie, il existe tout de même des applications linéaires de rang fini de E dans F. Par exemple $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(0)X \end{array} \right.$ a une image de dimension 1.

Définition 21.40 – Si $(e_1, \dots, e_n)$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle **rang de la famille** $(e_1, \dots, e_n)$ et on note $\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n)$ la dimension de l'espace engendré par cette famille :

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) = \dim \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n).$$

Remarquons que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ étant engendré par n vecteurs, on a toujours

$$\operatorname{rg}(e_1, \dots, e_n) \leqslant \operatorname{Card}(e_1, \dots, e_n) = n.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc si et seulement si elle est libre.

Cette notion de rang est alors directement reliée à celle du rang d'une application linéaire :

Proposition 21.41 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, \dots, e_n)$, soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. C'est une simple reformulation du fait que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et donc

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

□

Proposition 21.42 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors :*

1. *f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$*
2. *f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E$.*

Démonstration. 1. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim F$.

2. f est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, ce qui d'après le théorème du rang est équivalent à $\operatorname{rg} f = \dim E$.

□

Corollaire 21.43 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim E = \dim F$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un isomorphisme*
2. *f est surjective*
3. *f est injective*

Dimensions
L'hypothèse sur les dimensions est indispensable, mais notons qu'elle est en particulier vérifiée dès que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E **de dimension finie**.

Démonstration. 1) ⇒ 2) : c'est évident, par définition une bijection est surjective.
2) ⇒ 3). Si f est surjective, alors $\operatorname{rg} f = \dim F = \dim E$.
Donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f = 0$.
On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et donc que f est injective.
3 ⇒ 1) Si f est injective, alors $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et donc $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$. Donc f est surjective, et donc est bijective. □

Exemples 21.44

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P'' \end{array} \right.$.
Alors pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $XP' = P''$.
Pour des raisons de degré, ceci n'est possible que si P' est nul, c'est-à-dire si P est constant.
Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_0[X]$. Par conséquent, f n'est pas injective, et donc n'est pas surjective.

En revanche, $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & 2P - P' - (X+1)P'' \end{array} \right.$ est injective (toujours pour des raisons de degré), et donc est surjective.

Remarque
Ceci ne nous donne toutefois pas un élément qui ne serait pas dans l'image de f, il faut travailler davantage pour trouver un tel élément sans antécédent.

Proposition 21.45 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est un inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, c'est-à-dire un isomorphisme de E*
2. *f est inversible à gauche (c'est-à-dire il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$)*
3. *f est inversible à droite*

Remarque
Vous avez peut-être remarqué la similitude avec un résultat concernant les matrices : si A, B sont deux matrices carrées, alors $AB = I_n$ implique A inversible et $A^{-1} = B$.
Il y a bien un lien entre ces deux résultats, qui sera explicité dans un chapitre ultérieur.

Démonstration. Si f est inversible, alors elle est inversible à droite et à gauche.
Si elle est inversible à gauche, alors elle est injective, et donc est bijective.
Et si elle est inversible à droite, alors elle est surjective, et donc est bijective. □

Proposition 21.46 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.*
En particulier :

1. *si $\dim E < \dim F$, alors f ne peut pas être surjective*
2. *si $\dim E > \dim F$, alors f ne peut pas être injective.*

Remarque. Notons que le second point vient préciser le fait que si f est un isomorphisme, alors $\dim E = \dim F$: en effet, dès qu'il n'y a pas égalité, f ne peut pas être injective ou ne peut pas être surjective[24].

[24] Et n'est souvent ni l'un ni l'autre !

Démonstration. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim F$.
Et par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim E$.
Et donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Si $\dim F > \dim E$, alors $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E < \dim F$, donc on ne peut pas avoir $\operatorname{Im} f = F$: f ne peut pas être surjective.
Si $\dim F < \dim E$, alors $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f$, avec $\operatorname{rg} f < \dim E$, donc $\dim \operatorname{Ker} f > 0$, et donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$: f n'est pas injective. □

Exemple 21.47

Une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^p$ n'est jamais injective si $p < n$, jamais surjective si $n < p$.
Notons que ce dernier point était assez évident : une application linéaire ne peut jamais augmenter la dimension. En effet, si $f : E \to F$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc de dimension inférieure ou égale à $n = \dim E$.

Proposition 21.48 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $u \in GL(E)$. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, de dimension finie, $u(F)$ est de dimension finie et $\dim u(F) = \dim F$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $u_{|F}$ réalise un isomorphisme de F sur $u(F)$.
En effet, cette restriction est surjective par définition de $u(F)$, elle est injective car u l'est. □

En particulier, l'image d'une droite par un isomorphisme est une droite, l'image d'un plan est un plan, etc.

Proposition 21.49 (Invariance du rang par automorphisme) : *Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de rang fini. Alors :*

1. *$\forall v \in GL(E)$, $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$*
2. *$\forall w \in GL(F)$, $\operatorname{rg}(w \circ u) = \operatorname{rg} u$.*

Démonstration.
1. Si v est bijective, alors $\operatorname{Im}(v) = E$, et donc $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$.
2. On a $\operatorname{Im}(w \circ u) = w(\operatorname{Im} u)$. Et donc la proposition précédente s'applique.
   Puisque w réalise un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $\operatorname{Im}(w \circ u)$, ces deux espaces sont de même dimension[25].

□

[25] Et en particulier $\operatorname{Im}(w \circ u)$ est bien de dimension finie.

21.3.5 Formes linéaires et hyperplans

Définition 21.50 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $\varphi : E \to \mathbf{K}$.
On note généralement E^* au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Terminologie
L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit alors $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & \lambda_i \end{array} \right.$.

Alors φ_i est une forme linéaire sur E.

Et alors, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, et pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in \mathbf{K}} \varphi_i(x).$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est donc génératrice de $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.
Mais $\dim \mathscr{L}(E, \mathbf{K}) = \dim E = n$, donc cette famille est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.
Pour le dire autrement, une fois une base de E fixée, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des formes linéaires qui à x associent sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée.

Exemples 21.51

- $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x - 3y + z \end{array} \right.$ est une forme linéaire.
Et c'est $2\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3$ où

$$\varphi_1(x, y, z) = x, \ \varphi_2(x, y, z) = y, \ \varphi_3(x, y, z) = z.$$

- $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 P(t)\, dt \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
Si on prend comme base de $\mathbf{R}_n[X]$ la base canonique, alors avec les notations précédentes, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi_i : a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mapsto a_i.$$

Et ici, on a $\varphi(X^i) = \int_0^1 t^i\, dt = \frac{1}{i+1}$.
Donc $\varphi(a_0 + \cdots + a_n X^n) = a_0 \varphi(1) + \cdots + a_n \varphi(X^n) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1}$.
Donc $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \varphi_i$.

Définition 21.52 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un **hyperplan** de E s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, non nulle[26], telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

[26] C'est-à-dire qui ne prend pas toujours la valeur 0. Ce qui ne l'empêche pas de s'annuler en certains points de E, notamment 0_E.

Exemple 21.53

Dans $\mathbf{R}^4$, $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - t = 0\}$ est un hyperplan : c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + 2y - t \end{array} \right.$.
Notons que celle-ci est non nulle puisque $\varphi(1, 0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

En dimension finie, avec les notations ci-dessus, une forme linéaire est de la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires.

Et donc l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$ est

$$\{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0 \right\}.$$

Autrement dit, une fois une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E fixée, un hyperplan possède toujours une équation qui est une équation linéaire en les coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Cas particuliers
Dans le plan, vous savez déjà que $ax + by = 0$ est l'équation d'une droite (qui passe par l'origine) et que dans $\mathbf{R}^3$, $ax + by + cz = 0$ est l'équation d'un plan (qui passe par l'origine aussi).

Exemple 21.54

Dans $\mathbf{R}_n[X]$, $\left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$ est un hyperplan.
Il a une équation simple dans la base canonique : c'est l'ensemble des $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{n+1} = 0$.

Proposition 21.55 : *Soit E un espace vectoriel, et soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si il possède un supplémentaire de dimension 1 (une droite), c'est-à-dire si et seulement si il existe $u \in E$, non nul, tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.*

Terminologie
On dit aussi que H est de codimension 1.

Démonstration. Supposons que H soit un hyperplan de E et soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\operatorname{Ker}\varphi = H$.
Puisque φ est non nulle, il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$.
Montrons alors par analyse-synthèse que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$. Supposons[27] que $x = y + \lambda u$, avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(u)$.
Donc $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$. Et par conséquent, $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$.
Inversement[28], posons $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \in \mathbf{K}$, de sorte que $\lambda \cdot u \in \operatorname{Vect}(u)$, et soit $y = x - \lambda \cdot u$.
Alors $\varphi(y) = \varphi(x) - \lambda\varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, et donc $y \in \operatorname{Ker}\varphi = H$.
Enfin, on a bien $x = y + \lambda \cdot u$, donc x s'écrit bien de manière unique comme somme d'un élément de H et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Et donc $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$: $\operatorname{Vect}(u)$ est un supplémentaire de H de dimension 1.

[27] C'est l'analyse.

[28] C'est la synthèse.

Inversement, supposons que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(u)$. Alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique $x = x_H + \lambda_x u$, avec $x_H \in H$ et $\lambda_x \in \mathbf{K}$.
Soit alors $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x = x_H + \lambda_x u & \longmapsto & \lambda_x \end{array} \right.$.
Alors φ est linéaire[29], et donc est une forme linéaire.
Et alors, pour $x = x_H + \lambda_x u$, on a

$$x \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \lambda_x = 0 \Leftrightarrow x = x_H \in H.$$

Et donc $\operatorname{Ker}\varphi = H$, donc H est un hyperplan de E. □

[29] Le prouver.

Corollaire 21.56 – *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim E - 1$.*

Cas particuliers
Dans un plan, les hyperplans sont les droites.
Dans $\mathbf{R}^3$, les hyperplans sont des plans.

Démonstration. En dimension n, un sous-espace vectoriel possède un supplémentaire de dimension 1 si et seulement si il est de dimension $n - 1$. □

Exemple 21.57

L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et donc de dimension $n^2 - 1$.
C'est très intuitif : pour choisir une matrice de trace nulle, on peut choisir comme on le souhaite tous les coefficients hors diagonale, et $n-1$ coefficients de la diagonale, le dernier étant alors nécessairement l'opposé de la somme des autres.
Mais ceci est pénible à écrire proprement, il faut exhiber une base alors que l'argument «c'est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire» est bien plus efficace.

Exemple 21.58

Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $F = \operatorname{Vect}((1,1,0),(-1,2,1))$, qui est clairement[30] de dimension 2, et donc un hyperplan de $\mathbf{R}^3$.
Cherchons alors à déterminer une équation de E. Nous cherchons donc une forme linéaire $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, non nulle, telle que $F = \operatorname{Ker}\varphi$.
Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{R}^3$. Nous savons qu'il existe alors un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tel que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \varphi(x,y,z) = ax + by + cz.$$

Puisque F et $\operatorname{Ker}\varphi$ sont de même dimension, on aura $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$ si et seulement si l'un est inclus dans l'autre[31]
Soit si et seulement si $\begin{cases} (1,1,0) \in \operatorname{Ker}\varphi \\ (-1,2,1) \in \operatorname{Ker}\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases}$
Les solutions de ce système sont les $(a,-a,3a)$, $a \in \mathbf{R}$, et donc $F = \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}^*$ tel que $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $\varphi(x,y,z) = a(x-y+3z)$.

[30] Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

[31] L'égalité des dimensions garantissant alors que l'inclusion est en fait une égalité.

Proposition 21.59 : *Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulles sur E. Alors $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.*

Autrement dit
Deux formes linéaires qui définissent le même hyperplan sont proportionnelles.

Démonstration. Nous savons déjà que pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$, $\operatorname{Ker}(\lambda\varphi_1) = \operatorname{Ker}\varphi_1$.

Inversement, soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires de même noyau, et soit $u \notin \operatorname{Ker}\varphi_2$.
Soit alors $\lambda = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)} \in \mathbf{K}$.
Pour $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker}\varphi_1$ et $\mu \in \mathbf{K}$ tels que $x = y + \mu u$.
Et alors $\varphi_1(x) = \mu\varphi_1(u)$ et $\lambda\varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}\varphi_2(\mu u) = \mu\varphi_1(u) = \varphi_1(x)$.
Donc $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$. □

Supposons que H_1 et H_2 soient deux hyperplans distincts de E, avec $\dim E = n$.
Puisqu'ils ont même dimension, ils ne peuvent être inclus l'un dans l'autre. Donc $H_1 \cap H_2$ est strictement inclus dans H_1 , de sorte que $\dim(H_1 \cap H_2) \leqslant n-2$.
Par ailleurs, par la formule de Grassmann, $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Or $H_1 + H_2$ contient strictement[32] H_1, donc $\dim(H_1 + H_2) > \dim H_1 = n-1$.
Nécessairement, $\dim(H_1 + H_2) = n$, et donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

Rappel
On a $A \cap B = B$ si et seulement si $B \subset A$.

[32] Il contient aussi les vecteurs de H_2 qui ne sont pas dans H_1.

Notons qu'il y a un cas où nous avions déjà l'intuition géométrique de ce fait : l'intersection de deux plans distincts est une droite.

Le résultat qui suit généralise ceci à l'intersection de m hyperplans.
⚠ On n'a alors qu'une inégalité, et pas une égalité, même si on suppose les H_i distincts. Par exemple, l'intersection de trois plans de $\mathbf{R}^3$ peut tout à fait être une droite, qui est alors de dimension 1.

Parallélisme ?
Nous parlons ici de vecteurs, tous les plans contiennent le vecteur nul, il ne peuvent donc pas être disjoints.
Pour avoir des plans parallèles, il va falloir attendre d'avoir la notion d'espace affine.

Proposition 21.60 : *Soit $p \in \mathbf{N}^*$, et soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors*

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geqslant \dim E - p.$$

Remarque. Bien qu'il reste vrai, ce théorème n'a d'intérêt que lorsque p, le nombre d'hyperplans est inférieur à la dimension de E. Si $p > \dim E$, il vous dit juste qu'une dimension est positive...

Démonstration. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit φ_i une forme linéaire de noyau H_i, et soit

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)) \end{array} \right.$$

Il est clair que ψ est linéaire, et $\operatorname{Ker} \psi = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.
Alors, par le théorème du rang appliqué à ψ, il vient

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} \psi + \dim \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} \psi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \psi \geqslant \dim E - p.$$

Détails
$\operatorname{Im} \psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^p$, donc de dimension inférieure ou égale à p.

□

Il existe une réciproque à ce résultat, qui dit que tout espace de dimension $n - p$ est intersection de p hyperplans.

Proposition 21.61 : *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors il existe des hyperplans $H_1, \dots, H_p$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} H_i = F$.*

Démonstration. Soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de F.
Complétons-la[33] en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Et alors pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons φ_i la forme linéaire définie sur E par $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto x_i$.

Et soit alors $H_i = \operatorname{Ker} \varphi_i = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$. □

[33] C'est toujours possible par le théorème de la base incomplète.

Détails
H_i est l'ensemble des vecteurs de E dont la composante suivant e_i est nulle.

EXERCICES DU CHAPITRE 21

▸ Dimension d'un espace vectoriel, sommes de sous-espaces vectoriels

EXERCICE 21.1 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer la dimension. F

1) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$
2) $F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases}\right\}$
3) $F_3 = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid (X - 1)P' - XP'' = 2P\}$
4) $F_4 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \mid MN = NM\}$ où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 deux réels fixés distincts.
5) $F_5 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$

EXERCICE 21.2 Soient $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq b$. Montrer que la famille $(X - a)^k(X - b)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$. F

EXERCICE 21.3 Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites p-périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension. PD

EXERCICE 21.4 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre. F

EXERCICE 21.5 Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k = (k, k - 1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. PD

EXERCICE 21.6 Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. Montrer que la famille $f_a : x \mapsto \sin(x + a)$, $f_b : x \mapsto \sin(x + b)$, $f_c : x \mapsto \sin(x + c)$ est liée dans $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. PD

EXERCICE 21.7 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$. On pose $f_k : x \mapsto \cos^k x$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. AD

1) Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ et $(g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2) Soit $F_n = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \operatorname{Vect}(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in G_n$.
3) Montrer que $F_n = G_n$.

EXERCICE 21.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, F_3 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées : PD

i) $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3$
ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
iii) $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$

EXERCICE 21.9 Montrer, **sans analyse-synthèse** que F et G sont supplémentaires dans E dans les deux cas suivants : PD

1) $E = \mathbf{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2z + t = 0$ **et** $2y + 3z - t = 0\}$, $G = \operatorname{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1))$
2) $E = \mathbf{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\}$, $G = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$

▸ Applications linéaires

EXERCICE 21.10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit f un automorphisme de E. AD

Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $f^{-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \lambda_i f^i$.

EXERCICE 21.11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. AD

1) On suppose que f est nilpotent, d'indice de nilpotence p (c'est-à-dire tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$). On souhaite prouver que $p \leqslant n$.
   a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
   b) Montrer qu'alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   c) Conclure.
2) On suppose à présent que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer que f est nilpotent. Donner un exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension infinie pour lequel ce résultat est faux.

▸ Théorème du rang et conséquences

EXERCICE 21.12 Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments distincts de $\mathbf{K}$. Montrer que $\Phi : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme. Connaissez-vous sa bijection réciproque ? PD

EXERCICE 21.13 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$. Montrer que f et g sont deux projecteurs. AD

EXERCICE 21.14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ si et seulement si n est pair. AD

EXERCICE 21.15 On note $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathscr{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. PD

EXERCICE 21.16 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. PD
Montrer que $\varphi : \left|\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array}\right.$ est un isomorphisme, et retrouver la dimension de $\mathscr{L}(E, F)$.

EXERCICE 21.17 PD

1) Pour $n \geqslant 2$, on pose $\varphi_n : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}\right.$. Montrer que φ_n est un isomorphisme.
2) En déduire que $\varphi : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array}\right.$ est un isomorphisme.
3) Les endomorphismes $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X) \end{array}\right.$ et $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array}\right.$ sont-ils injectifs ? Surjectifs ?

EXERCICE 21.18 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, et que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant n$, on a $\dim(\operatorname{Ker} u^k) = k$. D

EXERCICE 21.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient u, v deux endomorphismes de E tels que $E = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(v)$. AD
Prouver que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E, et que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v)$ sont supplémentaires dans E.

EXERCICE 21.20 Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. D
En considérant $\Phi : \left|\begin{array}{rcl} F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & F_1 + \cdots + F_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array}\right.$, retrouver le résultat suivant : la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

EXERCICE 21.21 AD

1) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que
$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$
2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u + v$ bijectif. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim E$.

EXERCICE 21.22 **Inégalité de Sylvester (Oral X)** TD
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E.

1) Comparer $\operatorname{rg}(u + v)$ à $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ et $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)$.
2) Prouver que $\operatorname{rg}(u + v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\}$ **et** $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v = E)$.
3) Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - n \leqslant \operatorname{rg}(uv) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

▸ Hyperplans et formes linéaires

EXERCICE 21.23 Déterminer la dimension de $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ et en déterminer un supplémentaire. F

EXERCICE 21.24 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. PD

1) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et soit $x \notin \operatorname{Ker} \varphi$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Vect}(x)$.

2) Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

EXERCICE 21.25 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$. Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée. AD

EXERCICE 21.26 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. D

1) Montrer que si F et G sont deux hyperplans de E, ils possèdent un supplémentaire commun.
2) On suppose que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

EXERCICE 21.27 Dual de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ D

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\operatorname{tr}(AE_{i,j})$ en fonction des coefficients de A.
2) En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors il existe un unique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 21

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.1

1. On a

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = -2y\} = \{(-2y,y,z),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \{y(-2,1,0)+z(0,0,1),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(0,0,1)).$$

Ainsi, la famille $(-2,1,0),(0,0,1)$ est génératrice de F_1. Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F_1, qui est donc de dimension 2.

2.

$$\begin{aligned} F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \{(-2z,z,z),\ z \in \mathbf{R}\} = \{z(-2,1,1),\ z \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(-2,1,1). \end{aligned}$$

La famille $(-2,1,1)$ est donc génératrice de F_2. Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul[1] : c'est donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 1$.

[1] Une famille formée d'un seul vecteur est libre... à condition que ce vecteur soit non nul !

3. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $P \in F_3$ si et seulement si

$$(X-1)(2aX+b) - 2aX = aX^2+bX+c \Leftrightarrow 2aX^2+bX-2aX-b = aX^2+bX+c.$$

Par identification des coefficients, c'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} 2a=a \\ b-2a=b \\ -b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases}$$

> **Remarque**
> Il n'y a donc aucune contrainte sur b.

Et donc $P \in F_3 \Leftrightarrow P = bX$, de sorte que $F_3 = \mathrm{Vect}(X)$.
En particulier, F_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, de base X, de sorte que $\dim F_3 = 1$.

> **Astuce**
> Si on arrive à écrire un ensemble sous forme d'un Vect, c'est automatiquement un sous-espace vectoriel.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M \in F_4$ si et seulement si

$$\begin{cases} a\lambda_1 = a\lambda_1 \\ b\lambda_1 = b\lambda_2 \\ c\lambda_1 = c\lambda_2 \\ d\lambda_2 = d\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\lambda_1-\lambda_2)=0 \\ c(\lambda_1-\lambda_2)=0 \end{cases}$$

Et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceci équivaut à $b=c=0$.
Ainsi,

$$F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, dont une famille génératrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisqu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ non colinéaires, elle est libre, et donc c'est une base de F_4, qui est donc de dimension 2.

5. Il s'agit de noter qu'une matrice de trace nulle s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & \dots & -(m_{1,1}+\cdots+m_{n-1,n-1}) \end{pmatrix} = \sum_{i\neq j} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i}-E_{n,n})$$

On a alors une famille[2] génératrice, dont on prouve facilement qu'elle est libre.
Et donc c'est une base de F_5, qui est de dimension n^2-1.

[2] La famille formée des $E_{i,j}$ pour $i\neq j$ et des $E_{i,i}-E_{n,n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.2

Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ des complexes tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

En évaluant en $X=b$, il vient $\lambda_0(b-a)^n = 0$. Or $b\neq a$, donc $\lambda_0 = 0$.

Il reste donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

En simplifiant[3] par $(X-a)$, il reste

$$\lambda_1(X-b)^{n-1} + \lambda_2(X-a)(X-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_n(X-b)^n = 0_{\mathbf{C}[X]}.$$

[3] Ce qui est possible car $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre.

En évaluant en $X=b$, il vient $\lambda_1(b-a)^{n-1} = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$.

Ne reste donc que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i(X-a)^i(X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

De proche en proche, on prouve ainsi que tous les λ_i sont nuls, donc que la famille est libre.
Étant de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{C}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.3

Soient $(u_n)_n$ et (v_n) deux suites p-périodiques, et soit $\lambda\in\mathbf{R}$.
Alors pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\lambda u_{n+p} + v_{n+p} = \lambda u_n + v_n$, de sorte que $(\lambda u_n + v_n)_n$ est p-périodique.
De plus, la suite nulle est évidemment p-périodique, donc l'ensemble E des suites p-périodiques est bien un sous-espace vectoriel[4] de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

[4] Et donc un espace vectoriel.

L'idée est alors qu'une suite p-périodique $(u_n)_n$ est uniquement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.
Notons pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$, $(v_n^{(i)})_n$ la suite définie par

$$v_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n\equiv i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\left(\left(v_n^{(0)}\right), \left(v_n^{(1)}\right), \dots, \left(v_n^{(p-1)}\right)\right)$ est une famille libre de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
En effet, soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}$ des réels tels que

$$\lambda_0(v_n^{(0)}) + \lambda_1(v_n^{(1)}) + \cdots + \lambda_{p-1}(v_n^{(p-1)}) = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}.$$

Alors pour $i\in[\![0,p-1]\!]$, en prenant $n=i$, on obtient $\lambda_i = 0$.
Commentaires : *si vous préférez, la suite* $\lambda_0(v_n^{(0)}) + \lambda_1(v_n^{(1)}) + \cdots + \lambda_{p-1}(v_n^{(p-1)})$ *est*

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-2}, \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots)$$

et il est clair que si elle est nulle, alors tous les λ_i *sont nuls.*

De plus, pour $(u_n)_n\in E$, on a $(u_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u_i(v_n^{(i)})$.

Intuition
La valeur de u_0 impose celle de tous les u_{kp}. Celle de u_1 impose celle des u_{kp+1}, etc

En effet, pour $n\in\mathbf{N}$, si on note $n = kp+r$, $0\leqslant r\leqslant p-1$ la division euclidienne de n par p, alors

$$u_n = u_{kp+r} = u_r = u_r v_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{p-1} u_i \underbrace{v_n^{(i)}}_{=0 \text{ si } i\neq r}.$$

Donc $(u_n)\in\operatorname{Vect}\left((v_n^{(0)}), (v_n^{(1)}), \dots, (v_n^{(p-1)})\right)$, et ainsi, $\left((v_n^{(0)}), (v_n^{(1)}), \dots, (v_n^{(p-1)})\right)$ est une base de E, qui est donc de dimension p.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.4

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, de cardinal $n = \dim \mathbf{K}^n$, c'est une base de $\mathbf{K}^n$, et en particulier une famille libre.
Donc toute sous-famille en est libre, et c'est notamment le cas de $(e_1, \dots, e_{n-1})$.
Remarque *: ceci n'est plus vrai pour une famille génératrice dont le cardinal dépasse la dimension de l'espace ambiant.*
Par exemple $(1,1), (2,2), (1,0)$ *est génératrice de* $\mathbf{R}^2$*, mais la famille formée de ses deux premiers vecteurs n'est pas libre.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.5

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_{\mathbf{R}^n}$.
Soit encore $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n, \lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + (n-1)\lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} + 2\lambda_n, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
On a donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n & = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + (n-1)\lambda_n & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_{n-1} + 2\lambda_n & = 0 \\ \lambda_n & = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls qui a clairement $(0, \dots, 0)$ pour unique solution.
Et donc $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Étant de cardinal $n = \dim \mathbf{R}^n$, si bien que c'est une base de $\mathbf{R}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.6

Notons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x+a) = \sin(x)\cos(a) + \cos(x)\sin(a)$, et donc $f_a \in \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.
Et de même, $f_b, f_c \in \operatorname{Vect}(\sin, \cos)$.
Donc (f_a, f_b, f_c) est une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension au plus[5] 2.
Nécessairement, il s'agit d'une famille liée.

[5] Et même en fait exactement deux car il n'est pas très difficile, même si inutile ici, de voir que $(\sin, \cos)$ est une famille libre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.7

1. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$.
Alors en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_0 = 0$.
Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on peut diviser par $\cos(x)$, et on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k \cos^{k-1}(x) = 0$.
En prenant la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, il vient $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche, en divisant par $\cos^i(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, puis en prenant la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, on montre que $\lambda_i = 0$.
Donc la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

Montrons par récurrence sur n que $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.
Pour $n = 0$, c'est évident.
Supposons que ce soit vrai au rang n, et soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k g_k$ une combinaison linéaire nulle.
En dérivant deux fois, il vient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 \lambda_k \cos(kx) = 0.$$

Mais alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k((n+1)^2 - k^2)\cos(kx) = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Et alors $\lambda_{n+1} = 0$. Donc par récurrence, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.
Alternative *: voici une autre preuve*[6] *pour la liberté de* $(f_0, \dots, f_n)$.
Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ *des réels tels que* $\displaystyle\sum_{i=0}^n \lambda_i \cos^i = 0$.

[6] Proposée par Jean.

Alors la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ *est une fonction polynomiale, qui s'annule en tous les éléments de* $[-1,1]$ *(car* cos *est surjective sur* $[-1,1]$*). Elle est donc nulle*[7], *de sorte que tous ses coefficients sont nuls :* $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

[7] Car possède une infinité de racines.

2. Par récurrence sur k : si $k = 0$, c'est évident.

Si $\cos^{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cos(ix)$, alors

$$\cos^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cos(ix)\cos(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(\cos((i+1)x) + \cos((i-1)x))$$

et donc $g_k \in F_k$.

Alternative : par la formule d'Euler, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos^k(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{i(2j-k)x}.$$

Et donc en considérant la partie réelle[8],

[8] La partie imaginaire du membre de gauche est nulle.

$$g_k(x) = \cos^k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cos((2j-k)x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f_{2j-k}(x).$$

Notons qu'on a toujours $-k \leqslant 2j-k \leqslant k$, et si $2j-k < 0$, $f_{2j-k} = f_{k-2j}$ par parité du cosinus, avec $0 \leqslant k-2j \leqslant k$.
Donc on a bien écrit g_k comme combinaison linéaire de $f_0, f_1, \dots, f_k$. Et donc $g_k \in F_k$.

3. Les deux espaces sont de même dimension $n+1$, et on vient de prouver que $F_n \subset G_n$ à la question précédente.
Donc nécessairement $F_n = G_n$.
Commentaires *: en réalité, nous avons déjà prouvé lors d'un DS qu'il existe des polynômes* $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$, *appelés polynômes de Tchebychev, tels* $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$, *c'est-à-dire que* $g_n \in \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.
Et donc $G_n \subset F_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.8

Supposons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Alors déjà

$$\dim E = \dim(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3.$$

Rappel
La dimension d'une somme directe est la somme des dimensions.

Si $x \in F_1 \cap F_2$, alors on a $0_E = \underbrace{x}_{\in F_1} + (\underbrace{-x}_{\in F_2}) + \underbrace{0}_{\in F_3}$, et donc, la somme étant directe, $x = -x = 0_E$. Donc $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
De même, si $x \in (F_1+F_2) \cap F_3$, alors $x = x_1 + x_2, x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$. Et donc on a $0_E = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} - \underbrace{x}_{\in F_3}$, et donc $x = x_1 = x_2 = 0_E$, de sorte que $(F_1+F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$.

Inversement, supposons les trois conditions vérifiées, et montrons que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe. Soient donc $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, x_3 \in F_3$ tels que $0_E = x_1 + x_2 + x_3$.
Alors $x_3 = -(x_1+x_2) \in F_3 \cap (F_1 + F_2)$. Et donc $x_3 = \{0_E\}$.
Il reste alors $x_1 + x_2 = 0_E$, soit encore $x_1 = -x_2 \in F_1 \cap F_2$. Et donc $x_1 = x_2 = 0_E$.
Ainsi, la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe, et donc de dimension $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = \dim E$.
Or, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E tout entier, et donc $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.9

1. Il est clair que G est de dimension 2, et une base de F est $\left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right), \left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, de sorte que F est aussi de dimension 2.
Soit alors $(x,y,z,t) \in F \cap G$.
Il existe alors deux réels λ et μ tels que

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,1,1,1) + \mu(1,-1,1,1) = (\lambda+\mu, \lambda-\mu, \lambda+\mu, \lambda+\mu).$$

Mais alors[9] $\begin{cases} 6(\lambda+\mu=0 \\ 2(\lambda-\mu)+2(\lambda+\mu)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\mu=0.$

Donc $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$, de sorte que $F\cap G$ est réduit au vecteur nul.
Donc F et G sont en somme directe, et puisqu'on a déjà $\dim F+\dim G=\dim \mathbf{R}^4$, ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

[9] On utilise là le fait qu'il s'agit d'un vecteur de F.

2. Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d$. Alors

$$P\in F \Leftrightarrow aX^6+bX^4+cX^2+d=aX^5+cX^4+bX^3+dX^2 \Leftrightarrow a=c=d=0 \Leftrightarrow P\in \operatorname{Vect}(X^2).$$

Donc F est de dimension 1.
De même, on prouve que $G=\operatorname{Vect}(X^3-8,X^2-4,X-1)$. Puisqu'il s'agit d'une famille de polynômes de degrés distincts, elle est libre, et donc $\dim G=3$.

Pour prouver que F et G sont supplémentaires, nous pourrions procéder comme dans la première partie, en prouvant que $F\cap G=\{0\}$. Mais il est également possible de prouver que la concaténation d'une base de F et d'une base de G (par exemple les bases que nous venons d'obtenir) est libre.
Ceci se fait sans difficultés. Étant libre et de cardinal $4=\dim \mathbf{R}_3[X]$, la famille ainsi obtenue, que l'on sait être génératrice de $F+G$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. Et donc $\mathbf{R}_3[X]=F+G$.
Puisque $\dim F+\dim G=\dim \mathbf{R}_3[X]$, on a donc $\mathbf{R}_3[X]=F\oplus G$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.10

Notons n la dimension de E, de sorte que $\mathscr{L}(E)$ est de dimension n^2.
La famille $(\mathrm{id}_E,f,f^2,\dots,f^{n^2})$ étant une famille de $\mathscr{L}(E)$ de cardinal n^2+1, elle est liée.

Donc il existe des scalaires $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n^2}$, non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n^2}\lambda_i f^i=0_{\mathscr{L}(E)}$.

Notons $p=\min\{k\in [\![0,n^2]\!] \mid a_k\neq 0\}$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n^2}a_kf^k=0_{\mathscr{L}(E)}$.

En composant[10] par f^{-p}, $a_p\mathrm{id}_E+a_{p+1}f+\cdots+a_{n^2}f^{n^2-p}=0_{\mathscr{L}(E)}$.

[10] À gauche ou à droite.

Soit encore $\mathrm{id}_E=\left(-\dfrac{1}{a_p}\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n^2}a_kf^{k-p-1}\right)\circ f$.

Et donc $f^{-1}=-\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n^2}a_kf^{k-p-1}$ est bien de la forme souhaitée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.11

1.a. Puisque f^{p-1} n'est pas l'application nulle par hypothèse, il existe $x\in E$ tel que $f^{p-1}(x)\neq 0_E$.

1.b. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0x+\lambda_1f(x)+\cdots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0_E.$$

En appliquant f^{p-1}, il vient

$$\lambda_0f^{p-1}(x)+\underbrace{\lambda_1f^p(x)}_{=0_E}+\cdots+\lambda_{p-1}f^{2p-2}(x)=0_E \Leftrightarrow \lambda_0f^{p-1}(x)=0_E.$$

Puisque $f^{p-1}(x)\neq 0_E$, c'est donc que $\lambda_0=0$.
IL ne reste donc que $\lambda_1f(x)+\cdots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0_E$.
En appliquant f^{p-2}, il vient alors $\lambda_1f^{p-1}(x)=0_E$, et donc $\lambda_1=0$.
De proche en proche, on prouve que $\lambda_0=\cdots=\lambda_{p-1}=0$, et donc la famille $(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est libre.

1.c. Nous venons d'obtenir une famille libre de p vecteurs dans un espace de dimension n, donc $p\leqslant n$.

Rappel
Toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à la dimension.

2. La différence ici réside dans l'ordre des quantificateurs : ici l'entier p peut dépendre du vecteur x choisi alors que pour un endomorphisme nilpotent, il s'agit nécessairement du même p pour tous les vecteurs de E.
Toutefois, le raisonnement de la question précédente fonctionne encore : à $x\in E\setminus\{0\}$ fixé, soit p le plus petit entier tel que $f^p(x)=0_E$.

Alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre, et donc $p \leqslant n$.
Et par conséquent, $f^n(x) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $f^n = 0$, et donc f est bien nilpotente.

Ceci ne vaut plus en dimension infinie, comme le prouve par exemple le cas de la dérivation des polynômes, qui est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
En effet, étant donné un polynôme P non nul, si $n = \deg P$, alors $f^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$.
Pour autant, $f : P \mapsto P'$ n'est pas nilpotente, car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(X^n) \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.12

La linéarité de Φ ne pose pas de difficulté.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $(P(a_1), \dots, P(a_n)) = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Donc $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$, de sorte que P possède n racines distinctes.
Étant de degré au plus $n-1$, c'est le polynôme nul, donc $\operatorname{Ker} P = \{0\}$.
On en déduit que Φ est injectif. Mais $\dim \mathbf{K}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbf{K}^n$, donc Φ est bijectif : c'est un isomorphisme.

Sa bijection réciproque est l'application qui à un n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ associe l'unique polynôme P de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
Notons alors $L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.
Alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i L_i$ est un polynôme de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
C'est donc l'unique antécédent de $(y_1, \dots, y_n)$ par Φ.

Et donc $\Phi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}_{n-1}[X] \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i L_i \end{array} \right.$.

Remarque
Ceci fournit donc un moyen simple de garantir l'existence et l'unicité des polynômes de Lagrange associés à $(a_1, \dots, a_n)$, sans avoir à donner leur expression : L_i est l'antécédent par Φ du $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.13

Puisque $f + g = \mathrm{id}_E$, on a $f^2 = f \circ (\mathrm{id}_E - g) = f - f \circ g$.
Si nous voulons prouver que f est un projecteur, il nous faut donc prouver que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$, soit encore[11] que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Par le théorème du rang, nous savons que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g$.
Par ailleurs, pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $x = \mathrm{id}_E(x) = f(x) + g(x) = g(x) \in \operatorname{Im} g$.
Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g$. Ces deux espaces possédant mêmes dimensions, ils sont égaux.
Et donc en particulier, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, et donc on a bien $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

[11] Voir l'exercice 19 du TD 19.

Nous pourrions refaire un calcul similaire pour g, mais notons plutôt que $g = \mathrm{id}_E - f$ est la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$.

Rappel
Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.14

Supposons qu'un tel endomorphisme existe.
Alors[12] $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 \dim \operatorname{Ker} f$ est pair.

[12] C'est le théorème du rang.

Inversement, supposons que $\dim E = 2p$ soit pair, et soit $(e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E.
Soit alors f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = e_{i+p}$ et $\forall i \in [\![p+1, 2p]\!]$, $f(e_i) = 0_E$.

Rappel
Un endomorphisme de E est uniquement déterminé par sa valeur sur une base de E.

Soit alors $x \in E$. De manière unique, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{2p} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbf{K}^{2p}$. Et alors

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i f(e_i) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_{i+p} = 0_E.$$

Par unicité de la décomposition de $f(x)$ dans la base $(e_1, \dots, e_{2p})$, on a donc

$$f(x) = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Soit encore $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$.

Et alors par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 2p - p = p$.
Et puisque $e_{p+1}, \dots, e_{2p} \in \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p}) \subset \operatorname{Im} f$.

Détails
$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_{p+1}, \dots, e_{2p}$, il contient le sous-espace vectoriel de E qu'ils engendrent.

Mais $(e_{p+1},\dots,e_{2p})$ est une famille libre de E, et donc une base de $\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_{2p})$, qui est donc de dimension p.
Étant inclus dans $\mathrm{Im}\, f$, et de même dimension p, il est égal à $\mathrm{Im}\, f$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_p,\dots,e_{2p}) = \mathrm{Ker}\, f.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.15

Une solution simple pour prouver l'existence d'un tel isomorphisme[13] est de prouver que les deux espaces ont même dimension.

[13] Et pas d'en construire un.

Nous avons déjà donné en cours la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, c'est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

D'autre part, pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$M \in \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \Leftrightarrow \forall i \neq j, m_{i,j} = m_{j,i} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}).$$

Donc la famille formée des $E_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et des $E_{i,j}+E_{j,i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$.
Elle est libre car si $m_{1,1},\dots,m_{n,n},m_{1,2},\dots,m_{n-1,n}$ sont des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} m_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}) = 0_n$$

alors en remontant les calculs réalisés précédemment, il vient

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix} = 0$$

et donc tous les coefficients sont nuls.
On a donc une base de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$, de cardinal $n+(n-1)+\dots+1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Donc $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ sont de même dimension, et donc sont isomorphes.

Rappel
Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

En réalité, il est facile de construire un isomorphisme entre ces deux espaces, et on peut par exemple prendre l'application $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\varphi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Je vous laisse le soin de prouver qu'elle est linéaire, et bijective.

Méthode
Ici, il faudra faire à la main et l'injectivité et la surjectivité, pas question d'utiliser le théorème du rang si vous ne connaissez pas les dimensions de l'espace de départ et/ou de l'espace d'arrivée !

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.16

Commençons par prouver que φ est bien linéaire : soient u, v deux applications linéaires de E dans F, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + v) &= ((\lambda u+v)(e_1),\dots,(\lambda u+v)(e_n)) = (\lambda u(e_1)+v(e_1),\dots,\lambda u(e_n)+v(e_n)) \\ &= \lambda(u(e_1),\dots,u(e_n)) + (v(e_1),\dots,v(e_n)) = \lambda\varphi(u)+\varphi(v).\end{aligned}$$

C'est un isomorphisme car nous avons prouvé que pour tout n-uplet $(y_1,\dots,y_n) \in F^n$, il existe une **unique** application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(e_1) = y_1,\dots,u(e_n) = y_n$.
Ce qui revient à dire que φ est bijective : tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par φ.
Et donc $\mathscr{L}(E,F)$ et F^n ont même dimension.
Mais $\dim F^n = \dim F + \dim F + \dots + \dim F = n \dim F = \dim E \times \dim F$.

$\dim E = n$
n est bien la dimension de E, puisque nous avons noté n le cardinal d'une base de E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.17

1. La linéarité de φ_n est évidente.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi_n$. Alors $\varphi(P) = 0$, et donc $P = -P(0)X - XP''$.
En particulier, $P(0) = 0$, et donc $P = -XP''$. Si P est non nul, ceci n'est pas possible pour des raisons de degré : XP'' est de degré inférieur ou égal[14] à $\deg P - 1$, et ne peut donc être égal à P.
Donc $\operatorname{Ker} \varphi_n$ est injective.
Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, c'est une bijection.
2. Pour les mêmes raisons que précédemment, φ est injectif.
Et si $n \geqslant \deg P$, alors $Q \in \mathbf{R}_n[X]$, alors la question 1 prouve que Q possède un unique antécédent $P \in \mathbf{R}_n[X]$ par φ_n.
Et donc $\varphi(P) = \varphi_n(P) = Q$, de sorte que Q possède un antécédent par φ, qui se trouve donc être surjectif.
Et donc φ est bijectif : c'est un isomorphisme.
3. L'application f est clairement injective, puisque $f(P) = f(Q) \Leftrightarrow XP = XQ \Leftrightarrow P = Q$.
Pourtant elle n'est pas surjective puisque pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, si $P \neq 0$, $\deg \varphi(P) \geqslant 1$.
Donc les polynômes constants non nuls ne sont pas dans l'image de f.

Dimension

Nous savons qu'une application linéaire entre espaces de même dimension est un isomorphisme si et seulement si elle est injective. C'est donc notamment vrai pour des endomorphismes de E (puisque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes, donc de même dimension), sous réserve que E soit de dimension finie.

Remarque *: on a donc des exemples d'endomorphismes en dimension infinie, qui sont injectifs ou surjectifs sans être des isomorphismes.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.18

Soit p l'indice de nilpotence de u, de sorte que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. On a facilement[15] les inclusions :

$$0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} u^p.$$

Par le théorème du rang, appliqué à la restriction de u à $\operatorname{Ker} u^{k+1}$, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) + \dim \operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}}.$$

Or, $\operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u$.
Vu l'hypothèse faite sur $\operatorname{Ker} u$, il s'agit là d'une droite vectorielle.
Par ailleurs, si $y \in u(\operatorname{Ker} u^{k+1})$, alors il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$ tel que $y = u(x)$, avec $u^{k+1}(x) = 0_E$.
Donc en particulier, $u^k(y) = u^{k+1}(x) = 0_E$, et donc $y \in \operatorname{Ker} u^k$.
Ainsi, $u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \subset \operatorname{Ker} u^k$, et donc $\dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u^k)$.
On a donc

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim u(\operatorname{Ker} u^{k+1}) + 1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1.$$

Ceci prouve déjà que pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k \leqslant k$.
Puisqu'en particulier $\dim \operatorname{Ker} u^p = \dim E = n$, nécessairement $n \leqslant p$.

Par ailleurs, à chaque étape, l'inclusion $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$ est stricte : $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
En effet, supposons par l'absurde que deux termes consécutifs soient égaux, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
Alors pour $x \in \operatorname{Ker} u^{k+2}$, il vient $u^{k+2}(x) = 0_E = u^{(k+1)}(u(x))$.
Donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$, et donc $u^k(u(x)) = 0_E \Leftrightarrow u^{k+1}(x) = 0_E$.
Donc si pour un $k_0 < p$, $\operatorname{Ker} u^{k_0} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, alors $\operatorname{Ker} u^{k_0+2} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, et donc la suite est stationnaire à partir de k_0.
En particulier, $\operatorname{Ker} u^{p-1} = \operatorname{Ker} u^p$, ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence.
Donc pour tout $k < p$, $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$, et donc $\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1$.
Comme nous avions déjà prouvé l'inégalité inverse, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$, et donc $\forall p \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Notons qu'en particulier, ceci prouve que $p = n$.

Alternative : si on s'autorise le résultat (classique) de l'exercice 21.11, on sait que $p \leqslant n$.
On sait que pour tout k, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$.
Si l'une de ces inégalités était stricte, on aurait alors $\dim \operatorname{Ker} u^n < n$.
Mais $p \leqslant n$, de sorte que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et donc $\dim \operatorname{Ker} u^n = \dim E = n$.
Donc nécessairement, pour tout $k \leqslant n$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$ et donc $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.

[15] Et la nilpotence de u n'est d'aucune utilité ici.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.19

D'après le théorème du rang, on a d'une part $\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$ et d'autre part $\dim E = \dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v$.

De plus, par la formule de Grassmann, on a

$\dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v)) = \dim \operatorname{Im}(u)+\dim(\operatorname{Im}(v))-\dim(\operatorname{Im}(u)+\operatorname{Im}(v)) = \dim \operatorname{Im}(u)+\dim(\operatorname{Im} v)-\dim E.$

Et de même,

$$\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v - \dim E.$$

En sommant ces deux relations, il vient donc

$$\dim(\operatorname{Im} u\cap\operatorname{Im} v)+\dim(\operatorname{Ker} u\cap\operatorname{Ker} v) = \underbrace{\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u}_{=\dim E} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v}_{=\dim E} -2\dim E = 2\dim E-2\dim E = 0.$$

Et puisque les dimensions sont des entiers naturels, on a donc

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0$$

et donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$.

Puisqu'on sait déjà que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, on en déduit[16] que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont supplémentaires dans E.
Et de même, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires dans E.

[16] C'est l'une des caractérisations des supplémentaires : si deux propositions parmi trois sont vérifiées...

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.20

Il est facile de prouver que Φ est linéaire.
Et elle est surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels.

De plus, on a $(x_1,\dots,x_n) \in \operatorname{Ker}\Phi \Leftrightarrow x_1+\cdots+x_n = 0_E$.
Mais rappelons que, par définition, la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe si et seulement si $\forall (x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n,\ x_1+\cdots+x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0_E$.
Soit encore si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Ker}\Phi \Rightarrow (x_1,\dots,x_n) = (0_E,\dots,0_E)$.
Donc si et seulement si Φ est injective.

Comme nous avons toujours la surjectivité, la somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe si et seulement si Φ est un isomorphisme.
Si la somme est directe, alors Φ est un isomorphisme, et donc $F_1\times\cdots\times F_n$ et $F_1+\cdots+F_n$ ont même dimension.
Mais nous connaissons celle du produit : c'est la somme des dimensions des F_i, donc $\dim(F_1+\cdots+F_n) = \dim F_1+\dim F_2+\cdots+\dim F_n$.

Inversement, si cette égalité est vérifiée, alors l'espace de départ et d'arrivée de Φ ont même dimension. Mais Φ étant surjective, par le théorème du rang, c'est un isomorphisme. Et donc $\dim F_1+\cdots+F_n = \dim F_1+\cdots+\dim F_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.21

1. On a facilement $\operatorname{Im}(u+v)\subset\operatorname{Im}(u)+\operatorname{Im}(v)$. En effet, pour $y\in\operatorname{Im}(u+v)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x)+v(x)\in\operatorname{Im} u+\operatorname{Im} v$.

Et donc nécessairement,

$$\operatorname{rg}(u+v) = \dim\operatorname{Im}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u+\operatorname{Im} v) \leqslant \dim\operatorname{Im} u+\dim\operatorname{Im} v \leqslant \operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v).$$

Et alors, on a $u = u+v+(-v)$, donc par ce qui vient d'être dit,

$$\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(v).$$

On en déduit que $\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$, et sur le même principe, $\operatorname{rg}(v)-\operatorname{rg}(u)\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$.
Donc $|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)|\leqslant\operatorname{rg}(u+v)$.

Rappel
Nous avons déjà dit que multiplier une application linéaire par un scalaire non nul ne change pas son image, et donc ne change pas son rang.
Donc $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$.

2. Puisque $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}\, u$. Et donc $\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u$.
Or par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E - \mathrm{rg}(u)$, de sorte que $\mathrm{rg}(v)+\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim E$.

Par ailleurs, $u+v$ étant bijectif, on a $\mathrm{rg}(u+v) = \dim E$, et donc par la question 1, $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) \geqslant \dim E$.
Par double inégalité, on a donc $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) = \dim E$.

Solution de l'exercice 21.22

1. On a facilement $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$, et donc $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, u+\mathrm{Im}\, v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.
Et alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u+v(-v)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)+\mathrm{rg}(-v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)+\mathrm{rg}(v)$.
Et donc $\mathrm{rg}(u+v) \geqslant \mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)$.
Notons qu'on obtient les mêmes inégalités en échangeant u et v, et donc $\mathrm{rg}(u+v) \geqslant |\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)|$.

2. Reprenons nos calculs : on a égalité $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$ si et seulement si on a à la fois :
   - $\dim(\mathrm{Im}\, u+\mathrm{Im}\, v) = \dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Im}\, v$: la somme $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ est directe
   - $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$.

En particulier, si ces conditions sont vérifiées, alors[17] $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont en somme directe : $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$.
Par ailleurs, on a $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}(u+v)$.
En effet, l'inclusion $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$ est toujours vraie, et si $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$, alors $u(x) = -v(x) \in \mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)$, de sorte que $u(x) = v(x) = 0_E$, et donc $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.
Donc par la formule de Grassmann, couplée au théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Ker}\, v) &= \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, v - \dim \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v\\ &= n-\mathrm{rg}(u)+n-\mathrm{rg}(v)-n+\mathrm{rg}(u+v).\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Ker}\, v) = n = \dim E$, de sorte que $\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Ker}\, v = E$.

Inversement, si on suppose à la fois $\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Ker}\, v = E$ et $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$, alors on a toujours $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$ et donc

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Im}(u+v) &= n-\dim \mathrm{Ker}(u+v) = n-\dim(\mathrm{Ker}\, u\cap \mathrm{Ker}\, v)\\ &= n-\dim \mathrm{Ker}\, u-\dim\mathrm{Ker}\, v+\dim(\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{Ker}\, v)\\ &= n-\dim\mathrm{Ker}\, u+n-\dim\mathrm{Ker}\, v = \dim\mathrm{Im}\, u+\dim\mathrm{Im}\, v\\ &= \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v).\end{aligned}$$

[17] Puisque la dimension de la somme vaut la somme des dimensions.

3. Puisque $\mathrm{Im}(uv) \subset \mathrm{Im}\, u$, nécessairement $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.
Par ailleurs, $\mathrm{Im}(uv) = u(\mathrm{Im}\, v)$, qui est forcément[18] de dimension inférieure ou égale à celle de $\dim \mathrm{Im}\, v$.
Donc $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ (être plus petit que deux nombres, c'est être plus petit que leur minimum.)

Enfin, considérons la restriction de u à $\mathrm{Im}\, v$.
On a alors, $\mathrm{Im}\, u_{|\mathrm{Im}\, v} = \mathrm{Im}(uv)$ et $\mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{Im}\, v}) = \mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u$.
Et donc par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\, v = \mathrm{rg}(uv)+\dim(\mathrm{Im}\, v\cap\mathrm{Ker}\, u) \geqslant \mathrm{rg}(uv)+\dim\mathrm{Ker}\, u$$

et donc $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \mathrm{rg}(v)-\dim\mathrm{Ker}\, u \leqslant \mathrm{rg}(v)-n+\mathrm{rg}(u)$.

[18] Une application linéaire ne peut que diminuer la dimension d'un sous-espace, et jamais l'augmenter.

Plus généralement
Pour tout sev F de E, $\mathrm{Ker}(u_{|F}) = F \cap \mathrm{Ker}\, u$.

Solution de l'exercice 21.23

Puisque F est le noyau de la forme linéaire trace, c'est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, qui est donc de dimension n^2-1.
Nous avons prouvé en cours que pour toute matrice A qui n'est pas dans F, $\mathrm{Vect}(A)$ est un supplémentaire de F.
Reprouvons-le[19] : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de trace non nulle.
Alors $A \notin F$ et donc $\mathrm{Vect}(A)\cap F = \{0_n\}$, de sorte qu'on a à la fois $\mathrm{Vect}(A)\cap F = \{0_n\}$ et $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(A) = n^2-1+1 = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, de sorte que F et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

[19] En notant qu'en dimension finie, on peut se passer de l'analyse-synthèse qui a été faite en cours.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.24

Notons $n = \dim E$.

1. Puisque $x \notin \operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Vect}(x)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient $\operatorname{Ker}\varphi$, mais qui contient aussi x, donc n'est pas égal à $\operatorname{Ker}\varphi$.
Donc il est de dimension strictement supérieure à $\dim \operatorname{Ker}\varphi = n-1$.
Donc il est de dimension n, et par conséquent égal à E : $E = \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Vect}(x)$.

   Par ailleurs, on a $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Vect}(x) = n - 1 + 1 = n = \dim E$, et donc la somme est directe.

2. On a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Mais puisque H_1 et H_2 sont distincts, et qu'ils sont de même dimension, aucun des deux n'est inclus dans l'autre.
En particulier, il existe $x \in H_2$ qui n'est pas dans H_1. Donc par la question 1, $H_1 \oplus \operatorname{Vect}(x) = E$.
Or $H_1 \oplus \operatorname{Vect}(x) \subset H_1 + H_2$.
Donc $H_1 + H_2 = E$, de dimension n. Et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.
Remarque *: si $H_1 \neq H_2$, cela signifie que deux formes linéaires de noyaux H_1 et H_2 ne sont pas proportionnelles.*
*Donc par exemple $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - 3z + t = 0$ **et** $2x - 4t = 0\}$, qui est l'intersection des deux hyperplans d'équations $x + 2y - 3z + t = 0$ et $2x - 4t = 0$ est de dimension $4 - 2 = 2$, puisque les formes linéaires $(x, y, z, t) \mapsto x + 2y - 3z + t$ et $(x, y, z, t) \mapsto 2x - 4t$ ne sont pas proportionnelles.*

Détails
Si l'un était inclus dans l'autre, étant de même dimension, ils seraient égaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.25

Il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbf{K}$ telle que $\varphi(x) \neq 0$.
En effet, si H est un supplémentaire de $\operatorname{Vect}(x)$ dans E, alors nécessairement $\dim H = \dim E - 1$, et donc H est un hyperplan de E.
Donc si φ est une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$, alors $x \notin H$ et donc $\varphi(x) \neq 0$.
Puisque toutes les φ_i s'annulent en x, la forme linéaire φ n'est pas dans $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathscr{L}(E, \mathbf{K})$. Étant de cardinal $n = \dim \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, elle n'est donc pas libre, faute de quoi ce serait une base.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.26

1. Nous savons que les supplémentaires d'un hyperplan H sont les $\operatorname{Vect}(x)$, pour $x \notin H$.
Donc il nous faut ici trouver un vecteur x qui ne soit ni dans F ni dans G.
Puisque F et G ont même dimension, on ne peut avoir $F \subset G$, faute de quoi F et G seraient égaux, ce qui n'est pas le cas.
Donc il existe $u \in F \setminus G$.
De même, $G \not\subset F$, et donc il existe $v \in G \setminus F$.
Considérons alors $x = u + v$. Alors $x \notin F$, car sinon on aurait $v = x - u \in F$ car différence de deux éléments de F.
Et de même, $x \notin G$, donc $x \notin F \cup G$.
Et donc $\operatorname{Vect}(x)$ est un supplémentaire commun à F et G.

2. Nous allons procéder à une récurrence un peu surprenante[20] : une récurrence (descendante) sur la dimension de F.
Nous venons de prouver que si F et G sont des hyperplans de E, alors ils ont un supplémentaire commun.
Notons donc $\mathscr{P}(d)$: «deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension d possèdent un supplémentaire commun».

   Supposons donc $\mathscr{P}(d)$ vrai pour $d \geqslant 2$, et prouvons $\mathscr{P}(d-1)$. Soient donc F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $d - 1$.
Si $F = G$, tout supplémentaire de F fera l'affaire.
Si $F \neq G$, alors comme précédemment, il existe $u \in F \setminus G$, il existe $v \in G \setminus F$ et donc $x = u + v \notin F \cup G$.
Donc $F \oplus \operatorname{Vect}(x)$ est de dimension d, tout comme $G \oplus \operatorname{Vect}(x)$.
Par hypothèse de récurrence, ces deux sous-espaces possèdent donc un supplémentaire commun, notons-le H. Il est alors de dimension

$$\dim E - \dim(F \oplus \operatorname{Vect}(x)) = \dim E - (\dim F + 1) = \dim E - \dim F - 1.$$

[20] Mais vous allez vous habituer !

Et alors, on a $E = F \oplus (H \oplus \mathrm{Vect}(x)) = G \oplus \mathrm{Vect}(x) \oplus H$.
Donc $\mathrm{Vect}(x) \oplus H$ est un supplémentaire de F et de G dans E.
Donc $\mathscr{P}(d-1)$ est vraie. Par le principe de récurrence[21], etc.

[21] Car la récurrence a été initialisée $d = n - 1$.

Solution de l'exercice 21.27

1. Nous l'avons déjà fait.
Rappelons[22] que multiplier A **à droite** par $E_{i,j}$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, qui est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
En particulier, tous ses coefficients diagonaux sont nuls, à l'exception de celui situé à la $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut donc $a_{j,i}$.
Donc $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Bien entendu ce résultat pouvait s'obtenir à l'aide de la définition du produit matriciel et de la trace, mais c'est à réserver aux amateurs[23] de permutation de sommes et de symboles de Kronecker.

[22] Ça se retrouve avec les mains, ou sur un exemple.

[23] Dont je ne suis pas.

2. Considérons l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & \varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM) \end{array} \right.$.
Il n'est pas très difficile, à l'aide de la linéarité de la trace, de prouver que Φ est linéaire.
Soit donc $A \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, de sorte que φ_A est l'application nulle.
Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_A(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = 0$.
Mais par la question 1, $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Et donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,j} = \varphi_A(E_{j,i}) = 0$, de sorte que $A = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ et donc Φ est injective.
Mais $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K})$, et donc Φ étant injectif, c'est un isomorphisme.
Et donc toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ possède un antécédent par Φ, autrement dit, pour toute forme linéaire φ, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = \varphi_A$.

Dimensions
Notons qu'ici nous n'avons même pas besoin de connaître la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

22 Dérivabilité

Dans tout le chapitre, I désigne un **intervalle** non réduit à un point, et $\mathbf{K}$ désigne, sauf mention explicite du contraire, n'importe lequel des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Un point est dit **intérieur à** I si ce n'est pas une borne de I. On note $\mathring{I}$ l'ensemble[1] des points intérieurs à I.
On peut prouver sans difficultés que a est intérieur à I si et seulement si il existe un voisinage de a inclus dans I, ou encore s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset I$.

[1] Appelé intérieur de I.

22.1 Dérivabilité : l'aspect local

22.1.1 Définition

Nous ne nous attardons pas sur les définitions qui suivent, avec lesquelles vous êtes déjà familiers depuis la première.

Définition 22.1 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.
On dit que f est **dérivable en** a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{K}$ (c'est-à-dire est finie).
On note alors $f'(a)$ cette limite, qu'on appelle **nombre dérivé de** f **en** a.

Notons qu'une formulation équivalente[2] est de demander que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe.

[2] Via le changement de variable $x = a + h$.

Définition 22.2 – Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f **est dérivable sur** I, et on note f' la fonction $a \mapsto f'(a)$, qu'on appelle la **fonction dérivée de** f.
On note alors $\mathscr{D}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

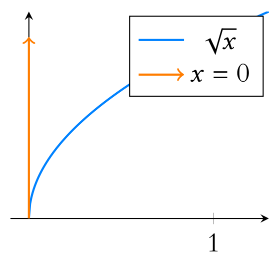
Définition 22.3 – ▸ Si f est dérivable en $a \in I$, on appelle **tangente à** $\mathscr{C}_f$ **au point d'abscisse** a la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
▸ Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, on appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a la droite verticale d'équation $x = a$.

Formule
Vous pouvez bien entendu retrouver cette formule en vous souvenant qu'il s'agit de la droite de coefficient directeur $f'(a)$ qui passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$, mais mieux vaut la connaître par cœur.

⚠ Dans le second cas, la dérivée n'est pas définie en a (donc f n'est pas dérivable en a), un nombre dérivé est toujours un réel, et ne peut en aucun cas être égal à $\pm\infty$.

Exemple 22.4

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
Donc le graphe de f possède une tangente verticale en 0.
Plus généralement $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in]0,1[$ n'est pas dérivable en 0.



Rappelons le résultat suivant, déjà prouvé dans le chapitre de développements limités.

Proposition 22.5 : *La fonction f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \ell(x-a) + o((x-a))$.*
Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Remarque
On retrouve donc la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

Corollaire 22.6 – *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et donc f est continue en a. □

Remarque. Ceci se fait aussi très bien à la main, sans toute la machinerie des o : si f est dérivable en a, alors pour $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

si bien que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans le chapitre 7, nous avions décrété[3] qu'une fonction à valeurs complexes était dérivable en a si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire étaient dérivables en a.
Ce n'est a priori pas la même définition que celle donnée ci-dessus. Il s'agit toutefois bien de la même notion, comme l'affirme la proposition ci-dessous :

[3] Il s'agissait donc d'une définition.

Proposition 22.7 : *Si $f : I \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs complexes, alors f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont, et alors*

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i(\mathrm{Im}(f))'(a).$$

Démonstration. Nous avons prouvé[4] qu'une fonction $g : I \to \mathbf{C}$ admet une limite $u + iv$ en un point a adhérent à I si et seulement si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \mathrm{Re}(g)(x) = u \\ \lim\limits_{x\to a} \mathrm{Im}(g)(x) = v \end{cases}$.
Ceci s'applique notamment au taux d'accroissement de f. □

[4] Dans le chapitre sur les limites.

22.1.2 Dérivées à gauche et à droite

Définition 22.8 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$, et soit $a \in I$.

- Si a n'est pas la borne de gauche de I, on dit que f **est dérivable à gauche en** a si $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f'_g(a)$ cette limite (appelée dérivée à gauche de f en a).
- Si a n'est pas la borne de droite de I, on dit que f **est dérivable à droite en** a si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbf{R}$, et on note alors $f'_d(a)$ cette limite (c'est la dérivée à droite de f en a).

Proposition 22.9 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ et soit $a \in \mathring{I}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Démonstration. C'est la caractérisation des limites via l'égalité des limites à droite/limite à gauche. Notons que le taux d'accroissement de f en a n'étant pas défini en a, on n'a pas à se préoccuper de sa valeur en a, il suffit que sa limite à gauche et sa limite à droite soient égales. □

Remarque. Notons que ceci ne vaut que pour un point intérieur à I. En une borne de I, la question ne se pose pas : la limite ne peut être calculée que d'un côté.

Exemple 22.10

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0.
En effet, pour $x < 0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x}{x} = -1 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -1$. Donc $f'_g(0) = -1$.
De même, pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Donc $f'_d(0) = 1$.
En revanche, f n'est pas dérivable en 0 puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

Exemple 22.11 **Une subtilité**

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, de sorte que f est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = 1$.
De même, $f'_g(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{x} = 0$.
Et donc f n'est pas dérivable en 0.

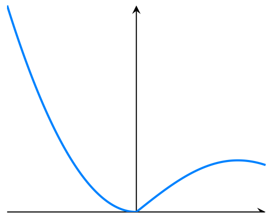


Figure 22.1– La fonction f.

Pourtant, $f_{|\mathbf{R}_+}$ est dérivable en 0, puisque le taux d'accroissement de $f_{|\mathbf{R}_+}$ en 0 n'est défini que sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{|\mathbf{R}_+}(x) - f_{|\mathbf{R}_+}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Et de même, $f_{|\mathbf{R}_-}$ est dérivable en 0, avec une dérivée en 0 qui est nulle.
Moralité : pour qu'une fonction f soit dérivable en a, il ne suffit pas que $f_{|]-\infty, a]}$ et $f_{|[a,+\infty[}$ soient dérivables en a.
C'est une différence notable avec la continuité, car si $f_{|]-\infty,a]}$ et $f_{|[a,+\infty[}$ sont continues en a, alors f est continue en a puisque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (car $f_{|[a,+\infty[}$ est continue) et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (car $f_{|]-\infty,a[}$ est continue).

22.1.3 Opérations sur les dérivées

Il est grand temps de prouver enfin toutes les formules que vous connaissez depuis longtemps au sujet de la dérivée d'un produit, d'un quotient, etc.

Proposition 22.12 : *Soient $f, g : I \to \mathbf{K}$, soit $a \in I$ tel que f et g soient dérivables en a. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$*
2. *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*
4. *si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$ et $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$*

Démonstration.

1. On a $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda f(a) + \lambda f'(a)(x-a) + o(x-a)$, donc λf est dérivable en a, avec $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
2. On a $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + g(a) + (f'(a) + g'(a))(x-a) + o((x-a))$.
   Donc[5] $f + g$ est dérivable en a, avec $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
3. On a

$$f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} (f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a))\,(g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a))$$

[5] C'est la proposition 22.5 : $f + g$ possède un développement limité d'ordre 1 en a.

$$\underset{x\to a}{=} f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) + \underbrace{f'(a)g'(a)(x-a)^2}_{\underset{x\to a}{=} o(x-a)} + o(x-a) + o((x-a)^2)$$
$$\underset{x\to a}{=} f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) + o(x-a).$$

Donc, toujours par la caractérisation de la dérivabilité à l'aide des développements limités d'ordre 1, fg est dérivable en a avec $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)}\\
&\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)} \frac{1}{1 + \frac{g'(a)}{g(a)}(x-a) + o(x-a)}\\
&\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1 - \frac{g'(a)}{g(a)}(x-a) + o(x-a) + o\left(-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a) + o(x-a)\right)\right)\\
&\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\left(1 - \frac{g'(a)}{g(a)}(x-a) + o(x-a)\right)\\
&\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a) + o(x-a).
\end{aligned}$$

Détails
C'est la formule
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x).$$

La formule pour la dérivée d'un quotient en découle en notant que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$.

Notons que les preuves données ci-dessous utilisent toutes les développements limités d'ordre 1, ce qui est probablement le plus naturel, notamment car elles ne nécessitent pas de savoir à l'avance quel sera le résultat.
Juste pour vous montrer que ces formules étaient déjà largement prouvables à l'aide des outils de lycée, donnons des preuves plus «terre à terre» des deux derniers points :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)((g(x)-g(a)) + (f(x)-f(a))g(a)}{x-a}\\
&= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)g'(a) + f'(a)g(a).
\end{aligned}$$

Et de même,

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

□

Corollaire 22.13 – *L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbf{K})$ est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ (et donc de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$).*

Démonstration. La proposition précédente prouve qu'il est stable par combinaisons linéaires (donc notamment par différence) et par produit. □

Proposition 22.14 : *Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{K}$, où J est un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $a \in I$, tel que f soit dérivable en a et g soit dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.*

Démonstration. Puisque g est dérivable en $f(a)$,

$$g(x) \underset{x\to f(a)}{=} g(f(a)) + g'(f(a))(x - f(a)) + o(x - f(a)).$$

Soit encore[6]

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + o(f(x) - f(a)).$$

[6] C'est de la composition à droite par f.

Mais f est dérivable en a, donc

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

En particulier, $f(x)-f(a) \underset{x\to a}{=} O(x-a)$ et donc $o(f(x)-f(a)) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.
Et donc

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{=} g(f(a))+g'(f(a))f'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Donc $g\circ f$ est dérivable en a, avec $(g\circ f)'(a)=f'(a)g'(f(a))$. □

Proposition 22.15 : *Soit $f : I \to J$ une bijection continue, et soit $a \in J$ tel que f soit dérivable en $f^{-1}(a)$. Alors f^{-1} est dérivable en a si et seulement si $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ et dans ce cas,*

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

Démonstration. Si f^{-1} est dérivable en a, alors en dérivant en a la relation $x = f(f^{-1}(x))$, alors il vient $1 = \left(f^{-1}\right)'(a)\times f'\left(f^{-1}(a)\right)$.
Donc en particulier, $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

Astuce
Ceci donne un moyen simple de retrouver la formule si on l'a oubliée.
Malheureusement, ça ne saurait en aucun cas suffire à prouver que f^{-1} est dérivable...

Supposons à présent cette condition vérifiée. Alors, pour $x\in J\setminus\{a\}$,

$$\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}.$$

Mais f étant continue, f^{-1} l'est aussi, et en particulier, $\lim\limits_{x\to a} f^{-1}(x) = f^{-1}(a)$.
Et donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)} = f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.
Et alors, en passant à l'inverse,

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x))-f(f^{-1}(a))}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Donnons-en également une preuve à l'aide de développements limités.
Souvenons-nous que la continuité de la bijection réciproque a déjà été prouvée précédemment.
Soit donc $a\in J$ tel que $f'(f^{-1}(a))\neq 0$.
On a alors, pour tout $x\in J$, $x = f(f^{-1})(x)$.
Or, f étant dérivable, $f(u) \underset{u\to f^{-1}(a)}{=} \underbrace{f(f^{-1}(a))}_{=a} + f'(f^{-1}(a))\left(u-f^{-1}(a)\right)+o\left(u-f^{-1}(a)\right)$.
Donc en particulier puisque $f^{-1}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f^{-1}(a)$, il vient par composition

$$x = f\left(f^{-1}(x)\right) \underset{x\to a}{=} a + f'(f^{-1}(a))\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right)+o\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right).$$

Soit encore

$$\begin{aligned} x-a &\underset{x\to f^{-1}(a)}{=} f'(f^{-1}(a))\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right)+o\left(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)\right)\\ &\underset{x\to a}{\sim} f'(f^{-1}(a))(f^{-1}(x)-f^{-1}(a)).\end{aligned}$$

Et donc $f^{-1}(x)-f^{-1}(a) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}(x-a)$.
Ce qui nous donne donc

$$f^{-1}(x) \underset{x\to a}{=} f^{-1}(a)+\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}(x-a)+o(x-a)$$

qui permet bien de conclure que f^{-1} est dérivable en a, avec $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}$. □

On retrouve alors notamment les dérivées de l'exponentielle[7], et des fonctions trigonométriques inverses. Et également le fait que Arcsin et Arccos ne soient pas dérivables en -1 et en 1.

[7] Qui, rappelons-le, est définie comme la bijection réciproque de ln, qui par définition est dérivable, de dérivée $x\mapsto \frac{1}{x}$.

22.1.4 Dérivée $k^{\text{ème}}$, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 22.16 – Soit $f : I \to \mathbf{K}$. On note $f^{(0)} = f$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $f^{(k)}$ existe et est dérivable sur I, on note $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
Si la fonction $f^{(k)}$ est définie, on l'appelle alors dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, et on dit que f est k-fois dérivable.

Remarque. En particulier une fonction k fois dérivable est continue, dérivable, deux fois dérivables, etc, $(k-1)$ fois dérivable.

Définition 22.17 – On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Pour $k \in \mathbf{N}^*$, une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ est dite **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I si elle est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note alors $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
Enfin, on dit que $f : I \to \mathbf{K}$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I si elle de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Autrement dit, si elle est dérivable autant de fois que l'on veut.
On note alors $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbf{K}) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque
Nous avions déjà une notation pour l'ensemble des fonctions continues, et on utilisera indifféremment $\mathscr{C}(I, \mathbf{K})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$.

Remarque. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ si et seulement si elle est dérivable et que sa dérivée est de classe $\mathscr{C}^n$.

⚠ On ne confondra pas «dérivable» et «de classe $\mathscr{C}^1$», «deux fois dérivable» et «de classe $\mathscr{C}^2$», etc.
Par exemple, considérons la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.
Alors f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 puisqu'alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Détails
Il s'agit du produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.

Par ailleurs, f' est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, avec, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour autant, elle n'est pas $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée n'est pas continue en 0 : $\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas[8].

Une fois acquise l'existence d'une fonction f dérivable qui n'est pas $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse[9] : une primitive F de f sera deux fois dérivable (car sa dérivée est f, qui est elle-même dérivable), mais pas $\mathscr{C}^2$ puisque sa dérivée seconde est f' qui n'est pas continue.
Puis une primitive de F sera trois fois dérivable et pas $\mathscr{C}^3$, etc.

De même, la valeur absolue étant continue et non dérivable, par le théorème fondamental de l'analyse, une primitive F_1 de $x \mapsto |x|$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, mais pas deux fois dérivable.
Et une primitive de F_1 sera $\mathscr{C}^2$ mais pas trois fois dérivable, etc.

En résumé, en notant $\mathscr{D}^n(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, on a

$$\mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{D}^{n+1}(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K}) \subsetneq \mathscr{D}^n(I, \mathbf{K}) \subsetneq \dots$$

[8] $2x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ mais $\cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 puisque cos n'a pas de limite en $+\infty$.

[9] Toujours admis à ce stade.

Proposition 22.18 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$) : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$.*

1. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.*
2. *Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, alors $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$. De plus*
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \textit{(Formule de Leibniz).}$$
3. *Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et que g ne s'y annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
4. *Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{C}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.*
5. *Si $f : I \to J$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^n$, et que sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.*

Tous ces énoncés restent valables en changeant «de classe $\mathscr{C}^n$» en «n fois dérivable» ou encore en «de classe $\mathscr{C}^\infty$».

Démonstration. Toutes ces preuves se font par récurrence sur n.

1. La somme de deux fonctions continues est continue. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est $\mathscr{C}^n$, et soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors $\lambda f + g$ est dérivable, avec $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
Puisque f' et g' sont de classe $\mathscr{C}^n$, $(\lambda f + g)'$ est $\mathscr{C}^n$, et donc $\lambda f + g$ est $\mathscr{C}^{n+1}$.
2. Prouvons simplement $\mathscr{P}(n)$: «$\forall f, g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$, $fg \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$».
Pour $n = 1$, c'est un résultat bien connu.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient f, g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
Alors fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
Mais f, f', g, g' sont toutes de classe $\mathscr{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence[10], $(fg)' \in \mathscr{C}^n(I, \mathbf{K})$.
Et donc $fg \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{K})$, de sorte que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Une fois acquis le fait que (fg) soit n fois dérivable sur I, la preuve de la formule de Leibniz est exactement la même que pour les polynômes (et donc quasiment la même que celle de la formule du binôme).
3. Il s'agit de prouver que l'inverse d'une fonction $\mathscr{C}^n$ qui ne s'annule pas est de classe $\mathscr{C}^n$, le quotient s'obtenant alors comme d'habitude par produit[11].
Supposons donc que l'inverse d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ soit de classe $\mathscr{C}^n$, et soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ qui ne s'annule pas sur I.
Alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable, et a pour dérivée $-\dfrac{g'}{g^2}$. Par hypothèse de récurrence, $\dfrac{1}{g}$ est $\mathscr{C}^n$, et donc par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'$ est $\mathscr{C}^n$, de sorte que $\dfrac{1}{g}$ est $\mathscr{C}^{n+1}$.

Les points 4. et 5. se prouvent exactement de la même manière : on suppose le résultat vrai pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, on calcule une première dérivée, et on utilise alors l'hypothèse de récurrence pour prouver que cette dérivée est elle-même $\mathscr{C}^n$. □

[10] Et par le point 1) pour la somme.

[11] $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Corollaire 22.19 – *Pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$.*

Démonstration. Les fonctions constantes égales à 0 et 1 sont évidemment de classe $\mathscr{C}^k$. Les points 1 et 2 de la proposition précédente prouvent la stabilité de $\mathscr{C}^k(I, \mathbf{K})$ par combinaisons linéaires, et le point 3 prouve la stabilité par produit. □

22.1.5 Retour sur la dérivabilité des fonctions usuelles

Il est grand temps de prouver que les fonctions usuelles sont $\mathscr{C}^\infty$ (et accessoirement qu'elles ont bien les dérivées que nous leur connaissons, mais pour la plupart d'entre elles ceci a déjà été prouvé plus tôt, en admettant la formule pour la dérivée d'une bijection réciproque).

Commençons par une remarque simple : la fonction id : $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est constante égale à 1.
En effet, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\dfrac{\mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.
Puisque les fonctions constantes sont[12] de classe $\mathscr{C}^\infty$, id est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par produit, les $\mathrm{id}^n : x \mapsto x^n$ sont également $\mathscr{C}^\infty$, et donc par combinaison linéaire, toutes les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De plus, toujours par produit, $\mathrm{id}^2 : x \mapsto x^2$ est dérivable, de dérivée égale à $\mathrm{id}' \times \mathrm{id} + \mathrm{id} \times \mathrm{id}' = 2\mathrm{id} : x \mapsto 2x$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \mapsto x^n$ est dérivable, de dérivée égale à $x \mapsto nx^{n-1}$.
Les bijections réciproques de ces fonctions, qui sont les $x \mapsto \sqrt[n]{x}, n \geqslant 2$ sont également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ (et pas sur $\mathbf{R}_+$ car la dérivée de $x \mapsto x^n$ s'annule en 0), avec pour dérivée

$$x \mapsto \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Si n est impair, alors $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est également $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_-^*$, avec la même dérivée que ci-dessus.

Par inverse, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$.
Donc ln, qui par définition[13] possède $x \mapsto \frac{1}{x}$ pour dérivée, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc sa bijection réciproque, la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Par composition, toutes les $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

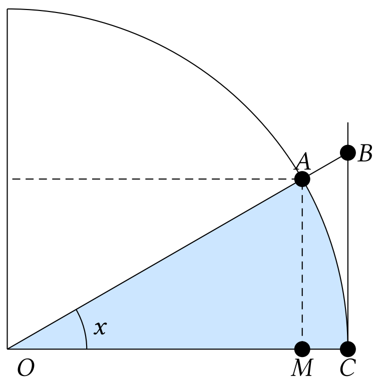
De plus, les fonctions ch, sh et th sont également $\mathscr{C}^\infty$ par somme et quotient de fonctions qui le sont.

Reste le cas un peu plus délicat des fonctions trigonométriques.
Il s'agit essentiellement de prouver que les fonctions sin et cos sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. En effet, par quotient, la tangente le sera sur son ensemble de définition, et les fonctions trigonométriques réciproques suivront alors par le point 5. de 22.18, et on retrouvera alors les dérivées calculées plus tôt dans l'année.

Comme nous ne disposons toujours que d'une définition géométrique un peu «bancale» de ces fonctions, il va falloir accepter quelques arguments géométriques...

Lemme 22.20. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

Démonstration. Nous avons déjà rencontré l'une ou l'autre de ces inégalités, mais la preuve donnée reposait à chaque fois sur une étude de fonction, et passait donc par la dérivée. Considérons plutôt le dessin suivant :



Alors l'aire du triangle OAC est $\frac{\sin x}{2}$, celle du triangle OBC est $\frac{\tan x}{2}$.
Et l'aire du secteur angulaire (en couleur sur le dessin) OCA est $\frac{x}{2}$.
En effet, l'aire du cercle trigonométrique entier est[14] π, pour un angle de 2π, donc pour

[12] Toutes leurs dérivées sont nulles.

[13] Modulo le théorème fondamental de l'analyse, toujours non prouvé, mais dont la preuve ne reposera aucunement sur les dérivés des fonctions usuelles.

Remarque
Notons qu'on retrouve en particulier les $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

[14] Et on ne peut que l'admettre faute de bonne définition d'une aire pour l'instant.

un angle de x, le secteur angulaire possède une aire de $\frac{x}{2}$.
Et donc on a bien $\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2}$, soit $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. □

Par imparité du sinus, il en découle notamment que pour $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\sin x| \leqslant |x|$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$, de sorte que sin est continue en 0.
Mais sur ce même intervalle, on a $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, qui est donc également continue en 0 par opérations usuelles sur les fonctions continues.

De l'inégalité ci-dessus, on obtient alors, pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}$.
Soit encore $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$, de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Et par imparité de sin, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
Ainsi, sin est dérivable en 0, avec $\sin'(0) = 1$.
Et puisque sur $\left]0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, cos est dérivable en 0, de dérivée égale à $-\dfrac{\sin'(0)\sin(0)}{\cos(0)} = 0$.
Le plus dur est fait, une fois qu'on sait sin et cos dérivables en 0, le reste vient facilement :

Proposition 22.21 : *Les fonctions* sin *et* cos *sont* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}$, *avec* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sin(a)\cos'(0)+\cos(a)\sin'(0) = \cos(a).\end{aligned}$$

Donc sin est dérivable en a, avec $\sin'(a) = \cos(a)$.
Sur le même principe, pour $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\ &= \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin(a).\end{aligned}$$

Donc cos est dérivable en a, avec $\cos'(a) = -\sin(a)$.

Une récurrence[15] prouverait alors que sin et cos sont $\mathscr{C}^\infty$, avec $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, $\sin^{(5)} = \cos$, etc.
Plus simplement, on peut noter que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, et donc $\sin'$ est dérivable, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin''(x) = \cos'\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi)$.
Une récurrence facile permet alors de prouver que sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
Et alors $\cos = \sin'$ est également $\mathscr{C}^\infty$. □

[15] Sans grande difficulté, mais probablement un peu pénible à écrire.

22.2 Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis

22.2.1 Extrema locaux

Définition 22.22 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. On dit que f possède un **maximum local** en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I,\ f(x) \leqslant f(a).$$

On dit que f possède un **minimum local en** a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I,\ f(x) \geqslant f(a).$$

Si f possède un maximum local ou un minimum local en a, on dit que f possède **un extremum local en** a.

Bien entendu, un maximum ou un minimum de f sur I est un extremum local, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ possède en -1 et en 1 un maximum et un minimum local, qui ne sont pas des extrema globaux, puisque f n'est ni minorée ni majorée.

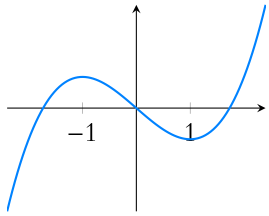


FIGURE 22.2– La fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$

Proposition 22.23 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit a intérieur à I. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f possède un maximum local en a, et soit $\eta > 0$ tel que pour $x \in I\cap]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Puisque a est intérieur à I, quitte à diminuer η, on peut supposer que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$.
Alors pour $a - \eta < x < a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, et donc par passage à la limite

$$f_g'(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0.$$

De même, pour $a < x < a + \eta$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, et donc par passage à la limite,

$$f_d'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Mais $f_g'(a) = f_d'(a) = f'(a)$, donc $f'(a)$ est à la fois positif et négatif : il est nul. □

⚠ On a vraiment utilisé le fait que a soit intérieur à I pour justifier l'existence des dérivées à gauche et à droite de f en a.
Le résultat n'est absolument plus vrai si a est une borne de I. Par exemple la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ possède un maximum local en 1, mais sa dérivée en 1 vaut 2 !

⚠ Il n'y a pas de réciproque[16] comme le prouve le cas de la fonction $f : x \mapsto x^3$.
Elle possède un point critique en 0, mais n'a pas d'extremum local en 0 : dans tout voisinage de 0, f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0) = 0$ (en les réels supérieures stricts à 0) et des valeurs strictement inférieures à $f(0)$.

[16] En tous cas pas sans hypothèse supplémentaire.

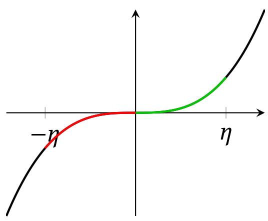


FIGURE 22.3 – Dans tout voisinage $]-\eta, \eta[$ de 0, $x \mapsto x^3$ prend des valeurs positives (en vert) et négatives (en rouge).

Définition 22.24 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$. On dit que a est **un point critique de f** si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Remarque. Ce que nous dit la proposition précédente, c'est qu'un extremum local de f est nécessairement atteint en un point critique.

22.2.2 Le théorème de Rolle

Théorème 22.25 (Théorème de Rolle[17]) : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[17] Michel Rolle (1652–1719).
Contemporain de Newton et Leibniz, il était très critique à l'égard du calcul différentiel, qui n'apportait selon rien de très nouveau.
Il est amusant de constater que son nom est passé à la postérité justement pour un théorème de calcul différentiel (que Rolle avait toutefois énoncé uniquement en termes algébriques, et pour des polynômes).

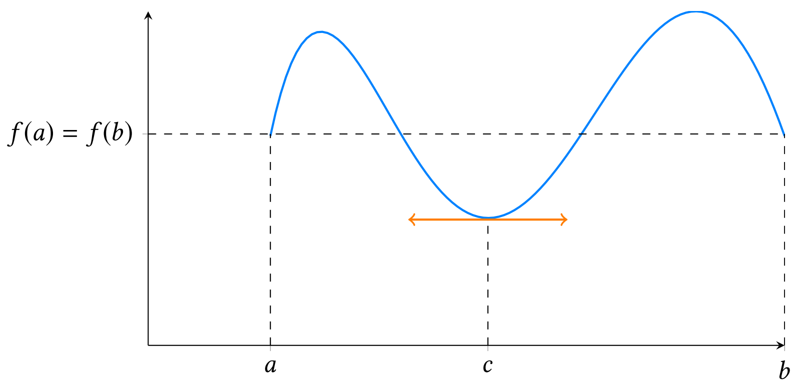


Figure 22.4 – Notons qu'il n'y a aucunement unicité d'un tel c. Sur la figure ci-dessus, il y en a 3.

Démonstration. La preuve est somme toute assez intuitive, et c'est probablement celle que vous imaginez sur la figure.
Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes.
Elle possède donc un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$.
▸ Si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$, et n'importe quel $c \in]a, b[$ fait le job.
▸ Sinon, l'un des deux extremums, soit m, soit M n'est pas égal à $f(a)$. Et donc est atteint en un point $c \in [a, b]$ qui ne peut être ni a ni b, qui est donc dans $]a, b[$.
Par conséquent, f possède un extremum local[18] en c, qui est intérieur à $]a, b[$, et donc $f'(c) = 0$. □

[18] Et en fait global.

⚠ Ceci ne vaut plus du tout pour les fonctions complexes. Par exemple $f : t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f'(t) = ie^{it}$ est de module 1, donc non nul.

Exemple 22.26

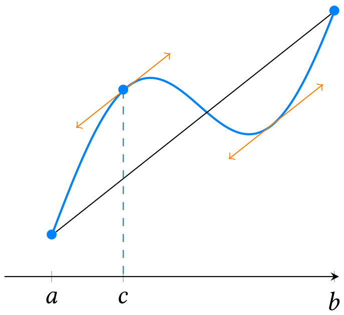
Entre deux racines réelles d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ se trouve toujours une racine, réelle elle aussi, de son polynôme dérivé.
En effet, si $a < b$ sont deux racines de $P \in \mathbf{R}[X]$, alors P est bien continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et avec $P(a) = P(b) = 0$. Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $P'(c) = 0$.
Mieux : si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé à racines simples, c'est-à-dire qu'il possède n racines distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.
Mais dans chacun des $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, P' possède une racine, et donc possède $n - 1$ racines distinctes. C'est-à-dire autant que son degré : P' est scindé à racines simples.

22.2.3 Le théorème des accroissements finis

Théorème 22.27 (Égalité des accroissements finis) : *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c)(b-a) = f(b)-f(a).$$

Graphiquement, cela signifie qu'il existe toujours une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Notons qu'il n'y a pas unicité d'un tel c, comme le prouve la figure ci-dessous.



Démonstration. Soit d la fonction affine[19] $x \mapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.
Soit alors $g = f - d$, qui est la distance entre $\mathscr{C}_f$ et la corde.
Il s'agit clairement d'une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ car f l'est.
On a alors $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(b) = 0$.
Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Mais la dérivée de g est $g' : x \mapsto f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Donc on a $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

[19] Vous aurez peut-être reconnu qu'il s'agit de la corde joignant les points a et b.

Exemple 22.28

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction ln est continue et dérivable sur $[k, k+1]$.
Donc il existe $c_k \in]k, k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{(k+1)-k}{c_k} = \dfrac{1}{c_k}$.
Mais alors $\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{c_k} < \dfrac{1}{k}$, de sorte que

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Soit encore $\ln(n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1 - \frac{1}{n+1}$, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Nous sommes alors en mesure de prouver un résultat admis dans le chapitre de développements limités :

Proposition 22.29 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Si F est une primitive de f sur I, alors F possède un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a, donné par

$$\begin{aligned} F(x) &\underset{x\to a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\ &\underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

⚠ Attention !
Ne pas oublier la constante d'intégration, qui dépend de la primitive choisie.

Démonstration. Soit $\varphi : x \mapsto F(x) - F(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$.

Alors F est dérivable sur I, et sa dérivée est $\varphi' : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$.

Donc $\varphi'(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.

A présent, pour $x \in I$, par le théorème des accroissements finis[20], il existe $c_x \in]a,x[$ (ou $]x,a[$ si $x<a$) tel que $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c_x)(x-a)$.
Mais $|c_x - a| < |x-a|$, et donc $c_x \underset{x\to a}{\longrightarrow} a$.
Donc $\varphi'(c_x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.
Et par conséquent, par produit $\varphi(x) - \underbrace{\varphi(a)}_{=0} \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^{n+1}\right)$ de sorte que

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right). \qquad \square$$

[20] C'est ici qu'on a besoin d'un intervalle.

22.2.4 L'inégalité des accroissements finis

Bien que ni Rolle ni le théorème des accroissements finis ne soient valables pour des fonctions à valeurs complexes, l'inégalité qui suit est valable aussi en complexe.

Théorème 22.30 (Inégalité des accroissements finis) : *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction dérivable sur I. S'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in I$, $|f'(t)| \leqslant M$, alors*

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Démonstration. Si f est une fonction réelle, il suffit de remarquer que pour $x<y$ deux éléments de I, il existe $c \in]x,y[\subset I$ tel que $f'(c)(y-x) = f(y) - f(x)$. Mais alors $|f'(c)| \leqslant M$ et donc en passant à la valeur absolue,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leqslant M|y-x|.$$

Dans le cas où f est à valeurs complexes, fixons $x<y$ dans I.
► 1^er^ cas : supposons que $f(y) - f(x) \in \mathbf{R}$.
Alors la fonction[21] $\mathrm{Re}(f)$ est dérivable sur $[x,y]$, avec $|\mathrm{Re}(f)'| = |\mathrm{Re}(f')| \leqslant |f'| \leqslant M$.
Et donc par le cas réel, $|f(y) - f(x)| = |\mathrm{Re}(f)(y) - \mathrm{Re}(f)(x)| \leqslant M|y-x|$.
► Cas général : soit $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $f(y) - f(x) = e^{i\theta}|f(y) - f(x)|$. Alors $e^{-i\theta}(f(y) - f(x)) \in \mathbf{R}$.

[21] À valeurs réelles, donc pour laquelle le théorème des accroissements finis s'applique.

Remarque
θ n'est rien d'autre qu'un argument de $f(x) - f(y)$.

Soit alors $\varphi : t \mapsto e^{-i\theta} f(t)$. C'est une fonction dérivable sur I, avec $\varphi'(t) = e^{-i\theta} f'(t)$, et donc $|\varphi'(t)| = |f'(t)| \leqslant M$.
Puisque d'autre part, $\varphi(y) - \varphi(x) \in \mathbf{R}$, on est dans le cas traité ci-dessus :

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant M|y-x|.$$

Mais $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |f(y) - f(x)|$. $\square$

Exemple 22.31

Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$.
En effet, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|\sin'(t)| = |\cos t| \leqslant 1$.
Et en particulier, lorsque $y = 0$, il vient : $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Remarque
Cette inégalité n'a vraiment d'intérêt que pour x proche de 0, puisque pour $|x| \geqslant 1$, elle est triviale...

Définition 22.32 – Soit D une partie de $\mathbf{R}$, soit $f : D \to \mathbf{C}$ et soit $k > 0$. On dit que f est **k-lipschitzienne**[22] si

$$\forall (x,y) \in D^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

S'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne, on dit simplement que f est **lipschitzienne.**

[22] Du nom de Rudolph LIPSCHITZ (1832–1903).

Graphiquement, une fonction k-lipschitzienne est une fonction pour laquelle pour $x \neq y$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant k$, c'est-à-dire dont les pentes des cordes restent comprises entre $-k$ et k.

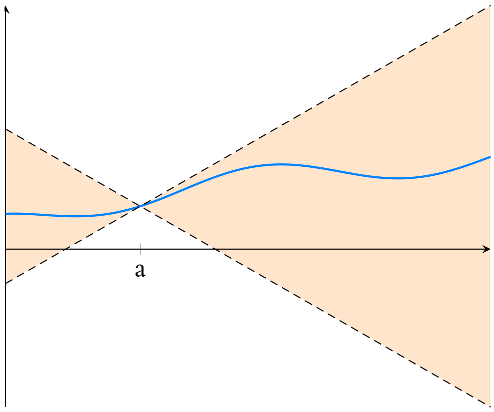


FIGURE 22.5 – Le graphe de f reste compris entre les droites passant par $(a, f(a))$ et de pentes $\pm k$.

Proposition 22.33 : *Si f est k-lipschitzienne sur D, alors elle est continue sur D.*

Démonstration. Soit $a \in D$, et soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Alors pour $x \in D$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < k\eta \leqslant \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, de sorte que f est continue en a. Et ceci étant vrai pour tout a, f est continue sur D. □

⚠ La réciproque est fausse il existe des fonctions continues qui ne sont pas k-lipschitziennes pour aucun $k > 0$.
C'est par exemple le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
En effet, quel que soit $k > 0$, pour $x > k$, on a $f(x) - f(0) = x^2 > k|x - 0|$.

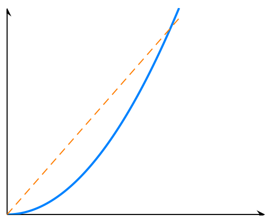


FIGURE 22.6– Les pentes des cordes de la fonction carré ne sont pas bornées : elle n'est pas lipschitzienne.

L'inégalité des accroissements finis prouve alors que si f est dérivable, et que f' est bornée, alors f est lipschitzienne. En particulier, si f est $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$, alors f' y est bornée, et donc f est k-lipschitzienne, pour $k = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

22.3 DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE

Commençons par un résultat bien connu, qu'il est temps de prouver, et que nous avons déjà utilisé à maintes reprises[23].

[23] Par exemple pour dire que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Proposition 22.34 : *Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. Le sens direct est évident : si f est constante, alors sa dérivée est la fonction nulle.
Inversement, supposons que f' soit la fonction nulle, et soient $x < y$ deux éléments de I.
On a alors pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant 0$, si bien que par l'inégalité des accroissements finis, pour tous $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 0|x - y| \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

□

⚠ Rappelons qu'il est fondamental que I soit un intervalle.
Par exemple, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, de dérivée nulle, mais n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$.
Mais elle est bien constante sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$.

Proposition 22.35 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est croissante si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geqslant 0$.*

Démonstration. Si f est croissante, alors pour tout x intérieur à I et tout $y \neq x$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$, et donc par passage à la limite, $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Inversement, supposons f' positive sur $\mathring{I}$, et soient $x < y$ deux points de I.
Alors par les accroissements finis, il existe $c \in]x, y[\subset \mathring{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geqslant 0$.
Et donc $f(x) \leqslant f(y)$: f est croissante. □

Bien entendu, en appliquant cette proposition à $-f$, on obtient que f est décroissante si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur $\mathring{I}$.

Proposition 22.36 : *Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Si f' est positive sur $\mathring{I}$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.*

Démonstration. Puisque f' est positive sur $\mathring{I}$, f est croissante sur I.
Supposons qu'elle ne soit pas strictement croissante, et soient $x < y$ deux éléments de I avec $f(x) \geqslant f(y)$. Alors par croissance de f, pour tout $t \in [x, y]$, $f(y) \leqslant f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(y)$ si bien que f est constante sur $[x, y]$.
Et donc sa dérivée est nulle sur $]x, y[$, qui contient une infinité de points, ce qui est absurde.
Donc f est strictement croissante. □

Ce résultat s'applique notamment si $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) > 0$.

Exemple 22.37

Encore une fois, il ne s'agit pas d'une équivalence.
Par exemple, considérons $f : x \mapsto x + \cos x$.
Alors f est dérivable et $f'(x) = 1 - \sin(x)$ est positive sur $\mathbf{R}$ et s'annule en tous les nombres de $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}$.
Pourtant f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
En effet, soient $x < y$ deux réels. Alors f' s'annule un nombre fini de fois sur $[x, y]$, et donc y est strictement croissante, de sorte que $f(x) < f(y)$.

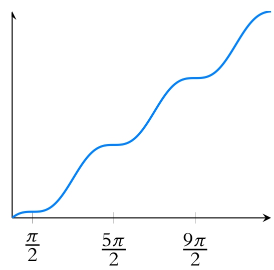


Figure 22.7– $x \mapsto x + \cos(x)$

22.4 THÉORÈME DE PROLONGEMENT $\mathscr{C}^1$

Théorème 22.38 (Théorème de la limite de la dérivée) : *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant :*

1. *f est continue sur $[a, b]$*
2. *f est dérivable sur $]a, b]$*
3. *$\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$*

Alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
En particulier, si $\ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable[24] en a, avec $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.

[24] À droite.

Remarques. ► Il existe évidemment un énoncé analogue avec des limites à gauche en b.
► L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'il n'y a qu'une limite à calculer. Alors que si on avait voulu prouver «à la main» que f est $\mathscr{C}^1$, il aurait fallu commencer par prouver que f est dérivable en a (soit un premier calcul de limite), puis étudier la continuité de f' en a (second calcul de limite). Le théorème de la limite de la dérivée nous dit que seul ce second calcul est nécessaire.

Démonstration. Soit $x \in]a, b]$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a)$.
Mais alors $a \leqslant c_x \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to a^+} c_x = a$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x \to a} f'(c_x) = \lim\limits_{t \to a} f'(t) = \ell$.
Et donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.
Ainsi, f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$, et donc $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f'(a)$, donc f' est continue en a. □

Composition
La notation c_x est trompeuse : il s'agit en fait d'une fonction
$$c : \left| \begin{array}{ccc}]a, b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & c_x \end{array} \right.$$

Exemple 22.39

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1 - x^4) \end{array} \right.$.
Alors f est continue sur $[-1, 1]$ par composition de fonctions continues.
La fonction $x \mapsto 1 - x^4$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1[$.
Or, sur $[0, 1[$, Arcsin est $\mathscr{C}^1$. Donc par composition f est $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$.
Pour x dans cet ensemble, on a $f'(x) = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{1 - (1 - x^4)^2}} = \dfrac{-4x^3}{\sqrt{2x^4 - x^8}} = -\dfrac{4x}{\sqrt{2 - x^4}}$.
Et en particulier, $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0$.
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
Et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$ tout entier.

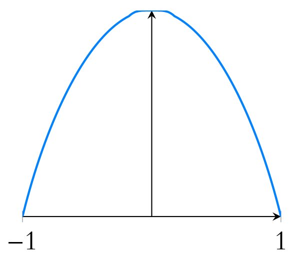


FIGURE 22.8– La fonction f.

En revanche, la fonction $g : \left| \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}(1 - x^2) \end{array} \right.$ n'est pas dérivable en 0.
En effet, le même raisonnement que précédemment reste valable sur $[1, 0[\cup]0, 1]$, avec $g'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$.
Pour $x > 0$, ceci se simplifie en $g'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{2 - x^2}}$, mais pour $x < 0$, on obtient $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2 - x^2}}$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = -\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} g'(x) = \sqrt{2}$.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable à gauche en 0 avec $g'_g(0) = \sqrt{2}$ et dérivable à droite avec $g'_d(0) = -\sqrt{2}$.
Par conséquent, g n'est pas dérivable en 0.

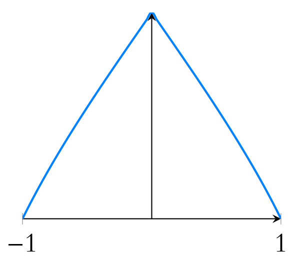


FIGURE 22.9– La fonction g.

Bien que la preuve utilise le théorème des accroissements finis, ce résultat reste valable pour les fonctions à valeurs complexes, il suffit pour cela de séparer partie réelle et partie imaginaire.

Corollaire 22.40 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$) – *Soit $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$.*
Si f et f' possèdent des limites finies en a, alors le prolongement par continuité de f en a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

Démonstration. Notons $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, de sorte que le prolongement par continuité de f à $[a,b]$ est $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$
Alors $\tilde{f}$ est continue sur $[a,b]$, et $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$.
Et alors, le théorème de la limite de la dérivée s'applique à $\tilde{f}$, de sorte que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. □

Corollaire 22.41 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^k$) – *Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $f \in \mathscr{C}^k(]a,b],\mathbf{R})$. Si $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe et est finie pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, alors le prolongement par continuité de f à $[a,b]$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.*

Et si $k = \infty$?
Il n'est pas difficile de constater que ceci reste valable pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, c'est la proposition précédente.
Supposons le résultat vrai au rang k, et soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(]a,b])$, telle que $\lim\limits_{x\to a} f^{(i)}(x)$ existe pour tout $i \in [\![0,k+1]\!]$.
Alors par hypothèse de récurrence, le prolongement par continuité[25] de f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a,b]$.
Donc $f^{(k)}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, car f y est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$, et $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ possède une limite finie en a.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f^{(k)}$, $f^{(k)}$ est dérivable en a, et $f^{(k+1)}$ est continue en a.
Donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $[a,b]$. □

[25] Qui existe puisque f admet une limite finie en a.

Exercices du chapitre 22

▶ Généralités, dérivées successives

Exercice 22.1 Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions $f : x \mapsto x|x|$ et $g : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ F

Exercice 22.2 Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $[0,1]$. PD

Exercice 22.3 Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire, resp. périodique) est impaire (resp. paire, resp. périodique). F

Exercice 22.4 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$. PD

Exercice 22.5 Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer $f_n^{(n)}$. PD

Exercice 22.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1 + 2x}{3}$. AD

1) Prouver que f est bijective sur $\mathbf{R}$.
2) Prouver que f^{-1} possède un développement limité à tout ordre.
3) Déterminer $DL_2(0)(f^{-1})$.

Exercice 22.7 Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$. AD

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
   Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P.
2) Déterminer les limites de $f^{(n)}$ en $\pm\infty$.
3) Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$, et que ses racines sont toutes simples.

▶ Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 22.8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et périodique. Prouver que f est lipschitzienne. PD

Exercice 22.9 À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$. PD

Exercice 22.10 Soit $n \geqslant 1$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction n fois dérivable sur I, qui s'annule en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. PD

Exercice 22.11 Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. PD

Exercice 22.12 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que P' est scindé. AD

Exercice 22.13 **Théorème de Darboux** AD
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbf{R})$. On souhaite prouver que $f'(I)$ est un intervalle.

1) Prouver le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2) On suppose à présent que $a < b$ sont deux points de I, et que y est strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On note g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - xy$.
   a) Montrer que g n'est pas monotone sur I.
   b) En déduire que g n'est pas injective sur I.
   c) Conclure.

Exercice 22.14 **Règle de l'Hôpital** AD
Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,a]$, dérivables sur $]0,a[$, avec $f(0) = g(0) = 0$. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,a[$

1) Pour tout $x \in]0,a]$, montrer qu'il existe $c \in]0,x]$ tel que $g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.
2) Montrer que si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe aussi, et que ces limites sont égales.
3) **Applications** : calculer, sans développements limités, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$, et retrouver $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

EXERCICE 22.15 Montrer que pour $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, l'équation $P(x) = e^x$ possède au plus $\deg P + 1$ solutions.

EXERCICE 22.16 Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dérivable. Prouver que si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. AD

EXERCICE 22.17 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls. AD

EXERCICE 22.18 Une généralisation du théorème de Rolle AD

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Prouver qu'il existe $c \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Application ($\star$) : soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $P' + \lambda P$ est scindé.

EXERCICE 22.19 F

1) Prouver que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|1 - \cos(x)| \leqslant |x|$.

EXERCICE 22.20 Sommes de Riemann (Banque CCP 47) D

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
2) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2 + k^2}$.

EXERCICE 22.21 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable ($n \geqslant 1$). D

1) Prouver à l'aide d'un exemple que même si f admet une limite finie en $+\infty$, il se peut que f' n'admette pas de limite en $+\infty$.
2) Prouver que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3) Prouver que si f et $f^{(n)}$ admettent des limites finies en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

EXERCICE 22.22 (Oral ENS Ulm) TD

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ des réels non nuls et $a_1, \dots, a_n$ des réels. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(\omega_i x)$ s'annule une infinité de fois.

EXERCICE 22.23 Oral ENS TD

Soient a, b, c trois réels strictement positifs deux à deux distincts. Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$.

► Prolongements $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^k$

EXERCICE 22.24 Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, mais pas $n+1$ fois dérivable. F

EXERCICE 22.25 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto x^3 \ln x$ se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$. Quelle est la valeur maximale de k telle que $\widetilde{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^k$? PD

EXERCICE 22.26 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. AD

1) Montrer que f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbf{R}_+$.
2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

3) En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$.

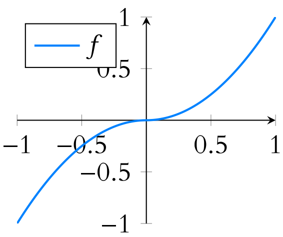
Correction des exercices du chapitre 22

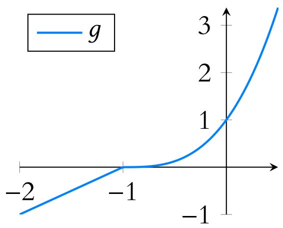
Solution de l'exercice 22.1

Notons $f : x \mapsto x|x|$.
Puisque la valeur absolue est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
Par contre, le fait que la valeur absolue ne soit pas dérivable en 0 ne prouve en rien[1] que f ne l'est pas.
Soit donc $x \neq 0$. Alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et donc elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.

[1] Ai-je mentionné en cours un théorème qui dirait quelque chose comme «le produit de fonctions non dérivables n'est pas dérivable» ? Pas que je sache...

De même, il est clair que g est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, car les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto (x+1)^3$ le sont.
Pour $x \neq -1$, on a $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
La limite à gauche de ce taux d'accroissement vaut alors 1, mais la limite à droite vaut 0. Donc g n'est pas dérivable en -1.





Solution de l'exercice 22.2

Notons déjà que g est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$ par composition de fonctions qui le sont.
D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} g(x) = f(1)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = f(0)$, donc g est continue en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $f(0) = f(1)$.

Rappel
Une fonction dérivable est nécessairement continue, donc la continuité de g est une condition nécessaire (mais pas suffisante à sa dérivabilité).

Supposons donc à présent que cette condition est vérifiée, et donc que g est continue en $\frac{1}{2}$.
Alors pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(x) = f(2x)$, et donc $g_{|[0,\frac{1}{2}]}$ est dérivable car composée de fonctions qui le sont, de dérivée égale à $x \mapsto 2f'(2x)$.
Et donc en particulier, g est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ avec $g'_g\left(\frac{1}{2}\right) = 2f'(1)$.
Puisque $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = f(0)$, on a pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(x) = f(2x-1)$ (cette relation n'était a priori vraie que pour $x > \frac{1}{2}$, et c'est vraiment la continuité qui nous permet d'affirmer qu'elle encore pour $x = \frac{1}{2}$).
Et donc comme ci-dessus, g est dérivable à droite en $\frac{1}{2}$ avec $g'_d\left(\frac{1}{2}\right) = f'(0)$.

Subtilité
Puisqu'on ne considère que la restriction de g à gauche de $\frac{1}{2}$, on n'en déduit rien sur la dérivabilité à droite de g en $\frac{1}{2}$.

En conclusion, g est dérivable en $\frac{1}{2}$ si et seulement si $g'_g\left(\frac{1}{2}\right) = g'_d\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(1) = f'(0)$.

Solution de l'exercice 22.3

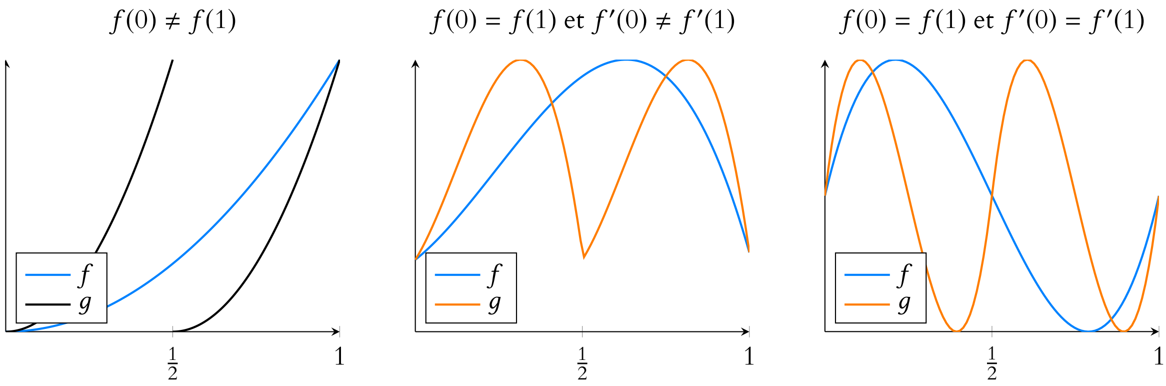
Soit f une fonction paire et dérivable sur un intervalle[2] I.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$.
En dérivant cette relation, il vient : pour tout $x \in I$, $f'(x) = -f'(-x)$, et donc f' est impaire.
De même, si f est impaire, alors $f(x) = -f(-x)$ ce qui après dérivation nous donne $f'(x) = f'(-x)$, donc f' est paire.
Enfin, si f est T-périodique, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(x+T)$, de sorte que $f'(x) = f'(x+T)$, et donc f' est T-périodique.

[2] Nécessairement symétrique.

Solution de l'exercice 22.4

Pour $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h} = \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = 2\frac{f(a+2h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$



$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a).$$

Pour la seconde limite, on a

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \frac{(x-a)f(a) + af(a) - af(x)}{x-a} = f(a) - a\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) - af'(a).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.5

La formule de Leibniz est toute indiquée, puisque les fonctions $g_n : x \mapsto x^{n-1}$ et ln sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ (et donc $\mathscr{C}^n$) sur $\mathbf{R}_+^*$.
On a alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k} \text{ et } g_n^{(n)}(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$, et une récurrence rapide prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\ln(k)(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Donc par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_n^{(k)}(x)\ln^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-1)!}{x} \\ &= \frac{(n-1)!}{x}\left(\binom{n}{n} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{x}(1-(1-1)^n) = \frac{(n-1)!}{x}. \end{aligned}$$

Le terme $k = n$ est nul car $g_n^{(n)}$ l'est.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.6

1. Théorème de la bijection, en notant que $f'(x) = \frac{e^x+2}{3}$ est strictement positive.
2. Puisque f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et que sa dérivée ne s'y annule pas, f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Et donc par la formule de Taylor-Young, f^{-1} possède un développement limité d'ordre n en 0, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Puisque f^{-1} possède un développement limité d'ordre 2, notons-le

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} c + bx + ax^2 + o(x).$$

Alors, puisque $f(0) = 0$, on a aussi $f^{-1}(0) = 0$, et donc $c = 0$.
il reste donc $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} bx + cx^2 + o(x^2)$.
Par ailleurs, le développement limité de f en 0 est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Or, on a $x = f^{-1}(f(x))$, et donc

$$x \underset{x\to 0}{=} bf(x) + cf(x)^2 + o(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} bx + \left(c + \frac{b}{6}\right)x^2 + o(x^2).$$

Par unicité du DL de x, on a donc $b = 1$ et $\frac{b}{6} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{6}$.
Et donc le $DL_2(0)$ de f^{-1} est $f^{-1}(x) = x - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.7

1. Notons que nous savons déjà que Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ puisque dérivable et que sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Procédons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant $\mathscr{P}(n)$: «il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$».
Pour $n = 1$, il suffit de prendre P_1 le polynôme constant égal à 1.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(x)\left(1+x^2\right)^n - 2nx\left(1+x^2\right)^{n-1}P_n(x)}{\left(1x^2\right)^{2n}} = \frac{P_n'(x)\left(1+x^2\right) - 2nxP_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}.$$

Et donc en posant $P_{n+1} = \left(1+X^2\right)P_n' - 2nXP_n$, on a bien un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$.
Donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
Notons que l'unicité d'un tel polynôme est automatique, puisque si on dispose de deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{Q_n(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$$

alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_n(x) = Q_n(x)$, et donc P_n et Q_n sont deux polynômes qui coïncident en une infinité de nombres, et donc sont égaux.

La relation $P_{n+1} = \left(1+X^2\right)P_n' - 2nXP_n$, ne nous permet pas de déterminer immédiatement le degré de P_n puisque $\left(1+X^2\right)P_n'$ et nXP_n sont de même degré, et donc pour déterminer le degré de la somme, il nous faut en savoir davantage sur les coefficients dominants .

> **Détails**
> Si ces coefficients dominants s'annulent, alors le degré de P_{n+1} sera strictement inférieur à celui de XP_n.

On a $P_1 = 1$, puis $P_2 = -2X$, $P_3 = -2(1+X^2) + 8X^2 = 6X^2 - 2$, $P_4 = 12X(1+X^2) - 36X^3 + 12X = -24X^3 + 24X$.
Il semble donc légitime de conjecturer que le degré de P_n est $n-1$ et que son coefficient dominant vaut $(-1)^{n-1}n!$
Cette conjecture se prouver alors par récurrence[3] : supposons que $P_n = (-1)^{n-1}n!X^{n-1} + Q_n$ avec $\deg Q < n-1$. Alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \left((-1)^{n-1}n!(n-1)X^{n-2} + Q_n'\right)\left(1+X^2\right) - 2nX\left((-1)^{n-1}n!X^{n-1} + Q_n\right) \\
&= (-1)^{n-1}n!(n-1-2n)X^n + \underbrace{(1+X^2)Q_n' - 2nXQ_n}_{\in \mathbf{R}_{n-1}[X]} \\
&= (-1)^n(n+1)!X^n + Q_{n+1}.
\end{aligned}$$

[3] Déjà largement initialisée.

Donc P_{n+1} est bien de degré n, avec un coefficient dominant égal à $(-1)^n(n+1)!$, donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est de degré n, de coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$

Enfin, sur le même principe, on prouve que P_n est pair si n est impair, et impair si P_n est pair.
Pour le prouver, il suffit de noter que P_n' a une parité opposée à celle de P_n (voir l'exercice 3), et donc $(1+X^2)P_n'$ aussi.
Et de même, XP_n est le produit de P_n par un polynôme impair, donc est de parité opposée à celle de P_n.

2. Puisque $\deg n-1 \ = n-1 < 2n$, $P_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\left(1+x^2\right)^n\right)$, et donc $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$.
3. Il s'agit donc de prouver que P_n possède exactement $n-1$ racines.
Procédons par récurrence sur $n \geqslant 1$, en prouvant : $\mathscr{P}(n)$: «P_n s'annule $n-1$ fois sur $\mathbf{R}$».
Pour $n=1$, il n'y a rien à dire.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Notons que $P_n(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(n)}(x) = 0$.
Notons alors $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ les réels pour lesquels $f^{(n)}(x_i) = 0$.
Alors par le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, il existe $y_i \ \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(y_i) = 0$.
Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = 0$, une généralisation du théorème de Rolle (cf exercice 17) nous dit qu'il existe $y_0 \ \in]-\infty, x_0[$ et $y_{n-1} \ \in]x_{n-1}, +\infty[$ tels que $f^{(n+1)}(y_0) = f^{(n+1)}(y_{n-1}) = 0$.
Et donc f^{n+1} s'annule au moins n fois, de sorte que P_{n+1} possède au moins $n+1$ racines.
Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et puisque $\deg P_n \ = n-1$, P_n est scindé dans $\mathbf{R}$, et toutes ses racines sont simples.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.8

Notons T une période de f. Alors f' est également T-périodique.
Puisque f est $\mathscr{C}^1$, alors f' est continue sur $[0,T]$, et donc $|f'|$ est bornée.
Notons $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in [0,T]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Alors, par périodicité, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| \leqslant M$.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, f est M–lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.9

La fonction $f : t \mapsto te^{1/t}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, pour $x > 0$, elle est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc il existe $t_x \in]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(t_x)(x+1-x) = f'(t_x)$.
Mais $f'(t) = e^{1/t} - \dfrac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} = \dfrac{t-1}{t}e^{\frac{1}{t}}$.
On constate alors que $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et alors, pour $x > 0$, $t_x \geqslant x$, de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} t_x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(t_x) = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.10

Prouvons le résultat par récurrence sur n, et notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété «si f est n fois dérivable sur I et s'annule au moins n fois sur I, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.»
Si $n=1$, et si $a < b$ sont deux éléments de I tels que $f(a) = f(b)$, alors par le théorème de Rolle[4], il existe $c \in]a,b[\subset I$ tel que $f'(c) = 0$.
Donc f' s'annule au moins une fois sur I.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soit alors f une fonction $n+1$ fois dérivable sur I, et soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ des points de I tels que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, f' s'annule au moins une fois sur chacun des $]a_i, a_{i+1}[$, et donc en n points distincts.
Mais f' est n fois dérivable. Donc par l'hypothèse de récurrence $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur I.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

[4] Qui s'applique puisque f est dérivable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.11

Puisque $f(a) = f(b)$, et que f est dérivable sur $[a,b]$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f'(c_1) = 0$.

Mais alors $f'(a) = f'(c_1)$, et f' est dérivable sur $]a,b[$, donc il existe $c_2 \in]a,c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.
Puis de proche en proche, on prouve qu'il existe $c_{i+1} \in]a,c_i[$ tel que $f^{(i)}(c_i) = 0$.
Et donc au final, il existe $c_n \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c_n) = 0$.

Solution de l'exercice 22.12

Ceci a été fait en cours, dans le cas d'un polynôme scindé à racines simples seulement.

Supposons donc que P soit un polynôme de degré $n \geqslant 1$, scindé, de la forme $P = \alpha \prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$, où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ sont les racines **distinctes** de P.
Par le théorème de Rolle, P' possède une racine dans $]\alpha_1, \alpha_2[$, une dans $]\alpha_2, \alpha_3[, \dots$, une dans $]\alpha_{p-1}, \alpha_p[$, soient déjà $p-1$ racines.
Donc si $p = n$, c'est-à-dire si toutes les racines de P sont simples, nous avons autant de racines que le degré de P', qui est donc scindé[5]
En revanche, si P possède des racines multiples, il nous manque des racines de P'.
Mais si α_i est une racine de P de multiplicité $m_i \geqslant 2$, alors α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$.

Puisque P est scindé, $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$.

Et donc $\sum_{i=1}^{p}(m_i - 1) = n - p$.

Ainsi, comptées avec multiplicités, P' possède déjà $n-p$ racines parmi $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
D'autre part, nous avons déjà trouvé $p-1$ racines distinctes des α_i par le théorème de Rolle.
Soit, avec multiplicités, au moins $n-p+p-1 = n-1$ racines de P'.
Mais P' étant de degré $n-1$, nous avons là toutes les racines, et donc P' est scindé.

[5] Et à racines simples.

Remarque
Dans cette somme, les racines simples de P n'apportent rien puisqu'alors $m_i - 1 = 0$.

Solution de l'exercice 22.13

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f' est continue, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $f'(I)$ est un intervalle.

2.a. La fonction g est dérivable sur I, et sa dérivée est $g' : x \mapsto f'(x) - y$.
On a donc $g'(a) = f'(a) - y$ et $g'(b) = f'(b) - y$ de signes opposés. Donc g n'est pas monotone sur I.

2.b. La fonction g est continue sur l'intervalle I. Or, nous savons qu'une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur cet intervalle.
Donc g n'est pas injective.

2.c. Puisque g n'est pas injective sur I, il existe deux points $c < d$ de I tels que $g(c) = g(d)$.
Mais g est continue sur $[c,d]$, dérivable sur $]c,d[$, et donc par le théorème de Rolle, il existe $\lambda \in]c,d[\subset I$ tel que $g'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow f'(\lambda) = y$.
Ainsi, $y \in f'(I)$, et donc $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Rappel
Un intervalle est un ensemble qui, dès qu'il contient deux réels a et b, contient tous les réels compris entre a et b.

Solution de l'exercice 22.14

1. Appliquons le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : t \mapsto g(t)f(x) - f(t)g(x)$.
Celle-ci est en effet continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$.
Donc il existe $c \in]0,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.

2. Soit $x \in]0,a[$. Par la question 1, il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$.
Or, $0 \leqslant c_x \leqslant x$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} c_x = 0$.
Et donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. Bien entendu, les développements limités nous permettent de calculer ces limites. L'avantage de ce théorème est qu'il est facile à énoncer et abordable sans développements limités.
Mais dans la pratique, si nous disposons des développements limités, alors la règle de l'Hôpital n'est pas vraiment utile. Appliquons la règle de l'Hôpital à $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = 1 - \cos x$, qui satisfont bien aux hypothèses ci-dessus, par exemple avec $a = 1$.
Alors $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.
À l'aide des équivalents usuels, $\dfrac{e^x - 1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Remarque
Une alternative aurait été d'appliquer une seconde fois la règle de L'Hôpital.

Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)} = 1$.

Notons que ceci prouve que $e^x - 1 - x \underset{x \to 0}{\sim} 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

Pour la seconde question[6], il s'agit de prouver que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
Mais par la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

[6] Ce que nous nommerons bientôt développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.15

Prouvons le résultat par récurrence sur $d = \deg P$.
Si $d = 0$, c'est une conséquence directe de l'injectivité de l'exponentielle : elle ne prend au plus qu'une fois chaque valeur.
Supposons le résultat vrai pour un polynôme de degré d, et soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $d+1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $P(x) = e^x$ possède au moins $d+2$ solutions distinctes.
Alors la fonction $x \mapsto P(x) - e^x$ s'annule en au moins $d+2$ points.
Par applications du théorème de Rolle, sa dérivée, qui est la fonction $x \mapsto P'(x) - e^x$ s'annule au moins $d+1$ fois.
Et donc l'équation $P'(x) = e^x$ possède au moins $d+1$ solutions, avec $\deg P' = d$. Ceci contredit l'hypothèse de récurrence, et donc $P(x) = e^x$ possède au plus $d+1$ solutions distinctes.
Par le principe de récurrence, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, $P(x) = e^x$ possède au plus $\deg P + 1$ solutions.

Notons qu'il existe toujours des polynômes réalisant cette borne. En effet, pour $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, si on note $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés, alors $P = \sum_{i=0}^{n} e^{\lambda_i} L_i$ est un polynôme de degré au plus n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.

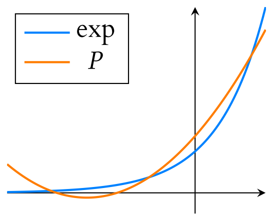


FIGURE 22.1– Un polynôme de degré 2 qui rencontre 3 fois l'exponentielle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.16

Puisque f est dérivable sur $[a, b]$, elle y est continue. Donc par le théorème des bornes atteintes elle admet un maximum M sur $[a, b]$.
Ce maximum ne peut pas être atteint en a puisqu'on aurait alors, pour tout $x \in]a, b]$, $f(x) \leqslant f(a)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$, de sorte que par passage à la limite, $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$.
Ceci contredit le fait que $f'(a) > 0$.
De la même manière, le maximum de f sur $[a, b]$ ne peut pas être atteint en b, et donc est atteint en un point c intérieur à $[a, b]$.
Ce point est alors nécessairement un point critique de f, et donc $f'(c) = 0$.

Remarque
On utilise ici le fait que $f'(a) = f'_d(a)$ puisque a est la borne de gauche de $[a, b]$.

Remarque *: si f est $\mathscr{C}^1$, on peut utiliser le fait que f' est strictement positive sur un voisinage de a, et donc que f est strictement croissante au voisinage de a.*
Mais sans la continuité de f', il n'est pas possible d'affirmer ceci.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.17

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, scindé à racines simples, et soient $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ ses racines. Alors, par le théorème de Rolle, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, P' possède une racine dans $]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$, soit en tout $n - 1 = \deg P'$ racines distinctes.
Donc P' est scindé, et ses racines sont encore simples .
En itérant, on prouve donc que $P'', P^{(3)}, \dots, P^{(n-1)}$ sont scindé à racines simples. Notons que $P^{(n)}$ étant constant, par définition il n'est pas scindé.

Rappel
Un polynôme qui possède autant de racines que son degré (c'est-à-dire le nombre maximal de racines) ne peut avoir que des racines simples, faute de quoi, le nombre de racines comptées avec multiplicité excéderait le degré.

Rappelons que par la formule de Taylor appliquée en 0, les coefficients de P sont donnés par $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

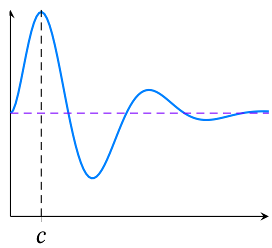
Si P possède deux coefficients consécutifs nuls, alors il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $P^{(k)}(0) = P^{(k+1)}(0) = 0$.
Et donc 0 est racine double de $P^{(k)}$, ce qui contredit le fait que toutes ses racines sont simples.

Solution de l'exercice 22.18

Quitte à retirer une constante à f, ce qui ne change rien à sa dérivée, on peut supposer que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Si f est constante sur $\mathbf{R}_+$, il n'y a rien à dire.
Supposons donc que f n'est pas constante, et supposons[7] qu'elle prenne une valeur strictement positive et soit $a \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(a) > 0$.
Inspirons nous de la preuve de Rolle, qui prouve l'existence d'un point critique de f en prouvant l'existence d'un maximum.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, en prenant $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$, il existe $A \in \mathbf{R}_+$ tel que pour $x \geqslant A$, $|f(x)| < \dfrac{f(a)}{2}$.
Soit alors M le maximum[8] de f sur le **segment** $[0, A]$. Alors $M \geqslant f(a)$, et donc pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant M$.
On en déduit donc que M est le maximum de f sur $\mathbf{R}_+$ tout entier, atteint en un point c de $\mathbf{R}_+^*$.
En particulier, f possède un maximum local en c, et donc $f'(c) = 0$.
Remarque *: il est bien entendu possible de généraliser plus largement. Une version assez générale serait la suivante : si f est dérivable sur $]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[7] Quitte à changer f en son opposé.

[8] Un tel maximum existe par le théorème des bornes atteintes.



Application : Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ (le cas $\lambda = 0$ est l'exercice 11), et considérons l'application $\varphi_\lambda : t \mapsto P(t)e^{\lambda t}$.
Sa dérivée est $\varphi_\lambda' : t \mapsto (P' + \lambda P)e^{\lambda t}$, qui s'annule uniquement en les zéros de $P' + \lambda P$.
Comme dans l'exercice 11, notons $n = \deg P$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ les racines des P, alors elles annulent φ_λ.
Donc par Rolle, φ_λ' s'annule une fois sur chacun des intervalles $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.
Ceci nous donne donc $p-1$ racines distinctes de $P' + \lambda P$.
De plus, les racines de multiplicité $m \geqslant 2$ de P sont racines de multiplicité $m - 1 > 0$ de P', et donc sont racines de multiplicité $m-1$ de $P + \lambda P' + \lambda P$.
Donc avec multiplicité, on a déjà $n-1$ racines de $P' + \lambda P$.
La différence avec l'exercice 11 réside dans le fait que $P' + \lambda P$ est de degré n, donc il nous manque encore une racine.
Mais $\varphi_\lambda(\alpha_n) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_\lambda(x)$.
Donc par la généralisation de Rolle, il existe $c \in]\alpha_n, +\infty[$ tel que $\varphi_\lambda'(c) = 0 \Leftrightarrow P'(c) + \lambda P(c) = 0$.
Cette racine est nécessairement distincte de toutes celles obtenues précédemment, donc on a n racines de $P' + \lambda P$ comptées avec multiplicité, donc $P' + \lambda P$ est bien scindé.

Solution de l'exercice 22.19

1. La dérivée de la fonction Arctan est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$.
Donc $\sup_{t\in\mathbf{R}} |\operatorname{Arctan}'(t)| \leqslant 1$.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
$$|\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leqslant |x - y|.$$

Sup/max
Il n'y a aucune difficulté à constater que ce sup est en fait un maximum atteint uniquement en 0.

2. De même, la fonction cos est 1-lipschitzienne, et donc $\forall x \in \mathbf{R}$,
$$|\cos(x) - 1| = |\cos(x) - \cos(0)| \leqslant |x - 0| \leqslant |x|.$$

Solution de l'exercice 22.20

Non seulement, l'exercice est difficile pour l'instant, mais en plus il sera plutôt perturbant quand nous aurons défini proprement l'intégrale, puisqu'il s'agira d'un résultat de cours. Malgré tout, la question est posée chaque année aux CCP.

1. Notons que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$.

D'autre part, d'après la relation de Chasles, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,,dt$.

Donc

$$R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right) dt.$$

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, f' est continue, donc bornée.
Notons alors $m = \min_{[0,1]} f'$ et $M = \max_{[0,1]} |f'|$.

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et tout $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant M\left(\frac{k}{n} - x\right) \leqslant \frac{M}{n}.$$

Soit encore $-\frac{M}{n} \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \leqslant \frac{M}{n}$.
Et donc par croissance de l'intégrale, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$-\frac{M}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right) dt \leqslant \frac{M}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right).$$

Et donc en sommant pour k allant de 1 à n, il vient

$$-\frac{M}{n} \leqslant R_n(f) - \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{M}{n}.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

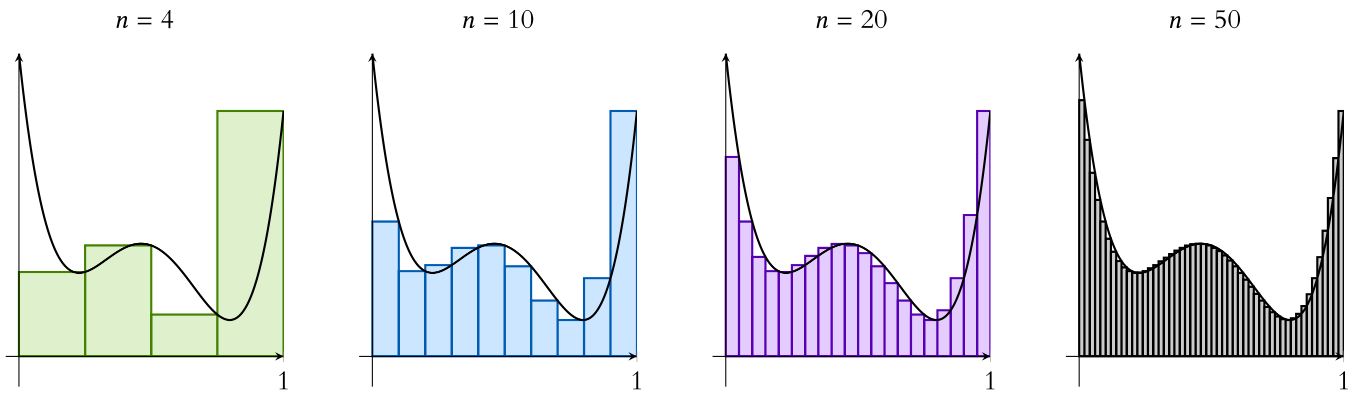


FIGURE 22.2 – La convergence de $R_n(f)$ vers l'intégrale se comprend bien graphiquement.

2. Tel que donné dans l'énoncé, x_n n'a pas la forme de la question 1, mais il suffit de factoriser par $\frac{1}{n}$:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$.

On a donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$.
Dès lors, ce n'est plus qu'un simple exercice de calcul d'intégrale.

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.21

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2)}{x}$. Alors elle possède évidemment une limite nulle en $+\infty$, car produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.
Par ailleurs, f est dérivable car produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -\dfrac{-2x^2\sin(x^2) - \cos(x^2)}{x^2} = -\sin(x^2) - \dfrac{\cos(x^2)}{x^2}$..
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\cos(x^2)}{x^2} = 0$, mais $-\sin(x^2)$ n'admet pas de limite en $+\infty$, donc f' n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
Alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f'(x) \geqslant 1$.
Et alors, par l'inégalité des accroissements finis, pour $x > A$, il existe $c_x \in]A, x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c_x)(x - A) \geqslant x - A$.
Et donc $f(x) \geqslant f(A) + (x - A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Supposons que $f^{(n)}$ admette une limite non nulle en $+\infty$. Par exemple[9] supposons cette limite ℓ strictement positive.
Alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $f^{(n)}(x) > \frac{\ell}{2}$.
Et alors, comme précédemment, pour $x \geqslant A$, $f^{(n-1)}(x) \geqslant f^{(n-1)}(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = +\infty$.
En appliquant alors plusieurs fois le résultat de la question 1 à $f^{(n-2)}, f^{(n-3)}, \dots, f$, il vient alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui est absurde.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

[9] Quitte à changer f en $-f$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.22

On peut bien évidemment supposer que les a_i sont tous non nuls, et quitte à les renuméroter[10], on peut également supposer que $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$.
Et par parité du cosinus, on peut même supposer que tous les ω_i sont strictement positifs.

[10] Et à regrouper des termes si besoin.

Un premier cas est facile à traiter : celui où il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|a_i| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_j|$.

Alors pour $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$f\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\right) = a_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right).$$

Mais

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n a_j \cos\left(\frac{2k\pi}{\omega_i}\omega_j\right)\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n |a_j| < |a_i|.$$

Donc $f\left(\dfrac{2k\pi}{\omega_i}\right)$ est du signe de a_i.

Et de même, $f\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\right) = -a_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n aj \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}\omega_j\right)$ est du signe de $-a_i$.

Donc par le théorème de Rolle, f s'annule entre $\dfrac{2k\pi}{\omega_i}$ et $\dfrac{(2k+1)\pi}{\omega_i}$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{Z}$, f s'annule une infinité de fois.
Dans le cas où aucun des coefficients ne l'emporte sur les autres, intégrons f.
En effet, par le théorème de Rolle, si une primitive de f s'annule une infinité de fois, alors f s'annulera aussi une infinité de fois.

Une primitive de f est $x \mapsto \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{a_i}{\omega_i}\sin(\omega_i x)$.
Nous pourrions tenir le même raisonnement que précédemment, mais pour garder des

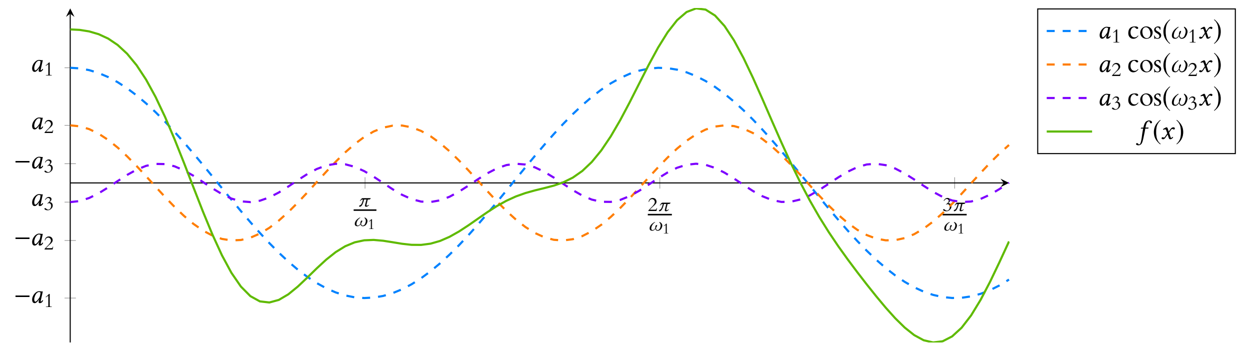


FIGURE 22.3 – Le cas $n = 3$, lorsque $|a_3| > |a_1| + |a_2|$.

sommes de cosinus, intégrons $4k$ fois, et considérons $F_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\omega_i^{4k}} \cos(\omega_i x)$.

Puisque les ω_i sont deux à deux distincts, avec $\omega_1 < \cdots < \omega_n$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\frac{1}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\omega_1^{4k}}\right)$.

Et donc $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}\right)$.

Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $k \geqslant k_0$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}}}{\frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}} < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{|a_i|}{\omega_i^{4k}} < \frac{|a_1|}{\omega_1^{4k}}.$$

Et donc par le premier cas traité précédemment, F_{4k_0} s'annule une fois sur chacun des intervalles de la forme $\left]\frac{2\ell\pi}{\omega_1}, \frac{(2\ell+1)\pi}{\omega_1}\right[$, $\ell \in \mathbf{Z}$.

Mais alors F'_{4k_0} s'annule une infinité de fois par le théorème de Rolle.

Puis F''_{4k_0}, s'annule une infinité de fois, etc.

Et donc $F_{4k_0}^{(4k_0)} = f$ s'annule une infinité de fois.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.23

La fonction nulle est évidemment solution, et nous allons prouver qu'il s'agit en fait de la seule.

Quitte à échanger a, b et c, supposons $0 < a < b < c$.

Soit f une fonction solution du problème, et soit $n \in \mathbf{N}$. Alors en dérivant n fois la relation $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$a^n f^{(n)}(ax) + b^n f^{(n)}(bx) + c^n f^{(n)}(cx) = 0.$$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{a^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right) + \frac{b^n}{c^n} f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right) + f^{(n)}(x) = 0.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} = 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\displaystyle\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$.

Soit donc $t > 0$, et soit $M_t = \displaystyle\max_{u\in[-t,t]} |f^{(n)}(u)|$, qui existe par le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction $f^{(n)}$, continue[11] sur le segment $[-t, t]$.

Alors, pour tout $x \in [-t, t]$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{a^n}{c^n}\left|f^{(n)}\left(\frac{ax}{c}\right)\right| + \frac{b^n}{c^n}\left|f^{(n)}\left(\frac{bx}{c}\right)\right| \leqslant \left(\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n}\right) M_t$$

puisque $\frac{ax}{c} \in [-t, t]$ et $\frac{bx}{c} \in [-t, t]$.

Puisque $\displaystyle\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} < 1$, ceci n'est possible que pour $M_t = 0$.

[11] Car f est $\mathscr{C}^\infty$.

Donc $f^{(n)}$ est nulle sur $[-t, t]$, et ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $f^{(n)}$ est nulle.
Ceci implique donc que $f^{(n-1)}$ est constante, donc $f^{(n-2)}$ est affine, etc, f est polynomiale de degré au plus $n-1$.

> **À retenir**
> Une fonction dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est la fonction nulle est polynomiale de degré au plus n.

Reste à trouver quelles sont les fonctions polynomiales qui satisfont la condition.
Soit donc $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ une fonction polynomiale solution du problème.

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \left(a^k + b^k + c^k\right) x^k = 0$.

Ainsi, $x \mapsto f(ax) + f(bx) + f(cx)$ est encore polynomiale, et par hypothèse, elle est nulle sur $\mathbf{R}$.
Donc ses coefficients sont tous nuls, de sorte que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \underbrace{\left(a^k + b^k + c^k\right)}_{>0} = 0$, et donc $a_k = 0$.
Et donc la fonction nulle est bien la seule fonction qui satisfait les conditions de l'énoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.24

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, et tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De plus, il est clair que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et f' continue en 0.
Et puisque f' est continue sur $\mathbf{R}^*$, elle l'est sur $\mathbf{R}$, et donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

> **Remarque**
> On applique en fait deux fois ce théorème : une fois à droite de 0 et une fois à gauche de 0.
> Ce qui nous donne la dérivabilité à droite et à gauche de f en 0.

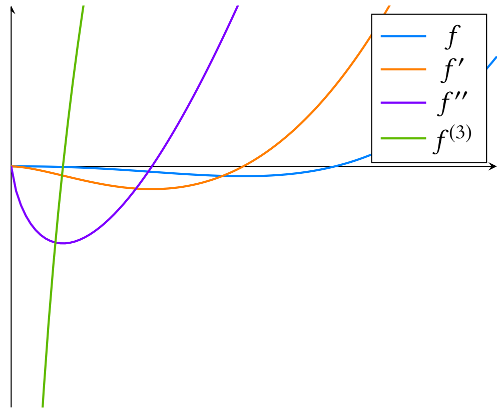
Prouvons alors par récurrence sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que f est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, avec $f^{(k)}(0) = 0$.
Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est déjà fait.
Supposons donc que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, f soit de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, avec $f^{(k)}(0) = 0$.
Alors $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$, avec $\lim\limits_{x\to 0} f^{(k+1)}(x) = 0$.
Donc par le théorème de la limite de la dérivée appliqué à $f^{(k)}$, $f^{(k)}$ est dérivable en 0, avec $f^{(k+1)}(0) = 0$, et $f^{(k+1)}$ continue en 0.
Puisque $f^{(k+1)}$ est déjà continue sur $\mathbf{R}^*$, elle est continue sur $\mathbf{R}$, et donc f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbf{R}$.

On obtient alors, par récurrence, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Et donc $\dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \begin{cases} (n+1)! & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, qui n'admet donc pas de limite en 0, si bien que $f^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.
Et donc f n'est pas $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbf{R}$.
Alternative : notons g la restriction de f à $\mathbf{R}^*$, qui n'est donc pas définie en 0.
Alors comme précédemment, g est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, $g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$.
En particulier, $g, g', g'', \dots, g^{(n)}$ admettent des limites finies, égale à 0, en 0.
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^n$, le prolongement par continuité de g à $\mathbf{R}$, qui est est égal à f, est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$, et ses n premières dérivées sont nulles en 0.
Et donc f est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}_+$, et on prouve comme ci-dessus qu'elle n'est pas $n+1$ fois dérivable, car $f^{(n)}$ n'est pas dérivable en 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.25

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions qui le sont.
On a alors $f'(x) = x^2 + 3x^2\ln(x)$, $f''(x) = 2x + 6x\ln(x) + 3x$ et $f^{(3)}(x) = 11 + 6\ln(x)$.
En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = -\infty$.
Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et le prolongement ainsi obtenu est $\mathscr{C}^2$.
Et la limite de $f^{(3)}$ en 0 étant infinie, ce prolongement ne saurait être de classe $\mathscr{C}^3$, car si c'était le cas, on aurait $\lim\limits_{x\to 0} f^{(3)}(x) = f^{(3)}(0)$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 22.26

1. f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Donc f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ en posant

$$\widetilde{f} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ qu'il existe $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

Pour $n = 0$, c'est évident, il suffit de poser $P_0 = 1$.
Supposons donc que P_n existe. Alors en dérivant $f^{(n)}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

Si on pose $P_{n+1}(X) = -X^2P_n' + 2X^3P_n \in \mathbf{R}[X]$, alors on a bien $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$.
Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3. Il s'agit d'appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $a_d X^d$ le monôme de plus haut degré de P_n.
Alors[12] $P_n\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}$.
Et donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}e^{-1/x^2}$.
Procédons alors au changement de variable $X = \frac{1}{x^2}$, de sorte que $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Alors

$$\frac{1}{x^d}e^{-1/x^2} = X^{d/2}e^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées.
Donc $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^\infty$ (qui s'applique car les limites des dérivées sont finies), $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

[12] Un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré.

Remarque
Il se produit là un phénomène qui ne peut pas se produire pour les polynômes (because of Taylor) : une fonction non nulle dont toutes les dérivées en un point sont nulles.

Fonctions convexes

23

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

23.1 Fonctions convexes

23.1.1 Notations

Dans tout le chapitre, si f est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$, on notera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Si $a \neq b$ sont deux points distincts de I, on note $\Delta_{a,b}$ la droite joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(f))$, appelée la **corde** à $\mathscr{C}_f$ passant par a et b.
Cette droite a pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, et son coefficient directeur $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, qui est le taux d'accroissement de f entre a et b, sera noté $\tau(a, b)$.

> Remarque
> Notons tout de suite que $\tau(a, b) = \tau(b, a)$.

23.1.2 Définition

Proposition 23.1 (Paramétrisation d'un segment.) : *Soient $a \leqslant b$ deux réels. Alors $\{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\} = [a, b]$.*

Démonstration. Si $\lambda \in [0, 1]$, alors $1-\lambda \in [0, 1]$, si bien que $a \leqslant b$, et donc $(1-\lambda)a \leqslant (1-\lambda)b$ et $\lambda a \leqslant \lambda b$, si bien que

$$a = (1 - \lambda)a + \lambda a \leqslant (1 - \lambda)a + \lambda b \leqslant (1 - \lambda)b + \lambda b = b.$$

Et donc $\{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\} \subset [a, b]$.
Et inversement, si $x \in [a, b]$, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b \Leftrightarrow x - a = \lambda(b - a) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - a}{b - a}.$$

Notons que $\dfrac{x - a}{b - a}$ est bien dans $[0, 1]$.
Et donc $[a, b] \subset \{(1 - \lambda)a + \lambda b,\ \lambda \in [0, 1]\}$. □

Remarque. La preuve est assez explicite : si $x \in [a, b]$, alors λ est le rapport de la distance de x à a sur la longueur totale du segment.
Donc $x = a \Leftrightarrow \lambda = 0$, $x = b \Leftrightarrow \lambda = 1$, x est égal à $\frac{a+b}{2}$, le milieu du segment $[a, b]$ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$, etc.

Définition 23.2 – Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est **convexe** si

$$\forall (a, b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leqslant (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

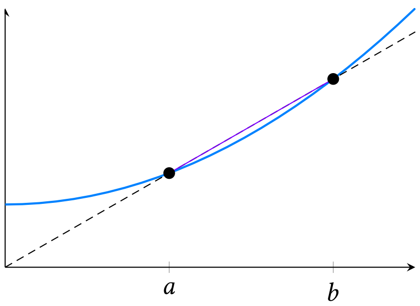
Cette définition a en fait une interprétation géométrique très simple.
Soient $a \neq b$ deux points distincts de I.
Pour $c \in [a, b]$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$, et donc le point d'abscisse c de $Delta_{a,b}$ a pour ordonnée

$$\tau(a, b)(c - a) + f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\lambda(b - a) + f(a) = (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

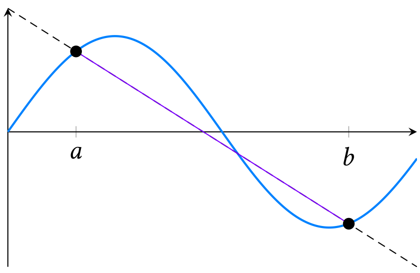
Donc f est convexe si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$, $\Delta_{a,b}$ est située, sur $[a, b]$, au dessus de $\mathscr{C}_f$.

> Plus facilement
> Une fonction convexe est une fonction dont le graphe est situé au dessus de ses cordes.

Une fonction convexe



Une fonction pas convexe



Remarque. Notons que dans la définition de convexe, $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ n'ont pas beaucoup d'intérêt, car on a alors toujours une égalité[1].
De même, $a = b$ n'a aucun intérêt.

[1] Qui dit juste qu'en a et en b, $\mathscr{C}$ et $\Delta_{a,b}$ coïncident.

Exemples 23.3

▸ Une fonction affine est convexe, puisqu'elle est confondue avec ses cordes.
Plus précisément, si $f : x \mapsto ax + b$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

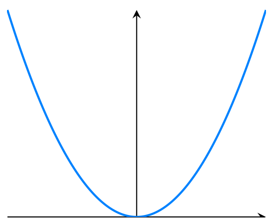
$$f((1-\lambda)x+\lambda y) = a\big((1-\lambda)x+\lambda y\big)+b = (1-\lambda)(ax+b)+\lambda(ay+b) = (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

▸ La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
En effet, soient a, b deux réels, et soit $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) = ((1-\lambda)a + \lambda b)^2 = (1-\lambda)^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab + \lambda^2 b^2.$$

Par ailleurs, $(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) = (1-\lambda)a^2 + \lambda b^2$.
Il est bien connu que $2ab \leqslant a^2 + b^2$, et donc

$$f\left((1-\lambda)a + \lambda b\right) \leqslant (1-\lambda)^2 a^2 + \lambda(1-\lambda)\left(a^2+b^2\right) + \lambda^2 b^2 \leqslant (1-\lambda)a^2 + \lambda b^2.$$

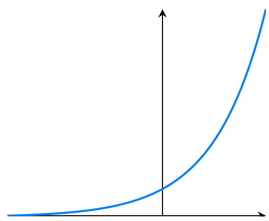


La fonction $x \mapsto x^2$

▸ La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.
En effet, considérons $a \leqslant b$ deux réels, et notons

$$g : \left|\begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{(1-t)a+tb} - (1-t)e^a - te^b \end{array}\right.$$

Alors g est deux fois dérivable et pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t) = (b-a)e^{(1-t)a+tb} - e^b + e^a$.



La fonction $x \mapsto e^x$

Puis $g''(t) = (b-a)^2 e^{(1-t)a+tb} \geqslant 0$. Donc g' est croissante.
On a alors $g'(0) = (b-a)e^a - e^b + e^a$.
Mais nous savons[2] que $e^{b-a} \geqslant (b-a) + 1$. Donc en multipliant par e^a,

$$e^b \geqslant (b-a)e^a + e^a \Leftrightarrow (b-a)e^a + e^a - e^b = g'(0) \leqslant 0.$$

De même, on a $g'(1) = (b-a)e^b - e^b + e^a$.
En partant cette fois de $e^{a-b} \geqslant (a-b) + 1$, il vient

$$e^a \geqslant (a-b)e^b + e^b \Leftrightarrow e^a + (b-a)e^b - e^b \geqslant 0 \Leftrightarrow g'(1) \geqslant 0.$$

Donc g' change de signe sur $[0, 1]$, et donc s'y annule en un point α.
Et alors g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, 1]$, avec $g(0) = g(1) = 0$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $g(t) \leqslant 0$, soit encore

$$e^{(1-t)a+tb} \leqslant (1-t)e^a + te^b.$$

Donc $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

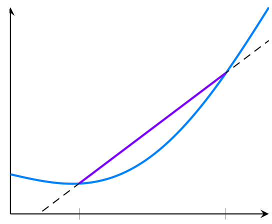
[2] C'est sûrement un argument de convexité qui se cache derrière l'inégalité $e^x \geqslant 1 + x$, mais nous l'avions prouvée par des études élémentaires de fonctions.

Remarque

Cette preuve, fort désagréable, doit suffire à nous convaincre de l'intérêt de développer des outils plus pratiques d'emploi pour caractériser la convexité. Ce qui va être fait dans la suite.

Affinons un peu le résultat concernant la position relative de $\mathscr{C}_f$ et des cordes.

Proposition 23.4 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ convexe, soient $a < b$ deux points de I, et soit $c \notin [a,b]$. Alors $f(c) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a)$.*
Autrement dit, en dehors de $[a,b]$, le graphe de f est situé au-dessus de $\Delta_{a,b}$.



Démonstration. Traitons le cas où $c > b$, le cas $c < a$ se traitant de la même manière.

Puisque $b \in [a,c]$, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $b = (1-\lambda)a + \lambda c$, et nous connaissons λ, c'est $\dfrac{b-a}{c-a}$.
Et donc $f(b) \leqslant \left(1 - \dfrac{b-a}{c-a}\right) f(a) + \dfrac{b-a}{c-a} f(c)$, soit encore

$$\begin{aligned} f(b) \leqslant \frac{c-b}{c-a} f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c) &\Leftrightarrow (c-a)f(b) \leqslant (c-b)f(a) + (b-a)f(c) \\ &\Leftrightarrow f(c) \geqslant \frac{(c-a)f(b) + (b-c)f(a)}{b-a} \\ &\Leftrightarrow f(c) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + f(a). \end{aligned}$$

□

Définition 23.5 – Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite **concave** si

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)a + \lambda b) \geqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Autrement dit, f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Une fonction concave est donc une fonction dont le graphe est situé au dessus des cordes. Dans la suite, nous nous contentons d'énoncer des résultats pour les fonctions convexes, et vous laissons le soin de changer les signes/sens d'inégalités qui ont besoin de l'être pour les fonctions concaves.

Exemple 23.6

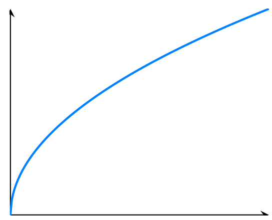
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbf{R}_+$.
  En effet, pour $x, y \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in [0,1]$, on a, par convexité de $x \mapsto x^2$,

$$\left((1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y}\right)^2 \leqslant (1-\lambda)\left(\sqrt{x}\right)^2 + \lambda\left(\sqrt{y}\right)^2 \leqslant (1-\lambda)x + \lambda y.$$

  Et donc par croissance de la racine carrée,

$$(1-\lambda)\sqrt{x} + \lambda\sqrt{y} \leqslant \sqrt{(1-\lambda)x + \lambda y}.$$

- Sur le même principe, puisque l'exponentielle est convexe, ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$.



La fonction $x \mapsto \sqrt(x)$

Croissance
Je vous laisse le soin d'écrire les détails, mais la croissance de ln est importante.

23.1.3 Inégalité des pentes

Proposition 23.7 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction «pente en a» : $\tau_a : \left|\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Notations
$\tau_a(x)$ n'est rien d'autre que ce que nous avions noté $\tau(a,x)$.

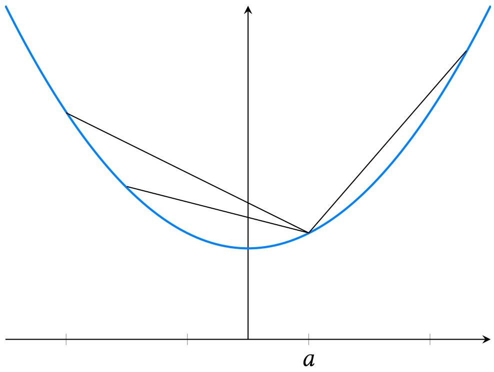


FIGURE 23.1 – Quelques cordes issues de a. Comparer leurs pentes.

Démonstration. Supposons que pour tout $a \in I$, τ_a est croissante.
Soient alors $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Comme mentionné précédemment, on peut supposer $a \neq b$ et $\lambda \in]0,1[$. Et quitte à échanger a et b, on peut même supposer $a < b$.
Il vient alors $a < (1-\lambda)a + \lambda b < b$.
Et donc par croissance de τ_a, $\tau_a((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant \tau_a(b)$. Soit encore

$$\begin{aligned}\frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{(1-\lambda)a+\lambda b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &\Leftrightarrow \frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{\lambda(b-a)} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\ &\Leftrightarrow f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a) \leqslant \lambda f(b)-\lambda f(a)\\ &\Leftrightarrow f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).\end{aligned}$$

Donc f est bien convexe sur I.

Inversement, supposons f convexe sur I, et soit $a \in I$.
Soient alors $x < y$ deux points de $I \setminus \{a\}$.
▸ **Premier cas** : $y > a$. Alors y est situé à l'extérieur du segment d'extrémités a et x (qui est donc soit $[a,x]$, soit $[x,a]$).
Or à l'extérieur de ce segment, $\Delta_{a,x}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$:

$$f(y) \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a)+f(a) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \tau_a(y) \leqslant \tau_a(x).$$

▸ **Second cas** : $y < a$. Alors y est situé dans le segment $[x,a]$, sur lequel $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\Delta_{x,a}$.
On a donc $f(y) \leqslant \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}(y-a)+f(a) \Leftrightarrow f(y)-f(a) \leqslant \dfrac{f(a)-f(x)}{x-a}(y-a)$.
Mais cette fois $y-a<0$, si bien que $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \geqslant \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \tau_a(y) \geqslant \tau_a(x)$.
Donc la fonction τ_a est croissante sur son ensemble de définition. □

Corollaire 23.8 – *Si I est un intervalle* ***ouvert****, alors une fonction convexe sur I est continue.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Alors la fonction τ_a de la proposition précédente est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Par le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie lorsque x tend vers a par valeurs inférieures.
Mais puisque I est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]a, a+\eta] \subset I$, et donc en particulier, pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$, $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(x_0+\eta)$.
Donc la restriction de τ_a à $I \cap]-\infty, a[$ est croissante majorée, et donc admet une limite **finie** en a.
Et sur le même principe, τ_a admet une limite finie à droite en a.
Mais alors pour $x \neq a$, $f(x) = \tau_a(x) \times (x-a) + f(a) \underset{x \to a^\pm}{\longrightarrow} f(a)$.
Et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, si bien que f est continue en a. Et donc est continue sur I. □

Remarque
Ceci prouve même un peu mieux qu'annoncé, à savoir que f est dérivable à gauche en a.

⚠ Ceci n'est plus valable sur un intervalle qui n'est pas ouvert, la preuve utilise vraiment le fait que I contient des points de part et d'autre de a pour prouver la finitude des limites de τ_a.
Par exemple, sur $[-1, 1]$, la fonction ci-contre est convexe, mais n'est pas continue en ± 1.

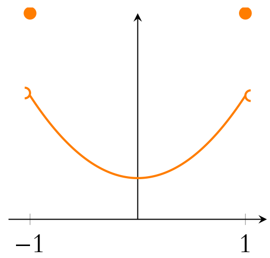


Figure 23.2– Une fonction convexe non continue sur $[-1, 1]$.

Corollaire 23.9 (Inégalité des pentes) – *Soit : $I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors pour $a < b < c$ trois éléments distincts de I, on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Ce qui s'écrit encore $\tau(a, b) \leqslant \tau(a, c) \leqslant \tau(b, c)$.

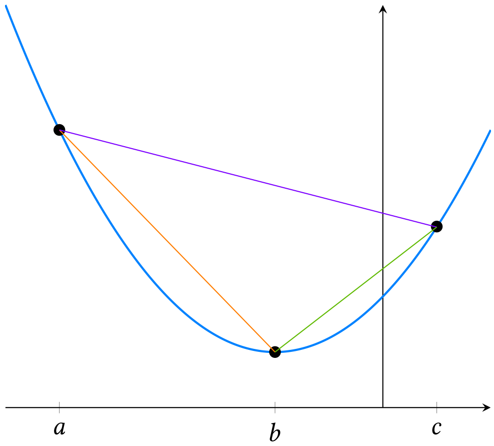


Figure 23.3 – L'inégalité des pentes
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Démonstration. Puisque τ_a est croissante, $\tau(a, b) = \tau_a(b) \leqslant \tau_a(c) = \tau(a, c)$.
Et puisque τ_c est croissante, $\tau(a, c) = \tau_c(a) \leqslant \tau_c(b) = \tau(b, c)$. □

23.1.4 Inégalité de Jensen

Le résultat qui suit est probablement le seul de ce chapitre qu'il n'est pas facile d'interpréter géométriquement pour l'instant.

Proposition 23.10 (Inégalité de Jensen) : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à dire, puisque nécessairement $\lambda_1 = 1$.
Pour $n = 2$, si λ_1, λ_2 sont deux réels positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, et donc il s'agit de la définition de la convexité :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Supposons la propriété vraie au rang n, et soient $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

▸ Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc il n'y a rien à dire.

► Si $\lambda_{n+1} \neq 1$, posons $y = \dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
Notons $a = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ et $b = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$, de sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant x_i \leqslant b$. Alors puisque les λ_i sont positifs,

$$a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leqslant b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Et puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, $1 - \lambda_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, si bien que $a \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{=y} \leqslant b$.

Donc[3] $y \in [a, b] \subset I$.

[3] I est un intervalle.

Et on a alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$.
Donc par l'inégalité de convexité,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Par ailleurs, on a $f(y) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right)$, où les $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ sont des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = \dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \dfrac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$.
Donc par l'hypothèse de récurrence,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i).$$

Et donc au final,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

La propriété est héréditaire, par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. □

Remarques. ► Pour $n = 2$, on retrouve donc la définition de la convexité.
► Le résultat reste valable pour une fonction concave en renversant les inégalités.

Exemple 23.11 L'inégalité arithmético-géométrique

Nous avons déjà mentionné la concavité de la fonction ln sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soient donc $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, et posons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, qui sont donc des réels positifs de somme 1.
On a alors, par l'inégalité de Jensen,

$$\ln\left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n).$$

Par croissance de l'exponentielle, il vient donc

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \exp\left(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right) \Leftrightarrow \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Autrement dit, la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$ est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique.
Cette inégalité est appelée l'inégalité arithmético-géométrique[4].

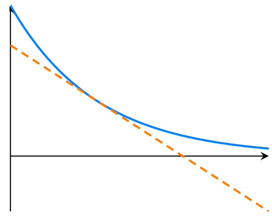
[4] Et nous en avons déjà parlé en DM, c'est de son fait que vous préférez que j'utilise une moyenne arithmétique plutôt qu'une moyenne géométrique sur vos bulletins.

23.2 Convexité et dérivabilité

Proposition 23.12 : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Alors il y a équivalence entre :*

1. *f est convexe*
2. *f' est croissante*
3. *$\mathscr{C}_f$ est, sur I, au dessus de ses tangentes. C'est-à-dire*

$$\forall (a,b) \in I^2,\ f(b) \geqslant f'(a)(b-a)+f(a).$$



Une fonction convexe et une de ses tangentes

Démonstration. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Soient $a < b \in I$. Alors pour tout $x \in]a,b[$, on a, par l'inégalité des pentes,

$$\tau(a,x) \leqslant \tau(a,b) \leqslant \tau(b,x).$$

En faisant tendre x vers a, il vient donc $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \tau(a,x) \leqslant \tau(a,b)$ et en faisant tendre x vers b, $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} \tau(b,x) \geqslant \tau(a,b)$.
Et donc $f'(a) \leqslant \tau(a,b) \leqslant f'(b)$, si bien que f est croissante.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Soit $a \in I$, et soit $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-f'(a)(x-a)-f(a) \end{array} \right.$.
Alors g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$, qui est du signe de $x-a$.
Donc g est décroissante sur $I \cap]-\infty, a[$ et croissante sur $I \cap [a,+\infty[$.
Puisque de plus $g(a) = f(a) - f(a) = 0$, g est positive sur I tout entier, et donc pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* Soient $a, b \in I$, et soit $\lambda \in [0,1]$. Notons alors $x = (1-\lambda)a + \lambda b$, de sorte que $f(a) \geqslant f'(x)(a-x)+f(x)$ et $f(b) \geqslant f'(x)(b-x)+f(x)$.
Et alors

$$(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) \geqslant f'(x)\big((1-\lambda)(a-x)+\lambda(b-x)\big)+f(x) \geqslant f'(x)\big((1-\lambda)a+\lambda b-x\big)+f(x) \geqslant f(x) \geqslant f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big).$$

Donc f est convexe. □

Pour le dire avec les mains, une fonction convexe est une fonction dont la pente augmente, donc qui «tourne vers la gauche». Et une fonction concave est une fonction qui «tourne vers la droite».

Exemple 23.13

On retrouve ainsi deux inégalités classiques déjà rencontrées en début d'année[5] : puisque exp est convexe, et que sa tangente en 0 a pour équation $y = x+1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1+x$.
Et de même, ln étant concave, avec une tangente en 1 d'équation $y = x-1$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x-1$.
Ce qui s'écrit encore : $\forall x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

[5] Et prouvées sans parler de convexité.

Corollaire 23.14 – *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.*

Démonstration. f est convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante $\Leftrightarrow$ f'' est positive. □

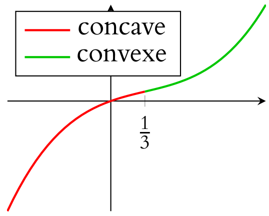
Ceci nous permet de retrouver à peu de frais la convexité de l'exponentielle, ou encore de la fonction carré ou de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$.

Définition 23.15 – Soit $f : I \to \mathbf{R}$, et soit $a \in I$ intérieur à I.
On dit que a est un **point d'inflexion** de f s'il existe $\eta > 0$ tel que f soit convexe sur $I \cap]-\infty, a]$ et concave sur $I \cap [a, +\infty[$, ou le contraire.
Si f est deux fois dérivable sur I, c'est en particulier un point tel que $f''(a) = 0$.

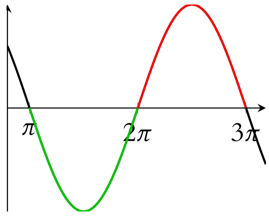
Autrement dit
Un point d'inflexion est un point où f change de convexité.

Exemples 23.16

► Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2 + x$.
Alors $f''(x) = 6x - 2$, s'annule en $x = \frac{1}{3}$.
De plus, sur $]-\infty, \frac{1}{3}]$, f'' est négative, donc f est concave. Et sur $[\frac{1}{3}, +\infty[$, f'' est positive, donc f est convexe. Donc f possède un point d'inflexion en $\frac{1}{3}$.
► Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -\sin(x)$.
Donc sur $[\pi, 2\pi]$, $f'' \geqslant 0$, et sur $[2\pi, 3\pi]$, $f'' \leqslant 0$, si bien que f est convexe sur $[\pi, 2\pi]$ et concave sur $[2\pi, 3\pi]$, donc elle possède un point d'inflexion en π.



$x \mapsto x^3 - x^2 + x$



sin a un point d'inflexion en 2π.

⚠ Un point avec $f''(a) = 0$ n'est pas forcément un point d'inflexion, par exemple la fonction $x \mapsto x^4$ a une dérivée seconde qui s'annule en 0, elle n'y change pas de convexité puisqu'elle est convexe sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Notons enfin qu'une fonction dérivable qui possède un point d'inflexion en a traverse sa tangente en a. En effet, si elle est par exemple convexe, puis concave, alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente à gauche de a et en dessous à droite de a.

Exercices du chapitre 23

► Généralités

Exercice 23.1 Soient f et g deux fonctions convexes sur I. Prouver que $f+g$ est convexe, et que pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)f+\lambda g$ est encore convexe. F

Exercice 23.2 Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, convexes, avec g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe. PD

Exercice 23.3 Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et $f : I \to J$ une bijection convexe. PD
Que dire de la convexité de f^{-1} ?

Exercice 23.4 PD

1) Soit I un intervalle, et soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions convexes sur I. Montrer que la fonction $g = \max(f_1, \dots, f_n)$ est convexe sur I.
2) En déduire que la fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbf{R}$.

Exercice 23.5 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable, concave et telle que $f(0) \geqslant 0$. PD
Prouver que pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Exercice 23.6 Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbf{R}$ est constante. AD

Exercice 23.7 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair. À quelle condition $x \mapsto P(x)$ est-elle convexe sur $\mathbf{R}$? F

► Inégalités de convexité

Exercice 23.8 Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$. F

Exercice 23.9 **Inégalité arithmético-harmonique** PD
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$. Prouver que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots +_n}{n}.$$

Exercice 23.10 Montrer que pour tous $(x,y) \in]1, +\infty[^2$, $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$. PD

Exercice 23.11 Soient α, β, γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que AD

$$\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma} \geqslant \frac{6}{2+\sqrt{3}}.$$

Exercice 23.12 AD

1) Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ sur $\mathbf{R}$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$, $1 + \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.
3) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 23.13 **Inégalité de Cauchy-Schwarz** AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs. Prouver que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$, puis que la même inégalité reste valable pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels (non nécessairement positifs).

▸ Comportement des fonctions convexes

EXERCICE 23.14 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I, et soient $a < b$ deux points de I. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant \max(f(a), f(b))$. PD
Autrement dit, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I, f possède un maximum sur $[a, b]$, atteint en l'une de ses bornes.

EXERCICE 23.15 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe. PD

1) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est à valeurs positives.
2) On suppose que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote D au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et D.

EXERCICE 23.16 AD

1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

EXERCICE 23.17 PD

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction convexe et positive. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$, alors f est identiquement nulle.
2) En déduire qu'une fonction convexe qui possède un minimum atteint ce minimum soit en un seul point, soit en une infinité de points.
3) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

EXERCICE 23.18 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe, avec I un intervalle ouvert. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$, alors il s'agit en fait d'un minimum global. PD

EXERCICE 23.19 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction convexe admettant une limite finie en $+\infty$. AD

1) Montrer que f est décroissante.
2) On suppose de plus f dérivable.
   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
   b) Justifier que le résultat n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire qu'une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, possédant une limite finie en $+\infty$ n'a pas forcément une dérivée de limite nulle en $+\infty$.

EXERCICE 23.20 Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue. Prouver que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. D

EXERCICE 23.21 **(Oral X PC)** D
Soit f une fonction convexe sur $\mathbf{R}$. On suppose que f n'est pas affine. Prouver que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f(x)+f(a-x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 23

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.1

Pour tout $a, b \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}(f+g)((1-\lambda)a+\lambda b) &= f((1-\lambda)a+\lambda b) + g((1-\lambda)a+\lambda b)\\ &\leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)+(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b) \leqslant (1-\lambda)(f+g)(a)+\lambda(f+g)(b).\end{aligned}$$

On prouve sans difficultés que pour tout $\lambda \geqslant 0$, λf est encore convexe.
Et donc pour $\lambda \in [0, 1]$, $1-\lambda \geqslant 0$, si bien que $(1-\lambda)f$ et λg sont convexes, donc $(1-\lambda)f+\lambda g$ est convexe.

Danger ! Ceci est faux si $\lambda < 0$, car on change alors le sens de l'inégalité.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.2

Soient $x < y$ deux réels, et soit $\lambda \in [0, 1]$.
Alors $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.
Et donc

$$\begin{aligned}g(f((1-\lambda)x+\lambda y)) &\leqslant g((1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)) && \text{Croissance de } g.\\ &\leqslant (1-\lambda)g(f(x))+\lambda g(f(y)). && \text{Convexité de } g.\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.3

Puisque I est ouvert et que f est convexe, elle est continue sur I.
Et donc elle est strictement monotone.

Rappel Une fonction continue sur un intervalle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Si elle est strictement croissante, soient alors $x, y \in J$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$f\left((1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y)\right) \leqslant (1-\lambda)f\left(f^{-1}(x)\right)+\lambda f\left(f^{-1}(y)\right) \leqslant (1-\lambda)x+\lambda y.$$

Et donc par stricte croissance de f^{-1},

$$(1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}((1-\lambda)x+\lambda y).$$

Donc f^{-1} est concave.

Le raisonnement est le même si f est strictement décroissante, sauf qu'alors f^{-1} est strictement décroissante, et donc

$$(1-\lambda)f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}((1-\lambda)x+\lambda y)$$

si bien que f^{-1} est également convexe.

Un exemple de ces deux cas est $x \mapsto e^x$, qui est convexe et croissante, et donc la bijection réciproque ln est donc concave.
Et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est convexe et décroissante, dont la bijection réciproque $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est encore convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.4

1. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.
Alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $g((1-\lambda)a+\lambda b) = f_i((1-\lambda)a+\lambda b)$.
Par convexité de f_i, $f_i((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f_i(a)+\lambda f_i(b)$.
Mais $f_i(a) \leqslant g(a)$, si bien que $(1-\lambda)f_i(a) \leqslant (1-\lambda)g(a)$. Et de même $\lambda f_i(b) \leqslant \lambda g(b)$, et donc
$$g((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)g(a)+\lambda g(b).$$
Donc g est convexe.
2. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| = \max(-x, x)$.
Or les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont affines, donc convexes.
Et donc par la question précédente, $x \mapsto |x|$ est convexe.

Remarque Bien entendu, la convexité de $x \mapsto |x|$ peut se montrer directement à l'aide de l'inégalité triangulaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.5

Pour x fixé, posons $\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$.
Alors φ est dérivable et $\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y) \leqslant 0$ puisque par concavité de f, f' est décroissante.
Donc φ est décroissante, et $\varphi(0) = -f(0) \leqslant 0$, si bien que pour tout $y \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.6

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe et majorée.
Soient alors $a < b$ deux réels. Par l'inégalité des pentes, pour $x < a$ et $y > b$, on a

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(y)-f(b)}{y-b}.$$

Supposons $f(b) > f(a)$, de sorte que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$.
Alors pour $y > b$, on a $f(y) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(y-b) + f(b) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.
Et si $f(a) > f(b)$, alors pour $x < a$, on a

$$f(a) - f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

contredisant là aussi le fait que f est majorée.
Et donc pour tous $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $f(a) = f(b)$, si bien que f est constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.7

Si $\deg P \geqslant 3$ alors P'' est de degré impair, et donc n'est pas de signe constant[1].
Et donc P n'est pas convexe.

Et si $\deg P = 1$, alors bien entendu, P est convexe, comme toute fonctions affine.

[1] Les limites en $\pm\infty$ sont de signes opposés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.8

La fonction sin est concave[2] sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puisque sa dérivée seconde y est négative.
L'équation de sa tangente en 0 est $y = x$, si bien que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leqslant x$.
Et par ailleurs, la corde joignant les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$, si bien que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

[2] Et donc en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.9

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$, puisque sa dérivée, $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ y est croissante.
Donc par l'inégalité de Jensen[3]

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n) \Leftrightarrow \frac{n}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right).$$

En passant à l'inverse, il vient donc

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

[3] Appliquée avec

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.10

Par concavité de la fonction ln, on a, pour tout $x, y > 1$,

$$\ln \frac{x+y}{2} \geqslant \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y).$$

Mais pour tous réels positifs α et β, on a $2\sqrt{\alpha}\sqrt{b} \leqslant \alpha + \beta$.
Et donc $\sqrt{\ln x \ln y} \leqslant \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln y) \leqslant \ln \dfrac{x+y}{2}$.

Rappel

Cette inégalité classique découle de

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Alternative : la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$ puisque sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui est décroissante.
Donc pour $x, y \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}\ln(\ln(x)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(y)).$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant e^{\frac{1}{2}\ln(\ln(x)+\ln(y))} \geqslant e^{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)+\ln\left(\sqrt{\ln y}\right)} \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.11

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$.
Alors f est évidemment dérivable, et

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x) = -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto (1+\sin x)^2$ est croissante (et donc son inverse est décroissante) et positive, et $x \mapsto \cos(x)$ est décroissante et positive.
Et donc le quotient $x \mapsto \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$ est décroissant. Et donc f' est décroissante.

> **Attention !**
> La positivité mentionnée ci-dessus est indispensable, sans hypothèses de signe, le produit de fonctions décroissantes n'est pas forcément décroissant.

En revanche, le raisonnement ci-dessus ne vaut plus forcément sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.
Mais sur cet intervalle, $x \mapsto -\cos(x)$ est croissante et positive, et $x \mapsto (1+\sin x)^2$ est décroissante et positive, donc d'inverse croissante.
Et donc par produit, f' est croissante.
Et ainsi, f est convexe sur $[0, \pi[$.

On a donc en particulier,

$$f\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma\right) \leqslant \frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{1}{3}f(\beta) + \frac{1}{3}f(\gamma).$$

Or $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \dfrac{\pi}{3}$, et donc

$$\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{3}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\sin\gamma}.$$

Soit encore

$$\frac{3}{1+\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{2+\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.12

1. f est dérivable, avec $f' : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$ qui est donc croissante.
   Donc f est convexe.
2. Par l'inégalité de Jensen, toujours en prenant $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, il vient

$$f\left(\frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\ln(x_k)).$$

> **Détails**
> C'est Jensen appliquée aux réels $\ln(x_k)$, et non directement aux x_k.

Soit encore

$$\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}(\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n))}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+e^{\ln(x_k)}\right).$$

Donc

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

3. Appliquons l'inégalité précédente aux $x_k = \dfrac{b_k}{a_k}$. Il vient alors

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$, il vient

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.13

La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs.
Posons alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \dfrac{x_i^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, si bien que les λ_i sont positifs et que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.
Posons également $z_i = \dfrac{y_i}{x_i}$.
On a donc, par l'inégalité de Jensen, appliquée à $z_1, \dots, z_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2.$$

Soit encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i x_i}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\frac{y_i^2}{x_i^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Après multiplication par $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2$, il vient $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont positifs, mais que certains des x_i ou des y_i sont nuls, quitte à renuméroter, on peut supposer que pour $i \in [\![1,p]\!]$, $x_i y_i \neq 0$, et que pour $i \in [\![p+1,n]\!]$, $x_i = 0$ ou $y_i = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{p} x_i y_i\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).\end{aligned}$$

C'est le cas traité précédemment.

Dans le cas où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des réels de signe quelconque, mais non nul, on a[4]

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$$

si bien que

$$\left(|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

[4] Par l'inégalité triangulaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.14

Le résultat est graphiquement assez intuitif : sur $[a,b]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\Delta_{a,b}$ la corde joignant a à b.

La fonction affine correspondante possède un maximum atteint soit en a soit en b (suivant le signe de $\tau(a,b)$), et f coïncide avec cette fonction affine en ces deux points. Donc nécessairement f possède un maximum en a ou en b.
Essayons de l'écrire à l'aide de l'inégalité des pentes.

Soit $c \in]a,b[$. Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$.
Alors par l'inégalité des pentes, $0 \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$.
Et donc en particulier, $f(b)-f(c) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(b) \geqslant f(c)$.
Et si $f(b) \leqslant f(a)$, toujours par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant 0$$

et donc $f(c)-f(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(c) \leqslant f(a)$.
Ainsi, pour tout $c \in]a,b[$, $f(c) \leqslant \max(f(a), f(b))$.

Solution de l'exercice 23.15

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) < 0$.
Alors pour $a < b < x$, on a, par l'inégalité des pentes,
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
Mais lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc pour tout $b > a$, $f(b)-f(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(b) \leqslant f(a) < 0$.
Et donc $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b) \leqslant f(a) < 0$, ce qui est absurde.
Donc f est à valeurs positives.
2. Notons $y = ax+b$ une équation de D.
Alors $g : x \mapsto f(x)-(ax+b)$ est encore convexe, puisque somme[5] de fonctions convexes (en effet, une fonction affine est toujours convexe).
Par définition d'une asymptote, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, si bien que g est à valeurs positives par la question 1 : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant ax+b$, donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de D.

[5] Voir l'exercice 1.

Solution de l'exercice 23.16

1. Soit $x > 1$. Alors par convexité de f on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \geqslant \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$, soit encore
$$f(x) \geqslant x(f(1)-f(0)) + f(0).$$
Puisque $f(1)-f(0) > 0$ par stricte croissance de f, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque
Cette inégalité signifie juste que sur $]1,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\Delta_{0,1}$.

2. Supposons par l'absurde f non constante. Alors il existe $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.
► Si $f(b) > f(a)$: alors comme à la question précédente, pour $x > b$, on a
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(x) \geqslant (x-a)\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{>0} + f(a)$$
si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.
► Si $f(b) < f(a)$: alors pour $x < a$, on a
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(x) \geqslant (x-a)\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{<0} + f(a)$$
si bien que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, contredisant le fait que f est majorée.

⚠ Attention !
Ici $x-a < 0$, donc le sens de l'inégalité a changé.

Et donc une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et majorée est nécessairement constante.

Solution de l'exercice 23.17

1. Soit $c \in [a,b]$. Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $c = (1-\lambda)a + \lambda b$.
Et alors $0 \leqslant f(c) = f((1-\lambda)a+\lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) = 0$.
Et donc $f(c) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $c \in [a,b]$, f est la fonction nulle sur $[a,b]$.
2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I possédant un minimum m.
Supposons qu'il existe deux réels distincts $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = m$.
Alors la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - m$ est positive, toujours convexe, et $g(a) = g(b) = 0$.
Donc elle est nulle sur $[a,b]$, si bien que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = m$.
Et ainsi, le minimum de f est atteint en tous les points du segment $[a,b]$, qui sont donc en nombre infini.
3. Si f est convexe et T-périodique sur $\mathbf{R}$, alors elle est continue, car $\mathbf{R}$ est un intervalle ouvert.
Donc elle possède un minimum m, et $g = f + m$ est encore convexe, et à valeurs positives.
Soit alors $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = m$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $g(a-kT) = g(a+kT) = 0$, si bien que g est nulle sur $[a-kT, a+kT]$.
Et ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, g est nulle sur $\mathbf{R} = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} [a-kT, a+kT]$.
Et donc f est constante égale à m.

> **Autrement dit**
> On suppose que f atteint son minimum en deux points au moins.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.18

Supposons donc que f possède un minimum local en a, et soit $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset I$ et $\forall x \in [a-\eta, a+\eta]$, $f(x) \geqslant f(a)$.
Soit alors $x > a+\eta$. Par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(a+\eta)-f(a)}{a+\eta-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Mais $f(a+\eta) - f(a) \geqslant 0$, et donc $f(x) - f(a) \geqslant 0$, si bien que $f(x) \geqslant f(a)$.
Et de même, si $x < a - \eta$, alors toujours par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(a-\eta)-f(a)}{a-\eta-a}.$$

Mais $f(a-\eta) - f(a) \geqslant 0$, et $a - \eta - a < 0$, si bien que $\dfrac{f(a-\eta)-f(a)}{a-\eta-a} \leqslant 0$.
Et donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ et donc $f(x) - f(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(a)$.
On a donc bien, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$, donc f admet un minimum global en a.

> **Remarque**
> Le fait que I soit ouvert garanti qu'on puisse trouver η suffisamment petit pour que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.19

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs, et soit $z \geqslant y$.
Alors par l'inégalité des pentes,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Mais lorsque $z \to +\infty$, $f(z) - f(y)$ admet une limite finie, et $z - y$ tend vers $+\infty$, si bien que par passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(y) \leqslant f(x).$$

Et donc f est décroissante.

2.a. Puisque f est décroissante, sa dérivée est négative sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par ailleurs, par convexité de f, cette dérivée est croissante. Et donc étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie $\ell \leqslant 0$ en $+\infty$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) \leqslant \ell$.
D'autre part, pour $x < y$ deux réels strictement positifs, par le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_{x,y}) \leqslant \ell$.
Mais lorsque $y \to +\infty$, par le même raisonnement que précédemment, $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = 0$.
Et donc $0 \leqslant \ell$. Puisque nous savons déjà que $\ell \leqslant 0$, nécessairement $\ell = 0$.

> **Graphiquement**
> Le théorème des accroissements finis nous dit que la pente d'une corde est une valeur prise par la dérivée, donc a même coefficient directeur qu'une tangente.

2.b. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^3)}{x}$ est un contre-exemple.
En effet, elle tend bien vers 0 en $+\infty$, car produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle.
Mais sa dérivée, qui est $f' : x \mapsto -3x\sin(x^3) - \dfrac{\cos(x^3)}{x^2}$ n'admet pas de limite puisque $x\sin(x^3)$ n'a pas de limite en $+\infty$ alors que $\dfrac{\cos(x^3)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

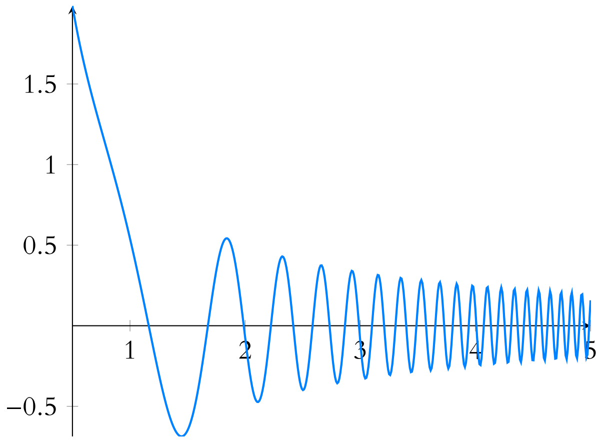


FIGURE 23.1 – La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^3)}{x}$ tend vers 0, mais les oscillations étant de «plus en plus rapides», la dérivée n'a pas de limite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.20

Un sens est clair, si f est convexe, alors pour $x, y \in I$ et $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Pour la réciproque, notons que pour $x, y, z, t \in I$, on a

$$f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{x+y}{2} + \frac{1}{2}\frac{z+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{z+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(f(x)+f(y)+f(z)+f(t)\right).$$

Une récurrence sans difficultés prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, quels que soient les réels $x_1, \dots, x_{2^n} \in I$,

$$f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

En particulier, pour $x, y \in I$, et $p \in [\![0, 2^n]\!]$, en prenant $x_1 = \cdots = x^p = x$ et $x_{p+1} = \cdots = x_{2^n} = y$, on obtient

$$f\left(\frac{p}{2^n}x + \frac{2^n - p}{2^n}y\right) \leqslant \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Autrement dit, c'est bien la définition de fonction convexe, mais seulement pour $\lambda \in E = \left\{\frac{p}{2^n}, n \in \mathbf{N}, p \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$.

> **Terminologie**
> De tels nombres sont appelés des entiers dyadiques.

C'est là qu'entre en jeu la continuité de f, puisque E est dense dans $[0, 1]$.
En effet, si $\lambda \in [0, 1]$, posons $u_n = \dfrac{\lfloor \lambda 2^n \rfloor}{2^n}$, qui est bien un élément de E.
Alors $2^n\lambda - 1 < \lfloor 2^n\lambda \rfloor \leqslant 2^n\lambda$, si bien que $\lambda - \dfrac{1}{2^n} < u_n \leqslant \lambda$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.
Soient donc $x, y \in I$, et $\lambda \in [0, 1]$, avec (u_n) comme ci-dessus.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n x + (1-u_n)y) \leqslant u_n f(x) + (1-u_n)f(y)$.
Mais puisque $u_n x + (1-u_n)y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (1-\lambda)x + \lambda y$, par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n x + (1-u_n)y).$$

Et donc par passage à la limite,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Et donc f est convexe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 23.21

Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé.
Puisque f est convexe, alors τ_a est croissante, et puisque f n'est pas affine, τ_a n'est pas constante.
Donc il existe $u < v$ tels que $\tau_a(u) < \tau_a(v)$.

Par ailleurs, pour x suffisamment grand, on a à la fois $x \geqslant v$ et $a - x \leqslant u$.
On a alors $\tau_a(a-x) \leqslant \tau_a(u)$ et $\tau_a(v) \leqslant \tau_a(x)$.
Ce qui s'écrit encore $\dfrac{f(a)-f(a-x)}{x} \leqslant \tau_a(u) \Leftrightarrow f(a-x) \geqslant f(a) - x\tau_a(u)$.
Et $f(x) \geqslant (x-a)\tau_a(v) + f(a)$.

Si on somme ces deux inégalités, il reste donc

$$f(x) + f(a-x) \geqslant x \underbrace{(\tau_a(v) - \tau_a(u))}_{>0} + 2f(a) - a\tau_a(v) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Dénombrement

24

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble. Autrement dit, déterminer son cardinal.
Il s'agit d'un concept important notamment en probabilités, dans les situations d'équiprobabilité, où on utilise alors le sacro-saint principe[1] du

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}.$$

[1] Dont nous reparlerons prochainement.

Les outils à notre disposition pour compter sont assez peu nombreux et finalement assez simples, mais dénombrer correctement demande un peu de pratique.

24.1 Retour sur la notion de cardinal

Rappelons qu'un ensemble E est dit fini s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$.
Nous avons alors prouvé qu'un tel n est unique, et est appelé le cardinal de E. On le note $|E|$, $\operatorname{Card} E$ ou encore $\#E$.

La plupart des propriétés qui suivent sont très intuitives. Nous allons tout de même les prouver proprement à l'aide de la définition du cardinal, mais le programme officiel mentionne clairement :

l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

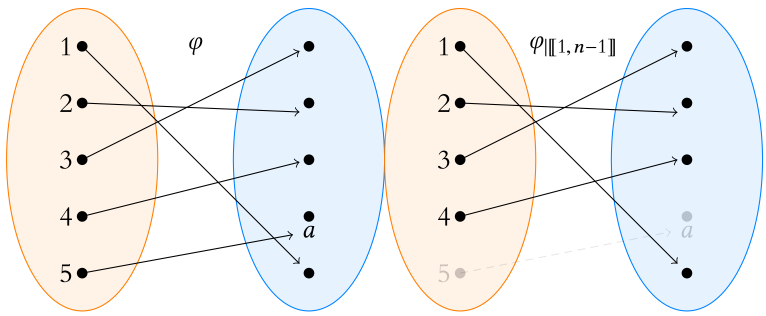
Laissez donc de la place à votre intuition !

Proposition 24.1 : *Si E est de cardinal n et si F est en bijection avec E, alors F est fini, de cardinal n.*

Démonstration. Notons $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ et $\tau : E \to F$ deux bijections.
Alors $\tau \circ \varphi$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans F. Et donc F est fini de cardinal n. □

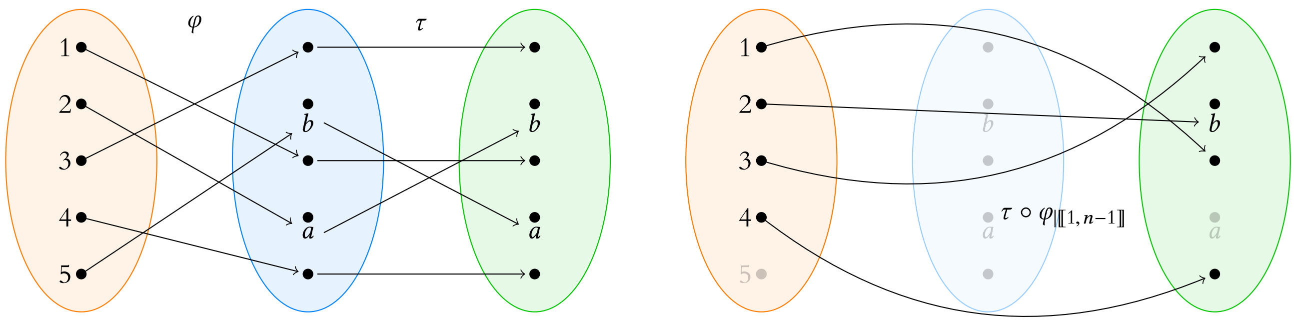
Lemme 24.2. Si E est un ensemble non vide de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$, alors pour $a \in E$, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n - 1$.

Démonstration. Si $E = \{a\}$, alors $E \setminus \{a\} = \emptyset$ est de cardinal $0 = |E| - 1$.
Si $E \neq \{a\}$, soit $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ une bijection.
► **Si $\varphi(n) = a$**, alors $\varphi_{|[\![1, n-1]\!]}$ est une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.



► **Si $\varphi(n) = b \neq a$.** Considérons alors $\tau \in \mathfrak{S}_E$ la permutation[2] de E qui échange a et b et laisse invariants tous les autres éléments de E.
C'est bien une bijection puisqu'il s'agit d'une involution : son carré est égal à l'identité.
Alors $\tau \circ \varphi_{|[\![1, n-1]\!]}$ est une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$. □

[2] Rappelons que ceci signifie juste bijection de E dans E.



Proposition 24.3 : *Soit E un ensemble fini et soit F une partie de E. Alors F est fini et* $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.
De plus, on a égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Par récurrence sur $\operatorname{Card} E$.
Si E est vide, c'est évident.
Supposons la propriété vraie pour un ensemble de cardinal n et soit E de cardinal $n+1$, soit F une partie de E.
▶ Si $F = E$, alors F est fini, de même cardinal que E.
▶ Sinon, soit $a \in E \setminus F$.
Alors $F \subset E \setminus \{a\}$, et ce dernier ensemble est de cardinal n.
Donc F est fini, de cardinal inférieur à n. Et donc de cardinal inférieur à $n+1$.
De plus, on ne peut avoir $\operatorname{Card}(F) = \operatorname{Card}(E)$ dans ce dernier cas, donc il y a égalité si et seulement si $E = F$. □

Remarque. Le cas d'égalité nous dit que pour prouver une égalité entre deux ensembles finis A et B de même cardinal, il suffit de prouver l'une des deux inclusions $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Analogie
Cela ressemble au fait que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux si et seulement si l'un inclus dans l'autre, et qu'ils ont même dimension.

Lemme 24.4. Soit f une application surjective de E dans F, avec E fini. Alors il existe une injection de F dans E.

Démonstration. Notons $\varphi : [\![1, n]\!] \to E$ une bijection.
Soit $y \in F$. Alors y possède des antécédents par f. Posons $n_y = \min\{\varphi^{-1}(x), x \in f^{-1}(\{y\})\}$ et $g(y) = \varphi(n_y)$.
Autrement dit, une fois qu'on voit les éléments de E comme étant numérotés par les entiers de 1 à n, on note $g(y)$ l'élément de numéro minimal parmi les antécédents de y par f.
Alors $g(y)$ étant un antécédent de y par f, on a $f(g(y)) = y$. Et donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Puisque id_F est injective, il en est de même de g. □

Relecture
Maintenant que vous avez l'explication, relisez la formule définissant g pour vous convaincre qu'il s'agit bien de ce qu'on annonce.

Remarque. Le résultat reste valable même si E n'est pas fini, mais nécessite alors l'axiome du choix[3]. L'idée est que pour choisir un antécédent de y parmi tous ces antécédents, il faut l'axiome du choix.
Sauf si on possède un moyen standard de choisir, par exemple en prenant «le plus petit» d'entre eux, en un sens à préciser.
Mais par exemple, le raisonnement ci-dessus se transposerait au cas où il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to E$.

[3] Et comme d'habitude, je ne souhaite pas vous parler de l'axiome du choix.

Proposition 24.5 : *Soient E et F deux ensembles. Alors*
1. *S'il existe une injection $E \to F$ avec F fini, alors E est fini et* $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
2. *S'il existe une surjection $E \to F$ avec E fini, alors F est fini et* $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$.

Démonstration. 1. Soit $f : E \to F$ injective. Alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
Mais F étant fini, $f(E) \subset F$ est fini, avec $\operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$.
Et puisque E est en bijection avec $f(E)$, E est également fini avec $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$.

2. Par le lemme précédent, il existe une injection de F dans E, avec E fini, donc par le point 1) F est fini et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$. □

Corollaire 24.6 (Principe des tiroirs de Dirichlet) – *Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$, alors une application $f : E \to F$ n'est jamais injective. Autrement dit, il existe deux éléments distincts de E qui ont même image par f.*
Un énoncé plus parlant[4] est : «si on range n paires de chaussettes dans m tiroirs, avec $m < n$, alors l'un des tiroirs contient au moins deux paires de chaussettes.»

[4] Et bien moins rigoureux.

Démonstration. C'est la contraposée du premier point de la proposition précédente. □

Le résultat qui suit est assez intuitif si on voit une application entre ensembles finis comme un ensemble de flèches reliant les éléments des deux ensembles.
Si les deux ensembles ont le même cardinal, et que vers tout élément de F point une flèche (*i.e.* lorsqu'on a une surjection), alors il n'y en a qu'une seule (donc on a une injection).

Proposition 24.7 : *Soient E et F deux ensembles finis **de même cardinal**, et soit $f : E \to F$. Alors il y a équivalence entre :*
1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective.*

Analogie — Vous aurez noté l'analogie avec les applications linéaires entre espaces de même dimension.

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de prouver 1) ⇔ 2).

Supposons donc f injective. Alors $f(E)$ est une partie de F, qui est en bijection avec E, donc de même cardinal que E.
Et en particulier de même cardinal que F. Donc $f(E) = F$, de sorte que f est surjective.

Inversement, si f est surjective, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x \neq y$ deux éléments distincts de E tels que $f(x) = f(y)$.
Alors f réalise une surjection de $E \setminus \{x\}$ sur F.
Donc $\operatorname{Card}(E \setminus \{x\}) \geqslant \operatorname{Card} F$.
Soit encore $\operatorname{Card} E - 1 \geqslant \operatorname{Card} F$, ce qui contredit notre hypothèse.
Donc f est injective. □

24.1.1 Cardinal et opérations ensemblistes

Proposition 24.8 : *Soit E un ensemble et soient A et B deux parties finies de E. Alors*
1. *si A et B sont disjointes,* $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
2. $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B)$.
   En particulier, si E est fini, $\operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A$.
3. $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

En particulier — Ceci prouve que $A \cup B$ est aussi une partie finie.

Vous rencontrerez parfois la notation $A \sqcup B$ pour désigner l'union de deux ensembles A et B lorsque ceux-ci sont disjoints (on parle d'union disjointe).
Dans ce cas le premier point s'écrit $\operatorname{Card}(A \sqcup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Analogie — Cette notation est à mettre en parallèle avec la somme directe de deux sev : $F \oplus G$ désigne $F + G$, lorsqu'on les sait en somme directe.
De la même manière, $A \sqcup B$ désigne $A \cup B$, quand ils sont disjoints.

Démonstration. 1. Supposons donc A et B disjoints, de cardinaux respectifs n et p.
Soient alors $\varphi : [\![1, n]\!] \to A$ et $\psi : [\![1, p]\!] \to B$ deux bijections.
Soit alors θ la fonction définie sur $[\![1, n+p]\!]$ par

$$\forall k \in [\![1, n+p]\!],\ \theta(k) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ \psi(k-n) & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant n+p \end{cases}$$

Alors θ est à valeurs dans $A \cup B$ et est surjective, puisque si $x \in A$, $x = \theta(\varphi^{-1}(x))$ et si $x \in B$, $x = \theta(n + \psi^{-1}(x))$.
De plus, θ est injective car si $(k, \ell) \in [\![1, n+p]\!]^2$ sont tels que $\theta(k) = \theta(\ell)$, alors

- soit k et ℓ sont tous deux inférieurs ou égaux à n, auquel cas $\theta(j) = \theta(\ell) \Leftrightarrow \varphi(k) = \varphi(\ell)$. Et puisque φ est injective, on a donc $k = \ell$.
- de même, si k et ℓ sont supérieurs strictement à n, on conclut par injectivité de ψ.
- enfin, on ne peut avoir l'un des deux nombres k, ℓ dans $[\![1, n]\!]$ et l'autre dans $[\![n+1, n+p]\!]$, car alors l'une des deux images par θ serait dans A et l'autre dans B. Et ces deux ensembles étant disjoints, on ne peut avoir $\theta(k) = \theta(\ell)$.

Donc θ est une bijection de $[\![1, n+p]\!]$ sur $A \cup B$, de sorte que

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = n + p = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B.$$

2. Il s'agit de noter que[5] $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, et cette union est disjointe. Donc par le point précédent,

$$\operatorname{Card} A = \operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card}(A \cap B) \Leftrightarrow \operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

3. On a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, et cette union est disjointe. Donc

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card}(B \setminus A) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

□

[5] C'est en fait très exactement la définition de $A \setminus B$.

La formule pour le cardinal d'une union est somme toute assez intuitive : lorsqu'on calcule la somme $\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$, on a évidemment compté tous les éléments de $A \cup B$. Mais certains ont été comptés deux fois : ceux de $A \cap B$, et c'est pour cette raison qu'on doit retrancher $\operatorname{Card}(A \cap B)$.

Exemple 24.9

Essayons de généraliser la formule pour le cardinal d'une union à une union de trois parties A, B et C d'un ensemble E. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{Card}((A \cup B) \cup C) = \operatorname{Card}(A \cup B) + \operatorname{Card}(C) - \operatorname{Card}((A \cup B) \cap C) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B) + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C - \operatorname{Card}(A \cap B) - \operatorname{Card}(A \cap C) - \operatorname{Card}(B \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Là encore il est intéressant d'essayer de comprendre l'origine de chacun de ces termes[6].
Il existe une formule plus générale pour le cardinal d'une intersection de n parties de E : c'est la formule du crible[7], hors programme et que nous rencontrerons en TD.

[6] Le seul qui nécessite une vraie réflexion est le dernier.

[7] Parfois appelée *formule du crible de Poincaré* bien qu'elle était déjà connue de DE MOIVRE, né près de deux siècles avant POINCARÉ.

Corollaire 24.10 – *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes d'un ensemble E, alors* $\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(A_i)$.

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Lemme 24.11. Soient E et F deux ensembles, avec F fini, et soit $f : E \to F$.
Si pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini alors E est fini et

$$\operatorname{Card}(E) = \sum_{y \in F} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\}).$$

En particulier, si tous les éléments de F ont le même nombre p d'antécédents par f, alors $\operatorname{Card}(E) = p \operatorname{Card}(F)$.

Démonstration. On a $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$ et les $f^{-1}(\{y\})$ sont deux à deux disjoints[8].
Donc $\operatorname{Card} E = \sum_{y \in F} \operatorname{Card} f^{-1}(\{y\})$. □

Ce lemme[9] est parfois appelé *lemme des bergers*, qui dit grosso modo que pour connaître le nombre de moutons sous sa garde, un berger n'a qu'à compter le nombre de pattes, puis le diviser par 4.
C'est le cas où f est l'application qui à une patte associe son mouton, et pour laquelle on a donc $p = 4$.

D'apparence anodine, c'est en fait un résultat fondamental que nous utiliserons tout le temps[10].
Lorsqu'une expérience se passe en plusieurs étapes, avec par exemple n choix possibles à l'étape 1, et **pour chaque choix de l'étape 1**, p choix possibles à l'étape 2, alors le nombre total de choix est np.
En effet, cela revient à partitionner l'ensemble des possibles en n sous-ensembles (correspondant aux n choix de la première étape), de cardinal p (les choix de la seconde étape).

Exemples 24.12

▸ Un étudiant à l'université doit choisir une majeure et une mineure parmi 10 matières enseignées, ainsi qu'une langue parmi 4.
Il a donc 10 choix pour sa majeure. Une fois celle-ci choisie, il lui reste 9 choix pour la mineure. Et 4 pour la langue.
Soit un total de $10 \times 9 \times 4 = 360$ choix possibles.
▸ Le nombre de mots de n lettres ne comportant pas deux fois de suite la même lettre est $26 \times 25^{n-1}$.
En effet, il y a 26 choix pour la première lettre, mais à chacune des étapes suivantes, pour obtenir une lettre différente de la précédente, il ne reste que 25 choix.

Proposition 24.13 (Cardinal d'un produit) : *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et*

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F).$$

Démonstration. Considérons l'application $\pi : \left| \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array} \right.$.
Alors pour tout $y \in F$, $\pi^{-1}(\{y\}) = \{(x, y),\ x \in E\}$, qui est en bijection[11] avec E, donc de cardinal $\operatorname{Card}(E)$.
Par le lemme des bergers, $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card}(E) \times \operatorname{Card}(F)$. □

Cette proposition se généralise facilement[12] à un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis.

Corollaire 24.14 – *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini et*

$$\operatorname{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(E_i).$$

Exemple 24.15

Sur un alphabet de 26 lettres, on peut construire 26^5 mots de 5 lettres.

[8] Car un élément possède une seul image.

[9] Ou des corollaires de ce lemme, d'énoncé plus simple. Par exemple le fait que si E est partitionné en n ensembles de cardinal p, alors $\operatorname{Card} E = np$.

[10] Sans forcément avoir besoin de le reconnaître et encore moins de le citer.

[11] Via $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \pi^{-1}(\{y\}) \\ x & \longmapsto & (x, y) \end{array} \right.$.

[12] Par récurrence.

Proposition 24.16 : *Soient E et F deux ensembles finis. Alors $F^E = \mathcal{F}(E,F)$ est fini et* $\operatorname{Card}(F^E) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$.

Notation
Voici qui justifie la notation F^E.

Démonstration. Notons $E = \{y_1, \dots, y_n\}$, avec $n = \operatorname{Card} E$.
Alors $\psi : \left| \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(y_1), \dots, f(y_n)) \end{array} \right.$ est une bijection entre F^E et F^n.
Donc ces deux ensembles ont même cardinal. □

Le résultat suivant a déjà été mentionné :

Corollaire 24.17 (Nombre de parties d'un ensemble) – *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.*

Démonstration. Nous avons déjà prouvé que $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est une bijection[13] de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$.
Or ce dernier ensemble est de cardinal 2^n. □

[13] Ce qui signifie qu'une partie de E est entièrement caractérisée par sa fonction indicatrice.

Remarque. Ce résultat est en fait assez intuitif : choisir une partie de E, c'est pour chacun des n éléments de E choisir si on le met ou non dans notre partie.
Donc il y a deux choix pour le premier élément (le prendre ou ne pas le prendre), deux pour le second, etc, deux pour le dernier.
Soit un total de 2^n choix, et donc 2^n parties de E.

24.2 ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE FINI

Définition 24.18 – Soit E un ensemble, et $p \in \mathbf{N}$. On appelle ***p*-arrangement** d'éléments de E tout p-uplet[14] d'éléments **distincts** de E.

[14] En combinatoire, on dit plus souvent p-liste.

Remarques. ▸ Si $p > \operatorname{Card} E$, il est évident qu'il n'existe pas de p-arrangement d'éléments de E.
▸ Formellement, un p-arrangement de E est un élément de

$$\{(x_1, \dots, x_p) \in E^p \mid \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}.$$

Proposition 24.19 : *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors pour $p \in [\![0,n]\!]$, il existe $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements distincts de d'éléments de E.*

Démonstration. Pour choisir un arrangement, il faut choisir le premier élément (ce qui nous donne n choix).
Puis pour chaque choix du premier élément, il y a $n-1$ choix possibles d'un second élément différent du premier.
Puis pour chaque choix des deux premiers éléments, il y a $n-2$ choix possibles d'un troisième distinct des deux premiers, etc.
Soit au total $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Remarque
C'est le lemme des bergers qui justifie qu'on considère des produits.

Vous préférez une preuve plus rigoureuse ? D'accord, mais c'est la dernière fois !
Notons $\mathcal{A}_E^p$ l'ensemble des p-arrangements de E, et A_n^p le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n. On admettra que ce nombre ne dépend pas de l'ensemble E de cardinal n choisi, puisque si E et F sont deux ensembles de même cardinal n, il est facile de construire une bijection entre $\mathcal{A}_E^p$ et $\mathcal{A}_F^p$ à l'aide d'une bijection $E \to F$.
Prouvons donc par récurrence sur p en prouvant que pour tout $n \geqslant p$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Pour $p = 1$, c'est évident puisque $\mathscr{A}_E^1 = E$.

Supposons donc que pour $p \leqslant n$, $\mathscr{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Soit alors $n \geqslant p+1$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n^{p+1} & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_1 \end{array} \right. .$$

Alors pour $y \in E$, $\pi^{-1}(\{y\}) = \left\{(y, x_1, \dots, x_p),\ (x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{A}_{E\setminus\{y\}}^p\right\}$, qui est donc en bijection avec $\mathscr{A}_{E\setminus\{y\}}^p$, qui est de cardinal $A_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-p)!}$.

Et donc par le lemme des bergers,

$$A_n^{p+1} = \sum_{y\in E} \mathrm{Card}(\pi^{-1}(\{y\})) = \sum_{y\in E} \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = n\frac{(n-1)!}{n-(p+1)!} = \frac{n!}{n-(p+1)!}.$$

□

Exemple 24.20

Trente biathlètes prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
Un podium est une liste ordonnée de trois athlètes. Il y en a donc autant que de 3-arrangements de l'ensemble des athlètes, soit $30 \times 29 \times 28$.

⚠ Dans un arrangement, l'ordre a une importance, puisqu'un p-uplet est ordonné : en général $(a, b) \neq (b, a)$.
Par exemple les arrangements ne sont pas pertinents pour déterminer le nombre de mains de 5 cartes contenant un brelan.
En effet, lorsqu'on dénombre de telles mains, on n'aucune raison de distinguer 5♠ 4♦ A♣ A♠ A♥ de 5♠ A♥ A♣ A♠ 4♦
En probabilités, nous les utiliserons notamment pour dénombrer des situations de tirages successifs et **sans remise.**

Proposition 24.21 : *Soit E un ensemble à p éléments et F un ensemble à n éléments. Alors l'ensemble des applications injectives de E dans F a pour cardinal* $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$

Démonstration. Numérotons[15] les éléments de E : $E = \{x_1, \dots, x_p\}$. Choisir une fonction de E dans F, c'est choisir le p-uplet $(f(x_1), \dots, f(x_p)) \in F^p$.
Ce p-uplet correspond à une injection si et seulement si il ne contient pas deux fois le même élément, c'est-à-dire si et seulement si c'est un p-arrangement de F.
Et donc il y a autant d'injections de E dans F que de p-arrangements de F.

Soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, et 0 sinon.

Pour le dire autrement, pour choisir une injection, il faut choisir l'image de x_1, et il y a n choix possibles.
Pour chaque choix de $f(x_1)$, il y a $n-1$ choix possibles pour l'image de x_2, qui doit être différente de $f(x_1)$.
Puis une fois l'image des deux premiers choisie, il y a $n-2$ choix possibles pour l'image de x_3, etc. □

[15] Ce qui revient à utiliser une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans E.

Rappelons qu'une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans E.
Mais par ce qui a été dit précédemment, si E est fini de cardinal n, alors une application $E \to E$ est une permutation si et seulement si elle est injective. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 24.22 : *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\operatorname{Card} \mathfrak{S}_E = n!$*
Autrement dit, il existe $n!$ permutations de E.

Exemple 24.23

Soit $n \geqslant 4$. Combien existe-t-il de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant 1, 2 et 3 comme points fixes ? De permutations laissant stable $\{1, 2, 3\}$?

Choisir une permutation ayant 1, 2 et 3 comme points fixes revient à choisir une permutation de $[\![4, n]\!]$. Or il y a $(n-3)!$ telles permutations.
Pour choisir une permutation σ laissant stable $\{1, 2, 3\}$, il faut comme précédemment choisir une permutation de $[\![4, n]\!]$, mais il faut également choisir la manière dont σ agit sur $\{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire choisir une permutation de $[\![1, 3]\!]$. Et il y a $3! = 6$ telles permutations.
Soit un total de $6 \times (n-3)!$ permutations stabilisant $\{1, 2, 3\}$.

Remarque
Les valeurs exactes des images de 1, 2 et 3 n'ont pas d'importance : le même résultat vaudrait pour le nombre de permutation qui échangent 1 et 2 et fixent 3.

24.3 Combinaisons et parties d'un ensemble

Définition 24.24 – Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbf{N}$. On appelle **p-combinaison** de E toute partie de E de cardinal p.

La différence entre un arrangement et une combinaison est que l'arrangement est un p-uplet, donc ordonné, quand la combinaison est un ensemble, donc non ordonné.

Exemple
$(1, 2) \neq (2, 1)$ alors que
$$\{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Théorème 24.25 : *Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble fini E de cardinal n est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.*
Autrement dit, $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de E de cardinal p.

Démonstration. Notons tout de suite que pour $p > n$, il n'y a rien à dire : il n'y a pas de parties de E à p éléments, et ça tombe bien puisque $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.
Nous supposons donc[16] que $p \leqslant n$.
Commençons par noter qu'il y a exactement $p!$ manières d'ordonner totalement un ensemble A de cardinal p.
En effet, cela revient à choisir une bijection entre $[\![1, p]\!]$ et A.
Pour le dire autrement, l'application qui à un p-arrangement $(x_1, \dots, x_p)$ associe la combinaison correspondante $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une application de l'ensemble des p-arrangements de E à valeurs dans l'ensemble des p-combinaisons de E, telle que toute p-combinaison possède $p!$ antécédents[17].
Par exemple, pour $p = 3$, les antécédents de $\{a, b, c\}$ sont $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, b, a)$ et (c, a, b), qui sont bien au nombre de $6 = 3!$.
Et donc par le lemme des bergers, le nombre de p-arrangements de E est égal à $p!$ fois le nombre de p-combinaisons de E.
Ainsi, ce nombre de combinaisons est $\dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$. □

[16] Même si ce n'est pas vraiment indispensable.

[17] Et en particulier est surjective.

Plusieurs résultats sur les coefficients binomiaux, prouvés par le calcul trouvent alors une interprétation en termes de combinaisons.

Commençons par retrouver le fait qu'il existe 2^n parties d'un ensemble E de cardinal n.
En effet, une partie peut avoir de 0 à n éléments, et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe $\binom{n}{p}$ parties de E à p éléments.

Donc le nombre total de parties de E est $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$.

Rappelons également que nous avions prouvé que $\binom{n}{p}$ est le nombre de manières d'obtenir p succès en n répétitions d'une expérience à n issues.
Et en effet, ce nombre de manières n'est rien d'autre que le nombre de façons de choisir les numéros des p succès parmi les n répétitions. Autrement dit, le nombre de façons de choisir une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$.

De plus, il est possible de retrouver des formules comme $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
En effet, choisir une partie de $[\![1,n]\!]$, c'est aussi choisir son complémentaire[18].
Or, une partie de $[\![1,n]\!]$ est de cardinal p si et seulement si son complémentaire est de cardinal $n-p$.
Et donc le nombre de manières de choisir le complémentaire d'une partie à p éléments est $\binom{n}{n-p}$, alors que le nombre de manières de choisir une partie à p éléments est $\binom{n}{p}$.

De même, il est possible de réinterpréter la formule de Pascal : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.
Le terme de gauche est le nombre de manières de choisir une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$.
Mais il y a deux types de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$:

- celles qui contiennent n, et sont donc l'union de $\{n\}$ et d'une partie à $p-1$ éléments de $[\![1,n-1]\!]$
- celles qui ne contiennent pas n, et sont donc des parties à p éléments de $[\![1,n-1]\!]$.

Les premières sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$ (le nombre de façons de choisir une partie à $p-1$ éléments de $[\![1,n-1]\!]$), et les secondes sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$.
Donc on a bien $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

[18] Pour le dire autrement :
$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}\right.$$
est une bijection.

Exemples 24.26

Un jeu de poker est constitué de 32 cartes (8 hauteurs par couleur), et une main est composée de 5 cartes.
► Il y a en tout $\binom{32}{5} = \dfrac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{120} = 201\,316$ mains possibles.
► Il y a 8 carrés possibles, qu'il faut compléter à l'aide d'une des $32-4=28$ autres cartes pour faire une main. Donc 8×28 mains possibles contenant un carré.
► Un full est une main composée d'un brelan et d'une paire.
Il y a 8 hauteurs possibles pour le brelan, et pour chaque hauteur, il y a $\binom{4}{3}$ brelans possibles. Enfin, une fois le brelan choisi, il reste 7 hauteurs possibles pour la paire, et au sein de chaque hauteur, $\binom{4}{2}$ paires possibles.
Soit un total de $8\times\binom{4}{3}\times 7\times\binom{4}{2} = 8\times 6\times 7\times 4 = 1344$ fulls possibles.
► Il y a $8\times\binom{4}{2}$ paires possibles.
On dit qu'une main est une paire si elle contient une paire et rien de mieux[19].
Une fois la paire choisie, il y a donc 28 choix possibles pour la troisième carte. Puis la quatrième ne doit être ni de la même hauteur que la troisième, ni de la même hauteur que celles de la paire. Ce qui laisse $32-4-4=24$ choix possible. Et enfin la dernière doit être d'une hauteur différente de toutes les autres, ce qui laisse 20 choix possibles.
Toutefois nous avons compté $3! = 6$ fois chacune des mains possibles, puisque l'ordre

[19] C'est-à-dire ni brelan, ni carré, ni full, ni même une autre paire (auquel cas on parlerait de double paire).

dans lequel on reçoit les cartes hors de la paire n'a pas d'importance.
Donc il y a en tout $8 \times \binom{4}{2} \times \dfrac{28 \times 24 \times 20}{3!} = 107\,520$ mains ne contenant qu'une paire[20].
► Combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres (en base 10) formés à l'aide de 5 chiffres différents ?
Autrement dit, combien y a-t-il de nombres de 6 chiffres dont un seul chiffre apparaît en double ?
Pour choisir un tel nombre, on commence par choisir le chiffre qui sera doublé, (ce qui nous fait 10 choix possibles), puis les positions auxquelles se trouvera ce chiffre (soit $\binom{6}{2}$ possibilités).
Il faut ensuite choisir les quatre autres chiffres, ce qui revient à choisir un 4-arrangement de l'ensemble des 9 chiffres restants.
Soit un total de $10 \times \binom{6}{2} \times \dfrac{9!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 15 = 453\,600$ possibilités.
Notons qu'on peut encore discuter pour savoir si les nombres commençant par 0 sont vraiment des nombres de 6 chiffres.
J'aurais tendance à dire que non ! Les 10 chiffres possibles jouant tous des rôles symétriques, il y a autant de nombres commençant par 0 que de nombres commençant par 1, etc.
Donc $\dfrac{9}{10}$ des nombres précédemment trouvés sont bien des nombres de 6 chiffres : il y a donc en tout $9^2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 15 = 408\,240$ nombres satisfaisant les conditions requises.

[20] Et donc on a plus d'une chance sur deux d'avoir une telle main.

Alternative

Il y a beaucoup de façons d'arriver à ce résultat.
Par exemple, on peut commencer par choisir 5 nombres ($\binom{10}{5}$ choix), puis de choisir lequel on doublait (5 choix), multiplier par le nombre de permutations des 6 chiffres (6! choix), puis diviser par 2, chaque nombre ayant été compté exactement 2 fois (en raison de la présence du chiffre doublé).
Soit

$$\binom{10}{5} \times 5 \times \frac{6!}{2} = 453\,600.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 24

▶ Cardinal, injections, surjections

EXERCICE 24.1 Soient E et F deux ensembles non vides. Prouver que s'il existe une injection $E \to F$, alors il existe une surjection $F \to E$. PD

EXERCICE 24.2 Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre. F

EXERCICE 24.3 Soient $x_1, \dots, x_n$ des entiers. Montrer qu'il existe deux entiers $p \leqslant q$ de $[\![1, n]\!]$ tels que $x_p + x_{p+1} + \dots + x_q$ soit un multiple de n. AD

EXERCICE 24.4 Formule du crible D

Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\left(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right).$$

($\star$) **Application** : on note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible astucieusement, prouver que $\mathrm{Card}\, D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

EXERCICE 24.5 Dénombrement par construction d'une bijection D

Soit E un ensemble de cardinal n. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{array} \right.$ est bijective, et conclure.

▶ Dénombrement

EXERCICE 24.6 Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot INFO ? De 8 lettres ? De 9 lettres ? PD

EXERCICE 24.7 Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ? PD

EXERCICE 24.8 Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à n éléments ? PD

EXERCICE 24.9 Déterminer le nombre d'anagrammes (=mot obtenu par permutation des lettres) des mots suivants : COVID, CONFINE, CORONAVIRUS, CONFINEMENT. PD

EXERCICE 24.10 Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent : PD

1) un seul élément de $[\![1, p]\!]$?
2) au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

EXERCICE 24.11 On considère les entiers de 4 chiffres (en base 10), sous la forme *abcd*. On dit qu'un entier *abcd* a ses chiffres croissants si $a < b < c < d$. Par exemple, 1259 a ses chiffres croissants, pas 1065. D
Quel est le nombre d'entiers de 4 chiffres dont les chiffres vont en croissant ?

EXERCICE 24.12 Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$. AD

EXERCICE 24.13 Combien y a-t-il de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 2]\!]$? De $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, 3]\!]$? De $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$? AD

EXERCICE 24.14 Combien y a-t-il de manières de partitionner l'ensemble des 48 élèves de la MP2I en 16 trinômes de colle ? AD

EXERCICE 24.15 D

1) Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
2) a) Soit $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ croissante. Montrer que la fonction $g : k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$.
   b) Soit $g : [\![1, p]\!] \to [\![n + p - 1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
   c) En déduire le nombre de fonctions croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

EXERCICE 24.16 Formule de Vandermonde AD

Soient $(m, r, n) \in \mathbf{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante (déjà prouvée par d'autres moyens dans le TD17) : $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}$.

EXERCICE 24.17 Le poker PD

Rappelons qu'un jeu de poker contient 32 cartes, c'est-à-dire 8 (du 7 à l'as) de chaque couleur. Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1) une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?
2) une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?
3) exactement trois trèfles ?
4) exactement un as et deux cœurs ?

EXERCICE 24.18 (Banque CCP 113) AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

EXERCICE 24.19 De combien de manières peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de manière à ce qu'aucune ne puisse en prendre une autre ? PD

On rappelle qu'aux échecs une tour ne peut se déplacer que le long d'une ligne ou d'une colonne.

EXERCICE 24.20 Soient $n \geqslant p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

EXERCICE 24.21 Dans un polygone convexe on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ? PD

EXERCICE 24.22 AD

1) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.
2) En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, le cardinal de l'ensemble $\{(k, \ell) \in \mathbf{N}^2 \mid k + 2\ell = n\}$.

EXERCICE 24.23 (Oral X) TD

Montrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

EXERCICE 24.24 (Oral ENS) TD

Soit $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q (on pourra par exemple penser à $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, avec p premier) et soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Déterminer le cardinal de $GL_n(\mathbf{K})$.

EXERCICE 24.25 (ENS PC 2017) D

Une partie A de $\mathbf{N}$ est dite *fade* si il n'existe pas de triplet $(x, y, z) \in A^3$ tel que $x + y = z$.
Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $\{1, \dots, n\}$.

Correction des exercices du chapitre 24

Solution de l'exercice 24.1

Notons $f : E \to F$ une injection.
Si f est surjective, alors elle est bijective, et $f^{-1} : F \to E$ est surjective[1].
Sinon, fixons $a \in E$, et définissons une application $g : F \to E$ de la manière suivante : pour $y \in F$, on pose

- $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f si $y \in \operatorname{Im} f$
- $g(y) = a$ si $y \notin \operatorname{Im} f$.

Alors il est aisé de constater que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et donc en particulier que g est surjective.

[1] Car bijective.

Remarque *: notons que la réciproque avait été prouvée en cours pour les ensembles finis, mais nécessitait, dans le cas général l'axiome du choix.*
Ici aucune hypothèse de finitude de nos ensembles n'est nécessaire.

Solution de l'exercice 24.2

Il s'agit de noter que $[0,1[$ se partitionne en $\left[0, \frac{1}{n}\right[\cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[$.
Ce qui nous fait n ensembles. Donc par le principe de Dirichlet, des $n+1$ nombres $x_0, x_1, \dots, x_n$, il s'en trouve au moins deux dans le même intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, qui sont donc nécessairement à distance inférieure stricte à $\frac{1}{n}$.

Remarque

Notons que si on remplace $[0,1[$ par $[0,1]$, on est obligés de supprimer «strictement» dans la conclusion. Voyez-vous pourquoi ?

Solution de l'exercice 24.3

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons r_k le reste de la division euclidienne de $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ par n. Alors $r_k \in [\![0, n-1]\!]$.
► Si il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $r_k = 0$, alors S_k est divisible par n (donc on peut prendre $p = 1$ et $q = k$).
► Sinon, tous les r_k sont dans $[\![1, n-1]\!]$. Par le principe de Dirichlet, il existe donc $\ell < m$ tels que $r_k = r_m$.
Et donc $S_m - S_\ell = \sum_{i=\ell+1}^{m} x_i$ est divisible par n.

Solution de l'exercice 24.4

Pour $n = 2$, c'est une formule du cours[2].
Supposons donc que la formule soit vraie pour n parties, et soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties finies de E. Alors

[2] Et nous l'avons même prouvé pour $n = 3$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \operatorname{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) - \operatorname{Card}\left((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \operatorname{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^{\ell} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{\ell-1} \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

C'est encore l'hypothèse de récurrence.

Le terme correspondant à $\ell = 1$ était juste $\operatorname{Card}(A_{n+1})$.

Il faut alors remarquer que dans la première somme (celle sur k), se trouvent tous les termes avec des intersections de k des $A_1, \dots, A_{n+1}$, toutes distinctes de A_{n+1}.
Et dans la seconde somme se trouvent toutes les intersection de A_{n+1} avec l'intersection de k autres des A_i, donc toutes les intersections de k des A_i, contenant A_{n+1}.
Donc ces deux sommes peuvent se regrouper en une seule :

Remarque
Si elles sont toutes distinctes de A_{n+1}, il ne peut y en avoir que n au maximum.

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n+1} \mathrm{Card}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}).$$

Par le principe de récurrence, etc.

Remarque : *une autre manière de formuler le crible, peut-être un peu plus délicate au premier abord, mais pour laquelle la dernière étape de notre preuve est plus facile est la suivante :*

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que $D_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

Mais, par la formule du crible,

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Il s'agit alors de voir que la somme intérieure, à k fixé, contient $\binom{n}{k}$ termes.
Et que l'intersection de k des A_i est formée par les permutations qui fixent k points donnés de $[\![1,n]\!]$. Elle sont au même nombre que les permutations de $n-k$ nombres restants, de sorte que pour $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$, $\mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!$.
Et donc

$$\mathrm{Card}\,\overline{D_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.5

Soit $\psi \in \{0,1,2\}^E$. Posons alors $A = \psi^{-1}(\{2\})$ et $B = \overline{\psi^{-1}(\{0\})} = \psi^{-1}(\{1,2\})$.
On a bien $A \subset B$ puisque $2 \neq 0$.
Et il est clair que $\chi((A,B)) = \psi$, donc χ est surjective.
D'autre part, si $\chi_{A,B} = \chi_{A',B'}$, alors pour tout $x \in E$,

$$x \in A \Leftrightarrow \chi_{A,B}(x) = 2 \Leftrightarrow \chi((A',B'))(x) = 2 \Leftrightarrow x \in A'.$$

Donc $A = A'$. Puis $B = \overline{\chi_{A,B}^{-1}(\{0\})} = B'$.
Donc χ est injective, et par conséquent bijective.
Puisque $\{0,1,2\}^E$ est de cardinal 3^n, il en est donc de même de $\mathscr{C}$.

Remarque
Ce résultat est prouvé de manière plus agréable dans l'exercice 18.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.6

Choisir un tel mot nécessite de choisir :

- la position du I débutant INFO, qui peut être entre la première et la quatrième lettre. Il y a donc 4 choix possibles.
- les 3 lettres qui ne forment pas INFO. Il y a donc 26^3 choix possibles.

Soit un total de 4×26^3 mots de 7 lettres contenant INFO.

Dans le cas de mots de 8 lettres, le principe est le même, si ce n'est qu'un mot a été compté deux fois : il s'agit du mot INFOINFO.
Donc il y a en tout $5 \times 26^4 - 1$ mots de 8 lettres contenant INFO.

Détails
En effet, nous l'avons compté à la fois comme un mot commençant par INFO et comme un mot finissant par INFO.

Enfin, pour les mots de 9 lettres, la situation est pire, puisqu'il y a de nombreux mots qui ont été comptés deux fois : tous ceux de la forme INFO⋆INFO, ⋆INFOINFO ou INFOINFO⋆.
Soit un total de $6 \times 26^5 - 3 \times 26$ mots de 9 lettres contenant INFO.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.7

Il y a donc $26 + 10 = 36$ caractères autorisés, donc $36^6 + 36^7 + 36^8$ mots de passe possibles.
Auxquelles il faut retrancher les mots de passe formés uniquement de chiffres, qui sont au nombre de $10^6 + 10^7 + 10^8$.
Donc le nombre total de mots de passe acceptables est

$$36^6 + 36^7 + 36^8 - 10^6 - 10^7 - 10^8.$$

Ordre de grandeur
C'est environ 200 milliards.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.8

Choisir une relation d'ordre totale sur un ensemble E à n éléments, c'est se donner un n-arrangement de E, à savoir le seul n-uplet d'éléments de E dont les éléments sont deux à deux distincts et rangés par ordre croissant.
Mais un tel n-arrangement est en fait une permutation de E, et il y en a $n!$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.9

1. Toutes les permutations des 5 lettres de COVID sont distinctes, et elles sont au nombre de $5! = 120$, dont il y a 120 anagrammes à COVID.
2. Cette fois, le mot de départ contient deux fois la même lettre (le N).
Pour bien les différencier, notons les N_1 et N_2, de sorte que le terme de départ est CON_1FIN_2E.
Si on compte juste le nombre de permutations des lettres, nous allons compter comme deux mots différents les termes N_1FIECON_2 et N_2FIECON_1, alors qu'il s'agit du même mot.
Et en réalité, nous allons tous les compter deux fois[3], donc il y a en tout $\dfrac{7!}{2}$ anagrammes distincts.

Alternative : il y a $\dbinom{7}{2}$ manières de choisir les deux positions des deux N parmi les 7 lettres.
Une fois ces positions choisies, il faut choisir un 5-arrangement des 5 lettres restantes, pour lesquelles il y a 5! choix possibles.
Soit un total de $\dfrac{7 \times 6 \times 5!}{2} = \dfrac{7!}{2}$ anagrammes.
3. Même chose ici, sauf que deux lettres apparaissent deux fois. Donc il y a 2 permutations possibles des deux O et pour chaque permutation des deux O, il y a deux permutations possibles des deux R. Soit en tout 4 permutations possibles.
Donc il y a $\dfrac{11!}{4}$ anagrammes.

Alternative : comme ci-dessus, il y a $\dbinom{11}{2}$ choix de positions possibles pour les deux O, puis une fois ces O placés, il reste $\dbinom{9}{2}$ choix de positions possibles pour les deux R.
Et ensuite, il y a 7! choix possibles pour les lettres qui ne sont pas en double.
4. Même principe : il y a $3! = 6$ permutations possibles des trois N, et deux permutations des deux E, soit un total de $\dfrac{11!}{6 \times 2}$ anagrammes.

[3] Une fois lorsque le premier N qui apparaît est N_1 et une fois lorsque c'est N_2

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.10

1. Choisir une telle partie, c'est choisir un élément de $[\![1, p]\!]$, et lui adjoindre une partie de $[\![p+1, n]\!]$.
Mais il y a 2^{n-p} telles parties, soit un total de $p2^{n-p}$ parties possibles.
2. Plutôt que de dénombrer les parties contenant un seul élément de $[\![1, p]\!]$, celles en contenant 2, etc, intéressons nous au complémentaire : combien y a-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant aucun élément de $[\![1, p]\!]$?
Il y en a autant que de parties de $[\![p+1, n]\!]$, soit 2^{n-p}.
Et donc il y a $2^n - 2^{n-p}$ parties de $[\![1, n]\!]$ contenant au moins un élément de $[\![1, p]\!]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.11

Étant donné une partie de 4 éléments distincts de $[\![0,9]\!]$, il existe une et une seule manière de les ordonner pour en faire un nombre ayant ses chiffres croissants. Donc le nombre cherché est le nombre de parties à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$: c'est $\binom{10}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.12

Il y a 2^n choix pour A. Une fois A choisie, il faut choisir une partie B telle que $A\cup B = E$.
Soit encore telle que $\overline{A}\subset B$.
On a alors $B = (A\cap B)\cup\overline{A}$, et donc il s'agit de choisir la partie $A\cap B$.
Mais il y a $2^{\mathrm{Card}(A)}$ manières de choisir $A\cap B$, qui peut donc être n'importe quelle partie de A.
En distinguant suivant le cardinal k de A, il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$, où $\binom{n}{k}$ est le nombre de manières de choisir A, et 2^k le nombre de manières de choisir B une fois A choisi.
Soit en tout $(2+1)^n = 3^n$ choix possibles.

Autrement dit
Une telle partie B doit contenir $\overline{A}$, plus éventuellement des éléments de A.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.13

1. En tout, il y a 2^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
Parmi celle-ci, seules deux ne sont pas surjectives : les deux applications constantes.
Donc il y a 2^n-2 surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
2. Cette fois, il y a 3^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,3]\!]$.
Les trois fonctions constantes ne sont évidemment pas surjectives.
Les autres applications non surjectives sont celles dont l'image vaut $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ou $\{2,3\}$.
Mais comme à la question 1, dans chacun des trois cas, il y a 2^n-2 telles applications.
Donc le nombre de surjections cherché est $3^n-3-3(2^n-2) = 3^n-3\times 2^n+3$.
3. Notons que si φ est une surjection de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors l'un des éléments de $[\![1,n]\!]$ aura deux antécédents, quand tous les autres n'en auront qu'un seul.
Donc pour choisir une telle surjection, il faut choisir l'élément a de $[\![1,n]\!]$ qui aura deux antécédents, puis choisir ces 2 antécédents b et c.
Et enfin, choisir une bijection de $[\![1,n+1]\!]\setminus\{b,c\}$ sur $[\![1,n]\!]\setminus\{a\}$, et il y a $(n-1)!$ telles bijections.
Soit un total de $n\times\binom{n+1}{2}\times(n-1)! = \frac{n}{2}(n+1)!$ telles surjections.

Remarque
Le plus délicat dans ce genre d'exercice est souvent de s'assurer qu'on n'a pas compté deux fois le même élément.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.14

Il y a $\binom{48}{3}$ manières de choisir un premier trinôme. Une fois celui-ci choisi, il y a $\binom{45}{3}$ manières de choisir un second trinôme, disjoint du précédent, etc, et il n'y a qu'une façon de choisir le $16^{\text{ème}}$ trinôme.
Mais l'ordre de nos groupes n'a pas d'importance. Autrement dit, on a compté $16!$ fois chaque possibilité.
Donc il y a en tout :

$$\binom{48}{3}\binom{45}{3}\cdots\binom{6}{3}\binom{3}{3}\frac{1}{16!} = \frac{48!}{6^{16}16!}$$

partitions possibles. C'est de l'ordre de 2×10^{35}.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.15

Rappelons à toutes fins utiles qu'une application strictement croissante est toujours injective.

1. Pour choisir une fonction strictement croissante, il suffit de choisir les p images des éléments de $[\![1,p]\!]$, nécessairement toutes différentes. Une fois choisies, il n'y a pas de choix sur l'ordre : la plus petite est l'image de 1, la suivante l'image de 2, etc, la plus grand est l'image de p.
Donc le nombre d'applications strictement croissantes est $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$.

2.a. Soient $k<k'$ deux éléments de $[\![1,p]\!]$. Alors

$$g(k) = f(k)+k-1 \leqslant f(k')+k-1 < f(k')+k'-1 = g(k').$$

Donc g est strictement croissante.
Elle est bien à valeurs dans $[\![1,n+p-1$ car $f(k)\leqslant n$ et $k-1\leqslant p-1$.

2.b. Si $k < k'$, alors $f(k') - f(k) = g(k') - g(k) - (k' - k)$.
Mais pour g strictement croissante, il est facile de prouver que $g(k') - g(k) \geqslant k' - k$.
En effet, entre $g(k)$ et $g(k')$ doivent se trouver les entiers distincts $g(k+1), g(k+2), \dots, g(k'-1)$.
Et donc $f(k') - f(k) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(k) \leqslant f(k')$: f est croissante.

2.c. Les deux applications ci-dessus sont des bijection réciproques l'une de l'autre, entre l'ensemble des applications croissantes $[\![1,p]\!] \to [\![1,n+p-1]\!]$ et l'ensemble des applications strictement croissantes $[\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$.
Et donc, d'après la question 1, le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est $\binom{n+p-1}{p}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.16

Donnons nous un ensemble E à $n+m$ éléments, partitionné en deux ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs n et m.
Alors le nombre de parties de E à r éléments est $\binom{n+m}{r}$.
Mais une partie de E de cardinal r contient un certain nombre k d'éléments de B, avec $0 \leqslant k \leqslant r$.
Et donc elle contient alors $r-k$ éléments de A.
À k fixé, il y a $\binom{m}{k}$ parties de B à k éléments, et pour chaque choix d'une telle partie, il y a $\binom{n}{r-k}$ choix possibles d'une partie de A à $r-k$ éléments.
Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ est le nombre total de parties à r éléments de E, c'est-à-dire $\binom{n+m}{r}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.17

1. Par couleur, il y a 4 quintes flush possibles[4]. Soit un total de 16 quintes flush.
2. Il y a $4 \times \binom{8}{5} = 224$ mains d'une seule couleur possible. Auxquelles il faut retrancher les 16 quintes flush, pour un total de 208 couleurs possibles.
3. Il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir les trois trèfles, et pour chacune de ces manières, il y a $\binom{24}{2}$ façons de choisir les cartes restantes.
Soit un total de $\binom{8}{3}\binom{24}{2} = 15\,456$ mains contenant trois trèfles.
4. Il y a deux types de mains satisfaisant à la contrainte : celles qui contiennent l'as de cœur et celles qui contiennent un autre as.
Les premières sont donc formées de l'as de cœur, d'un autre cœur (il y en a 7) et de trois cartes qui ne sont ni des as ni des cœurs (donc parmi 21 cartes). Les secondes sont formées de deux cœurs qui ne sont pas l'as, d'un as parmi les trois as autres que le cœur et de deux cartes qui ne sont ni des cœurs ni des as.
Soit un total de $7 \times \binom{21}{3} + \binom{7}{2} \times 3\binom{21}{2} = 22\,540$ mains.

[4] Terminant soit par un valet, soit par une dame, soit par un roi, soit par un as.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.18

1. Une fois B choisie, de cardinal k, il y a 2^k manières de choisir A.
Or il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir B de cardinal k.
Et donc $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = (2+1)^n = 3^n$.
2. Une fois B choisie de cardinal k, il faut prendre pour A une partie de $\overline{B}$, qui est de cardinal $n-k$. Et il y a 2^{n-k} telles parties.
Donc $b = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = 3^n$.

Remarque *: en réalité, si on note $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des couples de parties satisfaisant la condition de* *la question 1 et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des couples satisfaisant la seconde, alors on a une bijection entre $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, qui est donnée par*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{C}_2 \\ (A, B) & \longmapsto & (A, \overline{B}) \end{array} \right.$$

et donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont nécessairement le même cardinal.

3. Une fois choisi un couple (A, B) de parties de E disjointes, il n'y a qu'une partie C de $\mathscr{P}(E)$ qui convienne : c'est $C = \overline{A \cup B}$.
Donc $c = b \times 1 = b = 3^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.19

Commençons par choisir les p lignes occupées par les tours : il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles.

Puis il y a n manières de placer la première tour sur la première[5] ligne.
La colonne sur laquelle nous avons placé cette première tour est alors interdite aux suivantes, et il y a donc $n - 1$ manières de placer la seconde tour sur la seconde ligne.
Et alors deux colonnes sont condamnées, donc il reste $n - 2$ manières de placer la troisième tour, etc.
Soit un total de $\binom{n}{p} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \binom{n}{p}\dfrac{n!}{(n-p)!}$ manières de placer les p tours.

[5] Disons celle avec le plus petit numéro.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.20

Notons qu'une preuve par récurrence est tout à fait possible en utilisant l'identité de Pascal, mais nous souhaitons l'éviter ici.

Nous savons que $\binom{n+1}{p+1}$ est le nombre de parties à $p + 1$ éléments de $[\![0, n]\!]$.
Partitionnons l'ensemble des telles parties par plus grand élément, en notant que le plus grand élément d'une partie à $p + 1$ éléments de $[\![0, n]\!]$ est nécessairement au moins égal à p.

Remarque
Et cela ne se produit que pour la partie

$$\{0, 1, \ldots, p\}.$$

Étant fixé $k \in [\![p, n]\!]$, pour former une partie de $p + 1$ éléments de $[\![0, n]\!]$ de plus grand élément k, il faut choisir k éléments parmi $[\![0, k - 1]\!]$. Et il y a $\binom{k}{p}$ manières de procéder.

Donc on a bien $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.21

Notons $n \geqslant 3$ le nombre de sommets (et donc de côtés) du polygone.
Le nombre de segments joignant deux sommets distincts du polygone est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Mais parmi ces n segments se trouvent les n côtés, donc seulement $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ sont des diagonales.

Alternative : il y a n choix pour le premier sommet d'une diagonale.
Et une fois le premier sommet choisi, l'autre sommet ne doit pas être le sommet déjà choisi, ni l'un de ses voisins, donc il y a $n - 3$ choix possibles pour le second. Soient $n(n-3)$ choix possibles.
Mais alors on a compté exactement deux fois chaque diagonale, donc il y a en tout $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

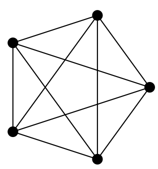


FIGURE 24.1– Un pentagone possède autant de sommets que de diagonales.

Et par conséquent, on a autant de diagonales que de sommets si et seulement si

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow \frac{n-3}{2} = 1 \Leftrightarrow n = 5.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.22

1. On a $\dfrac{1}{(1-X)(1-X^2)} = \dfrac{1}{(1-X)^2(1+X)}$, donc la décomposition en éléments simples cherchée est de la forme

$$\frac{1}{(1-X)^2(1+X)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{1+X}.$$

On a alors facilement $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$. Et alors en multipliant par $(1-X)$ et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $0 = -a + c$, donc $a = \frac{1}{4}$.

Donc $\dfrac{1}{(1-X)^2(1+X)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-X} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-X)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+X}$.

Et donc en particulier,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-k+1)}{k!}(-x)^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k+1\right)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k+2k+3}{4}x^k + o(x^n).
\end{aligned}$$

Détails
On a
$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}.$$

2. Par ailleurs, on a $\dfrac{1}{(1-x^2)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} x^{2k} + o(x^n)$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} x^{2\ell}\right) + o(x^n)\\
&\underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k+2\ell=i} x^i\right) + o(x^n).
\end{aligned}$$

Détails
Il s'agit juste de la formule pour les coefficients d'un produit de polynômes.

Et donc en notant $a_i = \operatorname{Card}\{(k,\ell) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid k + 2\ell = i\}$, on a

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n)$$

si bien que par unicité du développement limité, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $a_i = \dfrac{(-1)^i + 2i + 3}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.23

Supposons E infini et soit $f : E \to E$.
Soit alors $x \in E$, et considérons les images de x par les puissances de f : $x, f(x), \dots, f^n(x), \dots$.
S'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$, alors $A = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ convient[6].
Et sinon, $A = \{f^n(x),\ n \in \mathbf{N}^*\}$ convient. En effet, ce n'est pas E tout entier puisque $x \notin A$.

Dans l'autre sens, prouvons plutôt la contraposée, en prouvant que pour tout ensemble fini E, il existe une application $f : E \to E$ qui ne satisfait pas la propriété requise.
Si E est vide, il n'y a rien à dire[7].
Si E est de cardinal 1, il n'y a pas de parties de E distinctes de $\emptyset$ et de E.
Si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est de cardinal n. Soit alors $f : E \to E$ définie par

$$f(x_1) = x_2,\ f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{n-1}) = x_n,\ f(x_n) = x_1.$$

Si A est une partie non vide de E, distinctes de E, notons $k = \min\{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i \notin A\}$.
- Si $i \neq 1$, alors $x_{i-1} \in A$, et $x_i = f(x_{i-1}) \in f(A)$, donc $f(A) \not\subset A$.
- Si $i = 1$, alors soit $x_n \in A$, auquel cas $x_1 \in f(A)$.

Sinon, notons $p = \max\{k \in [\![1,n]\!] \mid x_k \in A\}$. Alors $p \leqslant n-1$, et donc $x_{p+1} \notin A$ et $x_{p+1} = f(x_p) \in f(A)$.
Donc dans tous les cas, $f(A) \not\subset A$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.24

Un point important ici : si F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension d, alors F est isomorphe à $\mathbf{K}^d$, et donc en bijection avec $\mathbf{K}^d$, qui est de cardinal q^d.
Se donner une matrice, c'est se donner la famille de ses vecteurs colonnes[8], la matrice étant inversible si et seulement si cette famille est libre.

[6] Cette partie étant finie, elle ne peut valoir E tout entier.

[7] Car il n'y a pas d'application de E dans E.

[8] Qui vivent donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Notons bien qu'on voit la famille comme étant ordonnée ici : si on échange les colonnes, on ne parle plus de la même matrice.
Pour choisir une matrice de $GL_n(\mathbf{K})$, on peut choisir librement la première colonne parmi tous les vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, et il y a $q^n - 1$ tels vecteurs.
Une fois la première colonne C_1 choisie, la seconde ne doit pas être colinéaire[9] à C_1, et donc ne pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1)$.
Il y a donc $q^n - q$ choix possibles.
Une fois les deux premières colonnes C_1 et C_2 choisies, la troisième ne doit pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, qui est de dimension 2.
Donc il y a $q^n - q^2$ choix possibles.
Et ainsi de suite : une fois les $n-1$ premières colonnes $C_1, \dots, C_{n-1}$ choisies, la dernière ne doit pas être dans $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1})$, donc il reste $q^n - q^{n-1}$ choix possibles.

Donc $\mathrm{Card}(GL_n(\mathbf{K})) = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$.

[9] Sinon la matrice obtenue ne sera pas inversible, puisque ses colonnes ne formeront pas une famille libre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 24.25

Soit A une partie fade de $\{1, \dots, n\}$, soit d son cardinal et soit k le plus grand élément[10] de A.
Alors l'application $f : A \setminus \{k\} \to \mathbf{N}$ définie par $f(m) = k - m$ est à valeurs dans $\{1, \dots, n\} \setminus A$.
En effet, il est évident[11] qu'elle est à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, et si on avait $f(m) \in A$, alors $(k, m, f(m))$ serait un triplet de A^3 tel que $f(m) + m = k$, ce qui n'est pas possible car A est fade.
De plus, f est strictement décroissante, donc injective.
Et ainsi, le cardinal de $A \setminus \{k\}$ est inférieur ou égal à celui de $\{1, \dots, n\} \setminus A$.
Soit encore $d - 1 \leqslant n - d \Leftrightarrow 2d \leqslant n + 1 \Leftrightarrow d \leqslant \dfrac{n+1}{2}$.
Et puisque d est un entier, $d \leqslant \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

D'autre part, l'ensemble $\mathcal{I}$ des entiers impairs de $\{1, \dots, n\}$ est une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ puisque la somme de deux entiers impairs est paire.
Or, son cardinal est précisément $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.
Et donc une partie fade de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal maximal est de cardinal égal à $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

[10] Qui existe car A est une partie finie de $\mathbf{N}$.

[11] Notons qu'il est important ici d'avoir exclu k de son ensemble de définition car $k - k = 0 \notin \{1, \dots, n\}$.

Détails

Si $n = 2p$ est pair, alors $\mathcal{I} = \{1, 3, \dots, 2p-1\}$ est de cardinal $p = \dfrac{n}{2} = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ et si $n = 2p+1$ est impair, alors $\mathcal{I} = \{1, 3, \dots, 2p+1\}$ est de cardinal $p + 1 = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

25 Représentation matricielle des applications linéaires

Une fois n'est pas coutume, sans plus de précisions, $\mathbf{K}$ désignera dans tout le chapitre un corps (disons $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, mais ce n'est pas une obligation).

25.1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Dans cette partie, on considère deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F de **dimension finie**, et sauf mention explicite du contraire, on note $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

25.1.1 Définitions

L'idée principale de cette partie est la suivante : étant données une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathscr{C} = (x_1, \dots, x_n)$ de F, il suffit, pour déterminer $f \in \mathscr{L}(E, F)$ de se donner les p vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$.
Mais se donner un vecteur de F, c'est se donner ses n coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Autrement dit, c'est se donner n scalaires.
En résumé, une application linéaire de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée de $n \times p$ scalaires. Et si nous mettions ces scalaires dans une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$?

Rappel
Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base.

Définition 25.1 – Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, soit $\mathscr{C} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de F, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$** (plus souvent appelée matrice de f *dans* les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$) la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

Pour le dire autrement, les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}.$$

Dans le cas où $E = F$, c'est-à-dire lorsque f est un endomorphisme de E, on note $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$. Il s'agit alors d'une matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, où $n = \dim E$.

Dimensions
Le nombre de lignes est la dimension de l'espace d'arrivée de f, alors que le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ de f.

Exemples 25.2

▸ Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, y - 3z) \end{array} \right.$.
Alors notons $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$. On a alors

$$f(1, 0, 0) = (1, 0),\ f(0, 1, 0) = (2, 1),\ f(0, 0, 1) = (-1, -3)$$

et donc la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_3$ et $\mathscr{B}_2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,0) \\ (0,1) \end{array}$$

▶ Dans toute base $\mathscr{B}$ de E, la matrice de id_E est I_n, où $n = \dim E$.

▶ **(Matrice de Vandermonde**[1]**)** Soient $x_1, \dots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts, et soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$.

Notons $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Alors la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}^n$ est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^{n-1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

En revanche, si on note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \dots, x_n$, alors $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(L_i) = E_i$. Et donc la matrice de φ dans les bases $(L_1, \dots, L_n)$ et $(E_1, \dots, E_n)$ est I_n. En effet, c'est

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(L_0) & \varphi(L_1) & \dots & \varphi(L_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{array}$$

[1] Alexandre-Théophile VANDERMONDE, mathématicien français (1735–1796).

Proposition 25.3 : *Étant données une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est une bijection de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

Démonstration. Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, nous savons qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

C'est-à-dire telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.
Autrement dit, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ possède un unique antécédent. □

Ce que signifie la proposition précédente, c'est qu'**une fois des bases fixées**, une application linéaire est parfaitement définie par la donnée de sa matrice dans les bases en question.

Bien que ce soit le contexte dans lequel nous allons le plus souvent utiliser les matrices, il n'est pas indispensable d'avoir une application linéaire, et la donnée de vecteurs de E permet déjà de définir une matrice :

Définition 25.4 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E.
On appelle **matrice de la famille** $(x_1, \ldots, x_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$ la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$ est le vecteur des coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 25.5

Dans $\mathbf{R}^3$, si $u_1 = (1, -2, 1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, alors la matrice de (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array} \end{array}$$

Notons en particulier que pour une famille formée d'un seul vecteur x, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Proposition 25.6 : *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de F, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.

Démonstration. C'est immédiat : par définition de ces deux matrices, qui sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, leur $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. □

25.1.2 Application(s) canoniquement associée(s) à une matrice

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension p, de base $\mathcal{B}$, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathcal{C}$, et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$.

En particulier, si $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$ (resp. $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$), munis de leurs bases canoniques, alors l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ (resp. $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}), \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ dont la matrice dans les bases canoniques est A est appelée application canoniquement associée à A.

► <u>**Cas où** $E = \mathbf{K}^p$, $F = \mathbf{K}^n$</u> : si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, alors l'application canoniquement associée à A est

$$f_A : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j} x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{n,j} x_j \right).$$

Autrement dit, on le déduit de A en lisant A ligne par ligne.
Pour prouver que la matrice de f_A dans la base canonique est bien A, calculons l'image des vecteurs de la base canonique :

$$f(1, 0, \ldots, 0) = (a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$$
$$f(0, 1, 0, \ldots, 0) = (a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,2})$$

$$\vdots$$
$$f(0, \dots, 0, 1) = (a_{1,p}, a_{2,p}, \dots, a_{n,p})$$

Et donc on a bien, en notant $\mathscr{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$ et $\mathscr{B}_n = (u_1, \dots, u_n)$ celle de $\mathbf{K}^n$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_p, \mathscr{B}_n}(f_A) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \end{array} = A.$$

Exemple 25.7

L'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est

$$(x, y, z) \mapsto (2x + 4y - z, 2y + z, x + y + 3z).$$

Sous-entendu

Il y a un isomorphisme simple entre $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, qui est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

▶ **Cas où $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$** : le principe est quand même très semblable, puisque $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ n'est rien d'autre que $\mathbf{K}^n$, les matrices colonne remplaçant les vecteurs lignes. Je vous laisse le soin de vérifier que l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associée à A est $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$.

25.1.3 Compatibilité des opérations

Le premier intérêt d'utiliser une matrice pour représenter une application linéaire est qu'il devient alors extrêmement simple de calculer l'image d'un vecteur si l'on connaît ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Proposition 25.8 (Coordonnées de l'image d'un vecteur) :
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et soit $x \in E$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$.

Notons également $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

Alors

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \lambda_j\right) u_i.$$

Alors la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est bien le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ □

Proposition 25.9 : *Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Alors pour $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g) = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Y a-t-il vraiment besoin de prouver quelque chose ?
Si $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_i$ et $g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}x_i$, alors $(\lambda f + g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,j} + b_{i,j})x_i$.
Et donc le coefficient (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + g)$ est $\lambda a_{i,j} + b_{i,j}$.
Donc l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est linéaire, nous avons prouvé plus tôt qu'elle était bijective, donc c'est un isomorphisme. □

Remarque Je vous invite d'ailleurs à regarder de nouveau la preuve qui en avait été donnée : l'application linéaire que nous avions alors nommée $\varphi_{i,j}$ est l'unique antécédent de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ par $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Notons que puisque nous avons là un isomorphisme, nous retrouvons un résultat prouvé «à la main» dans le chapitre de dimension finie :

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = n \times p = \dim F \times \dim E.$$

La proposition qui suit légitime (enfin !) la définition du produit matriciel :

Proposition 25.10 : *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_E = (e_1,\dots,e_q)$, $\mathscr{B}_F = (x_1,\dots,x_p)$ et $\mathscr{B}_G = (u_1,\dots,u_n)$.
Alors pour $j \in [\![1,q]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f)$ est formée des coordonnées de $(g\circ f)(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$.
Or, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ n'est rien d'autre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j))$.
Et donc la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}(g(f(e_j))).$$

Détails Il faut ici se souvenir que la $j^{\text{ème}}$ colonne d'un produit AB est obtenue en multipliant A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Puisqu'il s'agit des coordonnées de $(g\circ f)(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_G$, on reconnaît bien la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f)$.

Alternative : une autre preuve plus terre à terre.
Notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, de sorte que

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ g(x_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}u_i$$

$$\forall j \in [\![1,q]\!],\ f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j}x_j.$$

Alors, pour tout $j \in [\![1,q]\!]$,

$$(g\circ f)(e_j) = g\left(\sum_{k=1}^{p} b_{k,j}x_j\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j}g(x_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}u_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)u_i.$$

Mais $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} = [AB]_{i,j}$, si bien que le coefficient (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f)$ est $[AB]_{i,j}$.
Et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f) = AB$. □

⚠ On prendra bien garde au fait qu'il faut la même base de F pour la matrice de f et pour la matrice de g.

Corollaire 25.11 – *Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.*

Exemple 25.12

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Puisque $A^2 = A$, on a donc $f^2 = f$, de sorte que f est un projecteur de $\mathbf{R}_2[X]$.
Par ailleurs, pour $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$, on a

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f(P)) = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} -a - 2b + c = 0 \\ 2a + 3b - c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow P \in \operatorname{Vect}(X^2 + X - 1).$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X^2 + X - 1)$.

Et alors, puisque $X^2 + X - 1 \in \operatorname{Ker} f$, $f(1) = f(X) + f(X^2)$, de sorte que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(X), f(X^2)) = \operatorname{Vect}(-2 + 3X + 2X^2, 1 - X).$$

Ainsi, f est la projection sur $\operatorname{Vect}(-2 + 3X + 2X^2, 1 - X)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(X^2 + X - 1)$.

Ainsi, nous avons un «dictionnaire[2]» entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Donc tout ce qui peut être fait ou dit en termes d'applications linéaires doit pouvoir se traduire matriciellement et vice-versa.
En particulier, le rang, le noyau, l'image d'une application linéaire doivent pouvoir se lire dans sa matrice dans des bases.

Plus exactement, il n'y a pas qu'un seul tel «dictionnaire», mais il y a en a un pour chaque couple de bases $(\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$.

[2] Lorsque $E = F$ (et donc $n = p$) il s'agit de ce que vous appellerez l'an prochain un isomorphisme d'algèbres : un isomorphisme d'espaces vectoriels compatible à la structure d'anneau.

25.1.4 Retour sur les matrices inversibles

Proposition 25.13 : *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. Et dans ce cas,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}.$$

Autrement dit
La matrice de l'inverse est l'inverse de la matrice.

Démonstration. Notons $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} &\Leftrightarrow \exists g \in \mathscr{L}(F, E) \text{ tel que } \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } BA = AB = I_n \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Détails
Pour le sens $\Leftarrow$, considérer g l'unique application linéaire de F dans E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) = B$.

Dans le cas où A est inversible, on a alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1} \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

et de même $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = I_n$, de sorte que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$ est bien l'inverse de $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. □

Exemple 25.14

Soit $f : \begin{array}{|rcl} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' - 3P + P'' \end{array}$

Alors la matrice de f dans la base canonique est : $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Elle est inversible car triangulaire supérieure sans zéros sur la diagonale.
Donc f est bijective et la matrice de f^{-1} dans la base canonique est $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f^{-1}(1) & f^{-1}(X) & f^{-1}(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Éclairons d'un regard nouveau un résultat sur les matrices carrées, qui a déjà été prouvé, mais avec une preuve plutôt laborieuse.

Proposition 25.15 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors il y a équivalence entre*

1. *A est inversible à gauche (il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$)*
2. *A est inversible à droite*
3. *A est inversible.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A, c'est-à-dire celle dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ est A.

Supposons que A est inversible à gauche, et soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$.
Soit alors $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associée à B.
Alors $BA = I_n \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\mathrm{id}_{\mathbf{K}^n}) \Leftrightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{K}^n}$.
Donc f est injective, et alors il est bien connu qu'en dimension finie ceci implique que f est bijective, avec $g = f^{-1}$.
Et donc $AB = I_n$.
Autrement dit, 1) $\Rightarrow$ 2) et 1 $\Rightarrow$ 3).

On prouve de même que 2) $\Rightarrow$ 1) et 2) $\Rightarrow$ 3), et il est évident que 3) implique les deux autres points. □

25.2 RANG D'UNE MATRICE

Jusqu'à présent, nous avons rencontré deux notions de rang : le rang d'une famille de vecteurs, et le rang d'une application linéaire. Ajoutons donc une troisième notion[3], celle de rang d'une matrice.

[3] Fortement reliée aux deux précédentes.

25.2.1 Définition, premières propriétés

Définition 25.16 – Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soient $C_1, \dots, C_p$ ses colonnes, qui sont donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
On appelle **rang de** A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de la famille[4] $(C_1, \dots, C_p)$.
Autrement dit, $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

[4] De $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$

Exemples 25.17

- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 3, car on vérifie que ses colonnes forment une famille libre.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \dots & n^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1. En effet, toutes ses colonnes sont colinéaires, et donc $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(C_1)$, qui est de dimension 1.
Il est assez facile de prouver qu'une matrice est de rang 1 si et seulement si toutes ses colonnes sont proportionnelles et non toutes nulles[5].

[5] La matrice nulle étant évidemment de rang 0.

Proposition 25.18 : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E.*
Alors $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}\,\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$.

Bien que nous donnions, par soucis de concision, une preuve bien plus directe, l'intuition derrière cette proposition est assez simple : toute relation de dépendance linéaire sur $(x_1, \dots, x_p)$ doit se traduire en une relation pour les colonnes de leur matrice.
Et en particulier, une sous-famille libre de $(x_1, \dots, x_p)$ doit correspondre à une sous-famille libre de $(C_1, \dots, C_p)$.
Or le rang d'une famille de vecteurs[6] est le cardinal maximal d'une sous-famille libre.

[6] De E ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ et $(C_1, \dots, C_p)$ les colonnes de M.

Alors l'application $f_{\mathcal{B}} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Or, cette application envoie $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ sur $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
Ces deux espaces sont donc de même dimension .
Et donc $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(M)$. □

Rappel
On a $C_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_i)$.

Rappel
Un isomorphisme préserve les dimensions.

Corollaire 25.19 – *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F.*
Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Par définition, $\text{rg}\, f = \dim \text{Im}\, f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$, et donc par la proposition

$$\text{rg}\, f = \text{rg}\,\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{rg}\,\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

□

L'intérêt de ce théorème n'est pas complètement évident pour l'instant, mais nous disposerons bientôt de méthode algorithmique (basées sur le pivot) pour calculer le rang d'une matrice, ce qui nous permettra donc d'en déduire le rang d'applications linéaires.

Proposition 25.20 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors* $\text{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.

Déjà vu ?
Ce résultat est évidemment à mettre en parallèle avec $\text{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration. Puisque les colonnes de A sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, qui est de dimension n, $\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ est de dimension au plus n, donc $\text{rg}(A) \leqslant n$.

Et ces colonnes sont au nombre de p, donc ne peuvent engendrer un espace de dimension plus grande que p. □

Proposition 25.21 : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. *Alors A est inversible si et seulement si* $\operatorname{rg}(A) = n$.

Autrement dit
Une matrice inversible est une matrice de rang maximal.

Démonstration. Ce résultat a en fait déjà quasiment été prouvé dans l'exercice 19.10, qui dit qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre. Puisqu'il y a n vecteurs colonne, c'est le cas si et seulement si il s'agit d'une famille de rang n.

Mais nous pouvons à présent en donner une autre preuve : soit f_A l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A.
Alors A est inversible si et seulement si f_A est un isomorphisme, soit si et seulement si f_A est surjectif. Donc si et seulement si $\operatorname{rg}(f_A) = \dim \mathbf{K}^n = n$.
Puisque $\operatorname{rg}(f_A) = \operatorname{rg}(A)$, on a bien le résultat annoncé. □

Proposition 25.22 : *Multiplier une matrice à gauche ou à droite par une matrice inversible ne change pas son rang.*

Remarque
Nous l'avions en fait déjà dit pour les matrices de rang n (les matrices inversibles).

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à A.
Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$, et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à P.
Alors PA est la matrice, dans les bases canoniques, de l'application $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.
Puisque P est inversible, g est un isomorphisme, et nous avons prouvé précédemment qu'alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.
Donc $\operatorname{rg} PA = \operatorname{rg} A$.
On raisonne de même pour la multiplication à droite par une matrice de $GL_p(\mathbf{K})$. □

25.2.2 Calcul pratique du rang d'une matrice

Définition 25.23 – Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est dite **échelonnée** si chaque ligne commence par strictement plus de zéros que la précédente, ou est nulle si la précédente est nulle.
Le premier coefficient non nul d'une ligne d'une matrice échelonnée est alors appelé un **pivot**.

Danger !
Pour une matrice carrée, ne confondra pas matrices échelonnées et matrices triangulaires supérieures à diagonale non nulle (bien que celles-ci soient échelonnées). Voir par exemple la seconde matrice.

Exemples 25.24

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées.

La première possède trois pivots, les deux autres en ont 2.

En revanche, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée, bien qu'elle soit diagonale.

On constate[7] alors que le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.
En effet, une colonne qui ne contient pas un pivot est nécessairement combinaison linéaire des précédentes.
Et donc l'espace engendré par les colonnes d'une matrice A est aussi engendré par la famille des colonnes contenant un pivot.
Or, il est aisé, en utilisant les 0, de prouver que cette famille est libre.

[7] Et je veux vraiment que vous en soyez convaincus, mais n'insistez pas, je n'en donnerai pas de preuve ! Pas que celle-ci soit terriblement ardue, mais parce qu'une telle preuve noie systématiquement les idées essentielles avec des tonnes de notation. Prenez trois matrices échelonnées, calculez leur rang en cherchant à comprendre pourquoi il est égal au nombre de pivots, cela devrait largement suffire.

Par exemple considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et notons $C_1, \dots, C_5$ ses colonnes.
Rappelons que par définition, $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$.
Mais C_1 et C_2 sont colinéaires, donc $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \operatorname{Vect}(C_1, C_3, C_4, C_5)$.
De même C_4 est combinaison linéaire de C_1 et C_3, et donc $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_3, C_5)$.
Mais étant donnée la position des 0 dans ces vecteurs colonnes, on constate facilement que (C_1, C_3, C_5) est libre, et donc de rang 3.

Puisque nous savons que les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice correspondent à la multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible, celles-ci ne changent pas le rang.
Donc si on arrive, par opérations sur les lignes, à transformer A en une matrice échelonnée, le rang de cette matrice (qui est donc son nombre de pivots) sera celui de A.
Or il est toujours possible de transformer, via des opérations élémentaires sur les lignes, une matrice en une matrice échelonnée.
Nous ne prouverons pas ceci, et n'avons pas besoin d'un énoncé aussi général, mais la pratique que vous avez déjà acquise de l'algorithme du pivot doit vous convaincre qu'il est vrai.

Exemple 25.25

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est échelonnée et possède trois pivots : donc $\operatorname{rg} A = 3$.

25.3 CHANGEMENT DE BASE, SIMILITUDE, ÉQUIVALENCE

À une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ donnée est associée une matrice dans des bases de E et F.
Mais cette matrice dépend du choix des bases, et il existe donc plusieurs matrices représentant la même application.
Comment passer de l'une à l'autre, et quelles sont les propriétés que doivent partager ces matrices ?

25.3.1 Matrice de passage

Proposition 25.26 : *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Cardinal
Il est indispensable de considérer une famille comportant autant de vecteurs que $\dim E$. De toutes façons, une famille de tout autre cardinal n'a aucune chance d'être une base de E !

Démonstration. Puisque $(x_1, \dots, x_n)$ est de cardinal n, c'est une base si et seulement si elle est génératrice de E.
Donc si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est de rang n, et donc si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est de rang n, donc inversible. □

Exemple 25.27

À quelle condition sur $\lambda \in \mathbf{C}$ la famille $(\lambda + X + X^2, 1 + \lambda X + X^2, 1 + X + \lambda X^2)$ est-elle une base de $\mathbf{C}_2[X]$?

Sa matrice dans la base canonique est $M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$.

Alors l'inversibilité de M s'étudie facilement à l'aide de la méthode du pivot, par opérations élémentaires sur les lignes :

$$M \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

M étant triangulaire, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, soit si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $2 - \lambda - \lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \notin \{-2, 1\}$.
Donc la famille $(\lambda + X + X^2, 1 + \lambda X + X^2, 1 + X + \lambda X^2)$ est une base de $\mathbf{C}_2[X]$, sauf pour $\lambda = -2$ et $\lambda = 1$.

Définition 25.28 – Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$. Alors on **appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$** la matrice

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}).$$

Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$.
Notons également qu'on a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Proposition 25.29 : *Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ est inversible, et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.*

Démonstration. C'est évident en utilisant $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$, ainsi que le fait que $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$. □

Exemple 25.30

Dans $\mathbf{R}_2[X]$, considérons la famille (P_1, P_2, P_3) définie par

$$(P_1, P_2, P_3) = (-X^2 + 3X + 3, X, -X^2 + 3X + 4).$$

Alors sa matrice dans la base canonique est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P_1, P_2, P_3) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}.$$

On vérifie que cette matrice est inversible et que son inverse est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, et on a alors

$$M = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} \text{ et } P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} = M^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}.$$

Proposition 25.31 : *Si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$.*

Démonstration. On a

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}.$$

□

25.3.2 Formules de changement de base

L'intérêt des matrices de passage est de nous permettre de passer facilement des représentations matricielles dans une base à des représentations matricielles dans une autre base.

Proposition 25.32 : *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Alors pour tout $x \in E$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(x).$$

Autrement dit, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ permet de passer[8] des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{C}$ à ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

[8] Contrairement à ce que son nom laisse penser...

Démonstration. Encore une fois, c'est évident en notant que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.
En effet, $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(x)$ est alors égal à[9] $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E(x))$. □

[9] C'est la proposition 25.8.

Exemple 25.33

Reprenons les notations de l'exemple 25.30.
Considérons alors $P = 1 + 3X - 2X^2$.
On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$.

Si on veut les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$, plutôt que de résoudre un système, on peut calculer

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $P = 7P_1 - 3P_2 - 5P_3$.

Théorème 25.34 (Formule de changement de base) : *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de F. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E, F)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

Danger ! Il faut être très vigilant sur l'ordre des bases.

Remarque. Bien comprendre ce que fait chaque matrice permet de ne pas se tromper sur l'ordre des bases : partant des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathscr{B}'$, la multiplication par $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ donne les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.
Puis la multiplication par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ donne les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.
Enfin, la multiplication par $P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}$ «traduit» ces coordonnées dans la base $\mathscr{C}'$.
Au final, on a donc bien la matrice qui aux coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$ associe celles de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}'$: c'est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.

Démonstration. On a $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$.
Et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.$$

□

Corollaire 25.35 (Formule de changement de base pour les endomorphismes) : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors pour $f \in \mathscr{L}(E)$,*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\\ &= \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}.\end{aligned}$$

Démonstration. La première formule découle directement du théorème ci-dessus lorsqu'on prend $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$.
La seconde vient lorsqu'on ajoute en plus le fait que $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1}$. □

Exemple 25.36

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P + P'$, et considérons toujours la base $\mathscr{B}$ de l'exemple 25.30.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} \end{array}$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) &= P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_{can}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) \times P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(P_1) & f(P_2) & f(P_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \end{array}.\end{aligned}$$

Notons que sans la formule de changement de base, nous aurions pu obtenir cette matrice en calculant $f(P_1), f(P_2)$ et $f(P_3)$, puis en déterminant leurs coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3) en résolvant **trois** systèmes.

25.3.3 Relation de similitude

Définition 25.37 – Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Exemples 25.38

▶ La seule matrice semblable à I_n est I_n elle-même.
En effet si A est semblable à I_n, alors il existe P inversible telle que $A = P^{-1}I_nP = I_n$.
Plus généralement, la seule matrice semblable à une matrice scalaire[10] est elle-même.
▶ Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases sont semblables.
En effet, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, alors

$$A = \left(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Cet exemple est en fait fondamental, et l'idée sous-jacente derrière la notion de matrices semblables est justement qu'elles doivent représenter le même endomorphisme dans deux bases.

Précisons un peu cette idée : si A et B sont deux matrices semblables, soit alors $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Considérons alors f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à B, c'est-à-dire $f : X \mapsto BX$.
Sa matrice dans la base canonique est B.
Puisque P est inversible, notons $C_1, \dots, C_n$ ses vecteurs colonnes, qui sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Puisque P est inversible, la famille de ses vecteurs colonnes est libre[11], et donc par cardinalité, est une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
On a alors précisément $P = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{B}}$, et donc par la formule de changement de base,

$$A = \left(P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f)P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

Donc A et B sont toutes les deux la matrice du même endomorphisme f dans deux bases différentes.

[10] C'est-à-dire de la forme λI_n.

[11] La matrice de cette famille dans la base canonique est précisément P, qui est inversible.

Proposition 25.39 : *La relation de similitude (c'est-à-dire la relation $\sim$ définie par $A \sim B \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbf{K}), A = P^{-1}BP)$) est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Démonstration. On a $A = I_n^{-1}AI_n$ et donc $A \sim A$.
Si $A = P^{-1}BP$, alors $B = PAP^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1}$ donc $B \sim A$.
Enfin, si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors

$$A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1} C(QP).$$

□

Remarque
$GL_n(\mathbf{K})$ étant un groupe, QP est encore inversible.

La détermination des classes d'équivalence[12] de cette relation est un problème complexe. La proposition suivante est un premier pas dans cette direction, et vous approfondirez le sujet (sans répondre complètement à la question) en spé lorsque vous parlerez de valeur propre.

[12] Appelées classes de similitude.

Proposition 25.40 : *Deux matrices semblables ont même rang et même trace.*

Démonstration. Si A et B sont deux matrices semblables, alors nous venons de dire qu'elles représentent le même endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ dans deux bases différentes.

Alternative
Il a déjà été prouvé que la multiplication (à droite ou à gauche) par une matrice inversible ne change pas le rang.

Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(B)$.

Par ailleurs, rappelons que $\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(VU)$, et donc

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}BP\right) = \mathrm{tr}\left(BPP^{-1}\right) = \mathrm{tr}(B).$$

□

Je n'ai surtout pas dit que la réciproque est vraie. Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ont toutes les deux même rang et même trace que l'identité. Pourtant, aucune n'est semblable à l'identité, puisque seule I_2 est semblable à I_2.
Moins évident[13] est le fait que A et B ne sont pas semblables.

[13] Voir TD.

Exemple 25.41

La proposition qui précède sert surtout à prouver que deux matrices ne sont pas semblables : si elles n'ont pas la même trace et/ou pas le même rang, alors elles ne sont pas semblables, *end of story*.
En revanche, rien ne dit que deux matrices de même rang et même trace soient semblables, et pour prouver que deux matrices sont semblables, le meilleur[14] outil à notre disposition pour l'instant est de prouver qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

[14] Pour ne pas dire le seul.

Considérons par exemple les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Nous souhaitons prouver que A et D sont semblables.
Soit alors $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A.
On souhaite prouver qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Donc déjà il nous faut $f(e_1) = 0 \Leftrightarrow e_1 \in \mathrm{Ker}\, f$, et $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = 2e_3$.
Mais on a

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow {}^{15}(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$$

[15] Après résolution...

De même, si $e_2 = (x, y, z)$, alors

$$f(e_2) = e_2 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = x \\ 2x + y + 3z = y \\ -2x - 4y - 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(-2, 1, 0)$$

Et enfin, $f(e_3) = 2e_3 \Leftrightarrow e_3 \in \mathrm{Vect}(0, 1, -1)$.

Posons donc $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (-2, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -1)$.
Alors la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ car sa matrice dans la base canonique est

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

dont on vérifie sans grande difficulté qu'elle est inversible.
Donc $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et la matrice de f dans cette base est[16] D.

[16] Il n'y a aucun hasard ici : nous avons tout fait pour lors de nos choix de e_1, e_2 et e_3 !

Donc non seulement nous avons prouvé que A et D sont semblables, mais en plus nous avons une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$: c'est celle calculée ci-dessus.
En effet, par définition, cette matrice n'est rien d'autre que $P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}}$.
Et par la formule de changement de base,

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{C}} = P^{-1}AP.$$

Définition 25.42 – Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Alors la trace de la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E est indépendante de la base $\mathscr{B}$ considérée.
On appelle alors **trace de** f et on note $\mathrm{tr}(f)$ la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base.
L'application $\mathrm{tr} : \mathscr{L}(E) \to \mathbf{K}$ ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration. Le fait que la trace soit indépendante de la base vient de ce qui précède : si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ sont semblables, et donc de même trace. □

Exemple 25.43

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ qui à P associe $XP' + P''$.
Alors $f(1) = 0$, $f(X) = X$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$f\left(X^k\right) = XkX^{k-1} + k(k-1)X^{k-2} = kX^k + k(k-1)X^{k-2}.$$

Donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^{n-2}) & f(X^{n-1}) & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & (n-2) & 0 & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}.$$

Donc $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

25.3.4 Équivalence de matrices

Définition 25.44 – On dit que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont **équivalentes** si il existe $P \in GL_n(\mathbf{K}), Q \in GL_p(\mathbf{K})$ telles que $A = P^{-1}BQ$.

⚠ Attention !
Si A et B ne sont pas forcément carrées, il faut que les deux soient de mêmes dimension.

À la différence de la relation de similitude, l'idée est cette fois que deux matrices équivalentes représentent la même application linéaire, modulo **deux** changements de base : un pour l'espace de départ et un pour l'espace d'arrivée.

Par ailleurs, l'autre exemple important de matrices équivalentes est le suivant : si A est obtenue à partir de $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes,

alors A et B sont équivalentes.
En effet, chaque opération sur les lignes correspond à une multiplication à gauche par une matrice inversible (de taille n), et chaque opération sur les colonnes correspond à la multiplication à droite par une matrice inversible (de taille p).

On prouve comme pour la relation de similitude que la relation d'équivalence des matrices est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Comme par ailleurs la multiplication[17] par une matrice inversible préserve le rang, si deux matrices A et B sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

[17] À droite ou à gauche.

Définition 25.45 – Si r est un entier tel que $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$, on définit une matrice $J_{r,n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ en posant

$$J_{r,n,p} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right).$$

Autrement dit, si on note $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ les coefficients de $J_{r,n,p}$, alors

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \textbf{ et } i \leqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque
Il s'agit là d'une matrice définie par blocs.
Elle possède r coefficients égaux à 1, situés sur un «diagonale» partant du coin supérieur gauche. Et tous ses autres coefficients sont nuls.

Puisque $J_{r,n,p}$ est échelonnée et possède r pivots, on a tout de suite $\operatorname{rg} J_{r,n,p} = r$.

Proposition 25.46 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit $r = \operatorname{rg}(A)$. Alors A est équivalente à $J_{r,n,p}$.*

Démonstration. Soit $f : \mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^n$ l'application dont la matrice dans les bases canoniques est A.
Alors $\operatorname{rg} f = r$, et donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = p - r$.
Soit alors $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. On peut alors la compléter[18] en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\mathbf{K}^p$.
La famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est alors génératrice de $\operatorname{Im} f$, puisque les $f(e_{r+1}), \dots, f(e_p)$ sont tous nuls. Par cardinalité, c'est une base de $\operatorname{Im} f$, qui est de dimension r.
Pour $i \in [\![1, r]\!]$, posons $u_i = f(e_i)$, de sorte que $(u_1, \dots, u_r)$ est libre.
Toujours par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbf{K}^n$.
Et alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ est

[18] C'est le théorème de la base incomplète, qui s'applique car $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ est libre.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_r) & f(e_{r+1}) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_n \end{array} = J_{r,n,p}.$$

Par conséquent, si on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique de $\mathbf{K}^n$, et si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^p$ à la base $\mathcal{B}$, alors, par la formule de changement de base,

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{can}}(f) = P^{-1} J_{r,n,p} Q.$$

Et donc A et $J_{r,n,p}$ sont bien équivalentes. ◻

Puisque de plus, $J_{r,n,p}$ et $J_{r',n,p}$ ne sont pas équivalentes si $r \neq r'$, car elles sont de rangs différents, nous avons donc là un **système de représentants des classes d'équivalence**,

c'est-à-dire que l'ensemble $\{J_{r,n,p},\ 0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)\}$ contient exactement un élément de chaque classe d'équivalence.
Autrement dit, toute matrice de $M_{n,p}(\mathbf{K})$ est semblable à une et une seule des matrices $J_{0,n,p}, J_{1,n,p}, \dots, J_{\min(n,p),n,p}$.

Remarque

Dans le cas de la relation de congruence modulo n sur les entiers, nous connaissons un système de représentants, il s'agit de $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Corollaire 25.47 – *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si et seulement si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Autrement dit

La relation d'équivalence des matrices est en fait la relation «avoir le même rang».

Démonstration. Si on note r le rang commun de A et B, alors A et B sont toutes deux équivalentes à $J_{r,n,p}$, et par transitivité et symétrie de la relation «être équivalentes», A et B sont équivalentes. □

Ainsi, contrairement à la relation de similitude, la description des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence des matrices est facile : une classe d'équivalence est formée de **toutes** les matrices de rang donné.

Corollaire 25.48 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Démonstration. Soit $r = \mathrm{rg}(A)$, et soient $P \in GL_n(\mathbf{K})$, $Q \in GL_p(\mathbf{K})$ telles que $A = P^{-1}J_{r,n,p}Q$.
Alors $A^\top = Q^\top J_{r,n,p}^\top \left(P^\top\right)^{-1} = Q^\top J_{r,p,n} \left(P^\top\right)^{-1}$.
Donc $A^\top$ est équivalente à $J_{r,p,n}$, et donc est de rang r. □

Remarque. Puisque les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A, ce résultat affirme que le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.
Et donc que l'espace engendré par les lignes de A est de même dimension que celui engendré par ses colonnes.

Exemple 25.49 **Rang des matrices échelonnés (bis)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée, et notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
Notons r le nombre de ses pivots, qui sont nécessairement situés sur les r premières lignes de A, les lignes suivantes étant nécessairement nulles.
Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_n) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_r)$.
Mais il est aisé de prouver que $L_1, \dots, L_r$ forment une famille libre.
En effet, soient $\lambda, \dots, \lambda_r$ tels que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_r L_r = 0_{1,p}$.
Si on note j_1 le numéro de la colonne du premier coefficient non nul de L_1, alors les coefficients j_1 de $L_2, \dots, L_r$ sont nuls par définition d'une matrice échelonnée.
Donc $\lambda_1 = 0$. Puis on recommence avec le premier coefficient non nul de L_2, etc.
Et donc $(L_1, \dots, L_r)$ est libre, donc de rang r.
Et par conséquent, le rang de A est égal au nombre de ses pivots.

25.3.5 Caractérisation du rang par les matrices extraites

Définition 25.50 – Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle **matrice extraite de** A toute matrice de la forme $(a_{i,j})_{\substack{i\in I\\j\in J}}$, avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.
Plus simplement, il s'agit d'une matrice obtenue à partir de A par suppression de certaines lignes et colonnes.

Proposition 25.51 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, et soit B une matrice extraite de A. Alors* $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. Puisque B est obtenue à partir de A en supprimant certaines lignes et certaines colonnes, notons A' la matrice intermédiaire, à n lignes, obtenue à partir de A

uniquement par suppression de colonnes (et où l'on a gardé uniquement les colonnes qui seront dans B).
Alors les colonnes de A' sont des colonnes de A, donc[19] $\operatorname{rg} A' \leqslant \operatorname{rg}(A)$.
Mais alors B est obtenue à partir de A' par suppression de lignes, et le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes. Donc par le même raisonnement, $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A')$, de sorte que $\operatorname{rg}(B) \leqslant \operatorname{rg}(A)$. □

[19] Ces colonnes engendrent un sous-espace vectoriel de l'espace engendré par les colonnes de A.

La caractérisation du rang qui suit est assez élégante, mais soyons honnête, assez inefficace pour calculer concrètement un rang.

Proposition 25.52 : *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Le rang de A est la taille maximale d'une matrice inversible[20] extraite de A.*

[20] Et donc carrée.

Démonstration. Nous savons déjà que toute matrice extraite sera de rang inférieur à $\operatorname{rg}(A)$, et donc il ne peut y avoir de matrice extraite inversible de taille supérieure strictement à $\operatorname{rg}(A)$.
Si $r = \operatorname{rg}(A)$, alors il existe une famille libre formée de r colonnes de A. Notons donc B la matrice à n lignes formée de ces r colonnes.
Puisque le rang de B est aussi le rang de la famille de ses lignes, il existe une famille de r lignes de B qui est libre.
Et donc la matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$ formée de ces r lignes est extraite de A et est inversible car ses lignes forment une famille libre. □

Exemple 25.53 **Rang des matrices échelonnées (ter)**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice échelonnée, à r pivots.
Nous savons déjà que A est de rang au plus r puisque seules ses r premières lignes sont nulles.
Et alors la matrice extraite de A en ne gardant que les lignes et les colonnes contenant des pivots est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les pivots, donc sont non nuls. Donc cette matrice extraite est inversible, et donc A est de rang r.

Par exemple, de $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on peut extraire :

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3.

25.4 Retour sur les systèmes linéaires

25.4.1 Image et noyau d'une matrice

Définition 25.54 – Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On appelle alors

- **noyau de** A l'ensemble $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid AX = 0\}$
- **image de** A l'ensemble $\operatorname{Im} A = \{AX,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

Pour le dire autrement, il s'agit tout simplement du noyau et de l'image de l'application linéaire[21] $f_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$.

[21] Qui est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associé à A.

Ce qui permet directement d'affirmer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Une autre conséquence de ce fait est que $\operatorname{Im} A$ est engendré par les AE_i, où, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, E_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.
Mais $AE_i = C_i$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de A, donc $\operatorname{Im} A$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ engendré par les colonnes de A.

Proposition 25.55 (Théorème du rang matriciel) : *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Alors $\dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p$.*

Démonstration. C'est le théorème du rang appliqué à f_A. □

Notons que si $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est la matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, alors $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des vecteurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des éléments de $\operatorname{Ker} f$.
En effet, $f(x) = 0_F \Leftrightarrow A \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \operatorname{Ker} A$.
De même, $\operatorname{Im} A$ est l'ensemble des vecteurs coordonnées, dans la base $\mathscr{C}$ des vecteurs de $\operatorname{Im} f$.

La détermination complète d'une base de $\operatorname{Ker} A$ est aisée : il s'agit de résoudre le système $AX = 0$.
Notons toutefois que toute relation de dépendance linéaire que l'on constaterait **sur les colonnes** de A nous donne un élément du noyau.

En effet, si on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$, alors $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_p\end{pmatrix} = A\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A E_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$.

Et donc $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_p\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$.

Une fois la dimension du noyau connue, on a celle de l'image, et il suffit[22] de trouver $\operatorname{rg}(A)$ colonnes linéairement indépendantes pour obtenir une base de $\operatorname{Im} A$.
Une piste à ne pas négliger : tout élément de $\operatorname{Ker} A$ nous donne, comme ci-dessus, une relation de dépendance entre les colonnes. Ce qui permet d'éliminer une ou plusieurs colonnes de la famille génératrice de $\operatorname{Im} A$.

[22] Bien que ceci ne nous dise pas comment faire pour y arriver.

Exemple 25.56

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Alors ses colonnes sont liées par la relation $3C_1 - C_2 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$.

Donc A est de rang au plus 2, et n'étant clairement pas[23] de rang 1, elle est bien de rang 2.

Donc son noyau est de dimension 1, égal à $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Et puisque $C_3 \in \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$, et on a là une base[24] de l'image.

[23] Ses colonnes ne sont pas proportionnelles.

[24] Car génératrice et de bon cardinal.

Mentionnons également qu'une opération élémentaire sur les lignes ne change pas le noyau d'une matrice[25].
En effet, réaliser une opération sur les lignes de A revient à multiplier à gauche par une matrice inversible P.
Et alors $AX = 0 \Leftrightarrow PAX = 0$. Donc A et PA ont même noyau.

[25] Et c'est une excellente nouvelle puisque c'est la base de la résolution de systèmes ! Les opérations élémentaires sur les équations d'un système n'en changent donc pas les solutions.

On prouve de même[26] que les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'image.

[26] Et il n'est peut-être pas inintéressant d'essayer de l'écrire...

25.4.2 Systèmes linéaires

Rappelons qu'un système linéaire de n équations à p inconnues peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = B$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ l'inconnue, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ le vecteur colonne des seconds membres.

Définition 25.57 – Un système linéaire est dit **homogène** si son second membre est nul, c'est-à-dire s'il est de la forme $AX = 0$.

Puisque chacune des équations qui composent un système homogène est de la forme $a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = 0$, nous reconnaissons là des équations d'hyperplans.
Et donc résoudre un système homogène revient à déterminer l'intersection de n hyperplans de $\mathbf{K}^p$.
Rappelons que nous avions prouvé (dans le chapitre 21) que l'intersection de n hyperplans de $\mathbf{K}^p$ est de dimension au moins $p - n$.

Proposition 25.58 : *L'ensemble des solutions d'un système homogène $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, de dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.*

Démonstration. L'aspect «sous-espace vectoriel» pourrait se prouver à la main.
Il suffit juste de remarquer que cet ensemble de solutions est $\operatorname{Ker} A$, et d'appliquer le théorème du rang. □

Une conséquence intéressante, que nous comprenions déjà, sans l'avoir complètement rigoureusement prouvée, est que si $p > n$, c'est-à-dire s'il y a davantage d'inconnues que d'équations, alors il existe forcément des solutions non nulles.
En effet, $\operatorname{rg}(A) \leqslant n$, et donc si $n < p$, $p - \operatorname{rg}(A) > 0$. Donc l'ensemble des solutions est de dimension strictement positive, donc contient des vecteurs non nuls.

Si $AX = B$ est un système linéaire, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, le système $AX = 0$ est appelé système homogène associé.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $AX = B$ et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

Proposition 25.59 : *Soit $AX = B$ un système linéaire. Alors le système est compatible si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$.*
Lorsque c'est le cas, si $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ est une solution du système, alors

$$\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_0 = \{X_0 + X,\ X \in \mathcal{S}_0\}.$$

Autrement dit, si on trouve une solution particulière du système avec second membre, toutes les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution du système homogène à cette solution particulière.

Déjà vu ?
Cette formulation doit bien évidemment vous faire penser aux équations différentielles linéaires.

Démonstration. Il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ tel que $AX = B$ si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$: c'est la définition même de l'image.
Soit donc $X_0 \in \mathcal{S}$ une solution de $AX = B$.
Alors pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, on a

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \\ &\Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \mathcal{S}_0 \\ &\Leftrightarrow X \in X_0 + \mathcal{S}_0. \end{aligned}$$

□

Ceci nous permet notamment de prouver rigoureusement un fait que nous connaissions déjà : si $\mathbf{K}$ est infini[27], alors un système linéaire ne peut posséder que $0, 1$ ou une infinité de solutions.
En effet, s'il est compatible[28], $\mathscr{S}_0$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Donc soit il est de dimension nulle, et donc $\mathscr{S}_0 = \{0\}$, de sorte que $\mathscr{S} = \{X_0\}$.
Soit il est de dimension strictement positive, et donc est nécessairement de cardinal infini (car il est en bijection avec $\mathbf{K}^n$, qui est évidemment infini).

[27] Ce qui est le cas de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, les seuls corps que vous serez amenés à manipuler.

[28] S'il ne l'est pas, il n'y a pas de solutions.

Rappelons que les systèmes de Cramer sont les systèmes carrés possédant une unique solution. Nous avons déjà prouvé qu'une matrice A est inversible si et seulement si pour tout second membre B, $AX = B$ est de Cramer.
En fait, nous pouvons faire mieux :

Proposition 25.60 : *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Alors $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si A est inversible.*

Démonstration. Nous savons déjà que si A est inversible, alors $AX = B$ est de Cramer.
Inversement, si $AX = B$ possède une unique solution, en vertu de ce qui précède, $\mathscr{S}_0 = \{0\}$.
Et donc $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, de sorte que[29] A est inversible. □

[29] C'est le théorème du rang.

Ce que nous dit cette proposition, c'est que le fait qu'un système possède ou non une unique solution ne dépend que de la matrice A (c'est-à-dire) des coefficients du système, et pas du second membre.
Une fois n'est pas coutume, il ne s'agit pas d'une surprise : pour qu'un système possède une unique solution, il faut et il suffit qu'on puisse le transformer en un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls[30].
Ce qui ne dépend que de A, et pas du second membre B.

[30] Se trouve en filigrane ici le fait que A soit de rang n, et donc inversible...

EXERCICES DU CHAPITRE 25

▶ Matrice d'une application linéaire

EXERCICE 25.1 Déterminer les matrices des applications suivantes, dans les bases canoniques : F

1) $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, y + 3x, x + y + z) \end{array} \right.$

2) $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' + (X+1)P'' \end{array} \right.$

3) $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P'(1), \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt\right) \end{array} \right.$

EXERCICE 25.2 Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. F
Si l'on considère la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M ($1 \leqslant r \leqslant \dim E$), quelle application linéaire représente-t-elle ?

EXERCICE 25.3 Soit n un entier naturel non nul, soit $E = \mathbf{R}_n[X]$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$ non nul. On considère l'application $f : E \to E$ définie par $f(P) = P(X + \alpha)$. PD

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
3) Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
4) ($\star$) Montrer que pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$, si $p < q$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1)^k \binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

EXERCICE 25.4 En utilisant des endomorphismes, proposer une preuve rapide d'un résultat prouvé dans le chapitre sur les matrices : une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$. PD

EXERCICE 25.5 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = (3X + 1)P + (1 - X^2)P'$. PD

1) Montrer qu'il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.
2) Donner la matrice de φ dans la base canonique.
3) En utilisant cette matrice, déterminer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ et une base de $\operatorname{Im} \varphi$.

EXERCICE 25.6 Drapeaux et endomorphismes trigonalisables D
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure si et seulement si il existe une suite strictement croissante $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E stables par f (une telle suite est appelée un drapeau).

▶ Rang d'une matrice

EXERCICE 25.7 Que dire du rang d'une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$? F

EXERCICE 25.8 Déterminer le rang des matrices suivantes. F

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 25.9 Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul. Déterminer le rang des matrices F

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R}) \text{ et } N = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

EXERCICE 25.10 Déterminer, suivant la valeur de $a, b \in \mathbf{C}$, le rang des matrices suivantes : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 25.11 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AB = 0_3$. Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1. AD

EXERCICE 25.12 Rang d'un produit AD
Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ on a $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.

▶ Changement de base

EXERCICE 25.13 À l'aide de techniques matricielles, prouver que $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. F

EXERCICE 25.14 Formule de changement de base F

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la valeur de A^4.

EXERCICE 25.15 Existence de vecteurs possédant les mêmes coordonnées dans deux bases AD

1) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$, et soit $\mathscr{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.
Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbf{R}^3$, ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?
2) Plus généralement, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n, montrer qu'il existe un vecteur non nul de E ayant les mêmes coordonnées dans ces deux bases si et seulement si $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} - I_n$ n'est pas inversible.

EXERCICE 25.16 Matrice d'un projecteur/d'une symétrie PD
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G.

1) Montrer que dans toute base adaptée à la somme $E = F \oplus G$, la matrice de p est une matrice diagonale que l'on précisera.
2) En déduire que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
3) Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(-1, 1, 1)$.
Déterminer les matrice, dans la base canonique de :
   a) la projection p sur F parallèlement à G
   b) la projection q sur G parallèlement à F
   c) la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

▶ Similitude et équivalence des matrices

EXERCICE 25.17 Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables : PD

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 25.18 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. PD

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 25.19 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$. AD
Montrer que f est un projecteur.

EXERCICE 25.20 Trace d'un projecteur/d'une symétrie AD

1) Montrer que si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
2) Si s est une symétrie d'un espace de dimension finie, déterminer $\mathrm{tr}(s)$ en fonction de $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
3) **Application** : en considérant l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f : M \mapsto {}^tM$, retrouver les dimensions de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

EXERCICE 25.21 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. AD

1) Montrer que A est semblable à T, et déterminer $P \in GL_3(\mathbf{R})$ telle que $A = P^{-1}TP$.
2) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer T^n, puis en déduire A^n.

EXERCICE 25.22 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}(B - \lambda I_n)$. PD
Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

EXERCICE 25.23 Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. AD

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$, puis que $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^2$.
2) En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis arriver à une contradiction.

EXERCICE 25.24 Vers la diagonalisation D

1) Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale. Montrer que pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est un coefficient diagonal de D.
2) Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme $P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$ est diagonale.

EXERCICE 25.25 Fonctions multiplicatives sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et inversibilité (Oral X) TD
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une application non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Prouver que $f(A) = 0$ si et seulement si A est non inversible.
Indication : une matrice non inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

▸ Systèmes linéaires

EXERCICE 25.26 Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ pour lesquels le système $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x \quad\; + \; z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$ possède des solutions. PD

Combien en possède-t-il alors ?

EXERCICE 25.27 Soient a, b, c trois complexes distincts. On note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^3 & \longrightarrow & \mathbf{C}_2[X] \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + yX + zX^2 \end{array} \right.$. AD

1) Justifier sans calculs que φ est un isomorphisme.
2) Soient (u_1, u_2, u_3) et (x, y, z) deux éléments de $\mathbf{C}^3$. Exprimer à l'aide de $P_{x,y,z} = \varphi(x, y, z)$ le fait que (x, y, z) soit solution de
$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} x + ay + a^2z = u_1 \\ x + by + b^2z = u_2 \\ x + cy + c^2z = u_3 \end{cases}$$
3) En déduire que $(\mathscr{S})$ possède une unique solution que l'on déterminera. *Indication : penser à l'interpolation de Lagrange.*

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 25

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.1

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,n+1}(\mathbf{R})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.2

Notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de $\mathscr{B}$.
Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui a pour base[1] $(e_1, \dots, e_r)$.
Notons g l'application dont la matrice dans les bases $(e_1, \dots, e_r)$ et $\mathscr{C}$ est la matrice obtenue en ne gardant que les r premières colonnes de M.
Puisqu'on a précisément gardé les mêmes colonnes, il vient $g(e_1) = f(e_1), g(e_2) = f(e_2), \dots, g(e_r) = f(e_r)$.
Et donc pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, $f(x) = g(x)$.
Autrement dit, g est la restriction de f à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

[1] C'est une sous-famille d'une base de E, donc libre.

Rappel
Deux applications qui coïncident sur une base sont égales.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.3

1. Il est clair que $f(P)$ est de même degré que P, et donc dans E.
De plus, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + \alpha) = \lambda P(X + \alpha) + Q(X + \alpha) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc f est linéaire et est donc un endomorphisme de E.

Vérification
L'énoncé nous dit que f est à valeurs dans E, mais mieux vaut s'assurer que c'est bien le cas.

2. La base canonique de E est $(1, X, \dots, X^n)$. Or, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$f(X^k) = (X + \alpha)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i \alpha^{k-i}.$$

Et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}\alpha & \dots & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \\ \\ X^n \end{array}$$

3. Il est clair que A est inversible car elle est diagonale supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls (ils sont tous égaux à 1).
Pour calculer l'inverse de A, notons que l'inverse de f est l'application $P \mapsto P(X - \alpha)$.
Et donc, sur le même principe qu'à la question précédente, à l'aide du binôme de Newton, on montre que

Précision
En fait l'inverse de f est la même application, en remplaçant α par $-\alpha$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & & f(X^n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-1)^n\alpha^n \\ 0 & 1 & -\binom{2}{1}\alpha & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\binom{n}{n-1}\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}.$$

4. Prenons $\alpha = 1$. Alors si on note $A = (a_{i,j})$ et $A^{-1} = (b_{i,j})$, on a

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ et } b_{i,j} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}.$$

Le coefficient $(p+1, q+1)$ de $AA^{-1} = I_{n+1}$ est nul (car $p \neq q$), et donc

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} [A]_{p+1,k}\left[A^{-1}\right]_{k,q+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{k-1}{p}(-1)^{q+1-k}\binom{q}{k-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}.$$

Et puisque $\binom{k}{p}$ est nul si $k \leqslant p$, et de même $\binom{q}{k} = 0$ si $k \geqslant q$, il reste donc

$$\sum_{k=p}^{q}(-1)^{q-k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$$

et donc $\sum_{k=p}^{q}(-1)^{k}\binom{k}{p}\binom{q}{k} = 0$.

Subtilité

Le k-ième élément de la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ n'est pas X^k mais X^{k-1}, ce qui oblige toujours à faire attention aux décalages d'indices dans les formules (et qui explique ici les $i-1$.)

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.4

Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Alors A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme. Mais f étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est le cas si et seulement si f est injectif.
Soit si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{K}^n}\}$. Soit encore si et seulement si $f(x) = 0_{\mathbf{K}^n} \Rightarrow x = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Ce qui matriciellement se traduit par $AX = 0 \Rightarrow AX = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.5

1. La linéarité ne pose pas de difficultés.
Il s'agit de ne pas oublier de vérifier que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_3[X]$, ce qui n'est pas totalement évident, car si P est de degré 3, $\deg((3X+1)P) = \deg(1-X^2)P' = 4$.
Si $\deg P < 3$, on a bien $\deg((3X+1)P) \leqslant 3$ et $\deg((1-X^2)P') \leqslant 3$, donc $\varphi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$.
En revanche, si $\deg P = 3$, on peut a priori uniquement affirmer que $\varphi(P) \in \mathbf{R}_4[X]$.
Notons alors $\lambda \in \mathbf{R}^*$ le coefficient dominant de P.
Alors le coefficient de degré 4 de $(3X+1)P$ est 3λ, et celui de P' est 3λ, et donc le coefficient de degré 4 de $(1-X^2)P'$ est -3λ, de sorte que le coefficient de degré 4 de $\varphi(P)$ est nul.
Donc on a bien $\varphi(P) \in \mathbf{R}_3[X]$, et donc φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.

Détails

Le terme de degré 2 de P' est la dérivée de λX^3.

2. On a $\varphi(1) = 3X+1$, $\varphi(X) = 3X^2+X+(1-X^2) = 2X^2+X+1$, $\varphi(X^2) = 3X^3+X^2+2X(1-X^2) = X^3+X^2+2X$, et enfin $\varphi(X^3) = X^3+3X^2$.

Donc la matrice de φ dans la base canonique est $\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$.

3. Un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si

$$\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\varphi)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après résolution du système, on trouve $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(X^3 - X^2 - X + 1)$.

Notons alors $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$, donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}\varphi = 4 - 1 = 3$.
Or, on a $\varphi(X^3 - X^2 - X + 1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(X^3) - \varphi(X^2) - \varphi(X) + \varphi(1) = 0$.
Donc $\varphi(X^3) \in \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$, et par conséquent,

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)).$$

Et donc étant génératrice et de cardinal $3 = \dim \operatorname{Im}\varphi$, la famille $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.6

Notons tout de suite qu'une suite strictement croissante (sous-entendu, pour l'inclusion) $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de sous-espaces vectoriels de E vérifie forcément $\dim F_i = i$.
Supposons donc qu'une telle suite de sous-espaces stables par f existe.
Alors $\dim F_1 = 1$. Soit donc e_1 un vecteur non nul de F_1, qui forme donc une base de F_1.
Alors $f(e_1) \in F_1$, donc il existe $a_{1,1} \in \mathbf{K}$ tel que $f(e_1) = a_{1,1}e_1$.
Puisque e_1 forme une famille libre de F_2, on peut le compléter en une base (e_1, e_2) de F_2.
Alors $f(e_2) \in F_2$, de sorte qu'il existe deux scalaires $a_{1,2}$ et $a_{2,2}$ tels que $f(e_2) = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2$.
Puis (e_1, e_2) est une famille libre de F_2, qu'on peut donc compléter en une base (e_1, e_2, e_3) de F_3, et $f(e_3)$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3. Etc.
De proche en proche, on prouve donc que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe des scalaires $a_{1,j}, \dots, a_{j,j}$ tels que $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}e_j$.
Si de plus on pose $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, alors la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, qui est donc triangulaire supérieure[2].

[2] Car $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$: c'est la **définition** de matrice triangulaire

Inversement, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de f, notons la $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire supérieure.
Posons alors $F_0 = \{0_E\}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.
On a alors bien une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E.
Reste à prouver que ceux-ci sont stables par f.
Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$ et soit $j \in [\![1, i]\!]$.
Alors $f(e_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,j}e_i = \sum_{k=1}^{j} a_{i,j}e_i \in F_i$.
Donc F_i est stable par f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.7

C'est le nombre de ses coefficient diagonaux non nuls.
En effet, si D est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont non nuls, alors nous savons qu'elle est inversible, et donc de rang n.

En revanche, si elle possède r coefficients nuls, par échanges de lignes, on peut les amener sur les dernières lignes, de manière à obtenir une matrice échelonnée , qui aura donc $n - r$ pivots.

Danger ! Une matrice diagonale n'est pas toujours échelonnée !

Peut-être plus convaincant : soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base[3] de $\mathbf{K}^n$ et soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \mathrm{Vect}(\lambda_i e_i \mid \lambda_i \neq 0)$.
Or, la famille des $\lambda_i e_i$, $\lambda_i \neq 0$ est libre puisque la famille de e_i l'est aussi.
Donc le rang de f est le nombre de coefficients diagonaux non nuls de D.

[3] Disons la base canonique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.8

Nous ne détaillons pas les calculs, qui sont toujours effectués grâce à la méthode du pivot.

1. A est de rang 3.
2. B est non nulle, et toutes ses colonnes sont colinéaires, donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.
3. C est de rang 2. Notons qu'on a pas nécessairement besoin de faire un pivot pour cela : les deux dernières colonnes de C ne sont pas colinéaires, donc le rang de C est supérieur ou égal à 2, et la première colonne est égale à la seconde moins la moitié de la troisième, donc la famille des vecteurs colonnes de C est liée, et donc $\mathrm{rg}(C) < 3$.
4. D est de rang 3.
5. À l'aide de l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ 0 & 1-i & 0 & 1-i \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}$, qui n'est pas échelonnée[4], mais qui est clairement de rang 2.
Donc E est de rang 2.

[4] Même s'il n'y aurait qu'une opération à faire pour y arriver.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.9

Notons $C_1, \dots, C_{n+1}$ les colonnes de M.
Puisque $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est non nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$.

Alors l'espace engendré par les n premières colonnes de M est une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$, engendrée par C_i. En effet, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j = \frac{x_j}{x_i} C_i$.
Par conséquent, l'espace vectoriel engendré par les n premières colonnes de M est de dimension 1.
De plus, la dernière colonne n'est pas dans cet espace vectoriel car elle n'est pas colinéaire à C_i.
On en déduit que la $i^{\text{ème}}$ colonne de M et sa dernière colonne forment une famille libre, et donc une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M. Ainsi, $\operatorname{rg}(M) = 2$.

Notons que $N = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_n \end{pmatrix}$.

En particulier, toutes les colonnes de N sont colinéaires à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui n'est pas nul. Alors N est non nulle à son tour, car si $x_i \neq 0$, alors le coefficient (i,i) de N, qui est x_i^2 est non nul.

> **Définition**
> Ici pas de pivot, mais un retour à la définition du rang de M : c'est le rang de la famille des vecteurs colonnes de M.

> **Rédaction**
> Rappelons qu'une matrice dont toutes les colonnes sont proportionnelles est de rang 1 **si elle est non nulle.** Il n'est donc pas inutile de préciser que N est non nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.10

Échelonnons A par opérations sur les lignes :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^3 \end{pmatrix}.$$

Donc déjà, si $a^3 \neq 1$, A est échelonnée, avec trois pivots non nuls, donc de rang 3.
En revanche, si $a^3 = 1$, alors l'un de ses coefficient diagonaux est nul, donc n'est pas inversible, et donc de rang inférieur ou égal à 2.

Et si $a^3 = 1$, soit si $a \in \mathbf{U}_3$, alors la matrice échelonnée obtenue ci-dessus est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A est de rang 1.

> **Alternative**
> Les trois colonnes sont proportionnelles :
> $C_2 = aC_1, \; C_3 = aC_2 = a^2 C_1$.

► Si $a = b = 0$, $B = 0$, et donc $\operatorname{rg}(B) = 0$.
► Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors $B = aI_n$ est de rang n.
► Si $b \neq 0$ et $a = 0$, alors en faisant «remonter» la dernière ligne, c'est-à-dire en réalisant successivement les opérations $L_n \leftrightarrow L_{n-1}$, $L_{n-1} \leftrightarrow L_{n-2}$, etc, on obtient λI_n, qui est de rang n, donc $\operatorname{rg}(B) = n$.
► Enfin, si $ab \neq 0$. Alors, en réalisant successivement les opérations

$$L_n \leftarrow aL_n - bL_1, L_n \leftarrow aL_n + b_2^2, \dots, L_n \leftarrow aL_n + (-1)^{n-1} b^{n-1} L_{n-1}$$

on obtient la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a^n - (-1)^n b^n \end{pmatrix}$.

Donc si $a^n = (-1)^n b^n$, $\operatorname{rg}(B) = n-1$ et sinon $\operatorname{rg}(B) = n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.11

Choisissons de travailler plutôt avec des endomorphismes, et soient donc f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ dont les matrices respectives dans la base canonique sont A et B.
Alors $AB = 0_3 \Leftrightarrow f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)}$.
Donc en particulier, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Si $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} g \leqslant 1$, il n'y a rien à dire.
Si $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} g \geqslant 2$, alors $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$.
Et donc par le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) = 3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 1$.
Dans tous les cas, on a bien l'un des deux rangs qui est inférieur ou égal à 1

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.12

Voici une propriété qui est bien plus facile à comprendre en termes d'applications linéaires.
Soient donc $f \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p)$ les applications linéaires dont les matrices

dans les bases canoniques sont A et B.
Alors AB est la matrice de $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^q$ et $\mathbf{K}^n$.
Puisque $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$, on a $rg(AB) = \operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(A)$.

Par ailleurs, une application linéaire ne peut pas augmenter la dimension, et on a $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$.
Et donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \dim g(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.13

Écrivons la matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$. Il s'agit de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Échelonnons alors cette matrice :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 4, donc A aussi.
Et par conséquent, A est inversible, et donc la famille considérée est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.14

1. Écrivons la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. Il s'agit de $P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$.

   On vérifie aisément que cette matrice est inversible, donc $\mathscr{B}'$ est une base et P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   De plus, $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

> **Danger !**
> Attention au sens : on a écrit les vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, on a donc la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2. D'après la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On constate que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $M^4 = I_3$.
   On en déduit[5] que $A^4 = PM^4P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

[5] Sans faire le calcul : on sait que A^4 est semblable à $M^4 = I_3$, et la seule matrice semblable à I_3 est I_3 elle-même.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.15

1. La matrice de passage de la famille $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$ est $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   Un calcul de rang prouve qu'elle est de rang 3, donc inversible, et donc que $\mathscr{B}'$ est une base et alors $M = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

   Soit à présent $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbf{R}^3$. Alors les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, et elles sont égales aux coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ si et seulement si
   $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

   Donc si et seulement si $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ a + 2b = b \\ b + 3c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) \in$ $\operatorname{Vect}(1, -1, 2)$.
   Donc il existe bien de tels vecteurs, et ce sont tous les $\lambda(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

2. Sur le même principe, un tel vecteur existe si et seulement si il existe $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})\setminus\{0_{n,1}\}$ tel que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$.
Donc si et seulement si $\operatorname{Ker}(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n) \neq \{0_{n,1}\}$.
Par le théorème du rang matriciel, c'est le cas si et seulement si $\operatorname{rg}(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n) < n$, soit si et seulement si $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} - I_n$ n'est pas inversible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.16

1. Une base adaptée à la somme directe est, par définition, une base de la forme $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ où $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F (avec $r = \dim F$) et $(f_1, \dots, f_{n-r})$ est une base de G (où $n = \dim E$).
Puisque e_1 est dans F, $p(e_1) = e_1$. et plus généralement $p(e_i) = e_i$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.
Et puisque $G = \operatorname{Ker} p$, $p(f_1) = \dots = p(f_{n-r}) = 0_E$.
Donc la matrice de p dans la base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ est

Détails
Les éléments de $F = \operatorname{Im} p$ sont précisément les points fixes de p.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(f_1) & \dots & p(f_{n-r}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-r} \end{array} = J_r = \operatorname{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$$

2. La trace de p est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base. En particulier, la trace de sa matrice dans une base adaptée à la somme directe, c'est-à-dire la trace de J_r, qui vaut r.
Or, le rang de p est égal au rang de J_r, qui a r pivots.
Donc $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$.

3.a. Il est clair que F est un hyperplan[6], donc de dimension 2, et que G est de dimension 1.
Puisque $(-1, 1, 1)$ n'est pas dans F, $F \cap G = \{0\}$ et donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
On sait que dans une base adaptée à la somme directe, la matrice de p est $\operatorname{Diag}(1, 1, 0)$.
Après calculs, une base de F est $(1, 0, 2), (0, 1, 2)$.
Donc une base adaptée à la somme directe est $\mathcal{C} = (1, 0, 2), (0, 1, 2), (-1, 1, 1)$.
On a alors la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$

$$P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[6] Car noyau d'une forme linéaire non nulle.

Par la formule de changement de base

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(p) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(p) \left(P_{\mathcal{B}_{can}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification
Un bon moyen de vérifier son résultat est de s'assurer que cette matrice vérifie $A^2 = A$, signe que c'est bien une matrice de projecteur !

3.b. On sait ensuite que $q = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} - p$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(q) = I_3 - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.c. On sait que $s = p - q$, ou $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$. Et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(s) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.17

1. A et B n'ont pas même trace, donc ne peuvent être semblables.
2. A et B ont même trace (2) et même rang (2). Soit donc f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Posons alors $e_1 = (1/2, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. La famille (e_1, e_2) est libre (car formée de deux éléments non colinéaires) et donc est une base de $\mathbf{R}^2$.
On a $f(e_1) = f(1/2, 0) = \frac{1}{2} f(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 0) = e_1$. Et $f(e_2) = f(0, 1) = (1, 1) = 2e_1 + e_2$.
Donc la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est B.
Par conséquent, A et B représentent toutes deux f dans deux bases différentes : elles sont semblables.
3. A et B ont même rang, mais n'ont pas la même trace : elles ne sont donc pas semblables.
4. A et B ont même trace et même rang. Toutefois, $A = 2I_3$, et donc la seule matrice semblable à A est A. On en déduit que A et B ne sont pas semblables.

> ⚠ Attention !
> Deux matrices semblables ont même rang et même trace, mais si elles ont même rang et même trace, cela ne suffit pas à garantir qu'elles sont semblables !

> Précision
> Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2), alors, par la formule de changement de base, on a
> $$B = P^{-1}AP.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.18

Analysons un peu la situation : nous voulons prouver l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Soit telle que $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, et $e_3 \in \operatorname{Ker} u$.
En particulier, on doit avoir $u^2(e_1) \neq 0_E$.

Prenons donc e_1 un vecteur tel que $u^2(e_1) \neq 0_E$, et notons $e_2 = u(e_1)$ et $e_3 = u^2(e_1)$.
Alors il est classique[7] que (e_1, e_2, e_3) est libre, et donc est une base de E.
La matrice de u dans cette base est alors bien la matrice cherchée.

[7] Voir l'exercice 17 du TD21.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.19

Si f est de rang 1, par le théorème du rang, son noyau est de dimension $n-1$.
Soit donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$, et complétons-là à l'aide d'un vecteur e_n en une base de E.
Alors la matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}.$$

Mais puisque $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1$, alors $\alpha_n = 1$.
Et il vient alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc $f^2 = f$, de sorte que f est un projecteur.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.20

1. Voir l'exercice 15 : dans toute base adaptée à la somme directe $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, la matrice de p est $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\mathrm{rg}(p) \text{ fois}}, 0, \dots, 0)$.
2. Cette fois, dans une base adaptée à la somme directe $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, la matrice de s est de la forme $\mathrm{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, -1, \dots, -1)$ où $r = \dim \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$.

Donc sa trace est $\operatorname{tr}(s) = \underbrace{1+\cdots+1}_{r \text{ fois}} - (\underbrace{1+\cdots+1}_{\dim E - r \text{ fois}})$.
Mais notons qu'alors $\dim E - r = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) = \dim \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$.
Et donc $\operatorname{tr}(s) = \dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) - \dim(s + \operatorname{id}_E)$.

3. Il est clair que f est une symétrie, puisque $f^2 = \operatorname{id}$.
De plus, on a $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid f(A) - A = 0\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid {}^tA = A\} = \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$.
Et de même, on a $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{id}) = \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.
Donc nous savons que $\operatorname{tr}(f) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.

Pour calculer la trace de f, il nous faudrait sa matrice dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Mais nous connaissons une telle base : il s'agit de la base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$.
Par conséquent, la coordonnée de $f(E_{i,j})$ suivant $E_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Autrement dit, le coefficient diagonal de $\mathcal{B}$ dans sa colonne correspondant à $f(E_{i,j})$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
Et donc $\operatorname{tr}(f) = n$.
Puisque de plus $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires, il vient

$$\begin{cases} \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2 \\ \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) - \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = n \end{cases}$$

ce qui après résolution nous donne

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Détails
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors les coefficients $a_{i,j}$ de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont définis par

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Et donc le coefficient diagonal $a_{i,i}$ est la coordonnée suivant e_i de l'écriture de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution de l'exercice 25.21

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Alors si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$, on doit avoir

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Il nous faut donc trouver trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 tels que $f(e_1) = 2e_1, f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.
Or, $f(x,y,z) = 2(x,y,z)$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - z = 2x \\ x + y = 2y \\ -x - 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + z \\ x = y \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre $e_1 = (1, 1, -2)$.

De même, la résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ nous montre qu'on peut prendre $e_2 = (0, 1, -3)$.

Et alors, on a $f(x,y,z) = (x,y,z) + e_2$ si et seulement si

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + y = y + 1 \\ -x - 3y = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 - 3y \end{cases}$$

On peut par exemple prendre $e_3 = (1, 1, -1)$.

Il reste donc à vérifier que (e_1, e_2, e_3) forme bien une base de $\mathbf{R}^3$. Pour cela, utilisons la matrice de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique, qui est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_3 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Un calcul de pivot prouve que cette matrice est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, (e_1, e_2, e_3) est une base $\mathscr{B}$, et alors, par construction

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

Les matrices A et T représentant toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases de $\mathbf{R}^3$, elles sont semblables.
Plus précisément, par la formule de changement de base,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) \left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1}.$$

De plus, $P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $\left(P_{\mathscr{B}_{can}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Notons que $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $DN = DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Or on a $D^2 = 0$, et donc $D^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Il ne reste donc que les termes correspondants à $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme, de sorte que

$$T^n = \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et alors

$$\begin{aligned} A^n &= (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 3(1 - 2^n) & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - n - 2 & 3n + 4 - 3 \cdot 2^n & n + 1 - 2^n \\ -2^{n+2} + 4 + 3n & 3(2^{n+1} - 3n - 2) & 2^{n+1} - 3n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.22

Soient A et B deux matrices semblables, et soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.
Alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$A - \lambda I_n = P^{-1}BP - \lambda I_n = P^{-1}BP - P^{-1}\lambda I_n P = P^{-1}(B - \lambda I_n)P.$$

Donc $A-\lambda I_n$ et $B-\lambda I_n$ sont semblables , et par conséquent ont même rang.

Pour $\lambda = 1$, on a $A-\lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1.

Alors que $B - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Donc A et B ne sont pas semblables[8].

Mieux

Non seulement elles sont semblables, mais on peut prendre la même matrice de passage P que pour la relation de similitude entre A et B.

[8] Et ce alors qu'elles ont même trace et même rang.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.23

1. La matrice M ne peut être inversible, puisque sinon M^2 le serait[9], ce qui n'est pas le cas.
   Donc $\dim \operatorname{Ker} M \geqslant 1$. Or, $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$, et puisque M^2 est de rang 2, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$.
   Donc $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} M \leqslant \dim \operatorname{Ker} M^2 = 1$, de sorte que nécessairement $\dim \operatorname{Ker} M = 1$.
   Puisque $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker} M^2$ et que ces espaces ont même dimension, ils sont égaux.
   Par le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Im} M = \dim \operatorname{Im} M^2$.
   Or $\operatorname{Im} M^2 \subset \operatorname{Im} M$, d'où l'égalité.

[9] Car produit de matrices inversibles.

2. On a clairement $\operatorname{Ker} M^2 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Or, pour toute matrice 3×3, $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est rien d'autre que la première colonne de M.

   Donc la première colonne de M est nulle.

   De même, $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, l'ensemble des vecteurs colonnes dont la dernière coordonnée est nulle.
   Donc toutes les colonnes de M sont dans cet espace, et donc ont leur dernière coordonnée nulle.
   Donc la dernière ligne de M est nulle.

   Par conséquent, M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Mais alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & ac & ad \\ 0 & c^2 & cd \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Donc $c = 0$, et alors $ac = 1$ n'est pas possible.
   En conclusion, il n'existe pas de matrice M comme indiqué.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.24

1. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $D - \lambda I_n = \operatorname{Diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)$.
   Elle est non inversible si et seulement si elle possède un coefficient diagonal nul.
   Soit si et seulement si l'un des $\lambda_i - \lambda$ est nul.

Remarque

Ce résultat a été prouvé directement sur les matrices, mais vous il n'est pas inintéressant d'essayer de le réinterpréter en termes d'endomorphismes.

2. Matriciellement, il s'agit de prouver que la matrice de f dans la base canonique[10] est semblable à une matrice diagonale.
   Notons A cette matrice : après calculs, on a

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}.$$

[10] Ou en fait dans n'importe quelle base.

   Supposons que D soit la matrice de f dans une autre base $\mathscr{B}$, alors quel que soit le réel λ, $D - \lambda I_3$ est la matrice de $f - \lambda \mathrm{id}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   Et donc est semblable à $A - \lambda I_3$ qui est la matrice de $f - \lambda\mathrm{id}$ dans la base canonique.
   Donc $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $D - \lambda I_3$ l'est.
   Or, un raisonnement similaire à la première question[11] prouve que $A - \lambda I_3$ n'est **pas inversible** si et seulement si $\lambda \in \{1, 2, 5\}$.
   Donc les coefficients diagonaux de D sont nécessairement parmi 1, 2 et 5.
   Or, si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

[11] Le critère d'inversibilité est le même pour les triangulaires et les diagonales.

Vers la spé

Les λ tels que $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible sont appelés valeurs propres de A et seront intensivement étudiés en spé. Le raisonnement que nous venons de tenir prouver que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Cherchons donc s'il existe des vecteurs tels que $f(x) = x$, $f(x) = 2x$ ou $f(x) = 6x$.
Soit donc $P = a + bX + cX^2 \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors

$$f(P) = P \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+4c = a \\ 2b+2c = b \\ 6c = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1).$$

De même, on prouve que $f(P) = 2P \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X-1)$ et

$$f(P) = 5P \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(7 + 4X + 6X^2).$$

Posons donc $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = 6X^2 + 4X + 7$, de sorte que (P_1, P_2, P_3) est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, et donc par cardinal, est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
Alors la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, qui est bien une matrice diagonale.

Alternative : plus théorique[12]
Puisque $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible pour $\lambda \in \{1,2,5\}$, le noyau de $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas réduit au vecteur nul.
Et donc il existe $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $f(P) - \lambda P = 0 \Leftrightarrow f(P) = \lambda P$.
Autrement dit, sans faire de calculs, et sans avoir de système à résoudre, on a l'existence d'une famille (P_1, P_2, P_3) de polynômes non nuls tels que $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = 2P_3$ et $f(P_3) = 5P_3$.
Reste à prouver qu'une telle famille est libre.
Soient donc α, β, γ des réels tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$.
Alors en appliquant f, il vient $\alpha P_1 + 2\beta P_2 + 5\gamma P_3 = 0$.
Par soustraction de ces deux relations, $\beta P_2 + 4\gamma P_3 = 0$.
En appliquant de nouveau f, $2\beta P_2 + 20\gamma P_3 = 0$, ce qui combinée à la relation $\beta P_2 = -4\gamma P_3$ nous donne $\gamma P_3 = 0$, et donc[13] $\gamma = 0$.
Puis en remontant, on arrive à $\beta = \alpha = 0$.
La conclusion est la même que dans la première solution : on a une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

[12] Et plus proche de ce qui se fera en spé.

[13] Et là il était important d'avoir $P_3 \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.25

Commençons par noter que vous connaissez déjà une telle application dans le cas $n = 2$, il s'agit du déterminant.
Et dans ce cas, on retrouve un résultat déjà prouvé dans le chapitre de matrices : une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Patience...
Nous généraliserons bientôt le déterminant à des matrices $n \times n$.

Remarquons que $I_n^2 = I_n$, et donc $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)f(I_n) = f(I_n)^2$.
Donc $f(I_n)^2 - f(I_n) = 0$, autrement dit, $f(I_n)$ est une racine de $X^2 - X$.
Mais ce polynôme possède 0 et 1 comme racines, et étant de degré 2, ce sont les seules.
Donc $f(I_n) = 0$ ou $f(I_n) = 1$.
Si on avait $f(I_n) = 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(A) = f(AI_n) = f(A) \times 0 = 0$, contredisant le fait que f est non constante.
Donc $f(I_n) = 1$.
De même, $f(0_n) \in \{0,1\}$, et si on avait $f(0_n) = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

Remarque
Je ne parle de polynôme que pour insister sur le fait que $x^2 = x \Rightarrow x \in \{0,1\}$ est valable dans tout corps ! Dans $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ vous le savez bien.

$$f(0_n) = f(A \times 0_n) = f(A)f(0_n) = f(A)$$

donc f serait constante égale à 1. Donc $f(0_n) = 0$.

Si A est inversible, alors $f(A)f(A^{-1}) = f(AA^{-1}) = f(I_n) = 1$, et donc $f(A)$ est inversible[14].

[14] D'inverse $f(A^{-1})$.

Inversement, si A n'est pas inversible, alors elle est de rang $r \in [\![0, n-1]\!]$.
Et on sait alors que A est équivalente à toute matrice de rang r.

▶ Si $r = n-1$, considérons alors

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors J est échelonnée, de rang $n-1$, et on constate facilement que

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis en calculant J^3, la «sur-diagonale» de 1 se décale encore d'un cran vers le haut, etc, jusqu'à J^{n-1} qui possède seulement son coefficient en haut à droite non nul, et donc $J^n = 0$.

Classique

J est l'archétype de la matrice nilpotente, et si vous avez un jour besoin d'une matrice nilpotente, il est bon de penser à celle-ci.
En fait, toute matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux nuls est nilpotente.

Normalement le fait de faire le produit «à la main» doit vous en convaincre.
Si cela ne suffit pas, il est possible d'introduire l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à J.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, alors on a

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ e_{i-1} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

On prouve alors[15] que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, f^k est donné par

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f^k(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k \\ e_{i-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et donc en particulier, pour tout i, $f^n(e_i) = 0$, et donc $f^n = 0$, de sorte que $J^n = 0$.

Anyway : J est nilpotente, avec $J^n = 0$.
Donc $0 = f(J^n) = f(J)^n$, et par conséquent $f(J) = 0$.
Or A est équivalente à J, donc il existe $P, Q \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PJQ$. Et donc $f(A) = f(P)f(J)f(Q) = 0$.
▶ Le cas général s'en déduit facilement, en notant que J^k est de rang $n-1-k$. Et en particulier, J^{n-1-r} est nilpotente de rang r.
Par conséquent, elle est équivalente à A, et donc $f(A) = f(P)f(J)^{n-1-r}f(Q) = 0$.
Donc si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Nous avons donc bien prouvé l'équivalence A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

[15] Par récurrence sur k.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.26

Le système possède des solutions si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est dans $\operatorname{Im}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Il est aisé de constater que A est de rang 2 puisque sa dernière colonne est la somme des deux autres.

Donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

Soit si et seulement si ce dernier système[16] possède des solutions. Mais en utilisant la méthode du pivot, on arrive au système échelonné suivant :

[16] D'inconnues λ et μ.

$$\begin{cases} \lambda = b \\ \mu = a - b \\ 0 = c - a - b \end{cases}$$

Donc le système possède des solutions si et seulement si $c - a - b = 0$.
Dans ce cas, les solutions sont une infinité, et mieux : $\mathrm{Ker}\, A$, l'ensemble des solutions du système homogène associé est de dimension 1.
Commentaires *: nous dirons bientôt que l'ensemble des solutions, quand il est non vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, de dimension 1.*
Cela signifie grosso modo que les solutions ne vont dépendre que d'un seul paramètre.

Remarque
Nous venons donc de trouver une équation de l'hyperplan $\mathrm{Im}(A)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 25.27

1. Il est clair que φ est injectif, et $\mathbf{C}^3$ et $\mathbf{C}_2[X]$ ayant mêmes dimensions, φ est un isomorphisme.
2. La première équation s'écrit encore $P_{x,y,z}(a) = u_1$, la seconde $P_{x,y,z} = u_2$ et la dernière $P_{x,y,z}(c) = u_3$.

   Donc (x, y, z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $\begin{cases} P_{x,y,z}(a) = u_1 \\ P_{x,y,z}(b) = u_2 \\ P_{x,y,z}(c) = u_3 \end{cases}$.
3. Puisque a, b, c sont deux à deux distincts, les résultats sur l'interpolation de Lagrange garantissent qu'il existe un unique polynôme de degré au plus 2 qui prend respectivement les valeurs u_1, u_2, u_3 en a, b, c.
   Et ce polynôme est

$$u_1 \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + u_2 \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + u_3 \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Remarque
Et ceci est vrai sans condition sur (u_1, u_2, u_3).

En développant, et en identifiant les coefficients (x est le coefficient constant, y le coefficient en X, etc), on obtient comme unique solution de $(\mathcal{S})$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u_1 bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2 ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3 ab}{(c-a)(c-b)} \\ y &= \frac{-u_1(b+c)}{(a-b)(a-c)} - \frac{u_2(a+c)}{(b-a)(b-c)} - \frac{u_3(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ z &= \frac{u_1}{(a-b)(a-c)} + \frac{u_2}{(b-a)(b-c)} + \frac{u_3}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}$$

En théorie il était possible d'obtenir cette solution en résolvant le système classiquement, par la méthode du pivot. Ne vous privez pas si ça vous fait envie, mais je passe mon tour !

Intégration 26

Le but de ce chapitre est de définir **rigoureusement** ce qu'est une intégrale.
Bien entendu, vous avez l'impression[1] de déjà savoir ce qu'est une intégrale.
Mais la définition d'intégrale dont nous disposons pour l'instant (à l'aide d'une primitive) a plusieurs lacunes :

- on a admis jusque là l'existence de primitive(s) d'une fonction continue
- elle n'explique en rien le lien entre l'aire et l'intégrale qu'on vous a appris en terminale. Et d'ailleurs, qu'est-ce qu'une aire ?
- Elle nécessite des fonctions continues, et par exemple ne nous autorise pas à calculer $\displaystyle\int_0^2 \lfloor x \rfloor\,dx$, alors que graphiquement, on se fait une bonne idée de ce que doit valoir cette intégrale.

Nous allons donc reconstruire l'intégrale en partant de zéro, et retrouver toutes les propriétés que nous connaissons déjà.
Pour la culture, mentionnons qu'il existe plusieurs théories de l'intégration, et que l'intégrale que nous construisons ici se nomme l'intégrale de Riemann.
C'est probablement la plus facile à construire, mais elle souffre de plusieurs lacunes :

1. elle est délicate à étendre à des intégrales de fonctions définies sur autre chose qu'un segment (par exemple $]0,1]$ ou $[0,+\infty[$), sujet auquel vous consacrerez un peu de temps en seconde année
2. certains grands théorèmes (par exemple le théorème de convergence dominée au programme de seconde année) sont franchement désagréables à prouver dans le contexte de l'intégrale de Riemann.
3. elle ne nous permet pas de définir par exemple $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(t)\,dt$.

Une autre théorie de l'intégration très célèbre se nomme l'intégrale de Lebesgue. Elle est bien plus difficile à construire[2], mais elle possède de nombreux avantages, notamment de répondre aux trois problèmes soulevés ci-dessus (les preuves des grands théorèmes d'intégration sont presque triviales avec le vocabulaire de l'intégrale de Lebesgue), et de fournir un cadre très général dans lequel faire des probabilités.
Un certain nombre d'entre vous auront l'occasion d'en reparler en école, et pas uniquement ceux qui suivront des cursus de maths pures.

Dans toute la suite du chapitre, en l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

26.1 Fonctions uniformément continues

Définition 26.1 – Soit $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbf{R}$. On dit que f est **uniformément continue sur** D si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in D^2,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Notons tout de suite la différence avec la continuité : une fonction f est continue sur D si elle est continue en tout point de D. Soit si et seulement si

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in D,\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

La différence réside donc uniquement dans l'ordre des quantificateurs : pour une fonction continue, le η dépend du point x choisi[3], alors que pour une fonction uniformément continue, le même η convient pour tout x.

[1] Et à juste titre.

[2] Et c'est la raison pour laquelle elle n'est pas enseignée en prépa.

[3] Et bien entendu du ε.

Proposition 26.2 : *Une fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. C'est une simple permutation de quantificateurs : si il existe un η qui convient pour tout x, alors pour tout x, il existe un η tel que...
Dans le détail : fixons $\varepsilon > 0$. Alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in D^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
Soit donc $x \in D$ fixé. Alors, pour tout $y \in D$, si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
Donc f est continue en x, et ceci étant vrai pour tout $x \in D$, f est continue sur D. □

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue sans être uniformément continue, c'est-à-dire que le η dépend réellement de x.
Par exemple considérons la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}^+$.
Prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^+$ et $h > 0$, on a

$$|f(x+h) - f(x)| = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Et donc en particulier, pour $\eta > 0$ fixé, prenons $x = \frac{1}{\eta}$ et $h = \frac{\eta}{2}$.
Alors les deux réels x et $y = x+h$ vérifient $|x-y| = \frac{\eta}{2} < \eta$ mais $|f(x)-f(y)| = 2\frac{1}{\eta}\frac{\eta}{2} + \frac{\eta^2}{4} > 1$.
Ainsi, on a prouvé que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbf{R}_+^2, |x-y| < \eta \textbf{ et } |f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Ce qui est bien la négation de f uniformément continue.

Proposition 26.3 : *Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : D \to \mathbf{K}$ une fonction k-lipschitzienne, avec $k > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.
Alors pour tout $(x,y) \in D^2$, si $|x-y| < \eta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k\frac{\varepsilon}{k} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc f est uniformément continue. □

On a donc les implications f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.
Mais aucune des deux implications réciproques n'est vraie[4].

Le résultat qui suit est vraiment fondamental dans la suite :

Théorème 26.4 (de Heine) : *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{K}$. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, de sorte que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| < \eta \textbf{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, il existe x_n, y_n tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
Puisque (x_n) est bornée[5], par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel x.
Notons que x est encore dans $[a,b]$ car $a \leqslant x_{\varphi(n)} \leqslant b$, et que les inégalités sont préservées par passage à la limite.
Puisque $\dfrac{1}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)}$, on a également $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Par caractérisation séquentielle de la continuité[6], $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, et de même pour $f(y_{\varphi(n)})$.
Et donc en passant à la limite $|f(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$, ce qui est absurde. □

[4] Nous avons déjà prouvé qu'il existe des fonctions continues non uniformément continues, voir un peu plus loin pour une fonction uniformément continue et non lipschitzienne.

[5] Elle est à valeurs dans $[a,b]$.

[6] Et c'est là qu'on utilise la continuité de f.

Rappelons que nous avions prouvé que la fonction racine carrée, n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. En revanche, étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est[7] uniformément continue. Et nous avons donc là un exemple de fonction uniformément continue non lipschitzienne.

[7] Par le théorème de Heine.

26.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 26.5 – Si $[a,b]$ est un segment, avec $a \leqslant b$, on appelle **subdivision de** $[a,b]$ toute partie finie $\sigma = \{x_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ de $[a,b]$ avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Le réel $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$ est appelé le pas de σ.

Autrement dit, se donner une subdivision de $[a,b]$, c'est juste se donner un «découpage» de $[a,b]$ en un nombre fini de segments plus petits.

L'exemple le plus classique de subdivision est, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la subdivision à n éléments obtenue en posant $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
On parle de subdivision à **pas régulier**.

26.2.1 Fonctions en escalier

Définition 26.6 – Soit $f : [a,b] \to \mathbf{K}$. On dit que f est une **fonction en escalier** s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit constante.
Une telle subdivision σ est dite **adaptée** à la fonction f.
On note $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

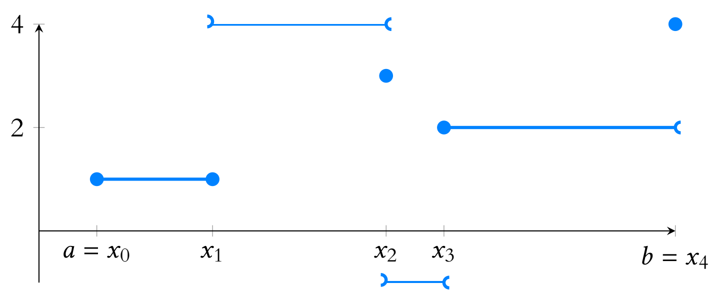


Figure 26.1 – Un exemple de fonction en escalier.

Remarques. ▶ Notons qu'on n'impose rien sur la valeur des $f(x_i)$. La fonction f peut être continue à droite en x_i, elle peut être continue à gauche, ou elle peut n'être ni l'un ni l'autre. Voir par exemple la fonction ci-dessus.
▶ Il n'y a absolument pas unicité d'une subdivision adaptée à f : si $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à f, alors toute subdivision plus fine[8] l'est encore.
En effet, la restriction d'une fonction constante à une partie de son ensemble de définition est encore une fonction constante.

[8] C'est-à-dire contenant tous les x_i.

Proposition 26.7 : *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ des fonctions en escalier est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{K})$.*

Démonstration. La preuve n'est pas si dure, mais plutôt désagréable à écrire.
La seule chose à laquelle il faut être soigneux lorsqu'on manipule deux fonctions en escalier f et g est qu'elles ont a priori chacune une subdivision qui leur est adaptée, mais il n'y a aucune raison qu'il s'agisse de la même.
En revanche, l'union de ces deux subdivisions, réarrangée par ordre croissant, et après élimination des éventuels doublons[9] est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que les deux

[9] Par exemple a et b sont déjà dans les deux subdivisions de départ.

subdivisions adaptées à f et à g, et donc adaptée aux deux à la fois.

Une fois établie l'existence d'une telle subdivision, il n'y a plus grand chose à faire. Prouvons par exemple que $\lambda f + g$ est encore une fonction en escalier.
Soit donc $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons alors μ_i (resp. ν_i) l'unique valeur que prend f (resp. g) sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Alors pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$, $(\lambda f + g)(t) = \lambda\mu_i + \nu_i$, et donc $\lambda f + g$ est bien constante sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Et donc $\lambda f + g \in \mathscr{E}([a, b])$. Notons que nous avons prouvé au passage qu'une subdivision adaptée à la fois à f et g est adaptée à $\lambda f + g$.
La preuve de stabilité de $\mathscr{E}([a, b])$ par produit est du même acabit. □

26.2.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 26.8 – Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, et soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ une subdivision adaptée. Alors on appelle **intégrale de f entre a et b**, et on note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ le réel défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_i$$

où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, λ_k est la valeur que prend f sur $]x_k, x_{k+1}[$.
Cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.

Remarque
On a
$$\lambda_i = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

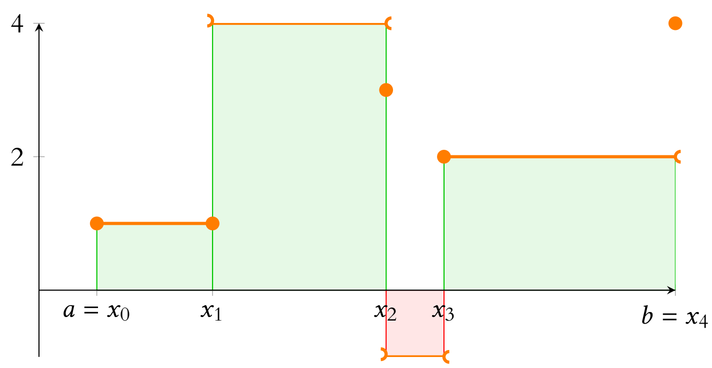


FIGURE 26.2 – L'interprétation en termes d'aire de l'intégrale d'une fonction en escalier est assez évidente. Notons que la valeur de f en les points qui composent la subdivision n'a aucune importance.

Avant de prouver que cette quantité est bien indépendante de la subdivision adaptée choisie, notons que l'interprétation en terme d'aire est assez évidente, du moins si on accepte que l'aire d'un rectangle est bien donnée par `longueur × largeur`.
En effet, $\lambda_k(x_{k+1} - x_k)$ est bien l'aire du rectangle délimité par l'axe des abscisse, la courbe de f et les droites d'équations $x = x_{k+1}$ et $x = x_k$.

Plus précisément
Nous parlons là d'une aire algébrique, qu'on autorise à être négative si $\lambda_k < 0$.

Démonstration. Il s'agit de prouver[10] que cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.

Étant donnée une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ adaptée à f, notons $I_\sigma(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$, où $\lambda_k = f\left(\dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)$.
Commençons par ajouter que si σ' est une subdivision obtenue à partir de σ par ajout d'un point, alors $I_{\sigma'}(f) = I_\sigma(f)$.
Notons par exemple c le point ajouté, et soit p tel que $x_p < c < x_{p+1}$.

[10] C'est assez facile à comprendre, plus pénible à écrire...

Alors σ' est encore adaptée à f, et on a

$$I_{\sigma'}(f) = \sum_{k=0}^{p-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+(c-x_p)f\left(\frac{c+x_p}{2}\right)+(x_{p+1}-c)f\left(\frac{x_{k+1}+c}{2}\right)+\sum_{k=p+1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right).$$

Mais f est constante sur $]x_p, x_{p+1}[$ et donc $f\left(\frac{x_p+c}{2}\right) = f\left(\frac{c+x_{p+1}}{2}\right) = f\left(\frac{x_p+x_{p+1}}{2}\right)$.
Par conséquent,

$$(c-x_k)f\left(\frac{c+x_k}{2}\right) + (x_{k+1}-c)f\left(\frac{x_{k+1}+c}{2}\right) = (x_{k+1}-c+c-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$$

et donc $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.
Une récurrence triviale prouve que l'ajout d'un nombre fini de points à une subdivision ne change pas la valeur de l'intégrale de f.

Considérons à présent σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f. Alors $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est encore une subdivision adaptée à f, obtenue à partir de σ_1 par ajout d'un nombre fini de points[11].
Et donc $I_{\sigma_1}(f) = I_{\sigma_1\cup\sigma_2}(f)$. De même $I_{\sigma_2}(f) = I_{\sigma_1\cup\sigma_2(f)}$.
Il vient donc bien $I_{\sigma_1}(f) = I_{\sigma_2}(f)$. □

[11] Ceux de σ_2 qui n'étaient pas déjà dans σ_1.

Cette définition de l'intégrale des fonctions en escalier jouit déjà de bonnes propriétés qu'on attendrait pour une intégrale[12] :

[12] Et que nous avons prouvé pour les fonctions continues… en admettant le théorème fondamental de l'analyse !

Proposition 26.9 : *Soient $(f,g) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :*

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. *Si $f \geqslant 0$ (ce qui n'a de sens que pour f à valeurs réelles), alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
3. *Si $f \leqslant g$ (avec là aussi f et g à valeurs réelles), alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.
4. *Pour tout $c \in [a,b]$,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *(relation de Chasles).*
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ *(inégalité triangulaire).*
6. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.$

Remarque
Il n'y a pas équivalence : l'intégrale d'une fonction qui n'est pas de signe constant peut être positive.

Démonstration. 1. Si σ_1 est une subdivision adaptée à f et σ_2 une subdivision adaptée à g, alors $\sigma_1\cup\sigma_2$ est adaptée à f et à g à la fois, travaillons donc avec une telle subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Nous avons déjà prouvé que $\lambda f + g$ est encore constante sur chacun des $]x_k, x_{k+1}[$.
Et alors

$$\begin{aligned}\int_a^b(\lambda f(t)+g(t))\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left(\lambda f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+g\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)g\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\\ &= \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.\end{aligned}$$

2. Si f est positive, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{\geqslant 0}\underbrace{f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Mieux
Le résultat reste valable si on demande f positive sauf en un nombre fini de points.

3. Il suffit d'appliquer la positivité à $g - f$, puis la linéarité de l'intégrale.
4. Si $c = a$ ou $c = b$, il n'y a pas grand chose à dire, si ce n'est constater que $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$.
Supposons donc $c \in]a, b[$. Considérons une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[a, b]$ adaptée à f, qui contient[13] c, et soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $c = x_p$. Alors
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + \sum_{k=p}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right).\end{aligned}$$
Mais $x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$ est une subdivision de $[a, c]$ adaptée à f, de sorte que la première somme ci-dessus vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$.
Et de même, $x_k < \cdots < x_n$ est une subdivision de $[c, b]$ adaptée à f et la seconde somme vaut donc $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$.
5. Par l'inégalité triangulaire (pour les sommes), on a
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\lambda_k\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)|\lambda_k|\\ &\leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$
6. Notons que les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont encore toutes les deux des fonctions en escalier.
On a alors
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\left(\mathrm{Re}(\lambda_k)+i\,\mathrm{Im}(\lambda_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,\mathrm{Re}(\lambda_k) + i\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,\mathrm{Im}(\lambda_k)\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.\end{aligned}$$
□

[13] Il est toujours possible de l'ajouter à une subdivision.

26.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

26.3.1 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Les fonctions que nous allons pouvoir intégrer ne se limitent pas aux fonctions continues, nous allons autoriser également des fonctions qui ont un nombre fini de points de discontinuité. Mais attention pas toutes les fonctions qui ont un nombre fini de points de discontinuité, uniquement celles de la forme suivante :

Définition 26.10 – Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1}.
Une telle subdivision est dite adaptée à f.
On note $\mathscr{C}_m([a, b], \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques. ▸ Comme pour les fonctions en escalier, il n'y a pas de contrainte sur la valeur de f aux points de la subdivision.
▸ En revanche, le fait que $f_{|]x_i, x_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} se

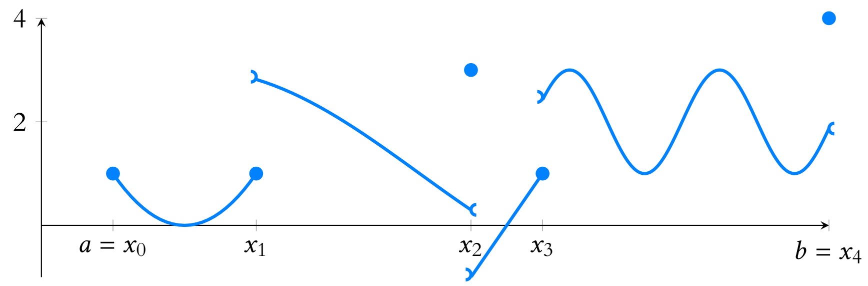


Figure 26.3 – Un exemple de fonction continue par morceaux.

reformule de la manière suivante : f possède des limites finies à droite et à gauche en tous les x_i.
▶ Et comme pour les fonctions en escalier, il n'y a pas unicité d'une subdivision adaptée.
▶ Une fonction en escalier est continue par morceaux : $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K}) \subset \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$.

Exemples 26.11

▶ Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ y est continue par morceaux[14].
▶ La restriction de la fonction partie entière à un segment est continue par morceaux sur ce segment.

[14] Et il suffit de prendre la subdivision à deux points $a < b$.

⚠ Une fonction continue par morceaux n'est pas seulement une fonction avec un nombre fini de points de discontinuité, il y a vraiment la condition sur les limites latérales en les x_i.

Par exemple, la fonction définie sur $[-1,1]$ par $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.

Proposition 26.12 : *L'ensemble $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{F}([a,b],\mathbf{K})$.*

Démonstration. La preuve est à peu près la même que pour les fonctions en escalier.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, et si $a = x_0 < x_1 < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fois à f et à g, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda f + g)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $(fg)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ sont continues sur $]x_k, x_{k+1}[$.
De plus, $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $g_{|]x_k,x_{k+1}[}$ possèdent des limites à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}, donc il en est de même de $(\lambda f + g)_{|]x_k,x_{k+1}[}$ et $(fg)_{|]x_k,x_{k+1}[}$. □

Proposition 26.13 : *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Démonstration. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, et soit $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f.
Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le prolongement par continuité de $f_{|]x_k,x_{k+1}[}$ à $[x_k, x_{k+1}]$ est une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$ et donc est bornée. Notons M_k un majorant de sa valeur absolue[15], de sorte que pour tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $|f(x)| \leqslant M_k$.
Si on pose $M = \max(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, |f(x_0)|, \dots, |f(x_n)|)$, alors pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leqslant M$. □

[15] Son module dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 26.14 – Plus généralement, une fonction f définie sur un intervalle[16] I est dite **continue par morceaux sur** I si pour tout segment $[a,b]$ de I, $f_{|[a,b]}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

[16] Qui peut être ouvert et/ou non borné.

Exemple 26.15

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

26.3.2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Définition 26.16 – Si $f : [a,b] \to \mathbf{K}$ est une fonction bornée sur $[a,b]$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.

Terminologie
On parle de la «norme infinie» de f.

Notons qu'en particulier, $\|f\|_\infty$ est bien définie si f est continue sur $[a,b]$, ou si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.
Graphiquement, $\|f\|_\infty$ est le plus petit réel M tel que le graphe de f soit compris entre les deux droites horizontales d'équations $y = M$ et $y = -M$.

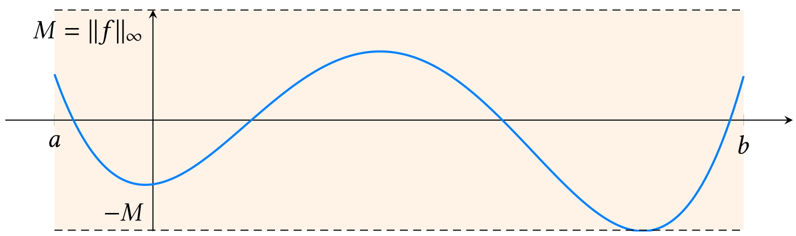


FIGURE 26.4 – Interprétation de la norme infinie.

Les propriétés qui suivent justifient que l'on appelle $\|\cdot\|_\infty$ une norme, mais vous n'étudierez ces objets qu'en seconde année.
Pour vous faire une intuition, remplacez dans l'énoncé suivant les fonctions par des vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et les $\|\cdot\|_\infty$ par les normes usuelles[17] des vecteurs.

Proposition 26.17 : *Soient f, g deux fonctions bornées sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors*

1. $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
2. $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Démonstration.
1. Pour tout $t \in [a,b]$, on a $|\lambda f(t)| = |\lambda| \cdot |f(t)|$.
Donc en passant au sup, $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.
2. Pour tout $t \in [a,b]$, on a $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Et donc, en passant au sup[18], $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
3. Il est évident que si f est la fonction nulle, alors $\|f\|_\infty = 0$.
Inversement, si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $t \in [a,b]$, $-0 \leqslant f(t) \leqslant 0$, et donc $f(t) = 0$, de sorte que f est la fonction nulle.

□

[17] C'est-à-dire les longueurs !

[18] Rappelons qu'il s'agit du plus petit des majorants.

Définition 26.18 – Si f et g sont deux fonctions bornées sur $[a,b]$, on appelle **distance uniforme entre f et g** le réel positif $\|f-g\|_\infty$.

Théorème 26.19 (Approximation uniforme par des fonctions en escalier) : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbf{K})$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction en escalier φ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Autrement dit
Il existe toujours une fonction en escaliers qui ne s'éloigne jamais de plus de ε de f.

Démonstration. ▸ Commençons par le cas où f est continue sur $[a,b]$, et à valeurs réelles.
Par le théorème de Heine, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x-y| \leqslant \eta$, $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

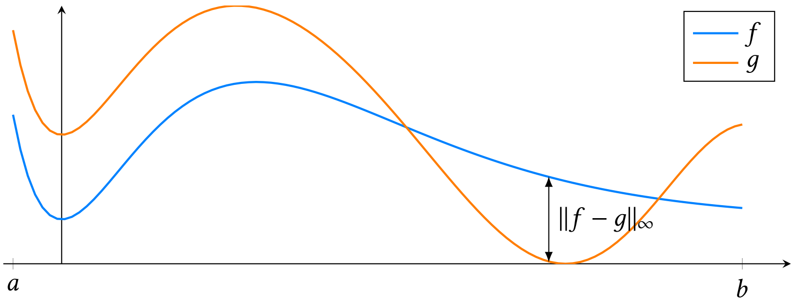


Figure 26.5 – Graphiquement, $\|f-g\|_\infty$ est la plus grande distance verticale entre les graphes de f et de g.

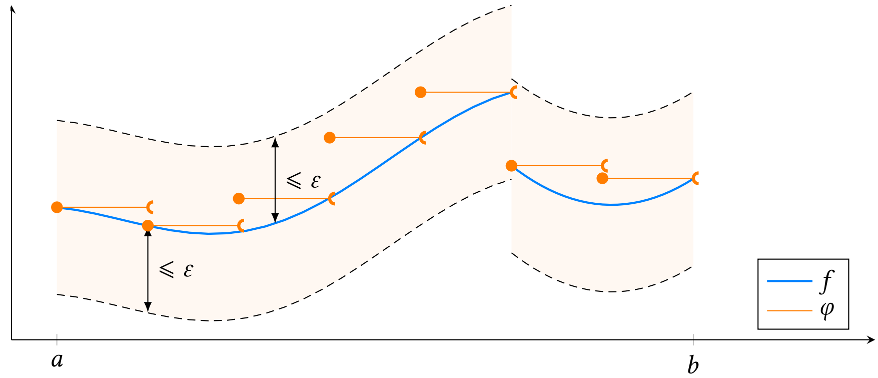


Figure 26.6 – La distance entre f et φ est inférieure à ε.

Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} < \eta$, et posons alors $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la subdivision régulière de $[a,b]$ définie par $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, notons $M_k = \max\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]} f(t)$. Posons alors $\varphi : t \mapsto \begin{cases} M_k & \text{si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } t = b \end{cases}$

Il est alors évident que φ est une fonction en escalier, vérifiant de plus $f \leqslant \varphi$.

Notons que par le théorème des bornes atteintes, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $T_k \in [x_k, x_{k+1}[$ tel que $f(T_k) = M_k$.
Et donc pour $t \in [x_k, x_{k+1}[$, on a alors $|f(t) - \varphi(t)| = |f(T_k) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ puisque $|T_k - t| \leqslant |x_{k+1} - x_k| < \eta$.
Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [a,b]$, on en déduit que $\|f - \varphi\| \leqslant \varepsilon$.
► Dans le cas d'une fonction continue sur $[a,b]$, mais à valeurs complexes, il n'y a pas grand chose à changer, si ce n'est qu'il faut poser $M_k = \max\limits_{t\in[x_k,x_{k+1}]} |f(t)|$, et noter T_k un point où ce maximum est atteint.
On peut alors poser $\varphi : t \mapsto \begin{cases} f(T_k) & \text{si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } t = b \end{cases}$ et vérifier qu'elle convient[19].

► Passons à présent au cas général d'une fonction continue par morceaux.
Soit donc $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, notons $\widetilde{f_i}$ le prolongement par continuité de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ à $[x_i, x_{i+1}]$.
Par ce qui précède, il existe donc une fonction φ_i, en escalier sur $[x_i, x_{i+1}]$ telle que $\forall t \in]x_i, x_{i+1}[$,

$$|\varphi_i(t) - \underbrace{\widetilde{f_i}(t)}_{=f(t)}| \leqslant \varepsilon.$$

Si on pose alors

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \varphi_i(t) & \text{si } t \in]x_i, x_{i+1}[\\ f(x_i) & \text{si } t = x_i \end{cases}$$

alors on vérifie sans grande difficulté qu'on a bien les propriétés attendues. □

[19] Pour les mêmes raisons que dans le cas réel, il suffit de remplacer les valeurs absolues par des modules, ce qui est complètement indolore.

Remarque. Remarquons que dans le cas d'une fonction f à valeurs réelles, nous avons prouvé qu'il était toujours possible de prendre φ de sorte que $f \leqslant \varphi$.
Vous interpréterez l'an prochain ce résultat en parlant de la *densité* de l'ensemble des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux : on peut approcher une fonction continue par morceaux d'aussi près[20] qu'on le souhaite par des fonctions en escalier.

[20] Au sens de la norme infinie.

Corollaire 26.20 – *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = 0$.*
On dit qu'une telle suite converge uniformément vers f.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $\varphi_n \in \mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$ telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Et alors la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a bien la propriété annoncée. □

26.3.3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Proposition 26.21 : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Alors pour toute suite $(\varphi)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escaliers telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty$, la suite $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.*

Démonstration. Puisque la suite $(\|f-\varphi_n\|_\infty)_n$ converge, elle est bornée.
Notons donc M un de ses majorants. Alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant M$.
Et alors par inégalité triangulaire, $|\varphi_n(t)| \leqslant |f_n(t)| + M \leqslant \|f\|_\infty + M$.
On en déduit donc que

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(t)|\,dt \leqslant \int_a^b (\|f\|_\infty + M)\ dt \leqslant (b-a)(\|f\|_\infty + M).$$

Donc la suite $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_n$ est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède donc une suite extraite convergente.

Notons alors $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extractrice telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)\,dt = \ell \in \mathbf{R}$.

Alors pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \varphi_n(t) - \int_a^b \varphi_{\psi(n)}(t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b \left(\varphi_n(t)-\varphi_{\psi(n)}(t)\right)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |\varphi_n(t)-\varphi_{\psi(n)}(t)|\,dt \\
&\leqslant (b-a)\|\varphi_n - \varphi_{\psi(n)}\|_\infty \\
&\leqslant (b-a)\left(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f-\varphi_{\psi(n)}\|_\infty\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \ell$. □

Proposition 26.22 : *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbf{K})$. Si $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites de fonctions en escalier telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\varphi_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f-\psi_n\|_\infty = 0$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)\,dt.$$

*Cette limite indépendante du choix d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f est appelée **intégrale de f sur** $[a,b]$, et on la note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt - \int_a^b \psi_n(t)\,dt\right| &\leqslant \int_a^b |\varphi_n(t) - \psi_n(t)|\,dt \\ &\leqslant (b-a)\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \\ &\leqslant (b-a)\left(\|\|f - \varphi_n\|_\infty + \|\psi_n - f\|_\infty\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Puisque ces deux suites sont convergentes, elles ont donc la même limite. □

Remarques. ▶ La définition de l'intégrale n'est donc pas facile à manipuler, puisqu'elle cache un passage à la limite.
▶ Soyez rassurés : nous ne calculerons jamais une intégrale en cherchant une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers la fonction que l'on cherche à intégrer.
▶ La définition est somme toute assez géométrique : on définit l'aire sous la courbe à l'aide de petits rectangles approchant de mieux en mieux la partie du plan située sous la courbe.
▶ Si f elle-même est une fonction en escalier, alors on peut prendre (φ_n) suite constante égale à f, dont la limite est déjà ce que nous avions appelé $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Autrement dit, l'intégrale que nous venons de définir (pour des fonctions continues par morceaux) coïncide bien, pour une fonction en escalier avec celle définie précédemment.

Reste donc à prouver que l'intégrale ainsi définie possède bien les propriétés qu'on lui connaît dans le cas des fonctions continues.

Déjà fait ?

Avons-nous déjà prouvé ces propriétés pour les fonctions continues ? Oui et non ! Les preuves données dans le chapitre 8 sont correctes, mais reposent toujours sur le théorème fondamental de l'analyse, qui n'a toujours pas été prouvé (patience, plus que quelques pages à attendre...).

Proposition 26.23 (Propriétés de l'intégrale) : *Soient $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbf{K})$. Alors*

1. $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$ *(linéarité de l'intégrale)*
2. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si $f \geqslant 0$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$ *(positivité de l'intégrale)*
3. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ si $f \leqslant g$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ *(croissance de l'intégrale)*
4. *Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$.
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$ *(inégalité triangulaire)*
6. *si f et g ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.
7. *pour tout $c \in]a,b[$,* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Remarque

Si f est continue par morceaux, $|f|$ l'est aussi.

Démonstration. Notons (φ_n) (resp. (ψ_n)) une suite de fonctions en escalier telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (resp. $\|g - \psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

1) Alors pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\|(\lambda f + g) - (\lambda\varphi_n + \psi_n)\|_\infty \leqslant |\lambda|\|f - \varphi_n\|_\infty + \|g - \psi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n(t) + \psi_n(t))\,dt \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\lambda\int_a^b \varphi_n(t)\,dt + \int_a^b \psi_n(t)\,dt\right) \\ &= \lambda\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,dt + \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)\,dt\end{aligned}$$

C'est la définition de l'intégrale.

Linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier.

Ces deux suites sont convergentes.

$$= \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

2) Pour la positivité de l'intégrale, notons qu'il a été prouvé qu'on peut toujours trouver une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant f \leqslant \varphi_n$ et $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par positivité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(t)\,dt \geqslant 0$, si bien que par passage à la limite

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt \geqslant 0.$$

3) Découle directement de la linéarité et de la positivité.

4) Les fonctions $\mathrm{Re}(\varphi_n)$ et $\mathrm{Im}(\varphi_n)$ sont encore en escalier, et pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$|\mathrm{Re}(f(t)) - \mathrm{Re}(\varphi_n(t))| = |\mathrm{Re}(f(t)-\varphi_n(t))| \leqslant |f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty$$

si bien que par définition de la borne sup[21], $\|\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(\varphi_n)\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty$ et donc $\|\mathrm{Re}(f)-\mathrm{Re}(\varphi_n)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et de même, $\|\mathrm{Im}(f)-\mathrm{Im}(\varphi_n)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \int_a^b (\mathrm{Re}(\varphi_n(t))+i\,\mathrm{Im}(\varphi_n(t)))\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi_n(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(\varphi_n(t))\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.$$

Par unicité de la limite, on a donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$.

5) Par l'inégalité triangulaire inversée, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\big||f(t)| - |\varphi_n(t)|\big| \leqslant |f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty.$$

Et donc par passage[22] à la borne supérieure, $\||f|-|\varphi_n|\|_\infty \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la suite $(|\varphi_n|)_n$ converge uniformément vers $|f|$.
Mais puisque l'inégalité triangulaire est valable pour les fonctions en escalier, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\varphi_n(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Soit donc $c \in]a,b[$. Afin de les distinguer, notons $\|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,c]} = \max\limits_{t\in[a,c]} |f(t)-\varphi_n(t)|$, et de même $\|f-\varphi_n\|_{\infty,[c,b]}$.

Alors pour tout $t \in [a,c]$, $|f(t)-\varphi_n(t)| \leqslant \|f-\varphi_n(t)\|_\infty$, si bien que $\|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,c]} \leqslant \|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,c]$, si bien que

$$\int_a^c f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt.$$

Il en est de même sur $[c,b]$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^c \varphi_n(t)\,dt + \int_c^b \varphi_n(t)\,dt\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \varphi_n(t)\,dt + \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \varphi_n(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

[21] Le plus petit des majorants.

[22] L'expression n'est pas jolie, mais signifie encore une fois que c'est le plus petit des majorants, et donc qu'il est plus petit que celui obtenu précédemment.

Remarque
Il faudrait plutôt parler des restrictions à $[a, c]$ de f et de φ_n.

Remarque. Si deux fonctions f et g diffèrent seulement en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.
En effet, $g - f$ est non nulle sauf en un nombre fini de points, donc est en escalier.
Si on note $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée, alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est nulle, si bien que $\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = 0$, et donc $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$.
Puisque la fonction nulle sur $[a, b]$ est d'intégrale nulle, en changeant sa valeur en un nombre fini de points de $[a, b]$, on obtient une autre fonction, éventuellement positive sur tout $[a, b]$ dont l'intégrale est nulle.

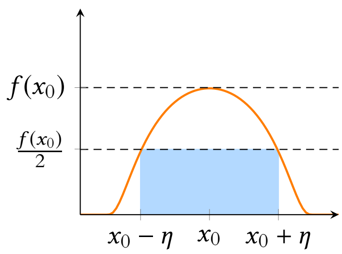
L'exemple ci-dessus ne peut pas se produire avec une fonction continue : une fonction continue et positive d'intégrale nulle est nécessairement la fonction nulle.

Proposition 26.24 : *Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$, de signe constant.*
Alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.

Démonstration. Le sens $\Leftarrow$ est évident.
Pour l'autre sens, supposons, quitte à changer f en son opposé que f est positive.
Prouvons la contraposée en montrant que si f n'est pas la fonction nulle, alors son intégrale est non nulle. Comme on sait déjà[23] que cette intégrale est positive, il s'agit de prouver qu'elle est strictement positive.
Soit donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
Puisque f est continue, on peut supposer que $x_0 \in]a, b[$ est un point intérieur à $]a, b[$.
Par définition de la continuité, en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap[a, b]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Quitte à diminuer η, on peut supposer que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset [a, b]$.
Et alors pour $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$.
Ainsi, f est minorée par la fonction en escalier $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Mais l'intégrale de φ vaut $\eta f(x_0) > 0$, donc

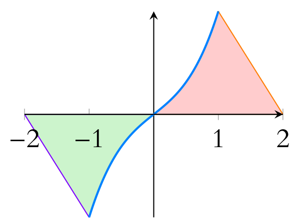
$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx > 0.$$

□



[23] C'est la positivité de l'intégrale.

⚠ C'est évidemment faux si on oublie l'hypothèse de signe constant, même si on impose la continuité.



Corollaire 26.25 – *Soient $a < b$ et soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b], \mathbf{R})$ une fonction strictement positive sur $[a, b]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
Alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Démonstration. Si f est continue, c'est une conséquence à la fois de la proposition précédente et de la positivité de l'intégrale.

Et pour une fonction continue par morceaux, si on note $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f, alors il existe au moins un point c de l'un des $]x_k, x_{k+1}[$ où f est strictement positive .
Soit alors $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[\subset]x_k, x_{k+1}[$, de sorte que f est continue sur $]c-\eta, c+\eta[$.
Et donc $\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt > 0$. Si bien que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^{c-\eta} f(t)\,dt}_{\geqslant 0} + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{c+\eta}^b f(t)\,dt}_{\geqslant 0} > 0.$$

□

26.3.4 Extension au cas $b \leqslant a$

Les définitions données ci-dessus d'intégrale ne sont valables que pour des intégrales dont les bornes sont «dans le bon sens».
Si $b < a$, par définition, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

La linéarité est alors conservée, mais ce n'est pas le cas de toutes les propriétés qui ont trait à la relation d'ordre (donc la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire).
Si on a besoin d'utiliser des inégalités dans des intégrales, on commencera par «remettre» les bornes dans le bon sens.

En revanche, la relation de Chasles est conservée :

Proposition 26.26 : *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Alors* $\forall (a,b,c) \in I^3$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$

Démonstration. Le résultat a déjà été prouvé si $a < b < c$, et il est trivial si $a = b$ ou $b = c$.
Notons que pour tout $(m,x,y) \in I^3$ avec $m \leqslant x$ et $m \leqslant y$, on a

$$\int_x^y f(t)\,dt = \int_m^y f(t)\,dt - \int_m^x f(t)\,dt.$$

En effet, si $x \leqslant y$, alors par Chasles[24]

$$\int_x^y f(t)\,dt + \int_m^x f(t)\,dt = \int_m^y f(t)\,dt.$$

Et si $y < x$, alors

$$\int_m^y f(t)\,dt + \int_y^x f(t)\,dt = \int_m^x f(t)\,dt.$$

Posons donc $m = \min(a,b,c)$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt &= \int_m^b f(t)\,dt - \int_m^a f(t)\,dt + \int_m^c f(t)\,dt - \int_m^b f(t)\,dt\\ &= \int_m^c f(t)\,dt - \int_m^a f(t)\,dt\\ &= \int_a^c f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

[24] Version «bornes dans le bon sens».

26.4 INTÉGRALES ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

26.4.1 Le théorème fondamental de l'analyse

Il est enfin grand temps de prouver un théorème annoncé depuis longtemps :

Théorème 26.27 : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $a \in I$ et soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$. Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Remarque
Notons que F est bien définie, puisque f est une fonction continue (et donc continue par morceaux) sur le segment $[a,x]$ (ou $[x,a]$ si $x \leqslant a$), qui est inclus dans I par définition d'un intervalle.

Démonstration. L'unicité d'une telle primitive ayant déjà été prouvée[25], il s'agit surtout de prouver que F est bien une primitive de f.
Soit donc $x_0 \in I$, et soit $\varepsilon > 0$.
Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \ |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc en particulier, pour $x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right| \\ &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\right|.\end{aligned}$$

Si $x \geqslant x_0$, alors on peut utiliser l'inégalité triangulaire[26] :

$$\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \leqslant \int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt \leqslant \int_{x_0}^x \varepsilon\,dt \leqslant \varepsilon(x-x_0).$$

Si $x < x_0$, il faut prendre quelques précautions supplémentaires :

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\right| &= \left|\int_x^{x_0} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \\ &\leqslant \int_x^{x_0} |(f(t)-f(x_0))|\,dt \\ &\leqslant (x_0-x)\varepsilon \leqslant |x-x_0|\varepsilon.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on obtient que pour $|x - x_0| < \eta$,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|x_0-x|}|x_0-x|\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

Et donc c'est bien la définition de $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$.
Donc F est dérivable en x_0, avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, F est bien une primitive de f sur I. □

[25] Rappelons qu'elle découle essentiellement du fait que deux primitives de f diffèrent d'une constante.

[26] Celle-ci nécessite vraiment d'avoir les bornes de l'intégrale «dans le bon sens».

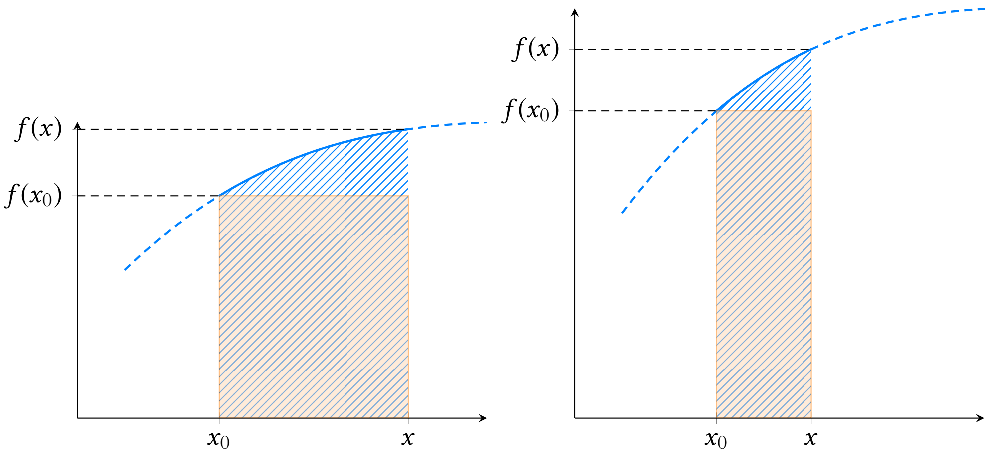
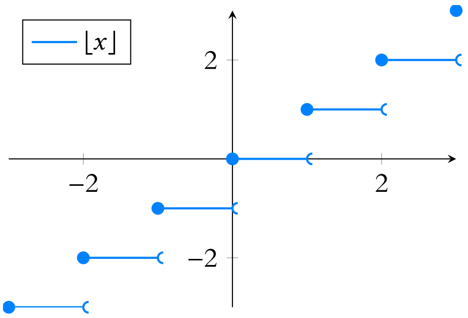
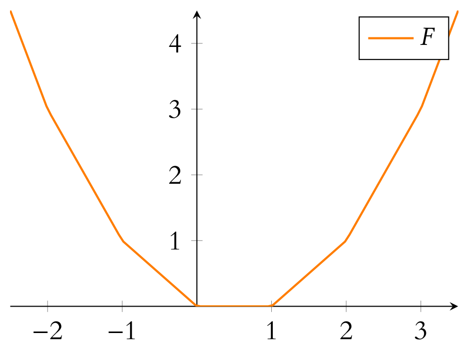


Figure 26.7 – Plus x est proche de x_0, et plus $\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ est proche de l'aire d'un rectangle de largeur $|x - x_0|$ et de hauteur $f(x_0)$.

⚠ Ce théorème n'est plus valable pour des fonctions qui ne sont pas continues mais uniquement continues par morceaux.





Par exemple, $F : x \mapsto \int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt$ n'est pas une primitive de la fonction partie entière. En effet, il est assez facile de se convaincre[27] que F est dérivable à gauche et à droite en $k \in \mathbf{Z}$, mais avec $F_g'(k) = k - 1$ et $F_d'(k) = k$, donc F n'est pas dérivable en k. Une autre raison, un peu plus subtile est un résultat[28] connu sous le nom de théorème de Darboux : la dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle doit satisfaire la propriété des valeurs intermédiaires, au sens où l'image d'un intervalle doit être un intervalle. Or ce n'est clairement pas une propriété vérifiée par la fonction partie entière.

[27] Faire le calcul !

[28] Qui figurait dans le TD sur la dérivabilité.

Soyons bien clair : ce théorème n'est pas une autorisation à dériver sans la moindre précaution toutes les fonctions qui seraient définies par une intégrale.

Tel quel, il ne dit pas que $x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t} \, dt$ ou $x \mapsto \int_1^2 \sqrt{t + \cos(x)} \, dt$ sont dérivables, et donne encore moins leurs dérivées.

L'énoncé du théorème fondamental de l'analyse ne vaut que pour des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$, c'est-à-dire que :

1. la borne «du bas» de l'intégrale ne dépend pas de x
2. celle «du haut» est égale à x
3. l'intégrande[29] ne dépend pas de x.

[29] Nom (*masculin*) désignant la fonction intégrée.

Exemples 26.28

▶ $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} \, dt$ est l'unique primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

▶ En revanche, moyennant quelques arguments supplémentaires, le théorème fondamental de l'analyse peut aider à dériver d'autres fonctions définies par des intégrales.

Par exemple, considérons la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \, dt$.

Alors, grâce au changement de variable $u = xe^t$, pour lequel $t = \ln(u) - \ln(x)$ et donc $dt = \dfrac{du}{u}$, il vient, pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{ex} \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u} \, du$.

Notons que cette fois, l'intégrande ne dépend plus de x, mais en revanche les bornes de l'intégrale ne permettent pas encore directement d'appliquer le théorème fondamental de l'analyse.

Posons alors $F : x \mapsto \int_1^x \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u} \, du$. Par le théorème fondamental de l'analyse, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $F'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

On a alors $f(x) = F(ex) - F(x)$. Donc déjà f est $\mathscr{C}^1$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, et de plus

$$f'(x) = eF'(ex) - F'(x) = e\frac{\sqrt{1+e^2x^2}}{ex} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+e^2x^2} - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

⚠ Les fonctions $x \mapsto \int_a^b \dots$ où la variable x apparaît sous le signe intégral, et pas seulement dans les bornes de l'intégrale ne relèvent généralement pas du théorème fondamental de l'analyse, sauf si on trouve une astuce comme celle de l'intégrale précédente.
En particulier, aucun théorème n'affirme sans hypothèses supplémentaires que la «dérivée de l'intégrale» soit «l'intégrale de la dérivée».
Vous donnerez en spé des théorèmes permettant d'étudier la dérivabilité de telles intégrales, disons que pour l'instant, le seul moyen d'y parvenir est de revenir au taux d'accroissement.

Corollaire 26.29 – *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet des primitives sur I.*
De plus, pour tout $(a,b) \in I^2$, et pour toute primitive F de f sur I,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Pour l'existence d'une primitive, il suffit de considérer $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
Pour le second point, nous avons déjà prouvé que deux primitives diffèrent d'une constante, et donc que la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.
En particulier, si on prend $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$, il vient $F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. □

Remarque
Rétrospectivement, cela justifie les preuves des propriétés de l'intégrale données en début d'année.
Mais nous avons eu besoin de ces propriétés pour établir le théorème fondamental de l'analyse, et donc il fallait réussir à prouver ces propriétés sans faire usage d'une primitive.

26.4.2 Techniques de calcul d'intégrales

Nous ne donnerons pas dans ce chapitre de nouveaux outils pour le calcul d'intégrales, mais notons que maintenant que l'intégrale est correctement définie, tout ce qui a été prouvé précédemment, notamment sur le changement de variable et l'intégration par parties, est désormais correctement justifié.

Attention toutefois aux hypothèses : l'intégration par parties nécessite toujours des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et le changement de variable un intégrande continu.

Si on souhaite utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes pour calculer des intégrales de fonctions continues par morceaux, il faudra commencer par utiliser la relation de Chasles afin de se ramener à des segments où l'utilisation de ces théorèmes est légitime.

Ajoutons tout de même les résultats suivants, graphiquement évidents.

Proposition 26.30 (Intégrale des fonctions paires/impaires/périodiques) :

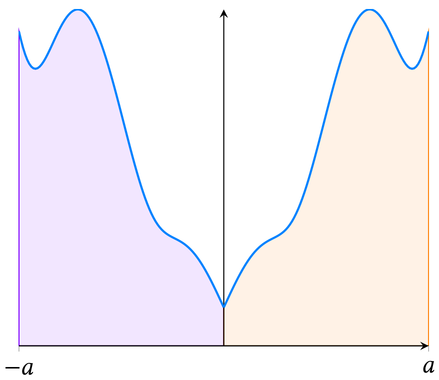
1. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([-a,a],\mathbf{R})$ une fonction paire.*
   Alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
2. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([-a,a],\mathbf{R})$ une fonction impaire.*
   Alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.
3. *Soit $f \in \mathscr{C}_m(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction T-périodique. Alors pour tout $a \in \mathbf{R}$,* $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

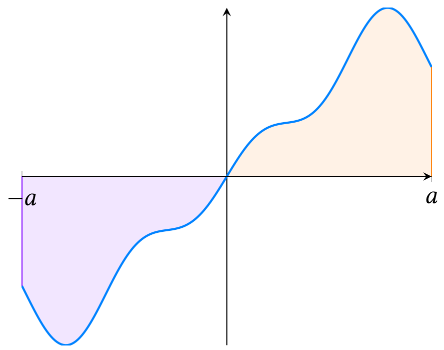
Démonstration. Prouvons-le pour une fonction continue, le cas général s'en déduira à l'aide de la relation de Chasles.
Pour les deux premières assertions, procédons au changement de variable $x = -t$. On a alors, dans le cas d'une fonction paire,

$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = -\int_a^0 f(-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

Et dans le cas d'une fonction impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Puis la relation de Chasles $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$ permet de conclure.





Pour le cas d'une fonction périodique, une preuve concise est la suivante : si $\displaystyle F : x \mapsto \int_{x}^{x+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{x+T} f(t)\,dt - \int_{0}^{x} f(t)\,dt$, alors F est dérivable[30], de dérivée $x \mapsto f(x+T) - f(x) = 0$.
Donc F est constante. Et en particulier

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = F(a) = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$$

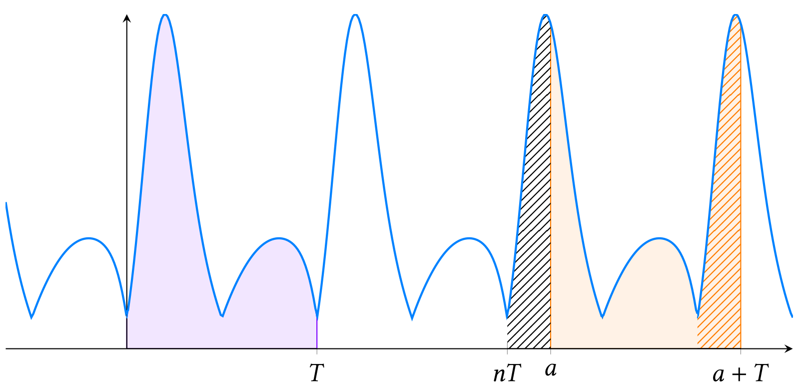
Pour autant, j'aimerais bien en donner une autre preuve, plus laborieuse, mais bien plus claire si l'on réfléchit graphiquement.
Soit donc $a \in \mathbf{R}$, et soit $n = \left\lfloor \dfrac{a}{T} \right\rfloor$, de sorte que $nT \leqslant a < (n+1)T$.
Alors par le changement de variable $x = t - T$, on a

$$\int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{nT}^{a} f(x+T)\,dx = \int_{nT}^{a} f(x)\,dx.$$

Et donc

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{(n+1)T} f(t)\,dt + \int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{(n+1)T} f(t)\,dt + \int_{nT}^{a} f(x)\,dx = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,dt.$$

Le changement de variable $u = t - nT$ permet alors aisément de conclure.



□

26.4.3 Les formules de Taylor

Nous donnons dans cette partie deux formules de Taylor, qui viennent un peu préciser globalement[31] ce que dit la formule de Taylor-Young.

[30] C'est le théorème fondamental de l'analyse.

[31] C'est-à-dire pas seulement au voisinage de a.

Théorème 26.31 (Formule de Taylor avec reste intégral) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt. \end{aligned}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n.
À l'ordre 0, il s'agit de remarquer que pour f de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ et donc $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$.
Supposons donc le résultat vrai pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et soit donc f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

Procédons alors à une intégration par parties sur cette dernière intégrale, en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, avec $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ et $v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt \\ &= f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt. \end{aligned}$$

Et donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. □

Remarques. ► Vous aurez sûrement reconnu que la somme est exactement la partie régulière du $DL_n(a)$ de f.
► La grosse différence[32] entre cette formule et la formule de Taylor-Young est que la formule avec reste intégral est une formule exacte.
En effet, elle nous donne une formule pour la différence entre f et son développement limité, valable sur I tout entier, là où Taylor-Young nous donne juste une information sur le comportement de cette différence *au voisinage de a*.
► La formule de Taylor-Young peut se retrouver (dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) en prouvant que le reste intégral est négligeable devant $(x-a)^n$.
Le reste intégral[33] représente l'erreur que l'on commet en approchant f par son $DL_n(a)$.

[32] Outre le fait que l'une nécessite f de classe $\mathscr{C}^n$ quand l'autre nécessite f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

[33] Nom généralement donné à l'intégrale dans la formule ci-dessus.

Corollaire 26.32 (Inégalité de Taylor-Lagrange) : *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et soient $(a,b) \in I^2$. Notons J le segment d'extrémités a et b. et soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur J. Alors*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notations

Il serait tentant de dire que $J = [a,b]$, mais dans le cas où $b < a$, $J = [b,a]$.

Remarque. Pour $n = 0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis (avec des hypothèses un peu plus contraignantes que celles de l'énoncé donné dans le cours de dérivation).

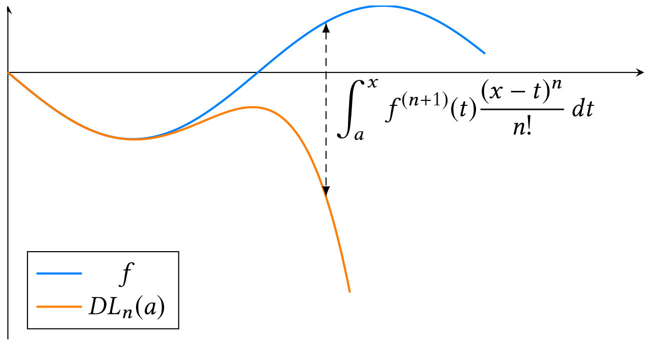


FIGURE 26.8 – Ici l'écart entre la fonction $-\sin$ et son $DL_5(0)$.

Démonstration. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k=\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt.$$

Il s'agit donc de majorer la valeur absolue de cette intégrale. Si $a \leqslant b$, alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right| &\leqslant \int_a^b \left|f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\right|dt\\ &\leqslant \int_a^b M\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\\ &\leqslant M\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\\ &\leqslant M\left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b\\ &\leqslant M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

Pour $t\in[a,b]$, $b-t\geqslant 0$, donc on peut se passer de la valeur absolue.

Dans le cas où $b<a$, le principe est le même, mais il y a quelques précautions à prendre car l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale nécessitent des bornes dans le bon sens.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right| &= \left|\int_b^a f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,dt\right|\\ &\leqslant \int_b^a \left|f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\right|dt\\ &\leqslant M\int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}\,dt\\ &\leqslant M\left[\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_b^a\\ &\leqslant M\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Danger !
Cette fois pour $t\in[b,a]$, $b-t\leqslant 0$, et donc il y a des précautions à prendre pour enlever la valeur absolue.

□

Remarque. Bien entendu, si $f^{(n+1)}$ est bornée sur I tout entier, alors on peut prendre pour M un majorant de $|f^{(n+1)}|$, mais la formule reste valable y compris si un tel majorant sur I n'existe pas.

Exemple 26.33

Considérons la fonction $f : t\mapsto e^t$. Alors, pour tout $x\in\mathbf{R}$, sur le segment d'extrémités 0 et x, $|f^{(n+1)}| = f^{(n+1)}$ est majorée par $e^{|x|}$.

Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque tous les $f^{(k)}(0)$ valent 1,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais par croissances comparées, on a $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

26.5 Sommes de Riemann

Définition 26.34 – Soient $a < b$ deux réels. On appelle **subdivision pointée** de l'intervalle $[a,b]$ la donnée d'un couple $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ où :

- $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On appelle alors pas de s et on note $\delta(s)$ le pas[34] de la subdivision σ.

[34] Qui, rappelons-le, est la distance maximale entre deux points consécutifs de la subdivision.

Autrement dit, se donner une subdivision pointée, c'est se donner une subdivision et choisir un point dans chacun des intervalles de cette subdivision.

Définition 26.35 – Si $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbf{R})$ et si $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ est une subdivision pointée de $[a,b]$, alors on note $R(f,s) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$.
Le réel $R(f,s)$ est appelé **somme de Riemann** associée à f et s.

Proposition 26.36 : *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée s de $[a,b]$, si $\delta(s) \leqslant \eta$, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - R(f,s) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Puisque f est continue sur $[a,b]$, par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue.
Et donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Soit alors $s = (\sigma, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ une subdivision pointée de $[a,b]$, avec $\delta(s) \leqslant \eta$ et où la subdivision σ est donnée par $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i) \right| &= \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\,dt \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t_i)\,dt \right| && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(t_i))\,dt \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t) - f(t_i)|\,dt && \text{Inégalité(s) triangulaire(s).} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dt \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarques. Le résultat reste valable pour des fonctions qui ne sont que continues par morceaux, mais la preuve en est plus désagréable, car les points de discontinuité de f ne sont pas forcément des points de la subdivision σ.

► Ce que dit ce résultat, c'est que quand le pas tend vers 0, alors $R(f,s)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

La preuve ci-dessus et même la définition de subdivision pointée ne sont pas du tout importantes.
Ce qui l'est en revanche est ce qui suit, où l'on considère des subdivisions régulières de $[a,b]$, c'est-à-dire avec $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
Dans ce cas, parmi toutes les manières de considérer des subdivisions pointées, trois sont sans doute un peu plus «naturelles» que les autres :

- prendre $t_i = x_{i-1}$, la borne de gauche de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à gauche.*
- prendre $t_i = x_i$, la borne de droite de $[x_{i-1}, x_i]$. On parle alors de la *méthode des rectangles à droite.*
- prendre $t_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ le milieu de $[x_{i-1}, x_i]$. C'est alors la *méthode du point milieu.*

Graphiquement, $R(f,s)$ est l'approximation de l'aire sous la courbe de f par des rectangles de hauteur $f(t_i)$.

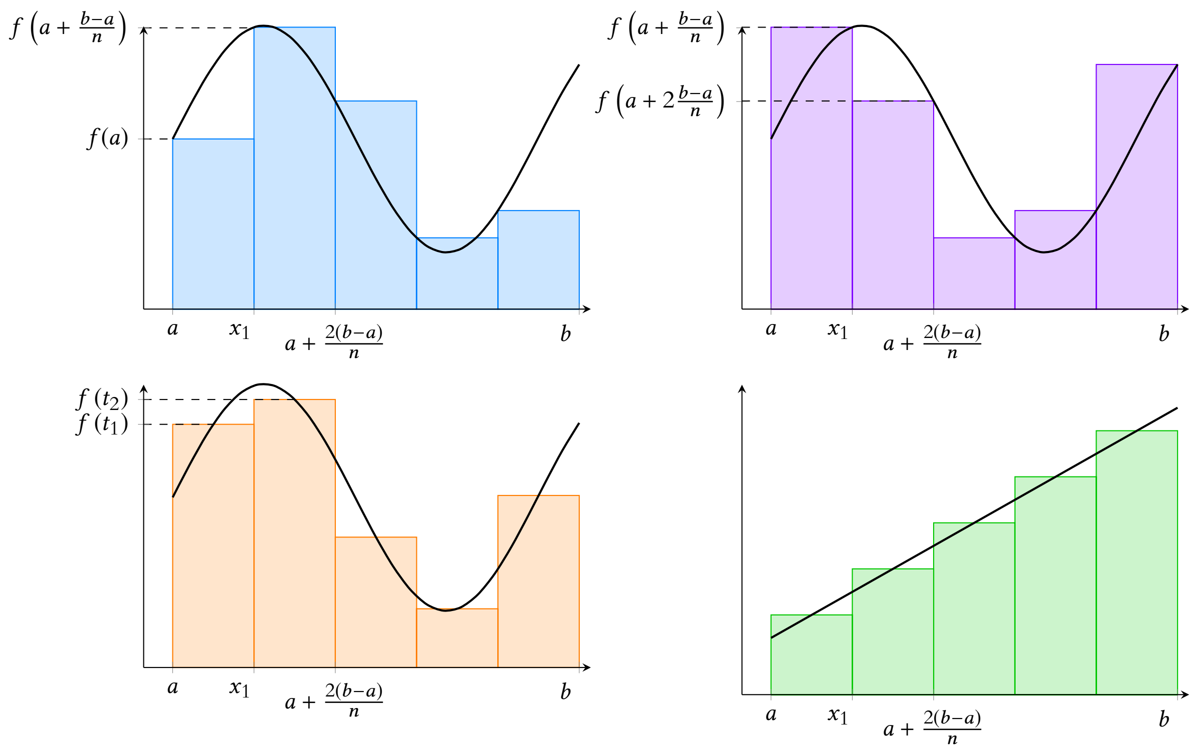


FIGURE 26.9 – Rectangles à gauche, rectangles à droite et point milieu.
Notons que la méthode du point milieu est exacte pour les fonctions affines (dernière figure), c'est-à-dire qu'elle ne retourne pas une valeur approchée de l'intégrale, mais la valeur exacte de l'intégrale.

Théorème 26.37 (Convergence des sommes de Riemann) : *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Il est vraiment important de réussir à bien comprendre en quoi les deux sommes ci-dessus correspondent aux deux premiers dessins de la figure 26.9.
En particulier, il est hors de question de les apprendre par cœur, alors qu'il suffit de les comprendre et de savoir les retrouver avec un dessin.
La première limite correspond aux rectangles à gauche, la seconde aux rectangles à droite. Dans les deux cas, le $\frac{b-a}{n}$ est la longueur de chacun des intervalles de la subdivision, c'est-à-dire la longueur de nos petits rectangles.

Graphiquement, cela signifie que plus on considère de points dans notre subdivision régulière, mieux on approche l'intégrale de f avec les sommes de Riemann.

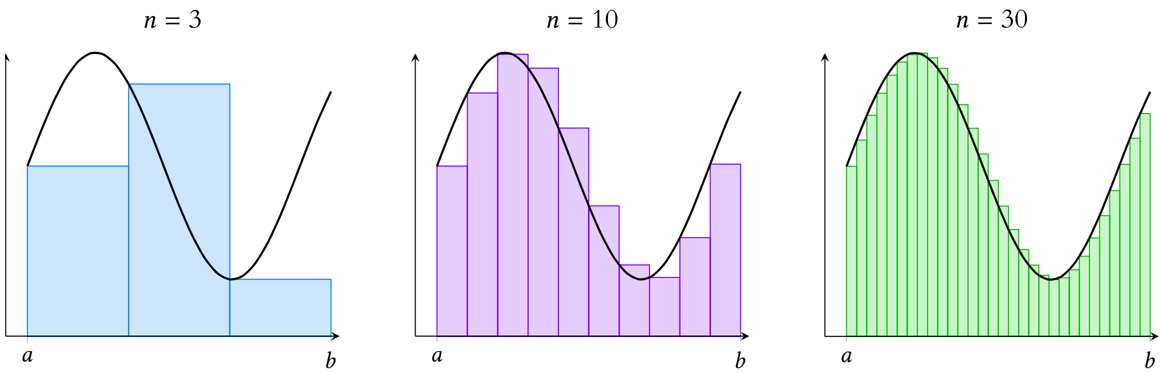


FIGURE 26.10 – Illustration de la convergence des sommes de Riemann (ici avec des rectangle à gauche) vers l'intégrale.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée s de pas inférieur à η, $\left|\int_a^b f(t)\,dt - R(f,s)\right| \leqslant \varepsilon$.
Soit donc $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$.
Alors en particulier, pour $n \geqslant N$ les subdivisions pointées correspondant aux rectangles à gauche et à droite ont un pas inférieur à η, et donc les sommes de Riemann associées sont à distance moins de ε de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Or, $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est la somme de Riemann pour les rectangles à gauche. Donc pour $n \geqslant N$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

C'est exactement la définition[35] de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$.

[35] Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que...

On raisonne de même pour les rectangles à droite. □

Remarque. Bien entendu, le même résultat vaut pour la méthode du point milieu, et je vous laisse trouver la formule correspondante, mais je ne la mentionne pas car elle sert bien moins souvent que les deux précédentes.

Méthode

Le plus difficile dans les sommes de Riemann sera de les reconnaître. Et même une fois qu'on a pensé à une somme de Riemann, il faut encore trouver le a, le b et la fonction f.
Généralement, le plus simple est de prendre $[a, b] = [0, 1]$, de faire apparaître un $\frac{1}{n}$ devant la somme, et alors il n'y a plus de choix pour f.

Exemple 26.38

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Alors

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Posons alors $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, de sorte que

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Exercices du chapitre 26

► Fonctions uniformément continues, fonctions en escalier

Exercice 26.1 Prouver que la fonction ln n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$. L'est-elle sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$? PD

Exercice 26.2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uniformément continue. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (la première limite étant une limite de suite, la seconde étant une limite de fonction).
Ce résultat est-il encore vrai si on remplace uniformément continue par continue ? AD

Exercice 26.3 Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$ positive sauf en un nombre fini de points.
Prouver que pour $x \in [a,b]$, si $f(x) < 0$, alors x appartient à toute subdivision adaptée à f. PD

► Propriétés de l'intégrale, calculs

Exercice 26.4 Un peu de subtilité dans les inégalités PD
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

Exercice 26.5 Déterminer un équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\,dt$. PD

Exercice 26.6 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R})$. Prouver que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$. PD

Exercice 26.7 Donner un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt$. PD

Exercice 26.8 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
Montrer que f possède un point fixe. PD

Exercice 26.9 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R})$. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt$ est lipschitzienne sur $\mathbf{R}$. PD

Exercice 26.10 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbf{R})$, à valeurs positives. Prouver que AD

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 26.11 Première formule de la moyenne AD
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, avec g positive.
Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$.

Exercice 26.12 Majoration de l'erreur dans la méthode du point milieu AD
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. On pose $c = \frac{a+b}{2}$.
On pose $\varphi : x \mapsto f(c) + (x-c)f'(c)$. *Peut-être aurez-vous reconnu l'équation de la tangente à f au point d'abscisse c ?*
On note F une primitive de $f - \varphi$ sur $[a,b]$.

1) Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = F(c) + \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\,dt$.
2) Prouver alors que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{24}\|f''\|_\infty$.
3) En déduire une majoration de l'erreur dans la méthode du point milieu.

Exercice 26.13 Lemme de Riemann-Lebesgue D

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. On souhaite prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

1) Commencer par traiter le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
2) Traiter le cas d'une fonction en escalier.
3) Traiter le cas général à l'aide du théorème d'approximation.

Exercice 26.14 Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$. D

1) On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Prouver que f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
2) On considère à présent $n \in \mathbf{N}$, et on suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$.
Montrer par l'absurde que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a, b]$. On pourra notamment considérer des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)Q(t)\,dt$ où Q est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ bien choisi.

► Fonctions définies par des intégrales

Exercice 26.15 Soit f continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner sa dérivée. F
Même question pour $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,dt$.

Exercice 26.16 Soit f continue sur $\mathbf{R}$ et g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. AD
Montrer que si g est décroissante sur $\mathbf{R}$, alors f est nulle.

Exercice 26.17 Soit f continue sur $]-1, 1[$ à valeurs réelles. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$. PD

Exercice 26.18 Un peu d'algèbre linéaire PD

Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, on définit une fonction $T(f)$ par $\forall x \in \mathbf{R}$, $T(f)(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1) Prouver que $T : f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.
2) Est-ce que T est injectif ? Surjectif ?

Exercice 26.19 Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue. On définit $F : [0, 1] \to \mathbf{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x, t) f(t)\,dt$. AD

1) Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.
2) En déduire que $\forall x \in [0, 1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du$.

Exercice 26.20 Une intégrale à paramètre D

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{x + \cos t}\,dt$. Dans la suite, on fixe $x_0 > 0$.

1) Prouver que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$,
$$\left|\sqrt{x_0 + h + \cos t} - \sqrt{x_0 + \cos t} - \frac{h}{2\sqrt{x_0 + \cos t}}\right| \leqslant \frac{h^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + x_0 + 2\cos t}\right)^3}.$$
2) En déduire que F est dérivable sur $]1, +\infty[$, et que
$$\forall x \in]1, +\infty[,\ F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{x + \cos t}}.$$

▶ Formules de Taylor

EXERCICE 26.21 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$. F

EXERCICE 26.22 Un grand classique PD
Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.

EXERCICE 26.23 Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos x = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$. PD

EXERCICE 26.24 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. AD
On suppose de plus qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{\mathbf{R}} |f^{(n)}| \leqslant A^n n!$.
Prouver que f est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{A}, \dfrac{1}{A}\right[$, puis qu'elle est nulle sur $\mathbf{R}$.

EXERCICE 26.25 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, on pose AD

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que (u_n) converge vers $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right)$.

▶ Sommes de Riemann

EXERCICE 26.26 Déterminer les limites des suites suivantes : PD

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
3) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{k+n}\right)^{\frac{1}{n}}$
4) $u_n = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

EXERCICE 26.27 Donner un équivalent de $u_n = \sqrt{1}\sqrt{n-1} + \sqrt{2}\sqrt{n-2} + \cdots + \sqrt{n-2}\sqrt{2} + \sqrt{n-1}\sqrt{1}$. AD

EXERCICE 26.28 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$. PD

EXERCICE 26.29 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. AD

EXERCICE 26.30 Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. PD

($\star$) Retrouver alors la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

EXERCICE 26.31 Intégrale de Poisson D
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos(x) + 1\right) dx$ est bien définie, et calculer la valeur de cette intégrale en utilisant des sommes de Riemann.

EXERCICE 26.32 (Oral X) D
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs strictement positives, et soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$

2) Déterminer alors la limite, lorsque $n \to +\infty$, de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 26

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.1

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$.
Cherchons pour quelles valeurs de $h \geqslant 0$ on a $|\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
Pour $h \geqslant 0$, on a, par croissance de ln, $|\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)| = \left|\ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)\right| = \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)$.
Et donc

$$\begin{aligned}|\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon &\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) \leqslant \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{h}{x_0} \leqslant e^\varepsilon \\ &\Leftrightarrow h \leqslant x_0\left(e^\varepsilon - 1\right).\end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que ln soit uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et prenons donc $\varepsilon = \ln(2)$, de sorte que $e^\varepsilon - 1 = 1$.
Soit alors η tel que $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*$, $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |\ln(x) - \ln(y)| \leqslant \ln(2)$. Prenons alors $x_0 = \frac{\eta}{2}$.
Par le calcul conduit précédemment, avec $h = \eta$, on n'a pas $h \leqslant x_0$, donc $|\ln(x_0+h)-\ln(x_0)| > \varepsilon$.
Mais dans le même temps, $|(x_0 + h) - x_0| \leqslant \eta$, si bien que $|\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)| \leqslant \varepsilon$. D'où une contradiction, et donc la fonction ln n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Donnons un autre argument plus général : une fonction uniformément continue sur un intervalle **borné** doit y être bornée.
Ici, si $f = \ln$ était uniformément continue, alors il existerait $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^*$, $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
Alors, pour $x \in [1 - \eta, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant 1$.
Pour $x \in [1 - 2\eta, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant |f(x) - f(1 - \eta)| + |f(1 - \eta) - f(1)| \leqslant 2$.
Et on prouve ainsi que pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $1-k\eta > 0$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^* \cap [1-(k+1)\eta, 1-k\eta]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant k$.
En particulier, pour $k = \left\lceil \frac{1}{\eta} \right\rceil - 1$, c'est-à-dire si k est le plus petit entier tel que $1-(k+1)\eta \leqslant 0$, alors $\forall x \in]0, 1]$, $|f(x) - f(1)| \leqslant k$.
Donc f serait bornée sur $]0, 1]$, ce qui n'est pas le cas puisque $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Détails
On a ici choisi (arbitrairement) $\varepsilon = 1$ dans la définition de l'uniforme continuité.

Idée
La formulation est un peu désagréable juste pour ne pas se retrouver à parler du logarithme d'un nombre négatif. Mais l'idée est juste qu'on peut recouvrir $]0, 1]$ à l'aide d'un nombre fini d'intervalle de longueur η.

En revanche, sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, la fonction ln est uniformément continue.
En effet, elle est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est donc bornée par $\frac{1}{a}$.
Et donc[1] f est $\frac{1}{a}$-lipschitzienne, donc uniformément continue.

[1] C'est l'inégalité des accroissements finis.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.2

Posons $\varepsilon = 1$. La fonction f étant uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - y| \leqslant \eta$, $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$.
Soit alors $k \in \mathbf{N}$ tel que $k\eta > 1$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, notons alors $n = \lfloor x \rfloor$, $h = \frac{x-n}{k}$.
Alors on a

Autrement dit
On peut recouvrir $[0, 1]$ à l'aide de k segments de longueur η.

$$\begin{aligned}|f(n) - f(x)| &= |f(n) - f(n + h) + f(n + h) - f(n + 2h) + \cdots + f(x - (k - 1)h) - f(x)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |f(n + ih) - f(n + (i + 1)h)| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 1 \leqslant k.\end{aligned}$$

On coupe $[n, x]$ en k segments de même longueur.

On a $h \leqslant \frac{1}{k} < \eta$.

Et en particulier, $f(x) \geqslant f(n) - k$.

À présent, soit $A \geqslant 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) \geqslant A + k.$$

Et alors, pour tout $x \geqslant n_0$, on aura $\lfloor x \rfloor \geqslant n_0$, et donc $f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor) - k \geqslant A$.
On reconnaît bien là la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Le résultat est faux pour des fonctions qui seraient uniquement continues. Imaginer par exemple la fonction affine par morceaux suivante, dont le graphe figure ci-dessous :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -2\lfloor x \rfloor (x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < 1/2 \\ 2(\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor - 1/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

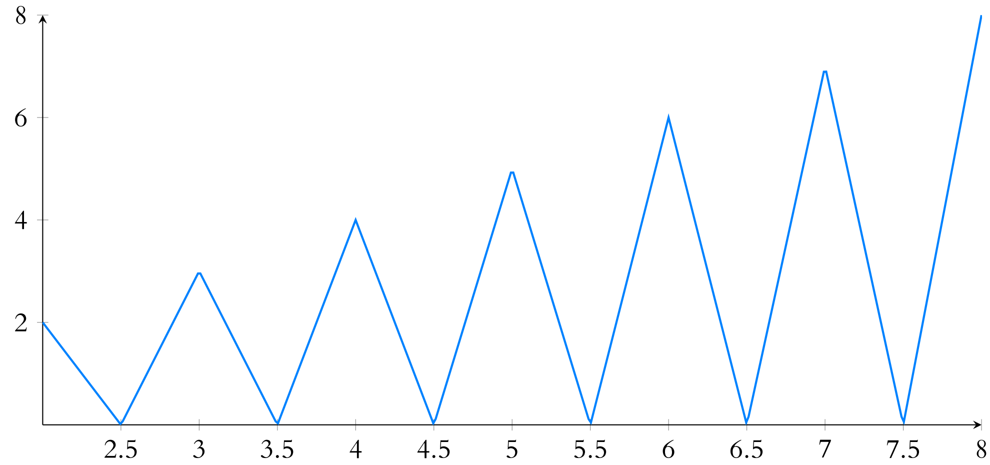


FIGURE 26.1 – Comprenez-vous sur la figure d'où vient l'expression de f donnée ci-dessus ? Soyons honnêtes : j'ai commencé par faire le dessin avant de trouver l'expression de f correspondante !

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.3

Supposons par l'absurde qu'il existe une subdivision σ : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ adaptée à f et $x \notin \sigma$ tel que $f(x) < 0$.
Notons alors $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$.
Par continuité de f sur $]x_k, x_{k+1}[$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]x_k, x_{k+1}[\cap]x - \eta, x + \eta[$, $f(t) < 0$.
Ceci contredit alors le fait que f est positive sauf en un nombre fini de points.
Donc tout réel tel que $f(x) < 0$ appartient forcément à toute subdivision adaptée à f.

Remarque
Un tel point est donc un point de discontinuité de f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.4

Pour $x \in [0, 1]$, on a $\dfrac{x^n}{1 + x^n} \leqslant x^n$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\, d \geqslant 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}\, dx = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.5

Commençons par noter que par la relation de Chasles,

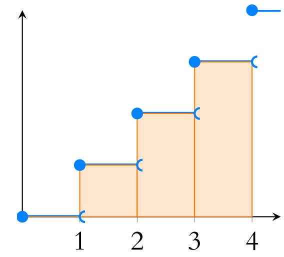
$$\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt = \int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor \, dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor \, dt.$$

Le calcul de la première intégrale est sans difficulté[2] : pour $n \in \mathbf{N}$,

[2] Et s'interprète bien graphiquement.

$$\int_0^n \lfloor t \rfloor \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \lfloor t \rfloor \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} k\, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$



Donc $\displaystyle\int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor\, dt = \frac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{2}$.

Notons que ceci équivaut, quand $x \to +\infty$ à $\dfrac{\lfloor x \rfloor^2}{2}$. Comme de plus il est classique[3] que $x \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x \rfloor$, c'est donc équivalent à $\dfrac{x^2}{2}$.

[3] Revenir à la définition de la partie entière pour le prouver.

Par ailleurs, la seconde intégrale vérifie

$$0 \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \lfloor t \rfloor\, dt \leqslant \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \lfloor x \rfloor\, dt \leqslant \lfloor x \rfloor \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{\leqslant 1} \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Et donc en particulier, $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \lfloor t \rfloor\, dt \underset{x\to+\infty}{=} O(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

Et donc au final,

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.6

Si f est de signe constant, le résultat est évident.

Pour la réciproque, supposons $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| = \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Supposons par exemple que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \geqslant 0$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b |f(t)|\, dt \Leftrightarrow \int_a^b (|f(t)| - f(t))\, dt = 0$.

Mais la fonction $t \mapsto |f(t)| - f(t)$ est continue et positive sur $[a, b]$, donc son intégrale est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle. Soit si et seulement si $f = |f|$, ce qui est le cas si et seulement si f est positive.

On prouve de même que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \leqslant 0$, alors $f = -|f|$ est négative.

Remarque *: il s'agissait donc de prouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Pour les sommes de réels, nous avions* $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ *si et seulement si tous les* x_i *sont de même signe..*
Ici on a égalité si et seulement si tous les $f(x)$ *sont de même signe.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.7

Notons que la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique car $|\sin(x+\pi)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt = \int_0^{\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2.$$

Détails
Pour prouver la première égalité, on peut procéder au changement de variable $t = x - k\pi$.

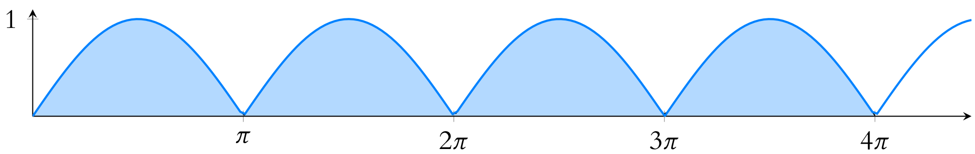


FIGURE 26.2 – Toutes les «arches» ont la même aire.

Dans ce qui suit, l'idée est que $\displaystyle\int_0^x |\sin t|\, dt$ doit être environ égal à l'aire d'une arche, fois le nombre d'arches qui se trouvent entièrement entre 0 et x.

Soit donc $x \in \mathbf{R}$, et soit $k \in \mathbf{N}$ l'unique réel tel que $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$. Alors

$$\int_0^x |\sin t|\,dt = \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin t|\,dt}_{=2} + \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt = 2k + \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt.$$

Autrement dit
k est le nombre d'arches qui sont entièrement contenues entre les droites verticales d'abscisses 0 et x.

Mais, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{k\pi}^x |\sin t|\,dt \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,dt \leqslant 2.$$

Et donc

$$2k \leqslant \int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 2k+2.$$

Or, on a $\dfrac{x}{\pi} - 1 < k \leqslant \dfrac{x}{\pi}$, de sorte que

Remarque
Pour le dire autrement,
$$k = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor.$$

$$2\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \leqslant 2k \leqslant \int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 2k + 2 \leqslant 2\frac{x}{\pi} + 2.$$

En divisant par $\dfrac{2x}{\pi}$, il vient

$$1 - \frac{\pi}{x} \leqslant \frac{\pi}{2x}\int_0^x |\sin t|\,dt \leqslant 1 + \frac{\pi}{x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}\int_0^x |\sin t|\,dt = 1$ et donc

$$\int_0^x |\sin t| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi}.$$

Généralisation *: ce résultat peut aisément se généraliser à toute fonction f qui soit continue et T-périodique, à condition que l'intégrale de f sur une période ne soit pas nulle[4]. On a alors*

$$\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$

[4] Faut de quoi l'équivalent qui suit serait un équivalent à 0.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.8

La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$. Si elle ne s'annule pas, c'est-à-dire si f n'a pas de point fixe, elle est donc de signe constant.

Et par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt \neq 0$.

Rappel
L'intégrale d'une fonction de signe constant est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle.

Mais $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ce qui est absurde.

Donc g s'annule sur $[0,1]$, et donc f possède un[5] point fixe.

[5] Au moins un.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.9

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt - \int_a^b f(t)\sin(yt)\,dt\right| \\
&= \left|\int_a^b f(t)(\sin(xt) - \sin(yt))\,dt\right| && \text{Linéarité de l'intégrale.} \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)(\sin(xt) - \sin(yt))|\,dt && \text{Inégalité triangulaire.} \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot |\sin(xt) - \sin(yt)|\,dt \\
&\leqslant \int_a^b |f(t)||xt - yt|\,dt \\
&\leqslant |x-y| \int_a^b |tf(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Détails
La fonction sin est 1 − lipschitzienne. C'est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis, puisque $|\sin'| \leqslant 1$.

Donc en notant $K = \int_a^b |tf(t)|\,dt$, qui est bien une constante indépendante de x et y, alors g est K-lipschitzienne sur $\mathbf{R}$.

Solution de l'exercice 26.10

Dans toute la suite, on note $M = \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f| = \sup_{[a,b]} f$. Notons que le cas $M = 0$ correspondant à la fonction nulle[6], on peut supposer que $M > 0$.
Puisque pour tout $t \in [a,b]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant \|f\|_\infty$, alors par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)^n\,dt \leqslant \int_a^b M^n\,dt \leqslant (b-a)M^n.$$

Et donc $0 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant M(b-a)^{1/n}$.

Puisque f est continue sur $[a,b]$, par le théorème des bornes atteintes, il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) = M$.
Et en particulier, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$,

$$|t - t_0| < \eta \Rightarrow |f(t)| \geqslant M - \varepsilon.$$

Notons alors $I = [a,b] \cap]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, et soit $\ell(I) > 0$ sa longueur[7].
On a alors

$$\int_a^b f(t)^n\,dt \geqslant \int_I f(t)^n\,dt \geqslant \int_I (M-\varepsilon)^n \geqslant \ell(I)(M-\varepsilon)^n.$$

Et donc $\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \geqslant \ell(I)^{1/n}(M-\varepsilon)$.

Puisque $\ell(I)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\ell(I)^{1/n} \geqslant \dfrac{M-2\varepsilon}{M-\varepsilon}$.

Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \geqslant M - 2\varepsilon$.

Sur le même principe, $(b-a)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc il existe $n_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $(b-a)^{1/n} \leqslant \dfrac{M+2\varepsilon}{M}$.
Et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$M - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant M + 2\varepsilon.$$

Et donc nous reconnaissons bien là la définition d'une limite :

$$\|f\|_\infty = \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}.$$

[6] Pour laquelle le résultat est évidemment vrai, mais se passe de commentaires.

⚠ Attention !
À ce stade, l'existence de la limite de $\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$ n'est pas encore prouvée. Il n'est donc pas question de passer à la limite dans l'inégalité.

[7] Il s'agit encore bien d'un intervalle car intersection de deux intervalles.

Terminologie
La quantité

$$\left(\int_a^b f(t)^p\,dt\right)^{1/p}$$

est appelée la «norme p», et le résultat de cet exercice justifie que l'on parle de «norme infinie» : c'est la limite lorsque $p \to +\infty$ des normes p.

Solution de l'exercice 26.11

Si $\int_a^b g(t)\,dt = 0$, puisque g est continue et positive, c'est la fonction nulle. Et donc tout $c \in [a,b]$ convient.
On suppose donc que l'intégrale de g est non nulle.
La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc par le théorème des bornes atteintes, elle possède un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$.
Et alors[8], pour tout $t \in [a,b]$, $mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$.
Donc par croissance de l'intégrale,

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt.$$

Et donc $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M$.

Or m et M sont des valeurs atteintes[9] donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \Leftrightarrow \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

[8] Et là la positivité de g est indispensable.

[9] Et pas seulement des minorants/majorants de f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.12

1. Puisque f est $\mathscr{C}^2$, il en est de même de $f-\varphi$, et donc F est de classe $\mathscr{C}^3$.
Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a donc pour tout $x \in [a,b]$,

$$F(x) = F(c) + F'(c)(x-c) + F''(c)(x-c) + \int_c^x F^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\,dt.$$

Mais $F'(c) = f(c) - \varphi(c) = 0$, et $F''(c) = f'(c) - \varphi'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$.
Enfin, $F^{(3)} = f'' - \varphi''$, et φ étant affine[10], sa dérivée seconde est nulle.
On a donc bien la formule annoncée.

[10] C'est-à-dire polynomiale de degré 1.

2. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f(c) &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b \varphi(t)\,dt\\ &= \int_a^b (f-\varphi)(t)\,dt = F(b) - F(a)\\ &= \int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt - \int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt.\end{aligned}$$

F est une primitive de $f-\varphi$.

Mais on a

$$\left|\int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| \leqslant \int_c^b \|f''\|_\infty \frac{(b-t)^2}{2}\,dt \leqslant \|f''\|_\infty \left[-\frac{(b-t)^3}{6}\right]_c^b \leqslant \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{48}.$$

Et de même, $\left|\int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)\,dt\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{48}\|f''\|_\infty$.
Et donc par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{24}.$$

3. Il s'agit juste de noter que si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est la subdivision régulière de pas $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, alors l'inégalité précédente vaut sur chacun des $[x_k, x_{k+1}]$ et donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24}\|f''\|_\infty\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{24n^3}\|f''\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty.\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.13

1. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors on peut procéder à une intégration par parties : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[-f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt = \frac{f(a)\sin(na) - f(b)\sin(nb)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt.$$

Il est clair que $\frac{f(a)\sin(na) - f(b)\sin(nb)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par ailleurs, puisque f' est continue sur $[a,b]$, elle y est bornée.
Notons M un majorant de $|f'|$ sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leqslant \int_a^b f'(t)\sin(nt)|\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt \leqslant M(b-a).$$

Et donc en particulier, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit donc bien le résultat annoncé, à savoir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

2. Commençons par le cas très particulier d'une fonction constante égale à λ : on a alors

$$\int_a^b \lambda\cos(nt)\,dt = \underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\underbrace{(\sin(nb)-\sin(na))}_{\text{borné}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans le cas d'une fonction en escalier f, notons $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ une subdivision adaptée à f, et soient $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ les réels tels que $\forall t \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(t) = \lambda_i$.

On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda_i\cos(nt)\,dt$.

Or nous venons de prouver que chacune de ces intégrales tend vers 0, donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe φ une fonction en escaliers telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt &= \int_a^b (\varphi(t)+f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt\\ &= \int_a^b \varphi(t)\cos(nt)\,dt + \int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt.\end{aligned}$$

Nous savons déjà, par la deuxième question, que la première intégrale est de limite nulle. En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$.

Par ailleurs, par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b (f(t)-\varphi(t))\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \int_a^b \varepsilon\,dt \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

Et donc pour $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant (b-a+1)\varepsilon$.

Et donc on a bien prouvé que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

> **Remarque** Les valeurs de f aux x_i n'ayant aucune incidence sur la suite, nous ne prenons pas la peine de les nommer.

> **Rappel** Cela signifie tout simplement que pour tout $t \in [a,b]$, $$|f(t)-\varphi(t)| \leqslant \varepsilon.$$

> **Remarque** Vous êtes grands maintenant, je n'explique plus pourquoi être inférieur à $(b-a+1)\varepsilon$ (alors que la définition de limite demande du ε) suffit. Assurez-vous tout de même que c'est clair pour vous, et sinon, demandez !

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.14

1. Supposons par l'absurde que f ne s'annule pas. Alors, étant continue, elle est de signe constant[11].
Or l'intégrale d'une fonction **continue** de signe constant est nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle, ce qui est absurde ici.
Donc f s'annule au moins une fois.

2. Comme indiqué, procédons par l'absurde en supposant que f s'annule au plus n fois, en $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, avec $p \leqslant n$.
Alors f est de signe constant sur chacun des $]x_i, x_{i+1}[$. Quitte à enlever certains des x_i, supposons que f change de signe en chacun des x_i : le signe de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ est l'opposé de celui du signe de f sur $]x_{i-1}, x_i[$ (avec également un changement de signe en x_1 et en x_p s'ils s'ont différents de a et b).

Considérons alors la fonction polynomiale $Q : x \mapsto \displaystyle\prod_{k=1}^p (x-x_k)$.

Elle ne s'annule qu'en les x_i, et et change de signe en tous les x_i, car ceux-ci sont de multiplicité 1.
Et donc $t \mapsto f(t)Q(t)$ est une fonction continue de signe constant, et donc son intégrale entre a et b est non nulle, du signe de $f(t)Q(t)$.

[11] Rappelons qu'il s'agit là d'une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

> **Détails** Un polynôme change de signe en une racine réelle α si et seulement si la multiplicité de α est impaire.

Mais par ailleurs, Q étant polynomiale de degré $p \leqslant n$, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\forall t \in [a,b],\ Q(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$.

Et donc $\int_a^b f(t)Q(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$, ce qui est absurde.

Donc f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.15

Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, qui par le théorème fondamental de l'analyse, est une primitive de f, et en particulier est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque sa dérivée f est continue.

Alors par la relation de Chasles, $g(x) = F(x^2) - F(2x)$.

Par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, il s'agit là d'une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x).$$

Pour h, on ne peut s'en tirer directement de la même manière en raison de la présence du x à l'intérieur de l'intégrale.

En revanche, en commençant par un changement de variable affine, on a

$$h(x) = \int_x^{2x} f(u)\,du.$$

Et cette fois le même raisonnement s'applique, $h(x) = F(2x) - F(x)$, est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $h'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.18

1. La linéarité ne pose pas de difficultés, mais il ne faut pas oublier de vérifier que $T(f)$ est bien un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$.

   Mais par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f, et à ce titre est dérivable, donc continue.

   Puisque $x \mapsto x$ est encore continue, $T(f)$ est continue par produit de fonctions qui le sont.

> **Rappel**
> Un endomorphisme a, par définition, mêmes espaces de départ et d'arrivée.

2. Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

   Et en particulier, pour tout $x \neq 0$, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$.

   En particulier, en dérivant, la fonction $x \mapsto f(x)$ est nulle sur $\mathbf{R}^*$.

   Étant continue en 0, elle est également nulle en 0, et donc $f = 0$, si bien que f est injective.

   Le raisonnement tenu à la question 1 prouve que pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, $T(f)$ est dérivable.

   Et donc si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et non dérivable[12], alors g ne possède pas d'antécédent par T, et donc T n'est pas surjective.

[12] Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.19

1. Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,dt + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt \\ &= \int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt. \end{aligned}$$

   Mais par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,dt$ est une primitive[13]. de $x \mapsto xf(x)$.

   On prouve de même que $x \mapsto \int_x^1 f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt$ est une primitive de $-f$.

   Donc déjà F est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$F'(x) = xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

   Et donc par ce qui a été dit précédemment, F' est $\mathscr{C}^1$, et donc F est $\mathscr{C}^2$, avec $F''(x) = -f$.

[13] Nécessairement $\mathscr{C}^1$

2. On a $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \min(0,t)f(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$.
Et donc
$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u)\,du = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.20

1. Fixons $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et soit $f_t : x \mapsto \sqrt{x + \cos t}$.
Alors f_t est $\mathscr{C}^2$ sur $]1, +\infty[$, avec $f_t'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\cos t}}$ et $f_t''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{x+\cos t}^3}$.
En particulier, pour $h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$, alors $x_0 + h \geqslant \dfrac{1+x_0}{2}$, et un majorant de $|f''|$ sur $\left[\frac{1+x_0}{2}, +\infty\right[$ est
$$M = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1+x_0}{2}} + \cos t\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.$$
Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en x_0,
$$\left|f_t(x_0+h) - f_t(x_0) - hf_t'(x_0)\right| \leqslant \frac{|x_0+h-x_0|^2}{2}M$$
soit encore
$$\left|\sqrt{x_0+h+\cos t} - \sqrt{x_0+\cos t} - \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| \leqslant \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.$$

2. Pour prouver que F est dérivable, revenons au taux d'accroissement : soit $x_0 > 1$ fixé, et soit $h \in \left[\frac{1-x_0}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right]$. Alors
$$\begin{aligned}\left|F(x_0+h) - F(x_0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\,dt\right| &\leqslant \int_0^{\pi/2} \left|\sqrt{x_0+h+\cos t} - \sqrt{x_0+\cos t} - \frac{h}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| dt \\ &\leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{h^2}{2\sqrt{2}}\frac{dt}{\left(\sqrt{1+x_0+2\cos t}\right)^3}.\end{aligned}$$
Et donc après division par $|h|$ pour $h \neq 0$, il reste
$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}\right| \leqslant \frac{h}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\left(\sqrt{x_0+1+2\cos t}\right)^3}.$$
Notons que cette dernière intégrale ne dépend pas de h, donc lorsque $h \to 0$, il vient donc,
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}.$$
Donc F est dérivable en x_0, et $F'(x_0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sqrt{x_0+\cos t}}$.
Et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in]1, +\infty[$, on arrive bien à la conclusion annoncée par l'énoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.21

Notons qu'il s'agit de déterminer si la courbe représentative de sin est située au dessus ou en dessous des courbes représentatives de ses développements limités d'ordre 3 et 5 en 0.
Les dérivées successives de sin sont données par $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, etc.
Et donc à l'ordre 3, on a, par la formule de Taylor avec reste intégral[14]
$$\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \int_0^x \sin^{(4)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt = \int_0^x \sin(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\,dt.$$

[14] Valable puisque le sin est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.

Mais pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, x]$, $\sin(t)\dfrac{(x-t)^3}{3!} \geqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale, $\sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) \geqslant 0$.

À l'ordre 5, on a en revanche, $\sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right) = \displaystyle\int_0^x \sin^{(6)}(t)\frac{(x-t)^5}{5!}\,dt = -\int_0^x \sin(t)\frac{(x-t)^5}{5!}\,dt$ qui est cette fois négatif.

Et donc $\sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.22

Notons $f(t) = e^t$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre 0 et x, si on note I le segment d'extrémités 0 et x et $M = \max\limits_{t \in I} |f''(t)|$, il vient

$$|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leqslant \frac{x^2}{2}M \Leftrightarrow |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}M.$$

Si $x \geqslant 0$, on a $M = e^x = e^{|x|}$, et donc l'inégalité souhaitée est démontrée.
Et si $x \leqslant 0$, alors le maximum de $f^{(2)}$ sur le segment $[x, 0]$ est $e^0 = 1$, et donc $M = 1 \leqslant e^{|x|}$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

Danger !
Si $x \leqslant 0$, il ne s'agit pas réellement du segment $[0, x]$, mais plutôt du segment $[x, 0]$.
C'est l'une des subtilités de l'inégalité de Taylor-Lagrange, il faut prendre pour M un majorant de $f^{(n+1)}$ entre 0 et x.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.23

Vous aurez bien évidemment reconnu que $\displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est le $DL_{2n}(0)$ du cosinus.
Il s'agit donc de prouver que la différence entre $\cos(x)$ et ce développement limité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Or, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, qui s'applique puisque cos est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ pour tout n, on a, pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \sup_{t \in \mathbf{R}} |\cos^{2n+1}(t)| \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Mais par croissances comparées, ce majorant tend vers 0, et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \cos(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.24

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre.
Soit donc $x \in \left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left|f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{=0}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}A^{n+1}(n+1)!}{(n+1)!} \leqslant (|x|A)^{n+1}.$$

Mais puisque $|x| < \frac{1}{A}$, la suite géométrique de raison $|x|A$ tend vers 0, et donc par passage à la limite, $|f(x)| = 0$, si bien que $f(x) = 0$.
Donc f est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$.

La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, puisque toutes les $f^{(n)}$ sont nulles sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$ et continues en $\frac{1}{A}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}\left(\frac{1}{A}\right) = 0$.
Considérons alors la fonction $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{A}\right)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g^{(n)}(0) = f^{(n)}\left(\frac{1}{A}\right) = 0$.
Et de plus, comme $g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{1}{A}\right)$, $\sup\limits_{\mathbf{R}} |g^{(n)}| = \sup\limits_{\mathbf{R}} |f^{(n)}| \leqslant A^n n!$.
Donc par ce qui a été dit précédemment, g est nulle sur $\left]-\frac{1}{A}, \frac{1}{A}\right[$, et par conséquent, f est

nulle sur $]0, \frac{2}{A}[$.
De proche en proche on prouve ainsi que f est nulle sur tous les $]\frac{n}{A}, \frac{n+2}{A}[$. Et donc qu'elle est nulle sur $\mathbf{R}^+$.
Et de même, à l'aide de $x \mapsto f\left(x - \frac{1}{A}\right)$, on prouverait que f est nulle sur $]\frac{-2}{A}, 0[$, puis de proche en proche, sur $\mathbf{R}^-$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.25

Puisqu'on a un produit, commençons par passer au logarithme pour faire apparaître une somme :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Il s'agit donc de prouver que ceci tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

On ne reconnaît pas directement une somme de Riemann, mais lorsque n est grand, $\displaystyle\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ doit être petit, et puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on doit avoir $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \simeq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Toutefois, on ne peut pas sommer les équivalents...

Méthode

Si on souhaite utiliser une formule de Taylor ici, c'est tout simplement car on souhaite «contrôler» (en l'occurrence ici majorer) l'écart entre $\ln(1+x)$ et son développement limité à l'ordre 1 (qui est x).
C'est précisément ce à quoi servent les formules de Taylor.

Utilisons plutôt l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 : puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée, disons par M : pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$.
Alors la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, avec $g'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $g''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.
Donc pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$|\underbrace{g(x) - g(0) - g'(0)x}_{=\ln(1+x)-x}| \leq \frac{(x-0)^2}{2!} \underbrace{\max_{-1/2 \leq t \leq 1/2} \frac{1}{(1+t)^2}}_{=4} \leq 2x^2.$$

Remarque

On a alors

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Donc en particulier, pour n assez grand (pour que $\frac{M}{n} \leqslant \frac{1}{2}$), et pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left|\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\frac{1}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{2M^2}{n^2}.$$

Et donc par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\ln\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2M^2}{n^2} \\ &\leq \frac{2M^2}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.
Par ailleurs, on sait que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$. Donc par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + v_n = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Donc par continuité de l'exponentielle,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.26

1. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.
On reconnaît alors des sommes de Riemann pour la fonction[15] $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ entre 0 et 1.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \dfrac{\ln 2}{2}$.

[15] Continue.

2. On a directement une somme de Riemann, pour la fonction $x \mapsto \cos^2(\pi x)$, entre 0 et 1.
Et donc
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \cos^2(\pi t)\,dt = \int_0^1 \frac{1+\cos(2\pi t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

3. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}+1} = \dfrac{e^2}{n} + v_n$, où $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{1+\frac{k}{n}}$.
On reconnaît là une somme de Riemann, de sorte que
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^1 e^{1+t}dt = e^2 - e.$$
Puisque $\dfrac{e^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = e^2 - e$.

4. On a $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)}$ et donc
$$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{i}{n}\right).$$
On reconnaît alors une somme de Riemann, qui converge vers
$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [(1+x)\ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$
Et alors, par continuité de l'exponentielle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{4}{e}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 26.27

On a
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\sqrt{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}\sqrt{n-k} = n^2 \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{1-\frac{k}{n}}$$
On reconnaît alors une somme de Riemann : en posant $f : x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{1-x}$, qui est continue sur $[0,1]$, on a $\dfrac{u_n}{n^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$.
Calculons donc cette intégrale :
$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}du = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(2u)^2}\,du.$$

Mise sous forme canonique suivie d'un changement de variable.

Intégrale d'une fonction paire.

Posons alors $v = 2u$, de sorte que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-v^2}\,dv$. Le changement de variable $v = \sin t$ donne alors
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t)+1)\,dt = \frac{\pi}{8}.$$
On en déduit que $\dfrac{u_n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{8}$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^2}{8}$.

Solution de l'exercice 26.28

Puisque nous avons un produit, préférons passer au logarithme : $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

Et donc $\frac{1}{n}\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$ est une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, continue sur $[0,1]$.

Donc $\frac{1}{n}\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Ne calculons pas cette intégrale, mais contentons-nous de remarquer qu'elle est strictement positive, car intégrale d'une fonction continue positive et non nulle[16].

Et donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Par conséquent, en passant à l'exponentielle, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

[16] f s'annule uniquement en 0.

Solution de l'exercice 26.29

On a $S_n = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

On reconnaît alors que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ entre 0 et 1.

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Remarque

Le résultat se généralise sans difficulté à $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, avec $\alpha > 0$.

Nous verrons d'autres moyens de le retrouver lorsque nous rencontrerons une méthode nommée «comparaison série/intégrale».

Solution de l'exercice 26.30

On a $u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$.

On reconnaît alors une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ entre 0 et 1.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$.

Notons $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, de sorte que $u_n = v_{2n} - v_n$.

Il est assez clair que (v_n) est croissante, et donc soit convergente, soit de limite égale à $+\infty$.
Si elle était convergente de limite ℓ, alors on aurait $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de l'exercice 26.31

Cette intégrale (notons la $I(a)$ dans la suite) est bien définie lorsque $x \mapsto a^2 - 2a\cos(x) + 1$ est strictement positif sur $[0,\pi]$.

Pour $x \in [0,\pi]$, notons $P_x : a \mapsto a^2 - 2a\cos(x) + 1$ qui est un polynôme du second degré en a. Son discriminant est $\Delta_x = 4\cos^2(x) - 4 = 4(\cos^2(x) - 1)$, qui est négatif, de sorte que P_x est de signe constant. Et puisque son coefficient dominant est positif, il est positif.

Mieux : Δ_x est strictement négatif, et donc P_x ne s'annule pas, sauf pour $x = 0$ et $x = \pi$, auquel cas P_x possède une unique racine, qui est 1 (lorsque $x = 0$) ou -1 (lorsque $x = \pi$).

Donc l'intégrale $I(a)$ existe dès que $a \neq \pm 1$.

On a alors

$$I(a) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\right).$$

Or les racines complexes du polynôme (en a) $a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1$ sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$.

Et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(a - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(a - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Il s'agit donc d'un polynôme de degré $2n$, qui possède 1 comme racine double[17] et dont les autres racines, toutes de multiplicité 1, sont les $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On reconnaît alors toutes les racines $2n^{\text{èmes}}$ de l'unité, à l'exception de -1.
D'autre part, nous savons que

$$\prod_{\zeta \in \mathbf{U}_{2n}} (a-\zeta) = a^{2n} - 1.$$

Et donc puisque $a \neq \pm 1$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{a-1}{a+1} \prod_{\zeta \in \mathbf{U}_{2n}} (a-\zeta) = \frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1).$$

Et donc

$$I(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right)\right).$$

Donc déjà, si $|a| < 1$, $a^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\frac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-a}{a+1} > 0$ et donc $I(a) = 0$.
En revanche, si $|a| > 1$, alors $a^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et alors

$$\ln\left(a^{2n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(a^{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(a^2\right).$$

Puisque par ailleurs, $\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n\ln\left(a^2\right)\right)$, on a

$$\ln\left(\frac{a-1}{a+1}(a^{2n}-1)\right) = \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(a^{2n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(a^2\right).$$

Et donc

$$I(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\left(a^{2n}-1\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left(a^{2n}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} n\ln\left(a^2\right) = \pi\ln\left(a^2\right).$$

Au final, on a donc prouvé que

$$\int_0^\pi \ln\left(a^2 - 2a\cos(x) + 1\right)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ \pi\ln\left(a^2\right) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

[17] C'est le cas $k = 0$.

Remarque — Notons que l'existence de ces limites est automatique, puisque nous sommes partis de sommes de Riemann, qui possèdent nécessairement une limite.

Rappel — Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Solution de l'exercice 26.32

1. Soit $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Il s'agit bien évidemment d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ puisque f est continue.
Et puisque f est à valeurs strictement positives, $F' = f > 0$, et donc F est strictement croissante.
Puisque $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, que $F(a) = 0$, et que

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$$

par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_1 \in [a, b]$ tel que

$$F(x_1) = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt \Leftrightarrow \int_a^{x_1} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Puis de même, il existe un unique $x_2 \in [x_1, b]$ tel que

$$F(x_2) = \frac{2}{n}\int_a^b f(t)\,dt \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt.$$

De proche en proche, on prouve ainsi, que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, il existe un unique x_k tel que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,dt$.

2. Notons $A = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
La question précédente nous indique que $x_k = F^{-1}\left(\frac{k}{n}A\right)$.
Et donc $f(x_k) = f\left(F^{-1}\left(\frac{k}{n}A\right)\right)$.
Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f\circ F^{-1})\left(\frac{k}{n}A\right).$$

On reconnaît alors, à une constante multiplicative près[18], des sommes de Riemann pour la fonction $f\circ F^{-1}$, entre 0 et A.
Plus précisément, il vient, puisque $f\circ F^{-1}$ est continue

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{A}\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}(f\circ F^{-1})\left(\frac{k}{n}A\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{A}\int_0^A (f\circ F^{-1})(t)\,dt.$$

Nous pourrions nous arrêter ici, mais avec le changement de variable $x = F^{-1}(t)$, légitime car F^{-1} est $\mathscr{C}^1$ il vient

$$\int_0^A (f\circ F^{-1})(t)\,dt = \int_a^b f(x)f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

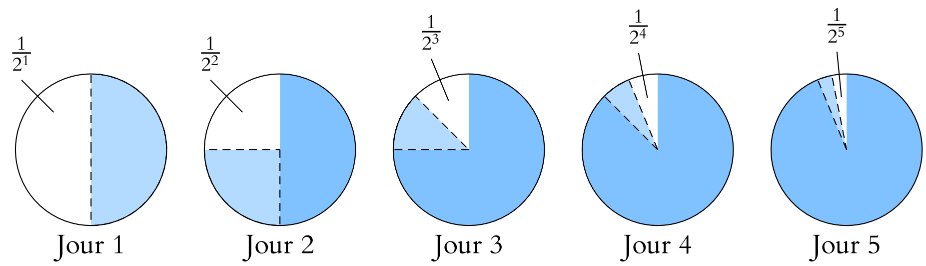
Et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}.$$

[18] Le fameux $\frac{b-a}{n}$ devant la somme de Riemann.

27 Séries numériques

Dans ce chapitre on cherche à donner un sens à la notion de somme infinie de réels ou de complexes, l'infini cachant en réalité un passage à la limite.
Un exemple (certes très peu mathématique) que j'aime beaucoup est le suivant : «j'ai une tarte, et le premier jour j'en mange la moitié. Le jour suivant je mange un quart (soit la moitié de ce qu'il me restait), puis chaque jour je mange la moitié de ce qu'il me reste. À la fin, quelle proportion de la tarte vais-je conserver ?».



Vous comprenez bien entendu qu'à la fin on aura mangé toute la tarte, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$, ce que nous écrirons bientôt $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1$.
Au delà de l'intérêt que ces sommes infinies présentent en analyse, ce sera un outil fondamental en probabilités en seconde année afin de travailler dans des espaces probabilisés infinis, où l'on est souvent amené à considérer des sommes infinies, par exemple dans la formule des probabilités totales, ou pour définir l'espérance/la variance d'une variable aléatoire qui peut prendre une infinité de valeurs.

Enfin, nous parlons de séries numériques[1] puisque vous parlerez (longuement) l'an prochain de séries de fonctions.

[1] C'est-à-dire de nombres (réels ou complexes).

27.1 Convergence d'une série

27.1.1 Définition

Définition 27.1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs complexes. On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum u_n$ (ou $\sum\limits_n u_n$, ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$) la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

On dit que S_n est la **somme partielle d'ordre** n de $\sum u_n$.

Autrement dit
Se donner une série, c'est se donner la suite de ses sommes partielles.

Remarque. Si u_n n'est défini qu'à partir d'un certain entier $n_0\in\mathbf{N}$, alors les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont définies par :

$$\forall n\geqslant n_0,\ S_n=\sum_{k=n_0}^{n}u_k.$$

On peut alors noter $\sum\limits_{n\geqslant n_0}u_n$ pour bien marquer que les sommes commencent à n_0.

Exemple 27.2

▸ Si $u_n = \frac{1}{2^n}$, alors nous savons que pour $n \geqslant 0$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$.
Autrement dit, l'appellation série de terme général $\frac{1}{2^n}$, désigne la suite $\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
▸ Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Alors nous savons que $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et donc pour $n \geqslant 1$, la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs complexes, la série de terme général u_n est une suite, pour laquelle on peut donc s'intéresser à la convergence.
Autrement dit, on dit[2] que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ existe (dans $\mathbf{C}$).
Soit encore si et seulement si la suite de ses sommes partielles est une suite convergente.
Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n diverge, ce qui inclut notamment le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \pm\infty$.

[2] Ceci n'est pas une définition : j'ai déjà défini ce qu'est une série (en l'occurrence c'est une suite particulière), et j'ai déjà défini ce qu'est une suite convergente.

Exemple 27.3

La série $\sum(-1)^n$ diverge puisque pour $n \in \mathbf{N}$ la somme partielle d'ordre n de cette série est donnée par, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.
Donc la suite des sommes partielles diverge, ce qui par définition signifie que la série diverge.

Pour une série $\sum u_n$ à valeurs complexes, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_k) \text{ et } \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_k).$$

Or, une suite à valeurs complexes converge si et seulement si les suites[3] des parties réelles et des parties imaginaires convergent. En appliquant ce résultat à la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, on obtient donc le résultat suivant : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries[4] $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

[3] Réelles.

[4] À termes réels.

⚠ On ne confondra pas la convergence de la suite $(u_n)_n$ et celle de la série $\sum u_n$, ces deux notions ne sont pas équivalentes[5].
Par exemple, pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \frac{1}{n}$.
Alors nous avons prouvé[6] que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.
Donc la **suite** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, alors que la **série** $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

[5] Bien qu'il existe une implication, voir un peu plus loin.

[6] Au chapitre 8, mais nous le reprouverons dans ce chapitre.

Définition 27.4 (Somme d'une série convergente) – Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à valeurs complexes. Si la série de terme général u_n converge, on appelle **somme de la série** $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et on note $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ le complexe[7] défini par

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

[7] C'est un réel si (u_n) est à valeurs réelles.

⚠ La somme n'est définie que pour une série convergente.

Pour une série divergente, la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'est pas définie.

Ce qui signifie que si vous utilisez la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$, il est impératif d'avoir au préalable effectué une étude de la convergence de la série (et avoir conclu à la convergence).

De manière générale, on prendra bien soin de faire la différence entre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (qui est une limite, donc un scalaire) et $\sum u_n$ (ou $\sum_n u_n$) qui désigne une suite.

Exemples 27.5

- On a $\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2$, et donc la somme de la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$

Notation

Bien entendu, la variable de sommation est encore muette et on pourrait tout autant noter $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$ ou $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^p}$.

Tout au long de l'étude des séries, il y a deux problématiques qui vont nous intéresser :

1. déterminer si la série converge ou non. Nous allons développer de nombreux outils généraux permettant de répondre à cette question. On parle alors de la *nature de la série* (série convergente ou série divergente).
2. en cas de convergence[8], calculer la somme de la série. C'est un problème bien plus difficile, pour lequel il n'existe pas de méthode générale, et il existe de nombreuses séries dont on sait prouver la convergence, mais pas calculer la somme.

[8] Et seulement dans ce cas.

Comme pour les limites de suites, lorsqu'on étudie la nature d'une série, les premiers termes n'ont aucune importance, la convergence décrivant le comportement «à l'infini».

Proposition 27.6 (Indifférence des premiers termes) : *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe, et soit $n_1 \geqslant n_0$. Alors les séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} u_n$ sont de même nature[9].*

[9] Autrement dit l'une converge si et seulement si l'autre converge.

Démonstration. Soit $N \geqslant n_1$. Alors

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{N} u_n.$$

Puisque $\sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$ est une constante, la **suite** de terme général $\sum_{n=n_1}^{N} u_n$ admet une limite finie si et seulement si la suite de terme général $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ admet une limite finie. □

⚠ En cas de convergence, les sommes de ces deux séries n'ont en revanche pas de raison d'être égales[10].

[10] Et c'est là une vraie différence avec les suites où changer les premiers termes ne change pas la limite.

En effet, ces deux sommes (qui rappelons-le, sont des limites) diffèrent de la constante $\sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$. On garde tout de même la relation de Chasles :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

Dans toute la suite, afin d'alléger les notations, les résultats sont énoncés pour des séries dont le terme général est défini à partir de 0, mais tous restent valables en changeant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

27.1.2 Premières propriétés

Commençons par une remarque triviale[11], mais qui mérite d'être signalée : multiplier une série par un scalaire non nul ne change pas sa nature.
Autrement dit, pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $\sum(\lambda u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.
Plus généralement, on dispose du résultat suivant.

[11] Je ne la prouve volontairement pas, à vous de vous convaincre que c'est trivial !

Proposition 27.7 (Linéarité de la somme) : *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Cela découle directement de la linéarité des sommes finies : pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

□

En particulier, la somme de deux séries convergentes est encore convergente.
En revanche si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.
En effet, si elle était convergente, puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, $\sum v_n$ serait convergente par différence de séries convergentes.

Plus généralement

Si dans une somme de k séries, une seule est divergente (et donc les autres convergentes), alors la somme est divergente.

Notons enfin qu'on ne peut rien dire en général de la somme de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergentes.
Elle peut diverger, par exemple pour $u_n = v_n = \frac{1}{n}$, comme elle peut converger, par exemple pour $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$.

Le tableau suivant récapitule la nature de $\sum(u_n + v_n)$ en fonction de celles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

$\sum v_n$ \ $\sum u_n$	CV	DV
CV	CV	DV
DV	DV	?

Signifie qu'il n'existe pas de règle qui permette de conclure **dans tous les cas.** Si on vous demande la nature d'une telle série, il faudra aller mettre les mains dans le cambouis pour déterminer la nature de la série. Et surtout pas se contenter d'un «on ne peut pas conclure».

Proposition 27.8 : *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$. □

Corollaire 27.9 – *Si (u_n) est une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle **diverge grossièrement**.*

Démonstration. C'est la contraposée de la proposition ci-dessus. □

⚠ Il ne s'agit en aucun cas d'une équivalence, et prouver que son terme général tend vers 0 ne peut pas prouver la convergence d'une série !

Un contre exemple est la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, dont le terme général tend vers 0, mais qui diverge.

En revanche, un terme général qui ne tend pas vers 0 permet de répondre : la série est divergente.

Méthode

Souvent la première chose à faire lors de l'étude d'une série est de vérifier que $u_n \to 0$. Ce sera le cas la plupart du temps, mais ceci permet d'éviter de passer à côté des cas de divergence grossière.

Exemple 27.10

Soit $u_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$. Alors $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right)$.

Or, $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$, et donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, de sorte que par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1/2} \neq 0$, donc la série de terme général u_n est divergente.

Définition 27.11 – Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit encore $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
On dit alors que R_n est le **reste d'ordre** n de $\sum u_n$.

Justification

Cette écriture a bien un sens puisque la série $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge (par indifférence des premiers termes).

Le reste d'ordre n mesure donc l'écart entre la somme partielle d'ordre n et la somme de la série.

Proposition 27.12 : *Avec les notations ci-dessus $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Notons S_n la somme partielle d'ordre n, de sorte que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Et donc $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$. □

Ce résultat est assez intuitif, mais en pratique, avoir un contrôle de la vitesse à laquelle les restes tendent vers 0 peut aider à approximer la somme d'une série par une somme partielle.

En effet, si on souhaite une approximation de $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à ε près, il faut savoir à partir de quelle valeur de n on a $|R_n| \leqslant \varepsilon$, et alors, pour un tel n, S_n est une approximation de S à ε près.

27.1.3 Séries usuelles

Proposition 27.13 : *Soit (u_n) une suite. Alors la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est de même nature que la suite $(u_n)_n$.*

Démonstration. Pour $N \in \mathbf{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0$, qui admet une limite lorsque $N \to +\infty$ si et seulement si u_{N+1} admet une limite. Donc si et seulement si (u_n) converge. □

Remarque
En cas de convergence, on a directement une expression de la somme de la série en fonction de la limite de la suite (u_n).

Le résultat a l'air anodin, mais comme nous allons bientôt disposer de nombreux outils pour prouver la convergence d'une série, appliqués à la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ils deviendront des outils pour étudier la convergence de la suite (u_n). Voir par exemple la preuve de la formule de Stirling donnée plus loin.

Une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1}-u_n$ pour une certaine suite (u_n) est appelée **série télescopique**.

Voici deux séries qu'il faudra connaître par cœur, ce sont quasiment les seules qui figurent au programme, et les seules dont la somme est à connaître.

Proposition 27.14 (Série géométrique) : *Soit $q \in \mathbf{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.*

Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. Si $|q| \geqslant 1$, alors pour tout n, $|q|^n \geqslant 1$, donc $\sum q^n$ diverge grossièrement.
Si $|q| < 1$, alors pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Et alors $|q^{n+1}| = |q|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, ce qui prouve à la fois que la série $\sum q^n$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$. □

Proposition 27.15 (Série exponentielle) :

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Taylor-Lagrange, et la preuve de ce résultat est l'exemple 33 du chapitre 26. □

Remarque. On pourrait prouver par d'autres moyens (cf le critère de d'Alembert ci-dessous) que cette série converge, et **définir** e^x comme étant la somme de cette série.
Puis prouver[12] que la fonction ainsi définie a les propriétés usuelles de l'exponentielle (positivité, continuité, $e^{x+x'} = e^x e^{x'}$, solution de $y' = y$).
Le dernier point impliquant alors que sa bijection réciproque est une primitive de la fonction inverse, et donc définir ainsi le logarithme, sans faire appel au théorème fondamental de l'analyse.
Un des avantages de cette façon de procéder est qu'elle permet également de définir e^z pour $z \in \mathbf{C}$ comme somme d'une série, et qu'on peut alors définir *proprement* les fonctions sin et cos via les formules d'Euler.
Et par exemple définir π comme étant le double du plus petit zéro positif de la fonction cos. Mais vous en reparlerez[13] en spé.

[12] Et c'est à peu près ce que vous ferez en seconde année.

[13] Ou pas.

Exemples 27.16

▶ Soit $u_n = \frac{4^{n+2}}{3^{2n+1}}$. Alors $u_n = \frac{16}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
Puisque $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$, la série[14] de terme général $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge, et donc il en est de même de $\sum u_n$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{16}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{16}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{48}{5}.$$

▶ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e^1 = e$.
On en déduit que

$$\operatorname{ch}(1) = \frac{e+e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n!} = \sum_{\substack{n=0\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}.$$

[14] Géométrique.

27.2 Étude des séries à termes positifs

Dans cette partie, on énonce des résultats sur la convergence des séries à termes positifs[15] (ou nuls). Nous devrions d'ailleurs plutôt dire «de terme général positif».
Toutefois les résultats qui vont être prouvés ci-après ont une portée plus importante puisque :

1. multiplier par -1 ne change pas la nature de la série, et donc les résultats s'appliqueront également aux séries à termes négatifs
2. par indifférence des premiers termes, il suffit qu'à partir d'un certain rang, u_n soit positif.

Autrement dit, les résultats qui suivent s'appliquent aux séries de signe constant à partir d'un certain rang.
En revanche, ils ne s'appliquent pas aux séries qui changent de signe une infinité de fois.

[15] Et donc réels.

27.2.1 Utilisation d'inégalités

Le résultat fondamental dans l'étude des séries à termes positifs est le suivant :

Proposition 27.17 : *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*

Dans le cas contraire, $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Démonstration. Notons (S_n) la suite des sommes partielles. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

Donc (S_n) est croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge si et seulement si elle est majorée. Et dans le cas contraire, elle tend vers $+\infty$. □

Proposition 27.18 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :*

1. *si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*
2. *si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

En cas de convergence, on a $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

⚠ Attention !
L'hypothèse de positivité est indispensable.

⚠ Ce que dit cette proposition c'est que, pour **les séries à termes positifs**, majorer par une série convergente ou minorer par une série divergente permet de conclure quant à la nature.
En revanche, minorer par une série convergente ou majorer par une série divergente est complètement inutile et n'apporte aucune information[16]

[16] En tous cas pas quant à la nature de la série.

Démonstration. 1) Supposons que $\sum v_n$ converge.
Étant donnée l'hypothèse faite sur u_n et v_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (\star).$$

Or, puisque $\sum v_n$ converge, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_n$ est majorée, et donc il en est de même de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$.
Par la proposition précédente, $\sum u_n$ converge.
Et alors en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans $(\star)$, il vient

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2) C'est tout simplement la contraposée du premier point. □

Exemples 27.19

▶ Soit $u_n = \dfrac{1+\cos(3n)}{2^n}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{2^n}$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\sum u_n$.
▶ Soit $v_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n}$.
Alors pour $n \geqslant 1$, $v_n \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.
Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

L'énoncé de la proposition ci-dessus suppose qu'on a une majoration qui est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Mais par indifférence des premiers termes, il suffit qu'elle le soit **à partir d'un certain rang**, autrement dit, qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Exemple 27.20

Soit $\alpha > 0$, et soit $u_n = \dfrac{\ln(1+\alpha\sqrt[3]{n})}{\sqrt{n}}$.
Alors $\ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\alpha\sqrt[3]{n}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

Donc $\sum u_n$ diverge.

27.2.2 Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, considérons une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$, continue, positive et décroissante.

Soit alors $k \in \mathbf{N}^*$. Par décroissance de f, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. Et donc par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k).$$

Et donc en sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Soit encore, en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

De la première inégalité, on tire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt$, et de la seconde il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt$.

Au final, on obtient donc un encadrement des sommes partielles de la série de terme général $f(k)$ entre deux intégrales :

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt.$$

Méthode

Je n'en fais pas une proposition parce que je ne tiens pas à ce que l'encadrement soit connu par cœur, mais la méthode est à connaître et il faut savoir retrouver ce résultat.

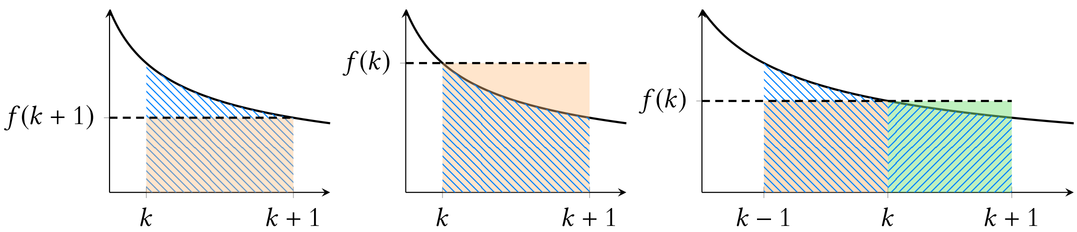


FIGURE 27.1 – L'encadrement de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ entre les aires de deux rectangles.

La troisième figure montre un encadrement de $f(k)$ (qui est l'aire des deux rectangles colorés) à l'aide de deux intégrales : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$.

Remplacer tous les 1 par un $n_0 \in \mathbf{N}$ reste valable.

Le principal intérêt de cet encadrement réside dans la proposition suivante, qui ramène l'étude de convergence de certaines séries à des limites d'intégrales. Comme il est souvent bien plus facile de calculer une intégrale qu'une somme (parce qu'on connaît un certain nombre de primitives, et parce qu'on dispose de deux outils formidables, à savoir l'intégration par parties et le changement de variable), ceci fournit donc un outil précieux pour étudier la nature d'une série.

Proposition 27.21 (Comparaison série/intégrale) : *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante.*

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Démonstration. Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Supposons que $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ converge. Alors en particulier elle est majorée par une constante M.
Et donc pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + M$, et donc la suite des sommes partielles de $\sum f(n)$ est majorée, donc la série est convergente.

Inversement, supposons que la série converge. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$.
Mais la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\,dt\right)_n$ est croissante car f est positive :

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_1^n f(t)\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Géométriquement

Pour une fonction positive, l'intégrale est une aire et cette croissance est donc assez évidente.

Étant croissante et majorée, elle converge. □

Théorème 27.22 (Séries de Riemann) :
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

*Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées **séries de Riemann**, et le cas particulier où $\alpha = 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, est appelé **série harmonique**[17].*

On veillera à ne pas confondre les *sommes* de Riemann et les *séries* de Riemann, qui bien qu'elles fassent toutes les deux apparaître des sommes, n'ont rien à voir[18].
On prendra bien garde au fait qu'une série de Riemann est une série de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha}$, avec α **fixé**.
Une série de la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{u_n}}$, où (u_n) n'est pas constante ne relève donc pas du théorème ci-dessus.

[17] Qui est donc divergente.

[18] Si ce n'est leur illustre découvreur.

Démonstration. Pour $\alpha \leqslant 0$, on n'a pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, et donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc la proposition précédente s'applique.
On a alors, pour $n \geqslant 1$, et pour $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

► Si $\alpha > 1$, alors $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
► En revanche, si $\alpha < 1$, alors $\alpha - 1 < 0$, et donc $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
► Reste à traiter le cas $\alpha = 1$, pour lequel notre calcul de primitive n'était pas valable. Mais on a alors

$$\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc la série harmonique diverge. □

Exemple 27.23

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car elle correspond à $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) alors que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ convergent.

Remarques. ▶ Si ce théorème répond complètement à la question de la convergence des séries de Riemann, il ne dit rien de la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$. Et pour cause, il s'agit d'un problème très difficile. Nous avons prouvé en DM que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et il existe des formules analogues[19] lorsque α est un entier pair.
Il est de plus connu que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel, mais c'est à peu près[20] tout.

▶ Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. La fonction $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ se prolonge en une fonction dérivable (en tant que fonction d'une variable complexe) sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$, et une question qui taraude les mathématiciens depuis un siècle et demi, et qui est centrale en théorie des nombres est de savoir où cette fonction s'annule. On suppose que les zéros de ζ sont (presque) tous sur la droite $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}$, c'est *l'hypothèse de Riemann*, dont la tête[21] est mise à prix un million de dollars.

En pratique, l'encadrement établi plus haut permet d'aller plus loin dans l'étude des séries de la forme $\sum f(n)$, avec f vérifiant les hypothèses précitées[22].
Deux cas de figure se présentent alors :
▶ Dans le cas où $\sum f(n)$ diverge. Alors pour $n \geqslant 1$,

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,dt.$$

On a alors un encadrement des sommes partielles , qui permet souvent d'obtenir un équivalent de la suite des sommes partielles.

Exemple 27.24 Une série de Bertrand

Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \frac{1}{n \ln n}$.
Soit alors $f : [2, +\infty[\to \mathbf{R}_+$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$, de sorte que $u_n = f(n)$.
Alors f est continue, positive et décroissante, donc comme précédemment, on prouve que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} + \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

Mais une primitive de f est $F : t \mapsto \ln(\ln t)$.
Donc $\int_2^n f(t)\,dt = F(n) - F(2) = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
Mieux, on a $\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \leqslant \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

[19] Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

[20] J'exagère un peu...

[21] Celle de l'hypothèse, pas celle de Riemann !

[22] Continuité, positivité, décroissance.

Rappel
Les sommes partielles tendent vers $+\infty$ puisqu'il s'agit d'une série divergente à termes positifs.

Détails
f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

Donc $1 - \dfrac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} \leqslant \dfrac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\ln 2 \ln(\ln n)} - \dfrac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}$.
On en déduit donc par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln n)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n).$$

Remarque
C'est exactement la même méthode qui avait été mise en œuvre pour prouver le très classique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

► Dans le cas où $\sum f(n)$ converge, alors pour $1 \leqslant n < N$, on a

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{N} f(t)\,dt.$$

Notons $I_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,dt$ et $I = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
Alors on a $I_{N+1} - I_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant f(n+1) + I_N - I_{n+1}$.
En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$ (et à n **fixé**), on obtient alors

$$I - I_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant f(n+1) + I - I_{n+1}.$$

Le terme central est alors le reste d'ordre n de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(k)$, et cet encadrement permet souvent de donner un équivalent du reste. Ce reste n'étant rien d'autre que l'erreur qu'on commet en approchant la somme de la série par la somme partielle d'ordre n.

Exemple 27.25

Considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, qui est bien de la forme ci-dessus pour $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.
Alors $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{n}$, et donc $I = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$, et $I - I_n = \dfrac{1}{n}$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}.$$

Et en particulier, après multiplication par n et application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Classique
Si on a trois suites positives telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Mentionnons enfin que les méthodes d'encadrement de sommes à l'aide d'intégrales développées ci-dessus peuvent également s'appliquer si f est croissante, en changeant le sens des inégalités.
Dans le cadre des séries, ceci est de peu d'intérêt, puisque si f est croissante et positive, elle ne tendra que rarement[23] vers 0 en $+\infty$, et donc la série de terme général $f(n)$ est divergente.
Toutefois, ceci permet d'obtenir des équivalents de sommes que l'on ne sait pas forcément calculer comme par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

[23] Savez-vous quand ?

Exercice
Le prouver :
1. par comparaison à une intégrale
2. avec la formule de Stirling.

27.2.3 Utilisation d'équivalents

Théorème 27.26 : *Soient (u_n) et (v_n) deux suites* ***à termes positifs*** *telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Autrement dit
L'une converge si et seulement si l'autre converge.

Démonstration. Par définition des équivalents, il existe (θ_n) une suite de limite 1 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \theta_n v_n$.
Soit alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$, de sorte qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$|\theta_n - 1| \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant \frac{3}{2}.$$

Et donc pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$.
Ainsi, si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum \frac{3}{2}v_n$, et donc par majoration, $\sum u_n$ converge.
En revanche, si $\sum v_n$ diverge, alors il en est de même de $\sum \frac{1}{2}v_n$, et donc de $\sum u_n$.
Donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. □

⚠ La positivité est vraiment indispensable (voir en TD pour un contre-exemple), et donc il est vraiment nécessaire de la mentionner.
En revanche, souvenons nous que deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang. Et donc par indifférence des premiers termes, il suffit de vérifier la positivité de l'une des deux suites pour pouvoir appliquer le résultat.

Exemples 27.27

- Soit $u_n = \sin \frac{1}{n^2}$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
Puisque la série **à termes positifs** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.
- Soit $v_n = e^{1/\sqrt{n}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors à l'aide d'un développement limité, on obtient

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Puisque la série **à termes positifs** $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.
- Soit $w_n = \dfrac{4^n + \cos n}{3^{2n} + \ln(n)}$.
Alors $4^n + \cos n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$ et $3^{2n} + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 9^n$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
Puisque la série **à termes positifs** $\sum \left(\frac{4}{9}\right)^n$ converge[24], il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.

[24] C'est une série géométrique de raison dans $]-1, 1[$.

27.3 Séries absolument convergentes

27.3.1 Définition

Définition 27.28 – Soit (u_n) une suite à valeurs complexes. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série[25] $\sum |u_n|$ converge.

[25] À termes positifs.

Remarque. Pour une série à termes positifs, la convergence est équivalente à l'absolue convergence puisque $|u_n| = u_n$.
De même pour une série à termes négatifs puisqu'alors $|u_n| = -u_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature.
La notion d'absolue convergence n'est donc intéressante que pour les séries dont le terme général change de signe[26].

[26] Et par indifférence des premiers termes, ce n'est même vraiment intéressant que pour les séries qui changent de signe une infinité de fois.

Exemples 27.29

- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente, puisque pour tout n, $0 \leqslant \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ converge absolument.
En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{|z|^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leqslant e^{|z|}.$$

Et donc les sommes partielles de la série **à termes positifs** $\sum \left|\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right|$ sont majorées, donc la série converge.

Étudier une absolue convergence revient à étudier la convergence d'une série à termes positifs, et donc toutes les techniques développées précédemment sont utilisables.
La bonne nouvelle véhiculée par le théorème qui suit, est que ceci permet de prouver des convergences.

Théorème 27.30 (La convergence absolue entraîne la convergence) :
Soit $\sum u_n$ une série à valeurs complexes absolument convergente.
Alors $\sum u_n$ est convergente, et de plus

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \textit{(Inégalité triangulaire généralisée).}$$

Danger !
Cette inégalité ne peut avoir de sens que lorsque la somme à droite est bien définie. C'est-à-dire lorsque $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration. ► Commençons par le cas d'une série à valeurs réelles, avec $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$.
Et donc puisque $\sum 2|u_n|$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général $u_n + |u_n|$.
Et alors $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$ est le terme général d'une série convergente car différence de deux séries convergentes.

► Dans le cas d'une série à valeurs complexes, il suffit de noter que $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$, de sorte que la convergence absolue de $\sum u_n$ entraîne la convergence absolue de $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$.
Et donc par le cas réel, $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent toutes deux.
Donc $\sum u_n$ converge.

► Enfin, pour l'inégalité triangulaire, notons que pour tout $N \in \mathbf{N}$, par l'inégalité triangulaire[27]

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

et donc que par passage à la limite[28] lorsque $N \to +\infty$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

□

[27] La classique, version somme finie.

[28] Ce qui nécessite de savoir que les deux membres possèdent une limite, donc que $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent toutes les deux.

Exemple 27.31

La série à termes complexes $\sum \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ converge car nous avons prouvé qu'elle converge absolument.

⚠ La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes (un exemple en sera donné un peu plus bas dans le critère des séries alternées).

En pratique, pour une série qui ne serait pas à termes positifs, étudier l'absolue convergence doit être votre premier réflexe pour étudier la convergence.
Si malheureusement cette absolue convergence n'est pas vérifiée, il faudra trouver d'autres outils[29] pour déterminer la nature de la série.

Pour la culture

La somme de cette série est appelée $\cos(z)$ (rappelons que z est un complexe !).
On peut alors prouver qu'on a toujours la formule d'Euler

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

[29] Et nous en aurons bien peu...

27.3.2 Encore des critères de comparaison

La proposition qui suit est énoncée dans un cas général avec une série complexe et une absolue convergence, mais en pratique vous aurez souvent à l'utiliser avec des séries à termes positifs, ce qui nous fournit donc un critère de plus pour étudier de telles séries.

Proposition 27.32 (Comparaison à l'aide d'une relation de domination) :
Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et soit $(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ à termes positifs.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

Démonstration. Par définition, il existe une constante positive M telle que pour tout n suffisamment grand, $|u_n| \leqslant M|v_n| \Leftrightarrow 0 \leqslant |u_n| \leqslant Mv_n$.
Or la série de terme général Mv_n converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge absolument. □

Exemples 27.33

► Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n = \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}\dfrac{\cos n}{2^n}$.
Puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, elle est bornée au voisinage de $+\infty$. Puisque $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite $\left(\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right)_n$ est donc bornée.
Donc $\left(\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}\cos(n)\right)_n$ est bornée, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
Et donc $\sum u_n$ converge, par comparaison à une série géométrique convergente.

► Soit $u_n = \sqrt{1-\dfrac{1}{n}} - 1 - \ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$.
Alors, à l'aide de développements limités, on obtient

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Autrement dit, les termes de degré 1 des développements limités se simplifient, mais si on cherche un équivalent[30], il faut aller jusqu'à un ordre où le développement limité est non nul.
Bien entendu, on peut essayer l'ordre 2, mais ici ce ne sera pas suffisant puisque les termes d'ordre 2 des deux développements limités ci-dessus valent $-\dfrac{1}{8n^2}$. Donc il faudrait aller calculer les termes d'ordre 3 et espérer qu'ils ne sont pas égaux...
Plus simplement, notons que $\sqrt{1-\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
En effet, nous savons que $\sqrt{1-x}$ possède un développement limité d'ordre 2, et

Rappel

Pour une suite, bornée au voisinage de $+\infty$ (i.e. bornée à partir d'un certain rang) est équivalent à bornée.

[30] Ce qui nous permettrait sûrement de conclure quant à la nature de $\sum u_n$.

sans calculer le terme de degré 2, nous pouvons regrouper ce terme de degré 2 et le reste en $o(x^2)$ sous la même notation : $O(x^2)$.
Et de même, $\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, de sorte que par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

Récapitulatif
Il nous a suffit ici de calculer les termes de degré 1 des développements limités, alors que la recherche d'un équivalent aurait nécessité le calcul des termes de degré 2 et 3.
Au delà du temps gagné, cette astuce limite grandement les risques d'erreur de calcul.

Corollaire 27.34 (Comparaison à l'aide d'une relation de négligeabilité) – *Soient $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $(v_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ **à termes positifs.***
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

Démonstration. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et donc la proposition s'applique. □

Exemple 27.35

Pour $n \geqslant 3$, soit $u_n = \frac{\ln(\ln n)}{n\sqrt{n}}$.
La nature de la série $\sum u_n$ peut s'obtenir par une comparaison série/intégrale, mais il faudrait alors s'assurer de la décroissance de $t \mapsto \frac{\ln(\ln t)}{t\sqrt{t}}$, et si on pouvait se passer du calcul de la dérivée, on le ferait volontiers !
Notons que $\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\beta)$ pour tout $\beta > 0$.
Donc $\frac{\ln(\ln n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^\beta}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2-\beta}}\right)$.
Prenons alors $\beta = \frac{1}{4}$ de sorte que $\frac{3}{2} - \beta > 1$.
Alors la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2-\beta}}$ converge, et donc par critère de comparaison, il en est de même de $\sum u_n$.

Parmi les rares séries dont on connaît déjà la nature, celles auxquelles on se réfère le plus souvent sont les séries de Riemann.
Je mentionne la règle suivante sous forme d'une proposition, mais il ne s'agit de rien d'autre que du cas où une série est négligeable devant une série de Riemann convergente, comme dans l'exemple précédent.

Proposition 27.36 (Règle $n^\alpha u_n$) : *Soit (u_n) une suite complexe. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Il s'agit de remarquer que $n^\alpha u_n = \frac{u_n}{\frac{1}{n^\alpha}}$ et donc que

$$n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Et alors, on peut appliquer la proposition précédente avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. □

27.3.3 Application : la formule de Stirling

Dans cette partie, nous prouvons enfin la formule de Stirling énoncée dans le chapitre 18.
Les deux ingrédients principaux sont :

1. l'existence d'un réel strictement positif ℓ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\ell$

2. les intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$ qui permettent de déterminer la valeur de ℓ *une fois son existence acquise.*

Remarque historique

C'est Abraham DE MOIVRE qui a prouvé le premier point, et STIRLING le second.

Commençons par le premier point : Posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Alors

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\frac{e^{-n}}{e^{-(n+1)}}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\\
&= \cancel{\ln(n+1)} + \ln(e) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) + \cancel{\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)}\\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Astuce

Plutôt que d'écrire le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, on se contente de

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right).$$

Donc $\sum v_n$ converge. Mais $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, qui est le terme général d'une série télescopique.
Puisque cette série converge, $\ln(u_n)$ possède donc une limite finie A lorsque $n \to +\infty$. Et alors par continuité de l'exponentielle, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^A > 0$.
Et donc $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^n\sqrt{n}\underbrace{e^A}_{=\ell}$.

Reste à présent à calculer la valeur de ℓ, et pour cela utilisons les intégrales de Wallis, avec des arguments[31] déjà rencontrés dans le DM 7.

Pour $n \in \mathbf{N}$, notons $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt$ les intégrales de Wallis.

Il est alors aisé de prouver que $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$.

► Pour $n \in \mathbf{N}$, on a $W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leqslant 0}\,dt \leqslant 0$, si bien que (W_n) est décroissante.

► De plus, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\left(1-\sin^2 t\right)\,dt = W_n - \int_0^{\pi/2} \cos^n t\sin^2 t\,dt.$$

Procédons alors à une intégration par parties, en notant que $t \mapsto \cos^n t \sin t$ est la dérivée de $t \mapsto -\dfrac{1}{n+1}\cos^{n+1} t$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t\sin^2 t\,dt = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} t\sin t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1} t\cos t\,dt = \frac{1}{n+1}W_{n+2}.$$

Et donc il vient $W_{n+2} = W_n - \dfrac{1}{n+1}W_{n+2} \Leftrightarrow \dfrac{n+2}{n+1}W_{n+2} = W_n \Leftrightarrow (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
► Cette relation permet alors de prouver facilement, par récurrence, que pour tout n,

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2} \quad (\star).$$

► De la décroissance de (W_n) et de la relation liant W_{n+2} à W_n, on tire $\dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, et donc $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
Dès lors, la relation $(\star)$ nous dit que $(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$.

[31] Très classique et qu'on voit régulièrement revenir aux concours.
Vous n'avez à connaître aucune des propriétés de (W_n) énoncées ici, mais lorsqu'un sujet de concours les mentionne, quasiment chacun des points marqués ► ci-contre fait l'objet d'une question.

Et donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

► Enfin, en utilisant la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, il vient

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons à présent utiliser l'équivalent $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{n}\ell$ pour déterminer la valeur de ℓ :

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} \text{ et } (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell^2 n^{2n}e^{-2n}n$$

de sorte que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n}\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell}\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Comme d'autre part $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, alors $\dfrac{1}{\ell}\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \Leftrightarrow \ell \sim \sqrt{2\pi}$.

Et donc[32] $\ell = \sqrt{2\pi}$, d'où la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

[32] Deux constantes sont équivalentes si et seulement si elles sont égales.

27.3.4 Hors programme : la règle de d'Alembert

Le critère de convergence qui suit est hors programme en première année, mais est central dans le programme de seconde année, lorsque vous étudierez les *séries entières*, qui sont en gros des développements limités d'ordre infini.
Comme nous avons plusieurs fois tourné autour dans des exercices cette année, je préfère l'énoncer dès maintenant.

Proposition 27.37 (Règle de d'Alembert) :

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite qui ne s'annule pas. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Alors

1. *si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement)*
2. *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument*

Dans le cas $\ell = 1$, la série $\sum u_n$ peut converger ou diverger.

Démonstration. ► Si $\ell > 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| \leqslant \frac{\ell-1}{2} \text{ et donc } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell \geqslant -\frac{\ell-1}{2}, \text{ de sorte que } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant \frac{1+\ell}{2}.$$

Et alors $|u_{n_0+1}| \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}|u_{n_0}|$, puis $|u_{n_0+2}| \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}|u_{n_0+1}| \geqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2|u_{n_0}|$, etc

Et alors une récurrence facile prouve que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$

Puisque $\left|\dfrac{1+\ell}{2}\right| > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

► Si $\ell < 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell\right| \leqslant \frac{1-\ell}{2} \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{1+\ell}{2}.$$

Et alors pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$

Mais alors, $\left|\dfrac{1+\ell}{2}\right| < 1$, et donc la série géométrique de raison $\dfrac{1+\ell}{2}$ converge, donc par critère de comparaison, $\sum |u_n|$ converge. ◻

⚠ La règle de d'Alembert ne dit rien du cas $\ell = 1$, et pour cause, tout est possible. Regarder par exemple ce qui se passe pour $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

De manière générale, ce critère est particulièrement adapté aux séries dont le terme général fait apparaître des factorielles et des puissances.

Factorielles

Vous me direz que pour les factorielles, on peut passer par des équivalents puisqu'on dispose de la formule de Stirling.
C'est rarement le moyen le plus agréable d'arriver au résultat, et la formule de Stirling doit plutôt être utilisée en dernier recours, si rien d'autre ne fonctionne.

Exemples 27.38

- Soit $u_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n!n^n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.
On a alors $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.
Et alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{4} < 1$, de sorte que par la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

Classique

Passer par la forme exponentielle et utiliser un développement limité.

- Nous savons que le développement limité de l'arctangente en 0 est

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Comme nous l'avons fait précédemment pour l'exponentielle ou pour le cosinus, on peut se demander si la série de terme général $(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ converge (et éventuellement utiliser une formule de Taylor pour prouver que sa somme est égale à $\operatorname{Arctan}(x)$).
Le cas $x = 0$ étant trivial, considérons $x \neq 0$, et posons $u_n = (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\frac{2n+1}{|x|^{2n+1}} = x^2\frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$.
Et donc pour $|x| > 1$, la série de terme général u_n diverge, et pour $|x| < 1$, elle converge. Pour $x = \pm 1$, le critère de d'Alembert ne dit rien[33].

[33] Mais pour $x = -1$, on prouve facilement qu'elle diverge, car il s'agit de $\sum \frac{1}{2n+1}$ et pour $x = 1$, le critère des séries alternées prouvé ci-dessous prouvera qu'elle converge.

27.4 Le critère des séries alternées

Le critère évoqué dans cette partie ne s'applique qu'à certaines séries dont le terme général n'est pas de signe constant, mais dont le signe alterne à chaque terme.
Certaines de ces séries sont absolument convergentes, et on pourra leur appliquer les résultats de la partie précédente, mais d'autres sont convergentes sans être pour autant absolument convergentes.

Théorème 27.39 (Critère de Leibniz pour les séries alternées a.k.a. le critère spécial des séries alternées) : *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante qui tend vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.*

De plus, on dispose de la majoration suivante des restes : si on note $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Remarque

Notons en particulier qu'une telle suite (u_n) est à valeurs positives.

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ les sommes partielles de la série $\sum(-1)^k u_k$.
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0.$$

Donc la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.
De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$, si bien que $(S_{2n+1})_n$ est croissante.

Enfin, $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et donc convergente vers une même limite ℓ.
Mais alors les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}), extraites de (S_n) convergent vers une même limite, si bien que (S_n) converge vers ℓ.
Par définition, puisque la suite de ses sommes partielles converge, la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente, et $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

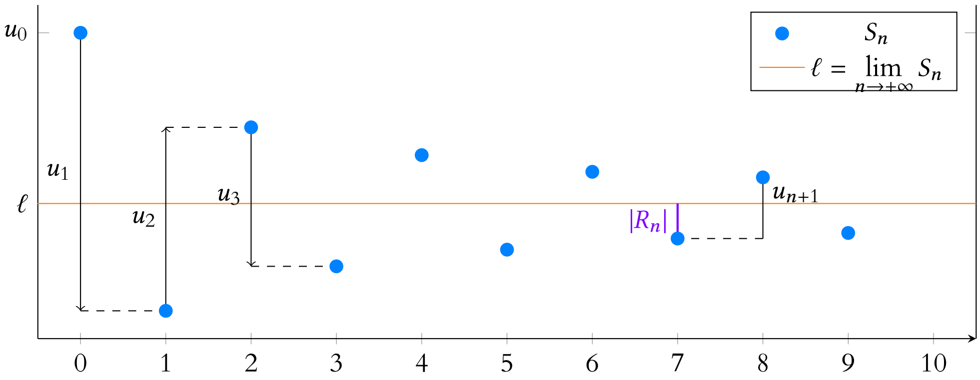


FIGURE 27.2 – Illustration de la convergence de S_n et de $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Prouvons à présent la majoration annoncée de R_n.
▸ Si $n = 2p$ est un entier pair, alors on a

$$S_{n+1} = S_{2p+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2p} = S_n.$$

Et donc en particulier,

$$S_{n+1} - S_n = (-1)^{2p+1} u_{2p+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant 0.$$

Soit encore $-u_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 0$, si bien que $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
▸ Si $n = 2p+1$ est impair, on a sur le même principe,

$$S_n = S_{2p+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2p+2} = S_{n+1}.$$

On en déduit donc que

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = u_{2p+2} = u_{n+1}$$

et donc $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Dans tous les cas, on a bien $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. □

Explications

Puisque $(S_{2k})_k$ est décroissante et convergente, tous ses termes sont supérieurs à sa limite, et de même, tous les termes de $(S_{2k+1})_k$ sont inférieurs à sa limite.

Exemples 27.40

▸ Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Alors la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente, puisque $|u_n| = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente.
En revanche, si on pose $v_n = \frac{1}{n}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = (-1)^n v_n$, et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant.

Donc le critère des séries alternées s'applique, et $\sum u_n$ est convergente.

▶ Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Alors

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

de sorte que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente, ce qui ne permet pas encore de déterminer sa nature.
Mais pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Nous savons donc par le critère des séries alternées que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

De plus, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, et $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann.
Et donc $\sum u_n$ diverge.

Danger !
Sans les valeur absolues, $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui est le terme général d'une série convergente, mais le critère des équivalents ne s'applique pas aux séries dont le terme général n'est pas de signe constant.

Remarque
Puisque $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, nous avons là un exemple de deux séries de nature différentes bien que leurs termes généraux soient équivalents. Le problème venant, comme expliqué ci-dessus du fait que leurs signes ne sont pas constants.

27.5 Développement décimal d'un réel

Dans cette courte partie, on explique (enfin) ce qu'on entend par développement décimal d'un réel, par exemple $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ ou $\pi = 3,14159\ldots$.
Nous ne nous intéressons qu'aux réels positifs, puisque la convention veut que pour un réel négatif, le développement décimal soit le développement décimal de la valeur absolue, précédée d'un signe moins.

Remarque
Il y a tout de même une faille ici : nous n'avons (toujours) pas défini ce qu'est un réel...

Lorsqu'on écrit $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$, c'est $\sqrt{2} = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{2}{10^4} + \dfrac{1}{10^5} + \ldots$, ce qui nous conduit naturellement à nous intéresser à des séries de la forme $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\alpha_k}{10^k}$, où $\alpha_k \in [\![0,9]\!]$ (α_k est un chiffre).

Nous allons dans la suite prouver que pour tout réel positif x, il existe $\beta_0 \in \mathbf{N}$ et une suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0,9]\!]$ telle que $x = \beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\beta_k}{10^k}$.
Le problème est qu'une telle décomposition n'est pas toujours unique car

Convergence
La convergence d'une telle série est facile, car son terme général est majoré par $9\cdot 10^{-k}$, qui est le terme général d'une série convergente.

$$0,9999\cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 9\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1 = 1,000\ldots$$

et de même, $0,199999\cdots = 0,2$, etc.
Nous allons voir qu'en réalité c'est là le seul problème qui puisse apparaître et qu'il ne se produit que pour les nombres décimaux. Rappelons que les nombres décimaux sont les éléments de $\mathbf{D} = \left\{\frac{k}{10^n},\ (k,n) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}\right\}$.

Enfin, puisqu'ajouter un entier revient à changer β_0, nous ne nous intéressons dans la suite qu'aux réels de $[0,1[$.

Théorème 27.41 : *Pour tout $x \in [0, 1[$, il existe une suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0, 9]\!]$ telle que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{10^k}$. De plus :*

1. *si $x \notin \mathbf{D}$, une telle suite est unique.*
2. *si $x \in \mathbf{D}$, alors il existe exactement deux telles suites, l'une dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, et l'autre dont tous les termes sont égaux à 9 à partir d'un certain rang.*

Dans les deux cas, il existe une unique suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $[\![0, 9]\!]$ telle que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $\exists n \geqslant N$ tel que $\beta_n \neq 9$.

On dit alors que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\beta_k}{10^k}$ est le développement décimal propre de x.

Démonstration. Rappelons qu'au chapitre sur les réels, nous avions défini pour tout $n \geqslant 1$ un réel $r_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$, que nous avons nommé l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.
Posons alors $\beta_n = 10^n(r_n - r_{n-1}) = \lfloor 10^n x\rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x\rfloor$. Il est alors évident qu'il s'agit d'un entier, et puisque

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x \text{ et } 10^n x - 10 < 10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor \leqslant 10^n x$$

alors $-1 < \beta_n < 10$ soit encore $0 \leqslant \beta_n \leqslant 9$.
Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{k-1}) = r_n - r_0 = r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Donc on a bien prouvé que $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k} = x$.

Pour l'unicité du développement propre, supposons que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta'_k 10^{-k}$.

Soit alors n_0 le plus petit entier tel que $\beta_{n_0} \neq \beta'_{n_0}$ (et quitte à échanger les deux développements, supposons $\beta_{n_0} < \beta'_{n_0}$), et soit n_1 le plus petit entier supérieur strictement à n_0 tel que $\beta_{n_1} \neq 9$.
Alors

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_1}10^{-n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k}\\
&< \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n_1-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_{n_1}+1)10^{-n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} \beta_k 10^{-k}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta_{n_0}10^{-n_0} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} 9\cdot 10^{-k}}_{=10^{-n_0}}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_{n_0}+1)10^{-n_0}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} \beta_k 10^{-k} + \beta'_{n_0}10^{-n_0}\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \beta'_k 10^{-k}\\
&\leqslant x.
\end{aligned}$$

Remarque
C'est ici que nous utilisons $\beta_{n_1} < 9$, pour garantir que $\beta_{n_1} + 1 < 9$.

Et donc au final, $x < x$, ce qui est absurde.

Essayez d'écrire toute la suite avec des nombres à virgule pour bien comprendre ce qui s'y passe.
Enfin, un réel ne peut pas avoir deux développements décimaux qui ne sont pas propres, car en utilisant $\sum_{k=n}^{+\infty} 9 \cdots 10^{-k} = 10^{-n-1}$, tout développement impropre est égal à un[34] développement propre, et on prouve aisément que deux développements impropres distincts ne peuvent être égaux.

[34] Nécessairement unique par le point qui précède.

Reste à prouve l'affirmation sur les nombres décimaux : si x possède un développement impropre $x = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 10^{-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k}$ avec $\beta_n \neq 9$, alors $x = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_n + 1)10^{-n}$ qui est décimal.

Et inversement, un décimal x s'écrit $\sum_{k=1}^{n} \beta_k 10^{-k}$ avec $\beta_n \neq 0$, et alors

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k 10^{-k} + (\beta_n - 1)10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

qui est un développement impropre.

Ceci prouve en particulier qu'un décimal ne peut avoir deux développements impropres différents, puisqu'ils donneraient lieu à deux développements propres différents. □

EXERCICES DU CHAPITRE 27

► Études de convergence

EXERCICE 27.1 Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans chacun des cas suivants : PD

1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)}$
2) $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - 1$
3) $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
4) $u_n = \ln\dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1}$
5) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
6) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
7) $u_n = \dfrac{n^2}{(n-1)!}$
8) $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}}$
9) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$
10) $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$
11) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$ pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$

EXERCICE 27.2 Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que $\sum u_n$ converge. F
Étudier la convergence des séries $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\sum u_n^2$ et $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

EXERCICE 27.3 Discuter, suivant les valeurs de $(a,b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ la nature de la série de terme général $\dfrac{a^n}{1+b^n}$. PD

EXERCICE 27.4 En fonction des valeurs de $p \in \mathbf{N}$, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$. PD

EXERCICE 27.5 Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair. En déduire la nature de $\sum \sin\left[\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right]$. AD

EXERCICE 27.6 **(Banque CCP 5)** AD

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

EXERCICE 27.7 **Encore des convergences** AD
Déterminer dans chacun des cas suivants la nature de la série de terme général u_n.

1) $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln(n)^2-\ln(n)}{n\sqrt{n}}$
2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n+1}$
3) $u_n = \dfrac{n^2\sin(n)}{3^{n+2}}$
4) $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$
5) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6) $u_n = \operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
7) (★) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.
8) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$
9) $u_n = \dfrac{1}{\binom{4n}{2n}}$

EXERCICE 27.8 **Critère des séries alternées... ou pas** AD
Déterminer, dans chacun des cas suivants, la nature de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$
3) $u_n = \dfrac{(-1)^n\ln(n)}{\sqrt{n}}$
4) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$
5) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

EXERCICE 27.9 **(Banque CCP 46)** AD
On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, $\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3) La série $\sum u_n$ converge-t-elle absolument ?

▸ Calculs de sommes

EXERCICE 27.10 On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. F

EXERCICE 27.11 Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. PD

EXERCICE 27.12 Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$. PD

EXERCICE 27.13 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$. AD

1) Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2) Calculer alors la somme de cette série.

EXERCICE 27.14 Série harmonique alternée et réarrangement D

Dans tout l'exercice, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, prouver que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que sa somme vaut $\ln(2)$. S'agit-il d'une série absolument convergente ?
2) On définit une application $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ par $\sigma(n) = \begin{cases} 4k & \text{si } n = 3k \\ 2k+1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 4k+2 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$

   Montrer que σ est une permutation de $\mathbf{N}^*$.

   On a alors $\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right)$.
3) Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et calculer sa somme. Êtes-vous surpris ?

▸ Comparaison série/intégrale

EXERCICE 27.15 Séries de Bertrand AD

Montrer, à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

EXERCICE 27.16 Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{-2\ln(n)}}$. AD

▸ Divers

EXERCICE 27.17 Un produit infini AD

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 27.18 Équivalentes mais de natures différentes PD

Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, mais que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de natures différentes.

EXERCICE 27.19 Reste d'une série alternée AD

1) Déterminer le signe de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

EXERCICE 27.20 Application des séries à l'étude des suites (Oral Centrale) AD

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1) Étudier la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
2) Établir l'existence de $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.
3) Montrer qu'il existe $A \in \mathbf{R}^*$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha$.

EXERCICE 27.21 Séries semi-convergentes et théorème de réarrangement de Riemann (Oral ENS) TD

1) Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2) Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais non absolument convergente (on parle de série semi-convergente).
Montrer que pour tout $\ell \in \mathbf{R}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$.

EXERCICE 27.22 Série des inverses des nombres premiers (Oral ENS) TD

Soi $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Indication : étudier la nature de $\displaystyle\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, *puis faire apparaître* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - p_i^{-1}}$.

Correction des exercices du chapitre 27

Solution de l'exercice 27.1

1. On a, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n(n+\ln(n))} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge[1], par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

[1] C'est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

2. Il s'agit clairement d'une série à termes positifs. Et on a

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{2n}$ diverge, par critère de comparaison, il en est de même de la série de terme général u_n.

3. Pour $n \geqslant 3$, on a $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{5}{6}$ et donc $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.
Mais la série géométrique $\sum \left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge, donc il en est de même de $\sum u_n$.

4. On a $\dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1} = 1 + \dfrac{3n}{n^2+2n+1}$.
Donc $\ln \dfrac{n^2+5n+1}{n^2+2n+1} = \ln\left(1+\dfrac{3n}{n^2+2n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{n^2+2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$.
Et donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

5. On a $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} n$, et donc $n+(-1)^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs la série de terme général u_n diverge.

Positivité
Il est évident que $\frac{1}{n}$ est positif, il n'est donc pas nécessaire de faire une étude du signe de u_n : il est positif **à partir d'un certain rang**, ce qui nous suffit.

6. Il y a un vrai piège ici : nous ne sommes pas en présence d'une série de Riemann, car bien que $1+\frac{1}{n}$ soit toujours strictement supérieur à 1, ce n'est pas une constante.
Or les séries de Riemann sont celles de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, où α est fixé.
Mais on a $nu_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

7. Notons que $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-1)(n-2)$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n-3)!}$.
Mais la série de terme général $\dfrac{1}{(n-3)!}$ converge puisque $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge.
Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

8. Notons que pour $n \geqslant 1$, $\sin \frac{1}{n} \geqslant 0$, et donc $u_n \geqslant 0$.
On a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, et la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente.
Donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

9. Utilisons un développement limité : on a

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (\alpha+1)\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -1$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \alpha \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha+1}{n}$.
Mais alors, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs $\sum u_n$ diverge.
En revanche, si $\alpha = -1$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
Et alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant, $\sum u_n$ converge.

Rappel
Une suite est équivalent au premier terme **non nul** de son développement limité.

10. Il ne s'agit pas ici d'une série dont le terme général est de signe constant, donc testons son absolue convergence.
On a $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, si bien que la série[2] de terme général $|u_n|$ est convergente.
Donc $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

[2] À termes positifs.

11. Puisque f est continue sur $[0,1]$, elle y est bornée : soit donc $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant M$.
Alors par inégalité triangulaire $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \leqslant \dfrac{M}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt \leqslant \dfrac{M}{n(n+1)}$.
Or la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente (on peut remarquer que $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, ou reconnaître une série télescopique convergente), donc $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.2

On a $0 \leqslant \dfrac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n$, et donc par critère de comparaison, $\displaystyle\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Puisque $u_n \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On a donc, pour $n \geqslant n_0$ $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$, et alors puisque $\sum u_n$ converge, c'est également le cas de $\sum u_n^2$.

> **$n \geqslant n_0$**
> On a utilisé là ce qu'on a appelé en cours *l'indifférence des premiers termes*, qui stipule que la nature d'une série ne dépend que de ce qui se passe pour n grand, et donc que la majoration ne soit vraie que pour $n \geqslant n_0$ n'empêche pas de conclure.

Enfin, rappelons que pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$, et donc en particulier,

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right).$$

> **Astuce**
> Cette inégalité vient tout simplement du fait que $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Mais les séries de termes généraux u_n et $\frac{1}{n^2}$ sont convergentes, donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.3

Notons que pour $b > 1$, $1 + b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n$, et que pour $b < 1$, $1 + b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
En revanche, pour $b = 1$, on a $1 + b^n = 2$ pour tout n.
► Donc si $b > 1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.
Or la série[3] de terme général $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ converge si et seulement si $\dfrac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ converge si et seulement si $a < b$.

[3] Géométrique.

► Si $b = 1$, $\dfrac{a^n}{1+b^n} = \dfrac{a^n}{2}$ converge si et seulement si $a \in]0,1[$.
► Si $b \in]0,1[$, alors $\dfrac{a^n}{1+b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n$. Et $\sum a^n$ converge si et seulement si $a \in]0,1[$, donc par critère de comparaison, il en est de même de $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n}$.

En résumé, $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ converge si et seulement si $a \in]0,1[$ ou ($b > 1$ **ou** $a < b$).

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.4

► Pour $p = 0$, on a $u_n = 1 + \dfrac{1! + 2! + \cdots + (n-1)!}{n!} \geqslant 1$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
► Pour $p = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1! + 2! + \cdots + (n-1)!}{(n+1)!} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Or, $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
On en déduit, par critère de comparaison que $\sum u_n$ diverge.
► Pour $p \geqslant 2$, on a $1! + 2! + \cdots + n! \leqslant (n-1)\times(n-1)! + n!$.
Et donc

$$u_n \leqslant \frac{(n-1)\times(n-1)!+n!}{(n+p)!} \leqslant \frac{(n-1)\times(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Mais $\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, de sorte que par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.
Et de même, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.
Ainsi, par somme de séries convergentes, $\sum \left(\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ converge, et donc par critère de comparaison pour séries à termes positifs[4], $\sum u_n$ converge.

[4] u_n est clairement positif.

En résumé, $\sum u_n$ converge si et seulement si $p \geqslant 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.5

Par la formule du binôme, on a

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 3^p$$

qui est bien un entier pair. Notons le N_n.
On a donc

$$u_n = \sin\left[\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right] = \sin\left[\pi N_n - \pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right] = -\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right].$$

Mais puisque $-1 < 1-\sqrt{3} < 1$, $\left(1-\sqrt{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

Et donc

$$\left|\sin\left[\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right]\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\pi\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right| = \pi\left(\sqrt{3}-1\right)^n.$$

Or la série géométrique de terme général $\left(\sqrt{3}-1\right)^n$ est convergente, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ est convergente, donc $\sum u_n$ est absolument convergente, et par conséquent convergente.

> **Danger !**
> Ne pas conclure trop vite à l'aide d'équivalents : il s'agit ici d'une série qui n'est pas de signe constant.

> **Série géométrique**
> Le même type de raisonnement prouve qu'une série géométrique, lorsqu'elle est convergente, est absolument convergente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.6

Voici un exercice qui n'a pas d'autre but que de tester votre habilité calculatoire, et qui ne s'en cache pas !
La clé est de ne pas paniquer face à l'apparent complexité de u_n et de procéder méthodiquement.
Nous allons essayer de trouver un équivalent de u_n.
On a déjà $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Puisque $n^2+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, et que ces deux suites tendent vers $+\infty$, on a

$$\ln(n^2+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n^2) = 2\ln(n).$$

> **Rappel**
> Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, équivalentes, et qui tendent vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ avec $\ell \neq 1$, alors
> $$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n).$$

Donc le dénominateur de u_n est équivalent à $4\ln(n)^2$.

Reste donc

$$\begin{aligned} e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e - e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

$DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$.

$e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$.

Et donc pour finir, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{8n\ln(n)^2}$. Puisque cet équivalent est positif, u_n l'est aussi, au moins à partir d'un certain rang, et donc il nous suffit d'étudier la nature de la série de terme général $\frac{e}{8n\ln(n)^2}$.

À présent, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ étant continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$, par comparaison série/intégrale, nous savons que $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2}\right)_n$ converge.

Mais $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}$.

Et donc $\sum \dfrac{e}{8n\ln(n)^2}$ converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de $\sum u_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.7

> **Méthode**
> Pour les séries qui ne sont pas de signe constant, l'absolue convergence est à peu près tout ce dont on dispose, donc il faut commencer par là.

1. Puisqu'il ne s'agit pas d'une série de signe constant, étudions l'absolue convergence. On a alors $|u_n| = \dfrac{\ln(n)^2 - \ln(n)}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{n\sqrt{n}}$.
On a alors, $\ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{1/4}\right)$, et donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2-1/4}}\right)$.
Puisque $\frac{5}{4} > 1$, par comparaison à une série de Riemann, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.

2. On a $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Donc par comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge, et donc $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

> **Alternative**
> On pourrait également prouver par exemple que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

3. On a $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{n^2}{3^{n+2}}$. Mais $\dfrac{n^2}{3^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Donc par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général $\frac{n^2}{3^{n+2}}$ converge.
Et alors, $\sum |u_n|$ converge aussi, de sorte que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

4. Puisque $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.
Et donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

5. Étant donné que u_n contient des puissances et des factorielles, le critère de d'Alembert est tout indiqué.
On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1$, et donc $\sum u_n$ converge.

6. Il s'agit de noter que les premiers termes des développements asymptotiques de $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$ et $\sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)$ sont égaux, donc se simplifient.
En effet, en utilisant des développements limités à l'ordre 2 pour ch et 3 pour sh,
$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
De plus, les termes suivants sont nuls, donc pour obtenir un équivalent de u_n, il faudrait au minimum pousser les développements limités à l'ordre 4 pour ch et à l'ordre 5 pour sh.
C'est faisable, mais peu désirable.
Notons plutôt que dans le développement limité à l'ordre 3 de ch en 0, le terme en x^3 (qui est nul ici, mais pas besoin de le savoir) et le reste en $o(x^3)$ peuvent tous deux être réunis dans un $O(x^3)$. Et alors
$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ et de même } \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Puisque la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, il en est de même de $\sum u_n$.

> **Rédaction**
> Toutes ces étapes ne sont bien entendu là que pour vous expliquer le raisonnement. Pour vous elles doivent se passer au brouillon.

7. Il y a ici un équivalent un peu délicat lorsqu'on ne l'a jamais vu.
Notons que $0 \leqslant \dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} < 1$, donc u_n est bien défini.
Et puisque $\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il s'agit surtout de trouver un équivalent, lorsque $x \to 1$, de $\operatorname{Arccos}(x)$.
On a alors $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, et donc $\operatorname{Arccos}(x) \underset{x\to 1}{\sim} \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
Enfin, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

Donc ici, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}} = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{1+n^\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.
Et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

8. On a $u_n = e^{\frac{1}{n^2}\ln n} - 1$.
Mais puisque $\dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.
Donc $n\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc par la règle $n^\alpha u_n$, $\sum u_n$ converge.

9. Utilisons la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!^2}{(4n+4)!}\frac{(4n)!}{(2n)!^2} = \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{16} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{16}.$$

Et donc on en déduit que $\sum u_n$ converge.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.8

1. C'est directement le critère des séries alternées puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en décroissant.

2. On pourrait prouver ici qu'il s'agit bien d'une série à laquelle le critère des séries alternées s'applique. Mais plus simplement : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, si bien que $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

3. Si on note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $f' : x \mapsto \dfrac{1-\ln(x)/2}{x\sqrt{x}}$, si bien que f est décroissante sur $[e^2, +\infty[$.
Notons que $e^2 \simeq 7,38$, information dont nous pourrions tout à fait nous passer... Puisque de plus $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut donc appliquer le critère des séries alternées à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 8} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$, qui converge donc.
Par indifférence des premiers termes, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ converge également.

4. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Par le critère de séries alternée, $\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série convergente.
Il en est de même de $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
Et puisque $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum u_n$.

> ⚠ Attention !
> On ne se contente pas d'un équivalent car il ne s'agit pas d'une série de signe constant à partir d'un certain rang.

5. On a $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$.
Soit encore $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.
Puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n\pi}{2n}$ converge par application du critère des séries alternées, et que $\sum O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge, alors il en est de même de $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.9

1. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé après multiplication par π, donc avec $\alpha = \dfrac{3}{8}$.

2. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}u_n &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\sin\left(\alpha\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \alpha\frac{(-1)^n\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Puisque la série de terme général $\alpha(-1)^n\frac{\pi}{n}$ converge par application du critère des séries alternées, et qu'il en est de même d'une série de terme général $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Détails
On a utilisé ici

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + O(x^2)$$

et pas seulement $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$, pour lequel il nous resterait un terme en $o\left(\frac{1}{n}\right)$ dont on ne peut rien dire.

3. Le calcul précédent prouve que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\frac{\pi}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente.
Donc $\sum |u_n|$ diverge, si bien que $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.10

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N+1}\frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Remarque
Ceci prouve directement la convergence de la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$, convergence que l'on aurait par exemple pu établir à l'aide d'un équivalent.

Et alors, pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}\frac{1}{n^2}-\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=0}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}\frac{1}{(2n+1)^2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Donc $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.11

Il s'agit d'une série à termes négatifs puisque $1-\frac{1}{n^2}\leqslant 1$, et on a $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sim-\frac{1}{n^2}$, donc il s'agit bien d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann convergente.
De plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k))+\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))\\ &= -\ln 2-\ln n+\ln(n+1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln 2.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2.$$

Solution de l'exercice 27.12

Commençons par noter que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 1$, et donc $\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor \in \{0,1\}$.

On aura alors $\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor = 1$ si et seulement si il existe k tel que $\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor = k$ et $\left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor = k-1$.

Soit si et seulement si

$$\begin{cases} \sqrt{n+1} \geqslant k \\ k-1 \leqslant \sqrt{n} < k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \geqslant k^2 \\ (k-1)^2 \leqslant n < k^2 \end{cases} \Leftrightarrow n = k^2-1.$$

Donc pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=1}^{N^2-1} \frac{\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}{n} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1}.$$

Mais une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{1}{k^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k+1}$ de sorte que

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right).$$

Donc par passage à la limite, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{\left\lfloor \sqrt{n+1} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor}{n} = \frac{3}{4}$.

Mais remarquons que nous n'avons prouvé le résultat que pour des sommes partielles allant jusqu'à N^2-1, mais pas pour tout N.

À cet effet, notons que la série étant à termes positifs, la suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante.

Et donc pour tout $N \in \mathbf{N}$, $S_N \leqslant S_{N^2-1} \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Donc la suite des sommes partielles est majorée, donc[5] la série converge.

[5] Rappelons que ceci ne vaut que pour les séries à termes positifs.

Solution de l'exercice 27.13

1. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + a\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + b\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) \\ &= (1+a+b)\ln(n) + a\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+a+b)\ln(n)$ et donc $\sum u_n$ diverge.

Une condition nécessaire pour que $\sum u_n$ converge est donc déjà $a+b=-1$.

Si c'est le cas et que $a+2b \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a+2b}{n}$ et donc[6] $\sum u_n$ diverge.

Il faut donc avoir de plus $a+2b=0$.

Or, $\begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

Et alors, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$, de sorte[7] que $\sum u_n$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

[6] Par comparaison à une série de Riemann.

[7] Toujours par comparaison à une série de Riemann.

2. On a alors, pour $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} u_k &= \sum_{k=1}^{N}\ln(k) - 2\sum_{k=1}^{N}\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{N}\ln(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\ln(k) - 2\sum_{k=2}^{N+1}\ln(k) + \sum_{k=3}^{N+2}\ln(k) \end{aligned}$$

$$= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)$$
$$\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2).$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln(2)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.14

1. La fonction f est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Détails
Je vais un peu vite ici, ceci a déjà été fait en début d'année : le plus simple est de calculer les première dérivées pour conjecturer une formule, puis la prouver par récurrence.

En particulier, sur $[0,1]$, on a $|f^{(n+1)}| \leqslant n!$.
Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée entre 0 et 1,

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k \right| \leqslant n!\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit encore

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Et donc on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

On en déduit donc[8] que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$.

[8] À la fois.

Cette série n'est évidemment pas convergente puisque $|u_n| = \frac{1}{n}$.

2. Soit $p \in \mathbf{N}^*$.

- ►si p est impair, alors un antécédent de p est forcément congru à 1 modulo 3, et on a alors $\sigma(3k+1) = p \Leftrightarrow 2k+1 = p \Leftrightarrow k = \dfrac{p-1}{2} \in \mathbf{N}^*$. Donc p admet un unique antécédent par σ, qui est $3\dfrac{p-1}{2} + 1 \in \mathbf{N}^*$.
- ►si p est congru à 0 modulo 4, alors on prouve de même que son unique antécédent est $3\dfrac{p}{4}$.
- ►si p est congru à 2 modulo 4, alors son unique antécédent par σ est $3\frac{p-2}{4} + 2$.

Donc tout entier $p \in \mathbf{N}^*$ possède un unique antécédent par σ, qui est donc une bijection de $\mathbf{N}^*$ dans lui-même.

3. Soit $N \in \mathbf{N}$. Alors, comme indiqué dans l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(u_{\sigma(3k+1)} + u_{\sigma(3k+2)} + u_{\sigma(3k+3)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(u_{2k+1} + u_{4k+2} + u_{4k+4}\right) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+2}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k(4k-2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(u_{2k+1}+u_{2k+2})$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N+2}u_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).$$

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{n=1}^{3N+4}u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3}u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2)$ et

$$\sum_{n=1}^{3N+5}u_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{3N+3}u_{\sigma(n)} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).$$

Donc en notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_{\sigma(k)}$, nous venons de prouver que les trois suites (S_{3n}), (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent vers une même limite $\frac{1}{2}\ln(2)$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2)$.

On en déduit que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge vers $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

Ce qui est vraiment remarquable, c'est que cette série contient exactement les mêmes termes que la série $\sum u_n$, tout ce qu'on a fait, c'est changer l'ordre des termes.
Mais cela a eu pour effet de changer la somme de la série, ce qui contredit totalement notre habitude des sommes finies, où, par commutativité de l'addition dans $\mathbf{R}$, l'ordre n'a aucune importance. Ceci est spécifique aux séries qui sont convergentes et non absolument convergentes.

Plus dur
Les plus motivés pour consulter l'exercice (très difficile) sur le théorème de réarrangement de Riemann pour en savoir plus sur le sujet.

Solution de l'exercice 27.15

Commençons par les cas «faciles» : si $\alpha > 1$ et $\beta \leqslant 0$, alors pour $n \geqslant 3$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Et donc par comparaison à une série de Riemann, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge.

Pour $\alpha > 1$ et $\beta < 0$, le raisonnement ci-dessus ne vaut plus. Mais pour $\gamma \in]1, \alpha[$, on a

$$n^\gamma\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Détails
Puisque $\alpha - \gamma > 0$, on a
$$(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha-\gamma}\right).$$
C'est trivial si $\beta > 0$ (car $(\ln n)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^{\alpha-\gamma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$), c'est l'une des croissances comparées usuelles sinon.

Pour $\alpha < 1$, notons que $\ln(n)^\beta$ est négligeable devant toute puissance de n, et en particulier devant $n^{1-\alpha}$, de sorte que pour n suffisamment grand, $\ln(n)^\beta \leqslant n^{1-\alpha}$.

Et alors pour n suffisamment grand, $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^\alpha n^{1-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, de sorte que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge.

Reste donc à traiter le cas où $\alpha = 1$, et comme l'indique l'énoncé, faisons appel à une comparaison série/intégrale.

Le résultat du cours nous informe que $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est de même nature que la **suite** $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^\beta}\right)_n$ converge.

Mais $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^\beta} = \dfrac{1}{t} \times \ln(t)^\beta$ est de la forme $u'u^{-\beta}$.

Donc nous savons en calculer une primitive : $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^\beta} = \left[\frac{1}{1-\beta}\ln(t)^{-\beta+1}\right]_2^n = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{\ln(n)^{\beta-1}} - \frac{1}{\ln(2)^{\beta-1}}\right)$.

Alors cette suite possède une limite finie si et seulement si $\beta - 1 > 0 \Leftrightarrow \beta > 1$.

En résumé, on a bien prouvé le critère annoncé, à savoir la convergence de la série si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Remarque
En particulier, $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

Solution de l'exercice 27.16

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$, donc $\forall p \geqslant n+1$, on a

$$\int_{n+1}^{p+1}\frac{dt}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^3} \leqslant \int_n^p \frac{dt}{t^3}$$

Or, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est $t \mapsto \frac{-1}{2t^2}$, de sorte que

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}.$$

En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, $\displaystyle\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2}$.

Et donc à l'aide du théorème des gendarmes, on prouve que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Ainsi,

$$\frac{1}{-2\ln n} \ln\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\ln n}(\ln 2 + 2\ln n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc il vient

$$\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right)^{\frac{1}{-2\ln(n)}} = e^{-\frac{1}{2\ln(n)} \ln\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

> **Danger !**
> Rappelons qu'on n'a en général pas le droit de composer les équivalents à gauche. Sauf, comme on vient de le faire, pour des suites qui ne tendent pas vers 1, si on les compose par ln.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.17

La solution pour l'étude des produits consiste souvent à passer par le logarithme, puisque celui-ci transforme les produits en sommes, pour lesquelles on dispose des outils relatifs à l'étude des séries.

Dans notre cas, on a, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$.

Étudions alors la convergence de la suite $(\ln(u_n))$.

On reconnaît alors que $\ln(u_n)$ est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$.

> **Encore une fois**
> Par **définition**, la série converge **si et seulement si** la suite de ses sommes partielles converge.

Il s'agit donc de déterminer si cette série converge ou non.

Nous savons par croissances comparées que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln k}{k^2} = 0$, et donc $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\ln k}{k^2}$.

Puisqu'il s'agit de séries à termes positifs et que leurs termes généraux sont équivalents, il suffit de déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\frac{\ln k}{k^2}$.

Mais puisque $\displaystyle\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $k_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $k \geqslant k_0$, $\displaystyle\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln(k) \leqslant \sqrt{k}$.

Et alors pour $k \geqslant k_0$, $\displaystyle 0 \leqslant \frac{\ln k}{k^2} \leqslant \frac{\sqrt{k}}{k^2} \leqslant \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\displaystyle\ln\left(1 + \frac{\ln k}{k^2}\right)$.

Et donc la suite de ses sommes partielles, qui est $(\ln u_n)$ converge.

On en déduit, par continuité de l'exponentielle, que (u_n) converge.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.18

Puisque $\displaystyle\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, on a bien $b_n \underset{n\to+\infty}{=} a_n + o(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Par application directe du critère des séries alternées, $\sum a_n$ converge.

En revanche, puisque $\sum a_n$ converge et que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.19

1. La suite de terme général $\displaystyle\frac{8^n}{(2n)!}$ n'est décroissante qu'à partir de 1. Comme elle est bien de limite nulle, le critère des séries alternées s'applique, et donc la somme est bien définie.

   Les premiers termes de la somme de la série sont donc $1 - 4 + \frac{64}{24} - \frac{32}{45} + \dots$.

   Mais pour une série alternée, nous savons que la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.

   Ici, on a en particulier, $\displaystyle\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{8^n}{(2n)!}\right| \leqslant \frac{64}{24} = \frac{8}{3} < 3$.

   Or, $-3 = 1 - 4$, si bien que la somme cherchée est négative.

2. Une erreur d'énoncé s'est glissée ici, et je voulais plutôt la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3+1}}$.

Le critère des séries alternées s'applique, et pour tout n, $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}}$.

Puisque $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$, il s'agit du terme général d'une série convergente, si bien que $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.

Essayons tout de même de traiter la question[9] qui figurait dans l'énoncé, avec $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.

[9] Nettement plus difficile.

Le même raisonnement que ci-dessus nous donne cette fois $|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+2}}$, qui ne suffit pas à conclure à la convergence absolue de $\sum u_n$ puisque $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ est le terme général d'une série divergente.

On a, pour tout n,

$$u_n+u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Une étude rapide[10] de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ prouve qu'elle est décroissante, et elle tend clairement vers 0 en $+\infty$.

[10] Essentiellement une dérivation.

Donc le critère de Leibniz s'applique à la série $\sum (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$, qui est donc convergente.
Et par majoration du reste, on a donc

$$|u_{n-1} + u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mais

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Donc $u_{n-1} + u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Par ailleurs, $u_n - u_{n-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, si bien que

$$2u_n = u_n + u_{n-1} + u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et par comparaison à une série de Riemann, $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge.
Et donc $\sum u_n$ converge[11].

[11] Mais pas absolument !

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.20

1. On a

$$\begin{aligned}\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln((n+1)!) - (n+1)\ln(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \ln\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \ln(n!) + n\ln(x) - \sum_{k=1}^{n} \ln\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\\ &= \ln(n+1) - \ln(x) + \ln\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)$$

Mais $\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n+1}$, et donc $\frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Donc en utilisant l'équivalent classique $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$, il vient

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) - 1.$$

Mais $\frac{n+1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n+1}{x}\left(\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.
On en déduit que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{2n}$.

Mais alors, par critère de comparaison pour les séries de signe constant[12] la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est divergente.
Puisqu'il s'agit d'une série à termes négatifs, c'est donc que ses sommes partielles tendent vers $-\infty$.
Or $\sum_{k=1}^{n}(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$.
On en déduit que la suite $\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$.
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[12] Ici le signe est négatif. Mais rappelons que tous les résultats prouvés pour les séries à termes positifs restent valables pour les séries à termes négatifs.

2. Reprenons le développement limité précédent, mais en le poussant un ordre plus loin. Pour n'avoir pas besoin d'expliciter le terme en $\frac{1}{n^2}$ (qui provient du terme en x^3 du développement limité de $\ln(1+x)$), utilisons un O plutôt qu'un o, de sorte que

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Et donc

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{x}{2n} + O\left(\frac{x}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour $\alpha = -\frac{x}{2}$, on arrive donc à

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Astuce

Voici une astuce qui permet parfois d'alléger un peu les calculs : dans un DL_n, le terme de degré n et le reste en $o(x^n)$ peuvent se regrouper en un seul terme de la forme $O(x^n)$.

Commentaire : il est important ici de bien saisir pourquoi on ne pouvait arrêter le calcul avec des $o\left(\frac{1}{n}\right)$: en choisissant correctement la valeur de α pour annuler les termes en $\frac{1}{n}$, on aurait seulement eu $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui ne permet pas directement de conclure quant à la nature de la série.
Pour bien comprendre le temps que nous fait gagner l'usage du O, je vous invite à faire une fois le calcul avec des $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et à comparer le résultat à ce que nous venons d'obtenir.

3. Il s'agit de noter que $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est encore une série télescopique puisqu'il s'agit de $\sum(\ln(n+1) - \ln(n))$.
Dont la somme partielle d'ordre n vaut $\ln(n+1)$.
Donc en notant S la somme de la série de la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(u_{k+1} - \ln(u_k) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \ln(u_n) - \ln(u_1) - \alpha\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

Soit encore $\ln\left(\frac{u_n}{u_1 n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
Et donc en composant par l'exponentielle, et en posant $A = u_1 e^S > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = A \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^\alpha.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 27.21

Rappelons que $\mathfrak{S}(\mathbf{N})$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$.
Et si σ est une telle bijection, alors la suite $(u_{\sigma(n)})$ contient les mêmes termes que (u_n), mais tout simplement pas dans le même ordre.
La première question prouve donc que pour une série absolument convergente, réordonner les termes de la série ne change pas sa somme. Ce résultat nous semble trivial puisque c'est ce dont nous avons l'habitude pour les sommes finies où c'est une conséquence directe de la commutativité de la somme.
Bien plus surprenant est le résultat de la seconde question, qui prouve que ce résultat n'est plus valable pour une série qui serait convergente sans être absolument convergente.
Pire : cette seconde question prouve que par réarrangement des termes de la série, on peut obtenir une série dont la somme vaut n'importe quel réel !

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbf{N})$. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |u_{\sigma(n)}| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Et donc $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument[13].

[13] Et donc converge.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon$.

Soit alors $n_1 = \displaystyle\max_{k \in [\![0, n_0]\!]} \sigma^{-1}(k)$.

Pour $n \geqslant n_1$, on a donc $\sigma(n) > n_0$ et donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, il vient

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant 2 \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant 2\varepsilon.$$

Détails
Tous les k tels que $\sigma(k) \leqslant n_0$ sont inférieurs à n_1 et donc à n.
Et donc les $u_{\sigma(k)}$ correspondants dans la première somme se trouvent aussi dans la seconde.
Le facteur 2 provient alors de l'inégalité triangulaire.

Et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right) = 0$.

Puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Donc $\sum u_{\sigma(k)}$ converge et sa somme est $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

2. Contentons-nous des grandes lignes.
Notons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$, qui sont deux nombres positifs, pour lesquels on a $u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
Puisque $\sum |u_n|$ diverge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ ne peuvent pas converger toutes les deux, sinon ce serait aussi le cas de $\sum |u_n|$.
Puisque $\sum u_n$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ ne peuvent pas être de natures différentes.
Et donc les deux séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent. En particulier, leurs sommes partielles tendent vers $+\infty$.
Notons alors $A = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k \geqslant 0\}$ et $B = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k < 0\}$, qui sont donc deux ensembles infinis[14].

Détails
Si $u_n \geqslant 0$, alors $u_n = u_n^+$ et $u_n^- = 0$.
Et si $u_n \leqslant 0$, alors $u_n^+ = 0$ et $u_n^- = -u_n$.

[14] Sinon l'une des séries ci-dessus serait presque nulle, et donc convergente.

Soit à présent $\ell \in \mathbf{R}$. On construit par récurrence une permutation σ de $\mathbf{N}$ en posant : $\sigma(0) = 0$, et pour tout $n \geqslant 1$:

- si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} < \ell$, alors $\sigma(n) = \min A \setminus \{\sigma(i), 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$
- sinon, on pose $\sigma(n) = \min B \setminus \{\sigma(i), 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

Cette définition a bien du sens puisque A et B étant infinis, on ne va jamais épuiser l'un des deux ensembles.
Il faut travailler un peu plus pour prouver qu'on a bien une permutation de $\mathbf{N}$, mais l'idée est que les sommes partielles de $\sum u_n^+$ et de $\sum u_n^-$ tendant vers $+\infty$, les $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)}$ ne peuvent rester indéfiniment supérieurs ou inférieurs à ℓ, et font toujours des «allers-retours» entre $]-\infty, \ell[$ et $]\ell, +\infty[$. Et donc σ va faire des allers-retours entre A et B, et donc finir par prendre une fois chaque valeur de $\mathbf{N}$.

Enfin, il reste à prouver que $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum a_n$ converge, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant \varepsilon$.
Et alors si $n_1 = \max_{k\in[\![0,n_0]\!]} \sigma^{-1}(k)$, alors pour $n \geqslant n_1$, $|a_{\sigma(n)}| \leqslant \varepsilon$.
Encore une fois sans donner tous les détails, on prouve alors qu'à chaque changement de signe de $u_{\sigma(n)}$, pour $n \geqslant n_1$, on a alors $\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

> **Chgt de signe**
> Les changements de signe dont on parle sont les k tels que $\sigma(k-1) \in A$ et $\sigma(k) \in B$ ou le contraire.

Et en travaillant encore un peu, pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Et donc on a bien $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Solution de l'exercice 27.22

Supposons par l'absurde que cette série converge. Alors il en est de même de la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$.

Mais les sommes partielles de cette série sont les $\sum_{i=1}^{N} -\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$, dont l'exponentielle est $\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}}$. Ainsi, $\left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}}\right)_N$ doit converger.

Puisque $0 \leqslant p_i^{-1} < 1$, $\frac{1}{1-p_i^{-1}}$ est la somme de la série géométrique de raison p_i^{-1}, et donc[15] pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} p_i^{-k} = 1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^n} \leqslant \frac{1}{1-p_i^{-1}}.$$

[15] Pour une suite à termes positifs, les sommes partielles tendent vers la somme **en croissant.**

Et donc

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \geqslant \prod_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{N} p_i^{-k} = \left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^N}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_N}+\cdots+\frac{1}{p_N^N}\right).$$

Si on développe ce dernier produit, on obtient une somme d'inverses de nombres entiers. Plus précisément, on obtient la somme des inverses des entiers dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_N et dont les valuations p-adiques sont toutes inférieures ou égales à N.
Mais en particulier on obtient ainsi les inverses de tous les entiers inférieurs ou égaux à N. En effet, $p_N > N$, et donc tous les entiers inférieurs à N n'ont que des diviseurs premiers inférieurs strictement à p_N. Et de plus, le plus petit entiers dont une valuation dépasse N est 2^{N+1}, qui est (bien) plus grand que N.
Donc on a $\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$, qui est la somme partielle d'ordre N de la série harmonique.

> **Rappel**
> La série harmonique diverge, donc étant à termes positifs, c'est que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

Donc $\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ceci contredit notre hypothèse de départ, donc $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Calcul des probabilités sur un univers fini

28

Nous développons dans ce chapitre des outils pour le calcul des probabilités.
Bien que vous ayez déjà développé une excellente compréhension de ce qu'est[1] une probabilité, la principale difficulté étant de comprendre le formalisme utilisé, qui s'inscrit toujours dans le cadre[2] de la théorie des ensembles.
Il n'y aura donc aucun hasard dans la suite, nous ne ferons que le **modéliser**, et tous les dés que nous évoquerons, toutes les urnes dans lesquelles nous tirerons des boules ne seront que purement imaginaires.

[1] Ou au moins de ce que doit être.

[2] Totalement déterministe.

S'il serait extrêmement réducteur de cantonner la théorie des probabilités aux lancers de dés, tirages de boules dans des urnes et autre jeux de hasard plus ou moins tordus, il me semble que ces situations faciles à comprendre présentent tout de même un vrai intérêt pédagogique de par leur simplicité.
Je ne me priverai donc pas d'utiliser de tels exemples, même s'il faudra garder à l'esprit qu'il ne s'agit là que de *toy models*.
La physique regorge de situations intéressantes où il faut être capable de calculer des probabilités, ce qui nécessite déjà une certaine familiarité avec le concept de probabilité pour manipuler ces exemples.

Enfin, conformément aux programmes en vigueur, nous ne manipulerons cette année que des expériences qui ne possèdent qu'un nombre fini d'issues, et il vous faudra attendre l'année prochaine pour aller plus loin.

28.1 Espaces probabilisés finis

28.1.1 Univers, événement

Définition 28.1 – On appelle **univers fini** un ensemble fini Ω non vide.
Les éléments de Ω sont appelés **événements élémentaires.**

Par exemple, un lancer de pièce sera modélisé par $\{P, F\}$ ou $\{0, 1\}$, un lancer de dé sera modélisé par $\Omega = [\![1, 6]\!]$, le lancer de deux dés sera modélisé par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et le tirage d'une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes sera modélisé par $\Omega = \mathscr{P}_5\left(\left\{\boxed{7\spadesuit}, \boxed{7\diamondsuit}, \dots, \boxed{A\clubsuit}, \boxed{A\heartsuit}\right\}\right)$, l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

Notez bien que l'univers qui va modéliser l'expérience est le même que la pièce soit équilibrée ou non, nous n'avons pas encore parlé de probabilité !
La plupart du temps, l'univers sur lequel on travaille n'est pas complètement clair, ou tout du moins, il n'est pas nécessaire de l'expliciter pour pouvoir faire des calculs.
L'idée est que l'univers est l'ensemble de toutes les issues possibles à une expérience aléatoire, et plus l'expérience est complexe, plus l'univers risque de l'être.
Par exemple si une expérience consiste à lancer un dé, puis si on a obtenu la face portant le numéro k, à placer $2k$ boules blanches et $3k$ boules rouges dans une urne, puis en tirer avec remise k boules, on n'a pas vraiment envie d'expliciter Ω. Ce qui ne nous empêcherait pas de calculer des probabilités avec cette expérience !

La restriction sur le cardinal de Ω n'est pas une vraie limitation, même si le cas des univers infinis requiert un peu plus de précautions. Conformément au programme en vigueur, c'est le cadre auquel on se limitera en sup, afin de prendre le temps de s'habituer au formalisme.

Vous manipulerez des univers infinis en spé, mais pas encore dans le cadre le plus général[3]. En particulier, nous n'étudierons pas cette année de situations où il y a une infinité d'issues possibles, par exemple le fait de lancer une pièce jusqu'à obtention du premier pile.

[3] Et par exemple vous ne rencontrerez pas en prépa les variables à densité (loi exponentielle, loi normale) que vous avez brièvement manipulées en terminale.

Dans toute la suite du chapitre, on considère un univers fini Ω fixé.

Définition 28.2 – On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω, c'est-à-dire tout élément de $\mathscr{P}(\Omega)$.

Par abus de langage, on appellera encore événement élémentaire tout singleton $\{\omega\} \in \mathscr{P}(\Omega)$, sans vraiment distinguer ω et $\{\omega\}$.
Ainsi, un événement est un ensemble d'événements élémentaires, ou pour le dire autrement, une collection d'issues possibles de l'expérience considérée.

Exemples 28.3

- Lorsqu'on lance un dé, l'événement «obtenir un nombre pair» est $\{2,4,6\}$.
- Lorsqu'on lance deux dés, l'événement «la somme des dés vaut 6» est $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.
- Lorsqu'on tire au main au poker, l'événement «avoir un full» est un ensemble à 1344 éléments[4] : $\left\{\left\{\boxed{A\spadesuit}, \boxed{A\diamondsuit}, \boxed{A\heartsuit}, \boxed{J\spadesuit}, \boxed{J\clubsuit}\right\}, \dots, \left\{\boxed{7\clubsuit}, \boxed{7\diamondsuit}, \boxed{7\heartsuit}, \boxed{Q\spadesuit}, \boxed{Q\heartsuit}\right\}\right\}$

[4] Voir le cours de dénombrement.

Définition 28.4 – Le complémentaire dans Ω d'un événement A est appelé le **contraire** de A, et noté $\overline{A}$.
Si A et B sont deux événements, on dit que $A \cup B$ est la disjonction de A et B, plus souvent appelé «A **ou** B», et $A \cap B$ est la conjonction de A et B, plus souvent appelé «A **et** B».
On dit que A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Classique — L'exemple le plus typique d'événements incompatibles est celui d'un événement A et de son contraire $\overline{A}$.

Il faut bien comprendre que $A \cup B$ est l'événement «l'un au moins des deux événements A et B est réalisé».
Et de même, $A \cap B$ est l'événement «A et B sont réalisés simultanément».
Pour rester sur des exemples simples, lançons un dé, et soit $A = \{2,4,6\}$ l'événement «obtenir un numéro pair» et $B = \{4,5,6\}$ l'événement «obtenir un numéro supérieur ou égal à 4».
Alors $A \cap B = \{4,6\}$ est bien l'événement «obtenir un numéro pair supérieur ou égal à 4», alors que $A \cup B = \{2,4,5,6\}$ contient bien toutes les issues de l'expérience qui réalisent soit A soit B (soit les deux en même temps).
Des événements incompatibles sont donc des événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemples 28.5

Considérons une urne, qui contient a boules blanches et b boules noires. On tire n boules de cette urne, avec remise entre les tirages.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons B_i (resp. N_i) l'événement «la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche (resp. noire)».
Alors :

- $B_i = \overline{N_i}$
- $\bigcup_{i=1}^{n} N_i$ est l'événement «obtenir au moins une boule noire»
- $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ est l'événement «n'obtenir que des blanches», contraire du précédent

Univers — Un univers possible pour cette expérience est $\{B,N\}^n$, l'ensemble des suites de n éléments à valeurs dans $\{B,N\}$ (pour Noir et Blanc).
B_i est alors l'ensemble de tous les n-uplets dont le $i^{\text{ème}}$ élément est un B.
Vous remarquerez que le nombre de boules n'entre pas en jeu tant qu'on n'a pas parlé de probabilité de chacun des événements.

- $\bigcup_{i=1}^{n-1}(B_i \cap B_{i+1})$ est l'événement «obtenir deux boules blanches consécutives».
- les événements

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(B_i \cap B_{i+1})\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(N_i \cap N_{i+1})\right)} \text{ et } \left(\bigcap_{\substack{i=1\\ i \text{ pair}}}^{n} N_i \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j \text{ impair}}}^{n} B_j\right) \cup \left(\bigcap_{\substack{i=1\\ i \text{ pair}}}^{n} B_i \cap \bigcap_{\substack{j=1\\ j \text{ impair}}}^{n} N_j\right)$$

sont égaux : ce sont tous les deux l'événement «deux boules consécutives sont de couleurs différentes».

Définition 28.6 – On appelle **système complet d'événements** tout ensemble $\{A_1, \dots, A_n\}$ d'événements, deux à deux incompatibles, et tels que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Autrement dit, un système complet d'événements est une partition de Ω, sauf que l'on ne demande pas aux A_i d'être non vides.

Abréviation

Il est courant d'abréger *système complet d'événements* en *s.c.e.*.
Bien entendu cette abréviation n'est pas tolérée dans une copie... du moins c'est le discours officiel.

Exemples 28.7

- Si A est un événement, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
- $\{\{\omega\}, \omega \in \Omega\}$ est un système complet d'événements.
- Lors d'un lancer de dé, si on note A l'événement «obtenir un numéro pair» et B l'événement «obtenir un numéro impair», alors $\{A, B\}$ est un système complet d'événements.
- Lors du lancer de deux dés, si on note A_i l'événement «la somme des deux dés vaut i», alors $\{A_i, 2 \leqslant i \leqslant 12\}$ est un système complet d'événements.

28.1.2 Probabilités

Définition 28.8 – Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ *(additivité)*.

Pour $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, le réel $\mathbf{P}(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.
On appelle alors **espace probabilisé fini**[5] un couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.

⚠ Attention !

Ne pas confondre la probabilité $\mathbf{P}$, qui est une application, de la probabilité $\mathbf{P}(A)$ d'un événement A, qui est un réel.

[5] En abrégé «espace probabilisé» puisque cette année nous ne parlerons que du cas fini.

Remarque. Demander que $\mathbf{P}$ soit à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ plutôt que $[0,1]$ suffirait, car alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A) + \underbrace{\mathbf{P}(\overline{A})}_{\geqslant 0}$ et donc $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

Quand on lance un dé, c'est au moment de choisir la probabilité que l'on met sur $[\![1,6]\!]$ que l'on décide si notre dé est ou non équilibré.
Par exemple, dans le cas[6] où le dé tombe absolument toujours sur 6, la probabilité qu'on utilise sur $\mathscr{P}([\![1,6]\!])$ est définie par

$$\mathbf{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases} = \mathbb{1}_A(6).$$

[6] Un peu extrême et complètement inintéressant je vous le concède.

Je ne prouve pas qu'il s'agit bien là d'une probabilité, mais nous y reviendrons.

L'exemple le plus naturel de probabilité, qui est celui qui nous vient en premier à l'esprit est celui de probabilité uniforme, qui correspond à ce qu'on appelle une situation d'équiprobabilité.

Proposition 28.9 : *Soit Ω un univers fini. Alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que $\omega \mapsto \mathbf{P}(\{\omega\})$ soit constante[7].*
Cette probabilité, appelée ***probabilité uniforme sur*** Ω *est donnée par*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega),\ \mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

[7] C'est-à-dire telle que tous les événements élémentaires (= toutes les issues de l'expérience) soient de même probabilité.

Démonstration. Supposons qu'une telle probabilité $\mathbf{P}$ existe, et soit $\lambda \in [0,1]$ la valeur commune à tous les $\mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.
Alors

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}\lambda = \lambda\mathrm{Card}(\Omega).$$

Puisque $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, on a donc $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
Et en particulier, pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, il vient

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A}\mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathrm{Card}(A)\frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

À présent, définissons une application $\mathbf{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.
Alors il est évident que $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$ (puisqu'un cardinal est positif, et que le cardinal d'une partie est inférieur ou égal à celui de l'ensemble tout entier), et on a bien $P(\Omega) = \dfrac{\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1$.
Enfin, si A et B sont deux événements incompatibles,

$$\mathbf{P}(A\cup B) = \frac{\mathrm{Card}(A\cup B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Donc $\mathbf{P}$ est bien une probabilité sur Ω. □

Évident ?
Le fait de passer de la proba de l'union à la somme des probas doit vous sembler logique, la vraie justification se trouve à la proposition suivante.

Exemples 28.10

► Au poker, si l'on considère que toutes les mains sont équiprobables[8], la probabilité d'avoir un carré est $\dfrac{224}{201\,316} \simeq 0.00111$.
► Si je choisis au hasard un élève de MP2I, la probabilité qu'il soit né un 1er janvier est $\frac{1}{46}$.

[8] Ce qui semble légitime si vous ne vivez pas dans un album de Lucky Luke.

Théorème 28.11 (Calculs avec des probabilités) : *Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. Alors :*

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
2. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ *(croissance de la probabilité)*
4. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $\mathbf{P}(A\cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A\cap B)$.
5. $\forall (A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$ *(sous-additivité).*
Si de plus les A_i sont deux à deux disjoints, alors on a égalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i).$$

Autrement dit
$\mathbf{P}$ est une application croissante de l'ensemble ordonné $(\mathscr{P}(\Omega), \subset)$ dans $([0,1], \leqslant)$.

Démonstration. 1. On a $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, et donc par additivité,

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\emptyset) \Leftrightarrow \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

2. On a $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$ car A et $\overline{A}$ sont incompatibles.
   Et donc $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
3. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$, et l'union est disjointe.
   Donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \underbrace{\mathbf{P}(B \setminus A)}_{\geqslant 0} \geqslant \mathbf{P}(A)$.
4. Puisque $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$, il vient $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \setminus B)$.
   Mais $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, et encore une fois il s'agit d'une union disjointe, donc

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

   de sorte qu'on a bien $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
5. Par récurrence sur n, le nombre d'événements prouvons $\mathscr{P}(n)$:
   «$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ et si les A_i sont deux à deux incompatibles, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.»
   Pour $n = 2$, on a bien $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2)$.
   Et le cas d'incompatibilité découle directement de la définition de probabilité.
   Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ vraie, et soient $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbf{P}\left(A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right) \leqslant \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right) \leqslant \mathbf{P}(A_1) + \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i).$$

   Dans le cas où les A_i sont deux à deux incompatibles, alors A_1 est incompatible avec $\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i$, et donc les deux inégalités ci-dessus sont des égalités[9].
   Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

□

[9] La première par définition d'une probabilité, la seconde par hypothèse de récurrence.

Remarques. ► La signification de l'inclusion n'est pas complètement évidente au premier abord. Si $A \subset B$, cela signifie que tous les événements élémentaires qui composent A sont dans B.
Autrement dit, que **dès que A est réalisé, alors B l'est automatiquement.** C'est vraiment ainsi qu'il faut comprendre l'inclusion.
Dès lors, la croissance de la probabilité se comprend bien : B doit donc être plus souvent réalisé que A et donc avoir une probabilité supérieure à celle de A.
► Le point 4. concernant la probabilité d'une union ne doit pas du tout vous surprendre dans le cas d'équiprobabilité, puisque c'est alors une conséquence directe de

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

► Sur le même principe que pour les cardinaux, on peut généraliser le point 3 :

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C)$$

et il existe une formule du crible[10] qui est exactement la même que celle vue en TD pour les cardinaux, mais en changeant les cardinaux en probabilités.

[10] Hors-programme.

28.1.3 Construction de probabilités

Une conséquence facile du dernier point de la proposition qui précède est que si $\mathbf{P}$ est une probabilité, alors $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = 1$.
Nous nous intéressons ici à une réciproque à ce résultat :

Proposition 28.12 : *Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini, et soient $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.*
Alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

> **Remarque**
> Si les p_i sont des nombres **positifs** de somme 1, alors tous sont compris entre 0 et 1.

Démonstration. Pour l'unicité, commençons par noter que pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(\{x\})$, et donc si deux probabilités coïncident sur tous les événements élémentaires, alors elles sont égales.

> **Autrement dit**
> Les p_i qui apparaissent dans la somme sont ceux pour lequels $\omega_i \in A$.

Considérons à présent l'application $\mathbf{P}$ définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{1}_A(\omega_i)$.

Alors $\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Si A et B sont deux événements incompatibles, nous savons que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \underbrace{\mathbb{1}_{A\cap B}}_{=0}$, et donc

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{1}_{A\cup B}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{1}_A(\omega_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{1}_B(\omega_i) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Donc $\mathbf{P}$ est bien une probabilité, qui a clairement les propriétés requises. □

Ce que légitime cette proposition, c'est que se donner une probabilité sur Ω revient à se donner les probabilités de tous les événements élémentaires, sous l'hypothèse très raisonnable que ces probabilités soient bien positives et de somme 1.
Par exemple, il n'existe qu'une mesure de probabilité sur $[\![1, 6]\!]$ qui permet de simuler un lancer d'un dé qui tomberait sur 2, 4 ou 6 avec probabilité $\frac{1}{6}$, sur 1 ou 3 avec probabilité $\frac{1}{10}$ et sur 5 avec probabilité $\dfrac{3}{10}$.

28.2 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

28.2.1 Définition

Définition 28.13 – Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A (en abrégé probabilité de B sachant A) et on note $\mathbf{P}_A(B)$ (ou parfois $\mathbf{P}(B|A)$) le réel

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Le plus dur ici est de bien comprendre que cette probabilité correspond à l'intuition qu'on s'en fait lorsque parle de probabilité de B *sachant* A.
Le cas qu'on comprend le mieux est celui d'équiprobabilité.

Exemple 28.14

Je suis convoqué pour faire passer un oral dans un lycée bien particulier, dont le site Web m'indique que tous les élèves sont en sport étude, soit en section escalade (26 élèves), soit en section bridge (47 élèves), et qu'il compte dans ses rangs 13 médaillés aux mondiaux junior (8 en escalade et 5 en bridge).
Avant le premier oral, je fais donc un petit calcul qui m'apprend que la probabilité que le prochain candidat soit un médaillé mondial est $\dfrac{13}{73}$.
J'ouvre la porte, le candidat entre. Ses biceps et son bronzage ne m'autorisent décemment pas à le penser en section bridge. Quelle est donc la probabilité qu'il s'agisse d'un médaillé mondial ? C'est-à-dire, la probabilité, *sachant que c'est un*

grimpeur, qu'il s'agisse d'un médaillé mondial ?
La réponse est évidente, c'est $\frac{8}{26}$, le nombre de médaillés en escalade sur le nombre total de grimpeurs, mais si on réfléchit en termes de probabilités, $\frac{8}{26} = \frac{\frac{8}{77}}{\frac{26}{77}}$, où $\frac{8}{77}$ est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit **à la fois** grimpeur et médaillé, et $\frac{26}{77}$ est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit grimpeur. On trouve donc bien la formule $\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)}$.

⚠ La notation $\mathbf{P}(B|A)$ (qu'on essaiera autant que possible d'éviter, bien qu'elle figure au programme officiel) est trompeuse, et laisse penser qu'il existe un événement $B|A$, qui serait «B sachant A».
Un tel «événement conditionnel» **n'existe pas**, et lorsque vous aurez envie de manipuler de tels événements[11], c'est en fait bien souvent $A\cap B$ que vous aurez derrière la tête.

[11] Ce que vous vous abstiendrez bien entendu de faire !

Proposition 28.15 : *Si A est un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$, alors l'application* $\mathbf{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbf{P}_A(B) \end{array}\right.$ *est une probabilité sur Ω.*

Une conséquence importante de ce fait est que toutes les règles énoncées pour le calcul des probabilités restent valables pour le calcul des probabilités conditionnelles !
Par exemple, $\mathbf{P}_A(\emptyset) = 0$, $\mathbf{P}_A\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbf{P}_A(B)$ et $\mathbf{P}_A(B\cup C) = \mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A(C) - \mathbf{P}_A(B\cap C)$.

Démonstration. Puisque la probabilité $\mathbf{P}$ est positive, croissante[12] et que $A\cap B\subset A$, on a bien pour tout $B\in\mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} \in [0,1]$.
Par ailleurs, $\mathbf{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbf{P}(A\cap\Omega)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)} = 1$.
Enfin, si B et C sont deux événements incompatibles, alors $A\cap B$ et $A\cap C$ le sont encore. Donc

$$\mathbf{P}_A(B\cup C) = \frac{\mathbf{P}(A\cap(B\cup C))}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}\left((A\cap B)\cup(A\cap C)\right)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(A\cap C)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}_A(B)+\mathbf{P}_A(C).$$

□

[12] Pour l'inclusion.

28.2.2 La formule des probabilités composées

Sur la définition de probabilité conditionnelle, il est assez clair que $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)$.
Ce résultat se généralise de la manière suivante :

Théorème 28.16 (Formule des probabilités composées) : *Soient $A_1,\dots,A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbf{P})$, tels que $\mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)\\ &= \prod_{i=0}^{n-1}\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_i}(A_{i+1}).\end{aligned}$$

Remarque
La formule s'apprend et se comprend bien mieux avec les pointillés.

Démonstration. Notons que puisque pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, $A_1\cap\dots\cap A_{n-1}\subset A_1\cap\dots\cap A_i$, et donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_i) \geqslant \mathbf{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1}) > 0$$

de sorte que la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_i}(A_{i+1})$ est bien définie[13].
Sinon, il s'agit de remarquer que le produit donné dans l'énoncé est télescopique :

[13] C'est d'ailleurs la seule raison d'être de cette hypothèse, qui ne pose en pratique aucun soucis.

$$\prod_{i=0}^{n-1}\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_i}(A_{i+1})$$

$$= \cancel{\mathbf{P}(A_1)}\frac{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap A_2)}}{\cancel{\mathbf{P}(A_1)}}\frac{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)}}{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap A_2)}}\cdots\frac{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})}}{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-2})}}\frac{\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)}{\cancel{\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})}}$$
$$= \mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n).$$

□

Cette formule est absolument fondamentale lorsqu'on manipule des expériences successives telles que le résultat d'une expérience influe sur la suivante. L'exemple typique étant les tirages successifs sans remise.

Exemple 28.17

On effectue des tirages sans remise dans une urne qui contient 2 boules rouges et $n-2$ boules vertes.
Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note A_k l'événement «la première boule rouge sort au $k^{\text{ème}}$ tirage».
Notons également R_i l'événement «la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage est rouge».
Nous ne disposons pas directement des probabilités des R_i, mais plutôt de leurs probabilités conditionnelles connaissant les résultats des tirages précédents !

On a $A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{R_i}\right)\cap R_k$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_k) &= \mathbf{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{R_i}\right)\cap R_k\right)\\
&= \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})\mathbf{P}_{\overline{R_1}\cap\overline{R_2}}(\overline{R_3})\cdots\mathbf{P}_{\overline{R_1}\cap\cdots\cap\overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}})\mathbf{P}_{\overline{R_1}\cap\cdots\cap\overline{R_{k-1}}}(R_k)\\
&= \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)}\frac{2}{n-(k-1)}\\
&= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

28.2.3 La formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales sert tout le temps, et vous l'avez déjà beaucoup utilisée, en vous gardant bien de le dire : elle sert précisément à faire des distinctions de cas afin de se ramener à des cas où les calculs de probabilités sont plus simples, puis de «remettre ensemble» toutes les probabilités obtenues.

Théorème 28.18 (Formule des probabilités totales) : *Soit $\{A_1,\dots,A_n\}$ un système complet d'événements. Alors pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$,*

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B\cap A_i)$$

Si de plus, tous les A_i sont de probabilités non nulles, alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B).$$

Méthode
Il faut connaître les deux formes données ici, et être capable de décider laquelle on souhaite utiliser dans une situation concrète. Ce qui dépend essentiellement de ce que vous pouvez calculer le plus facilement : des probabilités d'intersection ou des probabilités conditionnelles ?

Démonstration. Puisque $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}A_i$, et que ces événements sont deux à deux incompatibles,

alors $B = B\cap\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$, et les $B\cap A_i$ sont deux à deux incompatibles.

Donc il vient $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(B\cap A_i)$.

La seconde forme, dans le cas où les $\mathbf{P}(A_i)$ sont tous non nuls s'en déduit immédiatement en notant que $\mathbf{P}(B \cap A_i) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)$. □

Si certains des $\mathbf{P}(A_i)$ sont nuls, ce qui normalement ne devrait pas trop arriver sur un univers fini, on a

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i \mid \mathbf{P}(A_i) \neq 0} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B).$$

Exemples 28.19

► On lance 3 fois une pièce qui tombe sur *pile* avec probabilité p et sur *face* avec probabilité $q = 1 - p$.
On note P_i (resp. F_i) l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face)». On note A l'événement «deux lancers consécutifs n'ont jamais donné le même résultat».
Utilisons alors la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements $\{P_2, F_2\}$.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap P_2) + \mathbf{P}(A \cap F_2) = \mathbf{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbf{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) = q^2 p + p^2 q.$$

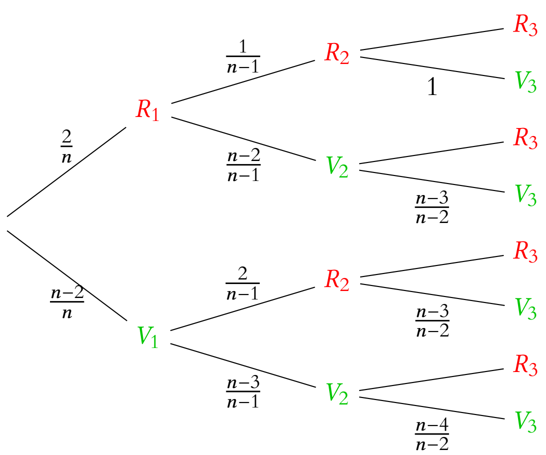
Remarque
La véritable justification des produits, qui vient de l'indépendance des lancers, viendra un peu plus tard.

► Une urne contient $n \geqslant 3$ boules : 2 boules rouges et $n - 2$ boules vertes. On tire successivement et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que la troisième boule soit verte ?
Avec des notations évidentes, $\{R_1 \cap R_2, R_1 \cap V_2, V_1 \cap R_2, V_1 \cap V_2\}$ est un système complet d'événements.
On a alors $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}_{R_1}(R_2) = \frac{2}{n}\frac{1}{n-1}$.
Et de même,

$$\mathbf{P}(R_1 \cap V_2) = \frac{2}{n}\frac{n-2}{n-1}, \ \mathbf{P}(V_1 \cap R_2) = \frac{n-2}{n}\frac{2}{n-1}, \ \mathbf{P}(V_1 \cap V_2) = \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}.$$

Donc par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements susmentionné

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V_3) &= \mathbf{P}(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(V_3) + \mathbf{P}(R_1 \cap V_2)\mathbf{P}_{R_1 \cap V_2}(V_3) + \mathbf{P}(V_1 \cap R_2)\mathbf{P}_{V_1 \cap R_2}(V_3) + \mathbf{P}(V_1 \cap V_2)\mathbf{P}_{V_1 \cap V_2}(V_3) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \times 1 + \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\frac{n-3}{n-2} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\frac{n-3}{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\frac{n-4}{n-2} \\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \times (2(n-2) + 4(n-2)(n-3) + (n-2)(n-3)(n-4)) \\
&= \frac{n^3 - 5n^2 + 8n + 4}{n(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$



La formule des probabilités totales et la formule des probabilités composées sont les deux fondements des arbres de probabilités que vous avez pu utiliser au lycée : les probabilités indiquées sur les branches sont des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités composées justifie qu'on fasse le produit des probabilités situées sur des branches qui se suivent, et la formule des probabilités totales justifie qu'on finisse par sommer toutes les probabilités aboutissant à la réalisation d'un événement donné (ici V_3).

▶ On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$, qui contiennent chacune n boules : l'urne U_k contient k boules bleues et $n-k$ boules rouges.
On choisit une urne au hasard (et de manière équiprobable), et on tire simultanément deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité que les deux boules soient bleues ?
Notons[14] $U_0, \dots, U_n$ les événements «le tirage a lieu dans l'urne U_i», de sorte que $\{U_0, \dots, U_n\}$ est un système complet d'événements.
Notons également A l'événement «les deux boules sont bleues».
Il est évident que la probabilité que A se réalise dépend de l'urne dans laquelle le tirage a lieu.
Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\{U_0, \dots, U_n\}$, il vient

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U_k)\mathbf{P}_{U_k}(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\mathbf{P}_{U_k}(A).$$

Or, il est facile de constater que $\mathbf{P}_{U_0}(A) = \mathbf{P}_{U_1}(A) = 0$.
Et pour $k \geqslant 2$, alors l'urne U_k contient n boules, donc il y a $\binom{n}{2}$ manières d'y tirer 2 boules, et puisqu'il y a k boules bleues, il y a $\binom{k}{2}$ manières d'y tirer 2 boules bleues.
Autrement dit $\mathbf{P}_{U_k}(A) = \dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
Et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{(n+1)n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\\
&= \frac{1}{(n+1)n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\,\frac{2n-2}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Le terme $k = 1$ est nul.

Grow up ! Si un arbre est un excellent support au brouillon, il ne peut plus en aucun cas être considéré comme une preuve, et vous devez justifier tous vos calculs !

[14] Abusivement.

⚠ Attention ! Pour autant $\mathbf{P}(A)$ n'a qu'une et qu'une seule valeur.
Je ne veux surtout pas voir de «si le tirage a lieu dans l'urne i, alors $\mathbf{P}(A) = \dots$.
Ce qu'on donnerait ainsi, ce sont des probabilités conditionnelles $\mathbf{P}_{U_i}(A)$.
La formule des probabilités totales est justement le moyen de rassembler toutes ces probabilités pour déterminer **la** valeur de $\mathbf{P}(A)$.

28.2.4 Les formules de Bayes

Proposition 28.20 (Formule de Bayes) : *Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors*

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Démonstration.

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

□

Exemple 28.21

Les situations où il y a besoin de la formule de Bayes sont assez facilement reconnaissables : ce sont celles où on cherche une probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_B(A)$, mais où on connaît la probabilité conditionnelle «dans l'autre sens» $\mathbf{P}_A(B)$.
Reprenons par exemple les urnes $U_0, \dots, U_n$ de l'exemple 28.19.

On tire deux boules, et les deux sont bleues. Quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans l'urne U_k ?
Avec les mêmes notations que précédemment, il s'agit donc de calculer $\mathbf{P}_A(U_k)$. Par la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}_A(U_k) = \frac{\mathbf{P}(U_k)\mathbf{P}_{U_k}(A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{n+1}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}{\frac{1}{3}} = \frac{3k(k-1)}{(n+1)n(n-1)}.$$

Un bon moyen de vérifier le résultat est souvent de regarder ce qui se passe pour les valeurs extrêmes. Ici, on sait que si le tirage a donné deux boules bleues, il ne peut avoir eu lieu ni dans l'urne U_0, ni dans l'urne U_1.
Or notre formule donne une probabilité nulle pour $k \in \{0, 1\}$, ce qui est cohérent. De plus, le fait que la probabilité soit une fonction croissante de k est aussi conforme à l'intuition.

Une autre forme parfois utile de la formule de Bayes est la suivante :

Remarque
Je la mentionne parce qu'elle est au programme, mais comme il s'agit simplement de coupler la formule de Bayes ci-dessus à la formule des probabilités totales, normalement vous saurez toujours la retrouver dans les cas où vous en aurez besoin, sans qu'il soit nécessaire de connaître un énoncé général.

Corollaire 28.22 – *Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors*

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}_{A_j}(B)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)}.$$

Démonstration. Il suffit juste de partir de la formule de Bayes, avec $A = A_j$, et d'appliquer la formule des probabilités totales au dénominateur afin de calculer $\mathbf{P}(B)$. □

28.3 INDÉPENDANCE

Définition 28.23 – Deux événements A et B d'un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$ sont dits **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Notons bien que ceci fait appel à la probabilité $\mathbf{P}$, et ne dépend donc pas que de l'univers Ω, mais bien de la probabilité $\mathbf{P}$ que l'on met dessus.
La plupart du temps, l'indépendance est supposée par l'énoncé, ou alors est implicite, notamment lors de la répétition d'expériences telles que l'issue d'une expérience n'influe pas sur les suivantes. Typiquement lors de plusieurs lancers d'une pièce/d'un dé/whatever ou de tirages successifs **avec remise**.

Rédaction ✎
Dans ces exemples, un énoncé ne mentionnera jamais l'indépendance des répétitions, ce sera à vous de la comprendre et de la mentionner si vous l'utilisez.

⚠ En dehors des exemples ci-dessus, ne vous fiez pas trop à l'intuition pour l'indépendance, c'est une notion parfois imprévisible qui peut contredire l'intuition.

Exemple 28.24

On lance deux fois une pièce de monnaie qui tombe sur «face» avec probabilité $p \in [0, 1]$.
Notons P_i (resp. F_i) l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile», et A l'événement «les deux lancers donnent le même résultat».
Alors $\mathbf{P}(F_1) = p$ et

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left((F_1 \cap F_2) \cup (P_1 \cap P_2)\right) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2) + \mathbf{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2) + \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(P_2) = p^2 + (1-p)^2.$$

Enfin, on a $\mathbf{P}(A \cap F_1) = \mathbf{P}(F_1 \cap F_2) = p^2$.
Donc pour $p \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$, les événements A et F_1 ne sont pas indépendants, alors qu'ils le sont pour $p = \frac{1}{2}$.
Pourtant, dans les deux cas, l'univers considéré est le même : c'est $\{P, F\}^2$.

Notons que deux événements A et B incompatibles et de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants, puisqu'alors $\mathbf{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
C'est souvent là un bon moyen de prouver la non-indépendance de deux événements.

Proposition 28.25 : *Deux événements A et B avec $\mathbf{P}(A) \neq 0$ sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.*

Démonstration. C'est évident puisque $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}$ et donc

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B) \Leftrightarrow \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B).$$

□

L'intuition là-derrière est que si A et B sont indépendants, alors savoir que A réalisé ne change rien à la probabilité que B le soit.

Le cas où $\mathbf{P}(A) = 0$ est peu intéressant, car un tel événement[15] est indépendant de tout autre événement B, puisque $A \cap B \subset A$ et donc $\mathbf{P}(A \cap B) \leqslant \mathbf{P}(A) = 0$, de sorte que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

[15] De probabilité nulle signifiant qu'il ne se produit jamais ou presque...

Proposition 28.26 : *Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Corollaire
Et donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Démonstration. Puisque $\{B, \overline{B}\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$.
Et donc

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$$

de sorte que A et $\overline{B}$ sont bien indépendants. □

Définition 28.27 – Des événements $A_1, \dots, A_n$ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ sont dits **mutuellement indépendants** si $\forall I \subset [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$.

⚠ Pour $n \geqslant 3$, l'indépendance mutuelle de n événements implique bien qu'ils sont deux à deux indépendants (il suffit de prendre I de cardinal 2 dans la définition), mais la réciproque est fausse.
Par exemple, lançons deux dés, et notons A «le numéro du premier dé est pair», B «le numéro du second dé est pair» et C «la somme des deux dés est paire».
Alors on a $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{2}$.
Par ailleurs, il est clair que A et B sont indépendants, et

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Détails
Pour obtenir $\mathbf{P}(C)$, le plus simple est probablement de procéder par dénombrement.
Il y a 36 résultats possibles (et équiprobables) à l'expérience, dont

$$1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$$

rendent la somme des deux dés paire.

Donc A, B, C sont deux à deux indépendants.
En revanche, $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, alors que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \dfrac{1}{8}$.
Donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Détails
Si A et B sont réalisés, alors C l'est.
Autrement dit, $A \cap B \subset C$.

Exercices du chapitre 28

► Généralités, obtention de probas par dénombrement (équiprobabilité)

Exercice 28.1 On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, préciser l'univers modélisant l'expérience, et calculer la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur. F

1) Si les cartes sont tirées simultanément.
2) Si les cartes sont tirées successivement et sans remise.
3) Si les cartes sont tirées successivement et avec remise.

Exercice 28.2 On lance 6 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une fois chaque face ? PD

Exercice 28.3 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini. On note alors C l'événement «un et un seul des événements A ou B est réalisé». PD

1) Exprimer C en fonction de A et B.
2) Prouver que $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$.

Exercice 28.4 On lance $2n$ fois une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Déterminer la probabilité que chaque lancer donne un résultat contraire du lancer précédent. PD

Exercice 28.5 Montrer que si A et B sont indépendants, alors les couples A et $\overline{B}$ sont indépendants, de même que $\overline{A}$ et B, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$. PD

Exercice 28.6 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$. PD

Exercice 28.7 Une loterie a lieu une fois par semaine. Chaque semaine, sur 100 billets mis en jeu, n sont gagnants, avec $n \leqslant 90$. Chaque billet coûte un euro, et on dispose de 10 euros. PD
Parmi les deux stratégies suivantes :

1) acheter 10 billets la même semaine
2) acheter un billet par semaine durant 10 semaines

Laquelle permet de maximiser les chances de gagner au moins une fois ?

Exercice 28.8 Paradoxe des anniversaires PD
Dans un groupe de n personnes, on considère que chaque personne a autant de chance d'être née chacun des 365 jours de l'année.
Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?
Un calcul numérique prouve que pour $n \geqslant 23$, cette probabilité est supérieure à 1/2, et c'est ce que l'on nomme paradoxe des anniversaires. Ce n'est pas un vrai paradoxe, mais cela contredit l'intuition, car on pourrait s'attendre à ce qu'il faille bien davantage de personnes.
Pour $n = 48$, cette probabilité vaut environ 0.96, et votre classe ne déroge pas à la règle : vous êtes bien deux à être nés le même jour !

Exercice 28.9 On place deux amis dans une file d'attente de n personnes ($n \geqslant 3$). Quelle est la probabilité qu'il y ait r personnes ($0 \leqslant r \leqslant n-2$) entre les deux amis ? AD
Quelle est le nombre de personnes le plus probable entre les deux ?
Mêmes questions si cette fois les deux amis sont placés sur une table ronde, et que l'on compte le nombre de personnes entre les deux dans le sens le plus direct.

Exercice 28.10 On lance n fois une pièce de monnaie, qui tombe sur *pile* avec probabilité $p \in]0, 1[$. PD

1) Quelle est la probabilité que le premier pile arrive au $n^{\text{ème}}$ lancer ?
2) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir le $k^{\text{ème}}$ pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

Exercice 28.11 (Oral X PC) D
On place aléatoirement $n \geqslant 3$ boules dans n urnes. Quelle est la probabilité qu'une et une seule urne reste vide ? Donner un équivalent simple de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 28.12 Formule du crible et application D

1) Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$. On souhaite prouver que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right). \qquad (\star)$$

On rappelle à cet effet que pour toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Si l'on applique ceci à tous les termes du membre de droite de $(\star)$, on obtient une combinaison linéaire des $\mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

a) Soit $\omega \in \Omega$ un élément qui appartient à exactement p événements parmi $A_1, \dots, A_n$. Montrer que le coefficient devant $\mathbf{P}(\{\omega\})$ dans le membre de droite de $(\star)$ est $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}$.

b) Conclure.

2) n personnes laissent leurs chapeaux au vestiaire. Pour les récupérer, chacune prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que personne n'ait repris son chapeau ?

EXERCICE 28.13 Problème du scrutin (Oral X PC) TD

Lors d'une élection, a électeurs votent pour A et b votent pour B ($a > b$). Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

► Formules des probabilités composées/totales/de Bayes. Indépendance

EXERCICE 28.14 Urne de Polya AD

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire.

On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne, et on ajoute une autre boule de la même couleur.

Ainsi, à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience, l'urne contient $k+2$ boules.

On note alors pour $k \in \mathbf{N}$ et $i \in [\![1, k+1]\!]$, B_k^i l'événement «l'urne contient i boules blanches à l'issue du $k^{\text{ème}}$ tirage».

Montrer par récurrence sur k que pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $\mathbf{P}(B_k^i) = \dfrac{1}{k+1}$.

EXERCICE 28.15 (Oral Centrale PC) AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules, n blanches et n noires. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage on ait obtenu une boule blanche et une boule noire ?

EXERCICE 28.16 PD Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_1, \dots, A_n$ ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right)$.

EXERCICE 28.17 Le concierge alcoolique AD

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau, dont une seule ouvre la porte devant laquelle il se trouve.

On note A_k l'événement «la $k^{\text{ème}}$ clé essayée par le concierge est la première à ouvrir la porte».

1) Le concierge essaie les clés sans remise, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 10$.
2) Le concierge essaie les clés avec remise, calculer $\mathbf{P}(A_k)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.
3) Le concierge est ivre un jour sur trois. Lorsque c'est le cas, il essaie les clés avec remise, et les autres jours, il les essaie sans remise. Calculer $\mathbf{P}(A_k)$.
4) Aujourd'hui, il a fallu 6 essais au concierge pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Même question avec 11 essais.

EXERCICE 28.18 (Banque CCP) AD

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 28.19 On dispose de deux dés équilibrés : le dé A possède quatre faces rouges et deux faces noires, le dé B possède quatre faces noires et deux faces rouges. PD
On lance une pièce de monnaie truquée, qui tombe sur pile avec probabilité $\frac{1}{3}$. Si la pièce tombe sur pile, alors on ne joue qu'avec le dé A, si la pièce de monnaie tombe sur face, on ne joue qu'avec le dé B.
On note R_i l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer de dé donne une face rouge».

1) Calculer $\mathbf{P}(R_1)$, $\mathbf{P}(R_2)$, puis $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
2) On a obtenu «rouge» aux deux premiers lancers. Calculer la probabilité d'obtenir «rouge» au troisième.
3) On a obtenu «rouge» aux n premiers lancers. Calculer la probabilité qu'on joue avec le dé A.

EXERCICE 28.20 On dispose de n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$, et on dispose 3 boules dans chaque urne. AD
Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

EXERCICE 28.21 **Loi de succession de Laplace** AD
On dispose de N urnes numérotées de 1 à N. L'urne numéro i contient i boules blanches et $N - i$ boules noires.
On choisit une urne au hasard, sans connaître son numéro, et on effectue une série de tirages dans cette urne, avec remise entre les tirages.

1) Sachant que les n premiers tirages ont tous donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche ?
2) Déterminer la limite lorsque $N \to +\infty$ de la probabilité calculée à la question précédente.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 28

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.1

Dans les 3 cas, notons A l'événement «obtenir 3 cartes de même couleur», en gardant à l'esprit que les univers Ω étant différents, A n'est pas toujours égal au même ensemble.

1. Les issues possibles de l'expérience sont donc les mains des 3 cartes. Autrement dit, les parties à 3 éléments de l'ensemble des 32 cartes.
Soit encore ce que nous avons nommé les 3-combinaisons de l'ensemble des cartes.
Donc l'univers Ω est[1] l'ensemble des 3-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes.
Nous savons alors $\operatorname{Card}\Omega = \binom{32}{3} = \frac{32\times 31\times 30}{6} = 5\times 32\times 31$.
Et le nombre de mains de même couleur est $4\times\binom{8}{3} = 4\times 8\times 7$, 4 étant le nombre de couleurs, et $\binom{8}{3}$ étant, une fois la couleur choisie, le nombre de manières de choisir 3 cartes parmi les 8 de cette couleur.
Donc la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur est

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{4\times 8\times 7}{32\times 31\times 5} = \frac{7}{155}.$$

2. Cette fois l'ordre des tirages a une importance[2], et donc les issues possibles de l'expérience sont des triplets (donc ordonnés) de cartes, ne comportant pas deux fois la même carte[3].
Autrement dit, ce sont des arrangements de 3 cartes parmi les 32 possibles.
Donc Ω est l'ensemble des tels arrangements, de sorte que $\operatorname{Card}(\Omega) = 32\times 31\times 30$.
Et alors A est de cardinal $4\times 8\times 7\times 6$. Encore une fois 4 correspond au nombre de couleurs possibles, et $8\times 7\times 6$ est le nombre de 3-arrangements de cartes d'une couleur fixée.
Et donc $\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} = \frac{4\times 6\times 7\times 8}{32\times 31\times 30} = \frac{7}{155}$.
Remarque importante *: nous trouvons bien la même probabilité que précédemment. C'est complètement intuitif, et vous serez d'accord pour dire que la probabilité d'obtenir 3 cartes de même couleur est la même qu'on tire les cartes simultanément ou bien une par une.*
C'est un fait qu'il est bon d'avoir à l'esprit : si les événements que l'on considère ne tiennent pas en compte l'ordre (ici on ne regarde pas la couleur de la première/de la deuxième/de la troisième carte), modéliser une expérience par des tirages successifs ***sans remise*** *ou par des tirages simultanés conduit au même résultat.*

3. Cette fois, les tirages étant avec remise, il est possible d'obtenir plusieurs fois la même carte, et donc une issue de l'expérience est un triplet de cartes.
Donc $\Omega = \left(\left\{\boxed{7\spadesuit}\boxed{7\diamondsuit}\dots,\boxed{A\clubsuit}\boxed{A\heartsuit}\right\}\right)^3$.
Et donc $\operatorname{Card}(\Omega) = 32^3$.
Pour chaque couleur, il y a 8^3 triplets de cartes de cette couleur.
Et donc $\mathbf{P}(A) = \frac{4\times 8^3}{32^3} = \frac{1}{16}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.2

Comme souvent, la difficulté réside dans la manière dont on modélise l'épreuve.
Si on commence à distinguer les résultats des différents lancers, les calculs et les notations vont vite devenir inextricables. Il sera facile de dire «le second lancer donne un résultat différent du premier», mais au moment d'écrire que les 4 premiers sont différents, cela va se corser...
Notons qu'on peut ici prendre $\Omega = [\![1,6]\!]^6$, muni de sa probabilité uniforme[4].
Et donc une issue qui réalise l'événement A : «les 6 numéros sont sortis» est la donnée d'un 6-arrangement de $[\![1,6]\!]$ (ou si vous préférez d'une permutation de $[\![1,6]\!]$).
Il y a $6!$ tels arrangements, et donc

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.3

[1] Ou du moins peut-être pris tel quel, on pourrait imaginer d'autres possibilités.

[2] Pas forcément sur la probabilité que nous obtiendrons, mais en tous cas dans la description de l'expérience.

[3] Car les tirages sont sans remise.

[4] Car le dé est équilibré.

1. On a $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. C'est ce que dans le TD de théorie des ensembles nous avions nommé *différence symétrique de A et B* et noté $A \Delta B$.
2. Puisque C et $A \cap B$ sont incompatibles, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(C \cup (A \cap B)) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A \cap B)$.
Et donc

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A \cup B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B).$$

Incompatibilité
Cette incompatibilité se comprend encore mieux quand on le dit en français : C est l'événement «un seul des 2 événements A et B est réalisé» quand $A \cap B$ est l'événement «A **et** B sont réalisés».
Il est alors clair que C et $A \cap B$ ne peuvent pas être simultanément réalisés.

Solution de l'exercice 28.4

Notons P_i (resp. F_i) l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile (resp. face)».
Et soit alors A l'événement dont la probabilité est cherchée, à savoir : «chaque lancer donne un résultat différent du précédent».
Puisque $\{F_1, P_1\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap F_1) + \mathbf{P}(A \cap P_1).$$

Mais $A \cap F_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_{2n-1} \cap P_{2n}$, de sorte que par indépendance des lancers,

$$\mathbf{P}(A \cap F_1) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(P_2) \cdots \mathbf{P}(F_{2n-1})\mathbf{P}(P_{2n}) = (pq)^n.$$

De même, $\mathbf{P}(A \cap P_1) = (pq)^n$ et donc $\mathbf{P}(A) = 2(pq)^n$.

Solution de l'exercice 28.5

On a $\mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(B)$, et donc

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}).$$

Solution de l'exercice 28.6

Le point important ici, souvent utile en probas est que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
Ceci se retrouve soit à l'aide d'un tableau de variations, soit à l'aide d'un résultat bien connu[5] sur le sommet d'une parabole.

[5] $-\frac{b}{2a}$ ...

D'une part, on a $\mathbf{P}(A) \geqslant \mathbf{P}(A \cap B)$ et de même $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A \cap B)$, si bien que $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A \cap B)^2$, et donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap B)^2 \leqslant \mathbf{P}(A \cap B)\left(1 - \mathbf{P}(A \cap B)\right) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Pour l'autre inégalité, notons que $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$ et donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}).$$

Mais alors en appliquant le même raisonnement que pour la première inégalité, en changeant B en $\overline{B}$, on obtient

$$\mathbf{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(A \cap \overline{B}) \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Et donc il vient bien $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Solution de l'exercice 28.7

Notons G l'événement «l'un des billets achetés est gagnant».
Avec la première stratégie, la probabilité d'obtenir uniquement des billets perdants est :

$$\mathbf{P}\left(\overline{G}\right) = \frac{\binom{100-n}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{(100-n)!90!}{(90-n)!100!} = \frac{(100-n)(99-n)\cdot(91-n)}{100 \cdot 99 \cdots 91} = \prod_{k=91}^{100} \frac{k-n}{k}$$

Donc

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \prod_{k=91}^{100} \frac{k-n}{k}$$

Avec la seconde stratégie, notons G_i l'événement : «le joueur gagne la $i^{\text{ème}}$ semaine». Alors $\mathbf{P}(\overline{G_i}) = \dfrac{100-n}{100}$.

Par indépendance des événements $G_1, \ldots, G_{10}$, et puisque $\overline{G} = \bigcap_{i=1}^{10} \overline{G_i}$, on a

$$\mathbf{P}(\overline{G}) = \prod_{i=1}^{10} \mathbf{P}(\overline{G_i}) = \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}.$$

Et donc il vient

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}$$

On prouve facilement que pour $k \in [\![91, 100]\!]$, on a $\dfrac{k-n}{k} \leqslant \dfrac{100-n}{100}$.
On en déduit que

$$\prod_{k=91}^{100} \frac{k-n}{k} \leqslant \left(\frac{100-n}{100}\right)^{10}$$

On en déduit que la probabilité de gagner est plus grande avec la première stratégie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.8

Prenons pour Ω l'ensemble $[\![1, 365]\!]^n$ des n-uplets d'éléments de $[\![1, 365]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ élément correspondant au jour de naissance de la $i^{\text{ème}}$ personne.
Cherchons alors la probabilité de l'événement contraire, à savoir que les n dates de naissances soient deux à deux distinctes.
Alors les événements élémentaires réalisant cet événement sont les n-uplets sans répétitions : ce sont précisément les n-arrangements de $[\![1, 365]\!]$.
Si $n \geqslant 366$, il n'y en a pas[6], et sinon, il sont au nombre de $\dfrac{365!}{(365-n)!)}$.
Et donc au final, la probabilité que deux personnes soient nées le même jour est $1 - \dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$.

[6] Mais on n'a probablement pas besoin d'un calcul pour répondre au problème posé si $n \geqslant 366$...

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.9

1. Puisque seules comptent les places occupées par les deux amis (appelons-les Laurel et Hardy), il s'agit de dénombrer les manières de placer ces deux comparses.
Il y a $n(n-1)$ tels choix (nombre de 2-arrangements de $[\![1, n]\!]$).
Il y aura alors r places entre les deux si Laurel se trouve en place i et Hardy en place $i+r+1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-r-1$, ou le contraire.
Ce qui fait $2(n-r-1)$ possibilités.
Et donc la probabilité cherchée est $\dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.
2. Cette probabilité décroit clairement lorsque r augmente, donc est maximale pour $r = 0$: le plus probable[7] est que Laurel et Hardy soient voisins.
3. Si la table est ronde, alors une modélisation possible de l'expérience est de commencer par placer Laurel sur la première chaise (peu importe laquelle, seules les positions relatives nous intéressent), puis de placer les autres personnes dans le sens direct à partir de Laurel.
Il y a donc $(n-1)!$ manières de placer ces personnes.
Mais pour $1 \leqslant r \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1$, seules deux positions pour Hardy placeront r personnes entre Laurel et lui : s'il est sur la chaise $r+1$ (où la chaise de Laurel porte le numéro 0), ou sur la chaise $n-r-1$. Et il y a $(n-2)!$ dispositions réalisant chacune de ces possibilités.
Donc la probabilité que Laurel et Hardy soient à distance r est $\dfrac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \dfrac{2}{n-1}$.
Avec une exception dans le cas où n est pair et $r = \dfrac{n}{2} - 1$, auquel cas les positions $r+1$ et $n-1-r$ sont les mêmes, et donc la probabilité cherchée est $\dfrac{1}{n-1}$.

[7] Attention, je n'ai pas dit qu'il y a avait plus de 50% de chances que ceci se produise, mais juste que c'est plus probable que n'importe quelle autre distance.

Remarque
Ce cas est précisément celui où Laurel et Hardy se sont face.

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.10

Notons P_i et F_i les événements correspondants aux résultat du $i^{\text{ème}}$ tirage.

1. L'événement «le 1^{er} pile arrive au $n^{\text{ème}}$ lancer est

$$A = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n$$

qui, par indépendance des différents lancers, a pour probabilité

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\cdots\mathbf{P}(F_{n-1})\mathbf{P}(P_n) = q^{n-1}p.$$

2. Si le $k^{\text{ème}}$ pile se produit au $n^{\text{ème}}$ lancer, c'est que ce dernier lancer donne pile, et que $k-1$ parmi les $n-1$ premiers ont déjà donné un pile.
Or, si l'on choisit $k-1$ tirages parmi les $n-1$ premiers, la probabilité d'obtenir pile exactement à ces tirages ainsi qu'au $n^{\text{ème}}$ est $p^k q^{n-k}$.
Puisqu'il y a $\binom{n-1}{k-1}$ manières de choisir ces positions, la probabilité cherchée est $\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$.

Détails
La raison pour laquelle il suffit de multiplier par $\binom{n-1}{k-1}$ est que les événements que l'on compte sont 2 à deux disjoints.

Alternative : si vraiment on a besoin de nommer les événements alors l'événement que nous cherchons est

$$\bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\left(\bigcap_{i\in\{i_1,\dots,i_{k-1}\}} P_i \cap \bigcap_{j\notin\{i_1,\dots,i_{k-1}\}} F_j \cap P_n\right).$$

C'est franchement indigeste, et ça conduira au même raisonnement : chacun des événements dans l'union est de probabilité $p^k q^{n-k}$, et il faudra quand même dénombrer le nombre d'événements dans l'union.
Bref, on n'y gagne rien... si ce n'est que c'est un peu plus rigoureux !

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.11

Choisir la position des boules dans les urnes, c'est choisir une fonction de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$: à chaque boule on associe une urne.
Tous les placements étant équiprobables, nous voici donc ramenés à un problème de dénombrement.
Il y a n^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, et on cherche donc combien de ces applications ont une image de cardinal égal à $n-1$ (puisque $n-1$ urnes doivent contenir au moins une boule, et la dernière doit rester vide).

Pour choisir une telle application, il faut commencer par choisir son image, et il y a $\binom{n}{n-1}=n$ parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $n-1$.
Puis une fois l'image A choisie, on choisit quel élément x de A aura deux antécédents (il y a $n-1$ choix possibles), puis on choisit les deux antécédents a et b de x (et il y a $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ choix possibles), et reste alors à choisir une bijection de $[\![1,n]\!]\setminus\{a,b\}$ sur $A\setminus\{x\}$ (et il y a $(n-2)!$ choix).
Donc au final, la probabilité cherchée est

$$p_n=\frac{n^2(n-1)^2}{2}\frac{(n-2)!}{n^n}=\frac{(n-1)}{2}\frac{n!}{n^{n-1}}.$$

Pour en donner un équivalent, utilisons la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
On a donc

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\frac{n}{2n^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^{5/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.12

1.a. En écrivant

$$\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\sum_{\tau\in A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}\mathbf{P}(\{\tau\})$$

la somme ne contiendra un terme $\mathbf{P}(\{\omega\})$ que si ω est dans tous les A_{i_j}.
Donc dans la somme du membre de droite de $(\star)$, à k fixé, il y aura autant de $\mathbf{P}(\{\omega\})$ que de parties à k éléments de l'ensemble des indices[8] i tels que $\omega\in A_i$.
Il y a $\binom{p}{k}$ telles parties, et donc le coefficient devant $\mathbf{P}(\{\omega\})$ est $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\binom{p}{k}$.

[8] Que l'on a supposé de cardinal exactement p.

1.b. Ce coefficient vaut donc $-\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}=-\left((1-1)^p-1\right)=1$ si $p\geqslant 1$, et 0 sinon.
Donc le membre de droite de $(\star)$ est la somme de $\mathbf{P}(\{\omega\})$ pour ω apparaissant dans l'un au

moins des A_i.

Autrement dit, c'est $\displaystyle\sum_{\omega\in A_1\cup\cdots\cup A_n} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$.

2. Notons A_i l'événement «la $i^{\text{ème}}$ personne a récupéré son chapeau».

Alors nous cherchons la probabilité de $B = \displaystyle\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$.

Par la formule précédente, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\right).$$

Pour k fixé, et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ fixés, on a $\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.
En effet, il s'agit de choisir, parmi les $n!$ permutations possibles des n chapeaux, une permutation des chapeaux autres que ceux de $i_1,\ldots,i_k$.
Donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Mais, toujours à k fixé, il y a $\dbinom{n}{k}$ façons de choisir une partie à k éléments $\{i_1,\ldots,i_k\}$ de $[\![1,n]\!]$.

Remarque
Une fois la partie choisie, il n'y a qu'une seule manière de l'ordonner.

Donc la somme intérieure comporte $\dbinom{n}{k}$ termes, et donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\frac{1}{k!}.$$

Et donc enfin, $\mathbf{P}(B) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum k = 0^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Remarques *: ▸ la formule de Taylor-Lagrange*[9] *permet de prouver que cette probabilité tend vers* e^{-1}.
▸ *Notons au passage que nous avons (quasiment) déterminé le nombre de dérangements (= de permutations sans point fixe) de* $[\![1,n]\!]$.

[9] Ou le fait de reconnaître les sommes partielles d'une série exponentielle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.13

Il s'agit bien évidemment d'un exercice dur, puisqu'oral de l'X. Entendons-nous bien : en 20/30 minutes l'examinateur ne va pas nécessairement attendre que vous ayez **la** *bonne idée qui va plier l'exercice. Au contraire, on va vouloir évaluer votre capacité à explorer des pistes, et plus encore, votre capacité à réagir à des indications partielles.*
D'ailleurs, le problème posé a mis une dizaine d'années avant d'avoir une solution, et c'est Joseph Bertrand, probabiliste célèbre (et accessoirement major de l'X) qui le premier en a apporté une réponse, qui n'est pas celle que nous présentons ici.

Commençons par noter qu'un dépouillement est entièrement, et uniquement caractérisé par les positions des bulletins A.
Il y a donc $\dbinom{a+b}{a}$ dépouillements possibles.

Notons D l'ensemble de ces dépouillements, D_f l'ensemble des dépouillements favorables, c'est-à-dire pour lesquels A est toujours strictement en tête, et D_d l'ensemble des dépouillements défavorables.
Notons également D_+ l'ensemble des dépouillements (favorables ou non) qui commencent par un bulletin A, et D_- ceux qui commencent par un B (tous défavorables), de sorte que $D_+ \cup D_- = D$, l'union étant disjointe.
On peut se représenter graphiquement la situation par des chemins à coordonnées entières, qui commencent à $(0,0)$ et terminent à $(a+b, a-b)$, par exemple :

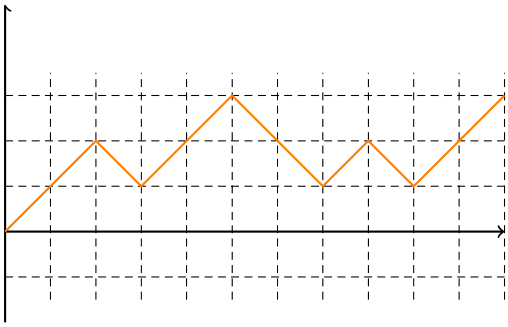


FIGURE 28.1 – Un dépouillement favorable : le chemin reste au dessus de l'axe des abscisses sans jamais le toucher, donc A est toujours strictement en tête.

Si vous souhaitez formaliser davantage, c'est possible, mais ça ne me semble pas nécessaire...
On peut identifier un chemin à un élément de $\left\{(v_1, \dots, v_{a+b}) \in \{-1, 1\}^{a+b} \mid \sum_{i=1}^{a+b} v_i = a - b\right\}$.

Un chemin[10] favorable est un $(v_1, \dots, v_{a+b})$ tel que pour tout $k \in [\![1, a+b]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} v_i > 0$.

Alors il y a autant de dépouillements favorables commençant par un bulletin A que de dépouillements (tous défavorables) commençant par un B.
En effet, si un dépouillement défavorable commence par un bulletin A (c'est-à-dire est un élément de $D_d \cap D_+$), alors nécessairement il existe un moment où les deux candidats sont à égalité. Autrement dit, le chemin associé coupe l'axe des abscisses[11].
En effectuant une réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la partie du chemin d'abscisses comprises entre 0 et le premier point d'intersection avec l'axe des abscisses, on obtient un élément[12] de D_-.
On vérifie aisément qu'on définit ainsi une bijection (et même une involution) de $D_+ \cap D_d$ sur D_-. Par conséquent, ces deux ensembles ont même cardinal.
Ce raisonnement est souvent appelé *principe de réflexion*.

[10] Ou dépouillement.

[11] Sans nécessairement le traverser.

[12] Ou plutôt un chemin correspondant à un élément de D_-.

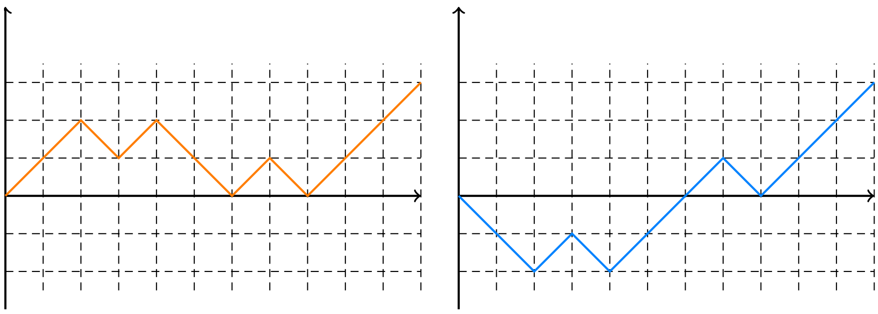


FIGURE 28.2 – Un élément de $D_d \cap D_+$ et l'élément de D_- obtenu par réflexion.

Or les éléments de D_- sont faciles à dénombrer : ils commencent tous par un bulletin B, donc il reste à choisir la position des a bulletins A parmi les $a+b-1$ places restantes. Donc $\operatorname{Card}(D_-) = \binom{a+b-1}{a}$.
On a donc $D = D_f \cup (D_d \cap D_+) \cup D_-$, et cette union est disjointe, de sorte que

$$\operatorname{Card}(D) = \operatorname{Card}(D_f) + \operatorname{Card}(D_d \cap D_+) + \operatorname{Card}(D_-) = \operatorname{Card}(D_f) + 2\operatorname{Card}(D_-).$$

Et donc $\operatorname{Card}(D_f) = \operatorname{Card}(D) - 2\operatorname{Card}(D_-) = \binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a}$.
Et donc pour finir, par équiprobabilité des dépouillements, la probabilité cherchée est

$$\frac{\operatorname{Card}(D_f)}{\operatorname{Card}(D)} = 1 - 2\frac{\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = 1 - 2\frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.14

Pour $k = 1$, c'est assez évident, à l'issue du premier tirage, il y a une chance sur deux pour qu'il y ait une seule boule blanche, et une chance sur deux qu'il y en ait deux.

Supposons donc que pour $k \in \mathbf{N}^*$, alors $\forall i \in [\![1, k+1]\!]$, $\mathbf{P}(B_k^i) = \dfrac{1}{k+1}$.

Notons alors A_{k+1} l'événement «le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage a donné une boule blanche».

On a alors, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_{k+1}, \overline{A_{k+1}}\}$, pour tout $i \in [\![1, k+2]\!]$,

$$\mathbf{P}(B_{k+1}^i) = \mathbf{P}(A_{k+1} \cap B_{k+1}^i) + \mathbf{P}(\overline{A_{k+1}} \cap B_{k+1}^i).$$

Or, $A_{k+1} \cap B_{k+1}^i = A_{k+1} \cap B_k^{i-1}$ et de même $\overline{A_{k+1}} \cap B_{k+1}^i = \overline{A_{k+1}} \cap B_k^i$.

On a alors

$$\mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap B_{k+1}^i\right) = \mathbf{P}\left(A_{k+1} \cap B_k^{i-1}\right) = \mathbf{P}(B_k^{i-1})\mathbf{P}_{B_k^{i-1}}(A_{k+1}) = \frac{1}{k+1}\frac{i-1}{k+2}$$

Remarque : Cette formule reste valable pour $i = 1$, même si alors la signification de B_k^{i-1} est douteuse.

Et de même,

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_{k+1}} \cap B_{k+1}^i\right) = \mathbf{P}\left(\overline{A_{k+1}} \cap B_k^i\right) = \mathbf{P}(B_k^i)\mathbf{P}_{B_k^i}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{k+1}\frac{k+2-i}{k+2}.$$

Et donc il vient bien $\mathbf{P}(B_{k+1}^i) = \dfrac{1}{k+2}$.

On conclut alors par le principe de récurrence.

Alternative : voici une autre solution, avec un autre système complet d'événements. Ni moins bonne, ni meilleure, elle vise surtout à vous montrer qu'il peut y avoir plusieurs systèmes complets d'événements intéressants.

On sait que $\{B_k^j,\ 1 \leqslant j \leqslant k+1\}$ est un système complet d'événements.

Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(B_{k+1}^i) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbf{P}(B_{k+1}^i \cap B_k^j).$$

Mais puisqu'au tirage numéro $k+1$ on a soit ajouté une boule blanche, soit aucune, on a donc $B_{k+1}^i \cap B_k^j = \emptyset$ si $j \notin \{i, i-1\}$.

Et donc $\mathbf{P}(B_{k+1}^i) = \mathbf{P}(B_{k+1}^i \cap B_k^{i-1}) + \mathbf{P}(B_{k+1}^i \cap B_k^i)$.

Mais $B_{k+1}^i \cap B_k^{i-1}$ signifie qu'on avait $i-1$ boules blanches après le $k^{\text{ème}}$ tirage et qu'on a eu une blanche au $(k+1)^{\text{ème}}$. Et donc $B_{k+1}^i \cap B_k^{i-1} = B_k^{i-1} \cap A_{k+1}$.

De même, $B_{k+1}^i \cap B_k^i = B_k^i \cap \overline{A_{k+1}}$.

Et donc on retrouve bien

$$\mathbf{P}(B_{k+1}^i) = \mathbf{P}(B_k^{i-1} \cap A_{k+1}) + \mathbf{P}(B_k^i \cap \overline{A_{k+1}}).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.15

Notons A_i l'événement «le $i^{\text{ème}}$ tirage donne deux boules de couleurs différentes».

Alors l'événement dont l'énoncé demande la probabilité est $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Lors du premier tirage, il y a $\dbinom{2n}{2}$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, $\dbinom{n}{2}$ sont formés de deux boules blanches et $\dbinom{n}{2}$ de boules noires.

Donc $\mathbf{P}(A_1) = 1 - \dfrac{2\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{n}{2n-1}$.

On a alors, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Mais si A_1 est réalisé, l'urne contient $n-1$ boules blanches et $n-1$ boules noires, donc un raisonnement analogue à celui que nous venons de tenir pour n boules prouve que

$\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \dfrac{n-1}{2n-3}$.
Et plus généralement, pour $k \in [\![1, n]\!]$, si $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ sont réalisés, alors lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient $n-k$ boules de chaque couleur.

Et donc pour $k \leqslant n$, $\mathbf{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{n-k+1}{2n-2k+1}$.
Donc au final,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{n}{2n-1}\frac{n-1}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\frac{1}{1} = \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}.$$

Et alors en procédant aux simplifications usuelles,

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-1) = \frac{(2n)!}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

de sorte que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.16

Il s'agit donc de majorer $\mathbf{P}(\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_n})$.
Puisque les A_i sont indépendants, les $\overline{A_i}$ le sont aussi.

On a donc $\mathbf{P}(\overline{A_1}\cap\dots\overline{A_n}) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^n(1-\mathbf{P}(A_i))$.

Mais une inégalité de convexité classique nous informe que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1+x \leqslant e^x$, et donc en appliquant cette inégalité à $-\mathbf{P}(A_i)$, il vient

$$\mathbf{P}\left(\overline{A_1}\cap\dots\overline{A_n}\right) \leqslant \prod_{i=1}^n e^{-\mathbf{P}(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.17

Pour $k \in \mathbf{N}$, notons B_k l'événement «la $k^{\text{ème}}$ clé n'ouvre pas la porte».

1. On a $A_k = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}$.

Et donc par la formule des probabilités composées,

$$P(A_k) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathbf{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbf{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \quad = \frac{9}{10}\frac{8}{9}\cdots\frac{9-(k-2)}{10-(k-2)}\frac{1}{10-(k-1)}$$
$$= \frac{1}{10}.$$

Le résultat, éventuellement[13] surprenant au premier abord se comprend finalement assez bien en termes de dénombrement.
On peut imaginer que notre concierge décide dès le début dans quel ordre il va essayer les 10 clés.
Et alors la bonne a autant de chances d'être en première position, en seconde, ..., en dernière.

[13] À vous de voir...

2. L'énoncé est un peu vague ici, et surtout, nous risquons de sortir du cadre autorisé d'un univers fini, puisque le nombre d'essais nécessaires n'est pas borné...
Fermons les yeux, même si un moyen de remédier à ce problème serait par exemple de décréter arbitrairement que si au bout de 100 essais il n'a toujours pas trouvé la clé, le concierge rebrousse chemin.
Peu importe, le but ici est de faire des calculs....

On a toujours $A_k = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right)\cap\overline{B_k}$, mais cette fois, par indépendance des différents essais

$$\mathbf{P}(A_k) = \prod_{i=1}^{k-1}\mathbf{P}(B_i)\times\mathbf{P}(\overline{B_k}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10} = \frac{9^{k-1}}{10^k}.$$

> **Méthode**
> L'indépendance est ici garantie par les remises. Il n'y a pas moyen de la prouver mathématiquement, elle se comprend de la situation décrite.

3. Notons I l'événement «le concierge est ivre», de sorte que $\mathbf{P}(I) = \frac{1}{3}$.
Alors $\{I, \overline{I}\}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(I)\mathbf{P}_I(A_k) + \mathbf{P}(\overline{I})\mathbf{P}_{\overline{I}}(A_k).$$

Mais ces probabilités conditionnelles ont en fait été calculées aux questions précédentes : sachant qu'il y a/qu'il n'y a pas remise, on connaît la probabilité d'avoir besoin de k essais.

On a $\mathbf{P}_I(A_k) = \dfrac{9^{k-1}}{10^k}$ et $\mathbf{P}_{\overline{I}}(A_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Et donc

$$\mathbf{P}(A_k) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } 1 \leq k \leq 10 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } k \geq 11 \end{cases}$$

Danger ! Les notations sont complètement trompeuses : chaque fois qu'on a changé d'expérience : avec remise/sans remise/avec apéro, on a changé l'univers et donc par conséquent A_k, mais aussi la probabilité $\mathbf{P}$. Pourtant, nous continuons de noter $\mathbf{P}(A_k)$ pour des situations différentes...

4. C'est le cas typique de la formule de Bayes, on veut connaître «les probas des causes en connaissant celles des conséquences».
Il vient donc

$$P_{A_6}(I) = \frac{\mathbf{P}_I(A_6)\mathbf{P}(I)}{\mathbf{P}(A_6)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{9^5}{10^6}}{\frac{2}{30} + \frac{9^5}{3\cdot 10^6}} \frac{9^5}{9^5 + 2\cdot 10^5} \simeq 0.227.$$

Pour la seconde partie de la question, on peut faire un calcul[14], ou se dire que c'est du bon sens : s'il a eu besoin de strictement plus de 10 essais, le concierge est ivre.
Et donc $P_{A_{11}}(I) = 1$.

[14] Qui mènera évidemment au même résultat.

Solution de l'exercice 28.18

1. Notons A l'événement «le dé est pipé» et B l'événement «on obtient un 6».
On cherche alors $\mathbf{P}_B(A)$. Mais par la formule de Bayes, on a $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$.
Pour obtenir $\mathbf{P}(B)$, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Et puisque $\mathbf{P}_A(B) = \dfrac{1}{2}$, il vient $\mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

2. Il n'y a pas de grande difficulté ici : une fois le dé choisi, les différents tirages sont indépendants.
Donc pour un dé non pipé, la probabilité d'obtenir n fois le nombre 6 est $\dfrac{1}{6^n}$, alors que pour un dé pipé, elle est de $\dfrac{1}{2^n}$.
Autrement dit, en notant cette fois B_n l'événement «obtenir n fois la face 6 en n lancers», alors

$$\mathbf{P}_A(B_n) = \frac{1}{2^n} \text{ et } \mathbf{P}_{\overline{A}}(B_n) = \frac{1}{6^n}.$$

Et donc on a[15]

$$\mathbf{P}_{B_n}(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B_n) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}_{\overline{A}}(B_n)} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+2}} + \frac{3}{4}\frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

[15] Toujours par Bayes.

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. L'idée étant qu'un dé qui ne fait que des 6 (ou plutôt qui les enchaine) a de plus en plus de chances d'être pipé au fur et à mesure qu'on le lance et qu'on observe davantage de 6.

Solution de l'exercice 28.19

Notons A l'événement : «on joue avec le dé A» et B l'événement «on joue avec le dé B».
On a donc $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}$.

1. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\{A, B\}$, on a

$$\mathbf{P}(R_1) = \mathbf{P}_A(R_1)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_B(R_1)\mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Le même calcul nous donne également $\mathbf{P}(R_2) = \dfrac{4}{9}$.
Enfin, toujours par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) &= \mathbf{P}_A(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}_B(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(R_1)\mathbf{P}_A(R_2) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(R_1)\mathbf{P}_B(R_2)\\ &= \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{6}{27}.\end{aligned}$$

On constate que $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) \neq \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2)$, et donc R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.
Bien que ceci soit plutôt surprenant au premier abord, il y a une explication simple : si on obtient une face rouge lors du premier lancer, il est plus probable que nous soyons en train de jouer avec le dé A.
Et donc il est plus probable d'obtenir encore une face rouge au second lancer.
Alors qu'au contraire, si le premier lancer a donné une face noire, il est plus probable qu'on joue avec B, et donc qu'on obtienne encore une face noire au second lancer.
Il en serait autrement si on choisissait (toujours au hasard) un nouveau dé à chaque lancer.

> **Indépendance**
> Les lancers sont indépendants, une fois le dé choisi. Autrement dit, R_1 et R_2 sont indépendants pour les probabilités $\mathbf{P}_A$ et $\mathbf{P}_B$.
> Cela ne signifie pas pour autant qu'ils sont indépendants pour $\mathbf{P}$, comme nous le verrons ci-dessous.

2. Nous cherchons $\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(R_3)$. Par définition, on a

$$\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)}$$

Or, nous savons déjà que $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \dfrac{6}{27}$.

Comme à la question précédente, on prouve[16] que $\mathbf{P}(R_1\cap R_2\cap R_3) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{10}{81}$.

On en déduit que $\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{5}{9}$.

[16] À l'aide de la formule des probabilités totales.

3. Par la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(A) &= \frac{\mathbf{P}_A(R_1 \cap\cdots\cap R_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(R_1 \cap\cdots\cap R_n)} = \frac{\mathbf{P}_A(R_1 \cap\cdots\cap R_n)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(R_1 \cap\cdots\cap R_n) + \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(R_1 \cap\cdots\cap R_n)}\\ &= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^n}{2^n+2}.\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.20

Notons B_i l'événement «la boule bleue est dans l'urne U_i.»
Notons R_1 (resp. R_2) l'événement «la première (resp. deuxième) boule tirée dans l'urne U_1 est rouge».
La probabilité demandée est alors $\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(B_2)$.
Par la formule de Bayes, on a

$$\mathbf{P}_{R_1\cap R_2}(B_2) = \frac{\mathbf{P}_{B_2}(R_1 \cap R_2)\mathbf{P}(B_2)}{\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)}.$$

Mais, sachant que la boule bleue est dans l'urne U_2, l'urne U_1 ne contient que des boules rouges, et donc $\mathbf{P}_{B_2}(R_1 \cap R_2) = 1$.
D'autre part, on a $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{1}{n}$, puisque la boule bleue a autant de chances de se trouver dans chaque urne.
Reste donc à calculer $\mathbf{P}(R_1 \cap R_2)$.
Pour cela, appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$:

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}_{B_i}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{B_i}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{P}_{B_1}(R_1 \cap R_2) + n - 1\right).$$

Mais on a alors

$$\mathbf{P}_{B_1}(R_1\cap R_2) = \frac{\mathbf{P}(B_1 \cap R_1 \cap R_2)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2)}{\mathbf{P}(B_1)} = \mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Et donc on en déduit que

$$\mathbf{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n}\left(\mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2) + n - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2} + n - 1\right) = 1 - \frac{3n-2}{3n}.$$

> **Remarque**
> Nous venons de prouver que
> $$\mathbf{P}_{B_1}(R_1 \cap R_2) = \mathbf{P}_{B_1}(R_1)\mathbf{P}_{B_1\cap R_1}(R_2).$$
> Il s'agit en fait de la formule des probabilités composées, mais appliquée à la probabilité $\mathbf{P}_{B_1}$ et non à la probabilité $\mathbf{P}$.
> En effet, on a alors
> $$\left(\mathbf{P}_{R_1}\right)_{B_1}(R_2) = \mathbf{P}_{R_1\cap B_1}(R_2),$$
> ce qui est relativement intuitif : la probabilité sachant B_1, sachant R_1 est la probabilité sachant $R_1 \cap B_1$.

Il vient alors

$$\mathbf{P}_{R_1 \cap R_2}(B_2) = \frac{1}{n}\frac{3n}{3n-2} = \frac{3}{3n-2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 28.21

1. Notons B_k, N_k les événement «obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage».
On cherche donc $\mathbf{P}_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{\mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n+1})}{\mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n)}$.

Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{U_1, U_2, \dots, U_N\}$, où U_i est l'événement «les tirages ont lieu dans l'urne numéro i».

> **Danger !**
> Qui dit proba conditionnelle ne dit pas forcément Bayes ! Cette formule n'a d'intérêt que si vous savez calculer la probabilité conditionnelle «dans l'autre sens».

D'une part, on a

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(U_i)\mathbf{P}_{U_i}(B_1 \cap \dots \cap B_n).$$

Puisqu'une fois le choix de l'urne effectué les tirages ont lieu avec remise, les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité $\mathbf{P}_{U_i}$.
Et donc $\mathbf{P}_{U_i}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \left(\dfrac{i}{N}\right)^n$.

On en déduit que $\mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^n$.

Et sur le même principe, $\mathbf{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n+1}) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1}$.

La probabilité cherchée est donc

$$\mathbf{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}.$$

2. Reprenons chacune des probabilités précédentes : $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^n$ est une somme de Riemann pour la fonction $x \mapsto x^n$.

Donc $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^n\,dt = \dfrac{1}{n+1}$.

Et de la même manière, $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n+2}$.

Et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Ce type de calcul a été abordé par Pierre-Simon de LAPLACE en essayant de répondre à la question «quelle est la probabilité que le soleil se lève demain ?».
Ou plutôt «sachant que le soleil s'est levé tous les jours les 10/100/10 000 derniers jours, quelle est la probabilité qu'il se lève demain ?».

29 Variables aléatoires sur un univers fini

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude des probabilités amorcée au chapitre 28, toujours en nous limitant aux univers finis.
Si nous avons déjà défini ce que sont un événement et sa probabilité, nous allons ici nous intéresser à des fonctions qui, à une issue de l'expérience considérée associent un nombre. Par exemple :

1. si on lance deux dés, la somme des deux dés.
2. si on tire n boules numérotées dans une urne, le plus grand numéro obtenu.
3. si on lance n fois une pièce, le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir le premier *pile*[1].

Et en particulier, on souhaiterait donner un sens à la notion de valeur moyenne : «quand je lance deux dés, en moyenne leur somme vaut 7».
Vous avez déjà rencontré (brièvement) ces objets, les variables aléatoires, ainsi que les notions d'espérance et de variance, mais il s'agit ici de tout redéfinir proprement[2].

[1] Mais que fait-on alors si on obtient que des *faces* ?

[2] Finalement, c'est ce à quoi nous avons passé l'année...

Dans tout le chapitre, sans plus de précision, $(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

29.1 Variables aléatoires

29.1.1 Définition

Définition 29.1 – Soit Ω un ensemble fini, et soit E un ensemble. On appelle **variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E** toute application $X : \Omega \to E$.
Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle.**

Difficile
Il n'est pas toujours évident de comprendre en quoi une fonction (quelque chose qui est on ne peut plus déterministe) nous aide à étudier les phénomènes aléatoires. C'est effectivement surprenant au premier abord, mais un passage obligé...

Pour l'instant, la notion de variable aléatoire n'a évidemment pas l'air d'un grand intérêt, puisque toute application sur Ω est une variable aléatoire, mais un peu de patience. Notons qu'on n'a même pas besoin de mettre une probabilité sur $\mathbf{P}$ pour parler d'une variable aléatoire. Mais là aussi patience, les variables aléatoires prendront tout leur intérêt une fois qu'on les couplera à des probabilités.

Profitons-en pour faire la différence entre les événements et les variables aléatoires. Un événement est un ensemble d'événements élémentaires, c'est-à-dire d'issues de l'expérience. Par exemple[3] lorsqu'on lance deux dés, et qu'on modélise ceci par $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, l'événement A : «la somme des deux dés vaut 3» est $\{(1, 2), (2, 1)\}$.
Une variable aléatoire associe un nombre[4] à **chaque** issue de l'expérience.
Par exemple, la variable aléatoire «somme des deux dés» est définie quel que soit l'issue de l'expérience. Cette variable aléatoire n'est rien d'autre que $X : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (i,j) & \longmapsto & i+j \end{array} \right.$.
Il y a bien un lien avec des événements, que nous allons expliciter dans un instant, par exemple l'événement A ci-dessus n'est rien d'autre que l'événement «la variable X vaut 3». Mais il est important de bien comprendre la différence de nature entre une variable aléatoire et un événement. Notamment pour savoir ce qu'on peut écrire et ce qu'on ne peut pas écrire. Par exemple, un événement est réalisé ou ne l'est pas, ce qui n'a pas de sens pour une variable aléatoire. Et on ne parle donc pas du contraire d'une variable aléatoire.

[3] Et c'est de loin mon *toy model* préféré, à utiliser sans modération lorsque vous avez un doute sur la signification des notions de base en probas.

[4] Au moins dans le cas d'une variable aléatoire réelle.

Sur le même espace probabilisé existent d'autres variables aléatoires, par exemple «le plus grand numéro des deux dés», qui est $Y : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (i,j) & \longmapsto & \max(i,j) \end{array} \right.$, ou encore le numéro du second dé qui est $Z : \left| \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!]^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (i,j) & \longmapsto & j \end{array} \right.$.

Pour reprendre un exemple de l'introduction, lorsqu'on lance n fois une pièce (que l'on modélise par $\{P,F\}^n$), la variable aléatoire «le numéro du premier *pile*» n'est pas bien définie car on ne lui attribue pas de valeur dans le cas où on n'obtient que des *faces*.

En revanche, $X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbf{N}\cup\{+\infty\} \\ (a_1,\dots,a_n) & \longmapsto & \begin{cases} +\infty & \text{si } (a_1,\dots,a_n) = (F,F,\dots,F) \\ \min\{i\in [\![1,n]\!] \mid a_i = P\} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

est bien une variable aléatoire.

Donnons un exemple de variable aléatoire qui n'est pas une variable aléatoire réelle, mais dans la suite nous ne parlerons quasiment que de variables à valeurs réelles.

Si on tire sans remise deux boules dans une urne qui contient 3 boules rouges, 2 noires et une blanche, on peut considérer la variable aléatoire à valeurs dans $\{R,N,B\}$ qui donne la couleur de la seconde boule.

À l'aide d'une variable aléatoire, il est possible de former de nombreux événements, et c'est là le premier intérêt des variables aléatoires : nous aider à nommer facilement des événements.

Définition 29.2 – Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Pour $A \subset E$, on note $[X \in A]$ l'événement[5] défini par

$$[X\in A] = X^{-1}(A) = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}.$$

Lorsque $A = \{a\}$, on note $[X = a]$ au lieu de $[X \in \{a\}]$.
Et lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $[X \leqslant a] = X^{-1}(]-\infty,a])$, $[X < a] = X^{-1}(]-\infty,a[)$, et de même, on utilise les notations $[X \geqslant a]$, $[X > a]$, $[a \leqslant X \leqslant b] = X^{-1}([a,b])$, etc.

[5] C'est une partie de Ω.

Exemple 29.3

Toujours en lançant deux dés, notons X le résultat du premier dé, Y le résultat du second, et $Z = X+Y$ la somme des deux.
Alors l'événement «le premier dé vaut 1» est $[X\leqslant 1]$, l'événement «le second dé est pair» est $[Y=2]\cup[Y=4]\cup[Y=6]$.
Et l'événement $[Z > 10]$ est $\{(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

⚠ Entendons-nous bien : un événement peut avoir une probabilité, pas une variable aléatoire !
Donc si X est une variable aléatoire, $\mathbf{P}([X=2])$, $\mathbf{P}([X\geqslant 3])$ et $\mathbf{P}([X\geqslant 3]\cup[X<-2])$ ont un sens. En revanche, $\mathbf{P}(X)$ **ne veut rien dire.**
Pas plus que $\mathbf{P}([X\geqslant 3])\cup\mathbf{P}([X<-2])$ ou $\mathbf{P}([X\geqslant 3]+[X<-2])$, mais c'est une autre histoire[6].

Rédaction
En général on oublie les crochets quand on écrit des probas : $\mathbf{P}(X \leqslant a)$ et pas $\mathbf{P}([X\leqslant a])$.

[6] On peut considérer l'union d'événements, ou la somme de probas, pas le contraire !

Définition 29.4 – Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire, alors son image $X(\Omega)$ (qu'il faut interpréter comme l'ensemble des valeurs prises par X) est appelé **support de X.**
Puisque Ω est fini, il s'agit toujours d'un ensemble fini.

Proposition 29.5 : *Soit X une variable aléatoire sur Ω. Alors $\{[X = x], x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X.*

Démonstration. Il suffit de se rappeler que $[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
Il est clair que les $[X = x]$ sont deux à deux incompatibles[7].
Et puisque $X(\Omega)$ est l'image de X, on a bien[8]

$$\bigcup_{x\in X(\Omega)} [X = x] = \Omega.$$

□

[7] Disjoints.
[8] Tout élément de Ω a son image dans $X(\Omega)$.

L'idée est tout simplement qu'on distingue plusieurs cas suivant la valeur que prend X, et comme elle prend toujours une valeur, on a bien ainsi distingué tous les cas.
Un cas très particulier de variable aléatoire est celle de l'indicatrice d'un événement A, qui rappelons-le, est définie par $\mathbb{1}_A : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}\right.$.
Autrement dit, c'est la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.
Et on a donc $A = [\mathbb{1}_A = 1]$.

Exemple 29.6

Toujours en lançant deux dés, on note A l'événement «les deux dés ont même parité».
Alors $\mathbb{1}_A$ est la variable aléatoire qui vaut 1 si et seulement si les deux dés ont même parité.
Donc $[\mathbb{1}_A = 1] = \{(1,3),(3,1),(1,5),(2,6),\dots\}$.

29.1.2 Loi d'une variable aléatoire

Venons-en enfin aux probabilités : lorsque Ω est muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, on peut parler de probabilité d'un événement, et en particulier de tous les événements qui sont associés à une variable aléatoire.
Par exemple, lorsqu'on joue au tiercé, en notant X le numéro du cheval gagnant, pour parier intelligemment il faut connaître les $\mathbf{P}([X = 1]), \mathbf{P}([X = 2])$, etc. La donnée de toutes ces probabilités est ce qu'on appelle la loi de X.

Cote/probas
La probabilité qu'un cheval gagne est grosso modo (c'est-à- dire modulo la commission du bookmaker) l'inverse de sa cote.

Définition 29.7 – Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$. La **loi de** X est alors l'application $\mathbf{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) \end{array}\right.$.

Proposition 29.8 : *La loi $\mathbf{P}_X$ de X est une probabilité sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{P}_X$ est à valeurs dans $[0,1]$, et

$$\mathbf{P}_X(X(\Omega)) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(X(\Omega))\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors

$$\mathbf{P}_X(A \cup B) = \mathbf{P}_X(A \cup B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A \cup B)\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)\right)$$

et ces deux événements étant incompatibles,

$$\mathbf{P}_X(A \cup B) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) + \mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}_X(A) + \mathbf{P}_X(B).$$

□

La loi d'une variable aléatoire dépend de la probabilité qu'on utilise sur Ω.
Par exemple, si on lance deux fois un dé, et qu'on note X le résultat du premier lancer, alors que le dé soit équilibré ou non, on peut modéliser l'expérience par $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. Et alors X est toujours l'application $(i,j) \mapsto i$.
Par contre, si le dé est équilibré, on va utiliser la probabilité uniforme sur $[\![1,6]\!]$ et on vérifie alors que $\mathbf{P}_X$ est la probabilité uniforme sur $[\![1,6]\!]$.
En revanche, si le dé est pipé, on va utiliser un autre $\mathbf{P}$, ce qui donnera une autre loi pour X.

Proposition 29.9 : *Soit X une variable aléatoire sur Ω. Alors la loi de X est entièrement déterminée par les $\mathbf{P}_X(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$.*
Plus précisément, pour $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, on a

$$\mathbf{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

Démonstration. Il suffit de noter que pour $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ et donc

$$\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{x\in A}\{x\}\right)\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x\in A} X^{-1}(\{x\})\right) = \sum_{x\in A} \mathbf{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

□

Ainsi, lorsqu'on déterminera la loi d'une variable aléatoire X, on n'explicitera pas la probabilité $\mathbf{P}_X$ (et heureusement car il s'agit d'une application définie sur $\mathscr{P}(X(\Omega))$), mais on se contentera de déterminer :

- son support $X(\Omega)$
- les $\mathbf{P}(X = x)$, pour $x \in X(\Omega)$.

Autrement dit, on donnera les valeurs prises par la variable, et les probabilités qu'elle prenne chacune de ces valeurs.

Exemple 29.10

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N.
On tire simultanément n ($n \leqslant N$) boules dans cette urne, et on note X le plus grand numéro ainsi obtenu.
Alors $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$, et pour déterminer la loi de X, il nous faut donner en plus les $\mathbf{P}(X = k)$, $k \in [\![n, N]\!]$.
Il y a en tout $\binom{N}{n}$ tirages possibles, tous équiprobables. Parmi ceux-ci, ceux qui donnent une plus grande boule portant le numéro k sont au nombre de $\begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$.
En effet, un tel tirage est formé de la boule numéro k, et de $n-1$ boules de numéro strictement inférieur à k.
Donc $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

Deux variables définies sur un même espace et de même loi ne sont pas égales pour autant.
Prenons encore et toujours le lancer de deux dés équilibrés, et notons X le résultat du premier dé, et Y le résultat du second.
Alors X et Y ont même loi (que nous nommerons loi uniforme), mais ne sont pas égales, par exemple car $X(1,2) = 1$ alors que $Y(1,2) = 2$.
De même, si on lance n fois une pièce équilibrée, et que l'on note X (resp. Y) le nombre de *piles* (resp. de *faces*), alors X et Y ont même loi[9] sans pour autant être égales.

[9] Contentons-nous de l'affirmer, mais cela doit vous sembler intuitif.

Puisque $\{[X = x], x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements, on a évidemment $\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1$.
Il existe une réciproque à ce résultat.

Déjà vu ?
C'est le sacro-saint «la somme des probas vaut 1».

> **Proposition 29.11 :** *Soit $n \geqslant 1$, soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments deux à deux distincts d'un ensemble E, et soient $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.*
> *Alors il existe un ensemble fini Ω, une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω et une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans E telle que*
> $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}(X = x_i) = p_i.$$

Remarque
Les p_i étant positifs et de somme 1, ils sont automatiquement dans $[0, 1]$.

Démonstration. Prouvons un résultat plus fort, à savoir que sur tout ensemble fini Ω de cardinal supérieur ou égal à n, il existe une probabilité $\mathbf{P}$ et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$.
Soit donc Ω un ensemble de cardinal $\geqslant n$ et soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ n éléments distincts de Ω.
Alors par la proposition 28.12, il existe une (unique) probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω telle que

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \begin{cases} p_i & \text{si } \omega = \omega_i \\ 0 & \text{si } \omega \notin \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \end{cases}$$

Et alors en posant $X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} x_i & \text{si } \omega = \omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$, alors X est une application définie sur Ω, donc une variable aléatoire sur Ω.
Et on a alors clairement $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(X^{-1}(x_i)) = \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

□

Cette proposition est en réalité très importante, sans qu'il soit vraiment nécessaire d'en maîtriser l'énoncé[10]. En effet, elle nous dispense, lorsqu'on manipule des variables aléatoires, de s'interroger sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ que l'on utilise.
Par exemple, si on souhaite modéliser le lancer d'un dé pipé qui tombe sur 1 avec probabilité $1/4$, sur 2 avec probabilité $1/8$, sur 3 avec probabilité $1/8$ et sur $4, 5$ ou 6 avec probabilité $1/6$ chacun, nul besoin de construire explicitement un univers Ω et une probabilité $\mathbf{P}$ sur laquelle une variable aléatoire dont la loi est celle que l'on veut, il suffit de vérifier que $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$, ce qui est bien le cas.

[10] Dont vous n'aurez jamais besoin.

C'est la raison pour laquelle beaucoup d'exercices commencent par «soit X une variable aléatoire suivant la loi *blabla*[11]». On sait qu'alors il existe un espace probabilisé sur lequel ceci a bien un sens, et cela nous suffit, nous n'avons pas besoin d'en savoir plus au sujet de cet espace.
De manière générale, la connaissance de l'univers Ω ne peut avoir d'intérêt que dans les cas où on peut faire du dénombrement, c'est-à-dire quand il y a équiprobabilité.

[11] Par exemple une loi uniforme ou une loi binomiale, voir ci-dessous.

Enfin, il faudra bien comprendre que les énoncés du type : «montrer que les réels $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définissent bien une loi de probabilité sur $\{x_1, \dots, x_n\}$» signifient juste «prouver que les p_i sont des réels positifs de somme 1».

Exemple 29.12

À quelle condition sur $\lambda \in \mathbf{R}$ existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = i) = \lambda i$?
Il faut bien évidemment que λ soit positif pour que les λi le soient, et il faut de plus

que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda i = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Puisque ce nombre est bien positif, on en déduit que $\frac{2}{n(n+1)}$ est la seule solution.

29.1.3 Lois usuelles

Si toute famille de réels positifs de somme 1 définit la loi d'une variable aléatoire, certaines, que l'on rencontre fréquemment portent un nom.

La plus simple est aussi la moins intéressante, mais on ne peut l'ignorer :

Définition 29.13 – Une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ suit la **loi certaine égale à** $a \in E$ si $a \in X(\Omega)$ et $\mathbf{P}(X = a) = 1$.

On a évidemment envie de voir une loi certaine comme une constante[12], mais une petite distinction peut se produire : on autorise X à prendre d'autres valeurs que a, mais seulement avec probabilité nulle.
Ceci peut notamment se produire lorsqu'un espace probabilisé n'est pas complètement adapté à la description d'une expérience.
Par exemple, on peut modéliser le lancer d'un dé équilibré à 6 faces par $\Omega = [\![1, 7]\!]$, avec $\mathbf{P}(\{i\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant 6 \\ 0 & \text{si } i = 7 \end{cases}$.
Et on peut alors prendre comme variable aléatoire symbolisant le résultat du premier dé la variable $X : \omega \mapsto \omega$.
Alors $X(7) = 7$, de sorte que $7 \in X(\Omega)$. Mais en revanche, $\mathbf{P}(X = 7) = 0$.
Et alors, la variable aléatoire indicatrice de l'événement «le nombre tiré est strictement inférieur à 7» est une variable certaine égale à 1, mais n'est pas constante égale à 1, car elle vaut 0 pour $\omega = 7$.

[12] Et d'ailleurs les fonctions constantes sur Ω sont des variables aléatoires qui suivent une loi certaine.

Définition 29.14 (Loi de Bernoulli) – Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\},\ \mathbf{P}(X = 1) = p,\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Lorsque c'est le cas, on note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarques. ► Une telle variable existe bien car $p + (1 - p) = 1$.
► La situation typique de loi de Bernoulli est le *pile* (1) ou *face* (0), la pièce tombant sur *pile* avec probabilité p. Autrement dit, la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de *pile* et 0 en cas de *face* suit la loi $\mathcal{B}(p)$.
Mais plus généralement, toute expérience à deux issues[13] donne lieu à une variable de Bernoulli, 1 désignant l'une des deux issues de l'expérience et 0 l'autre.
► Toute variable aléatoire qui ne prend que les valeurs 0 et 1 suit une loi de Bernoulli.
En particulier, la variable indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A suit une loi de Bernoulli. Et puisque $\mathbf{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.
Inversement, si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $X = \mathbb{1}_{[X=1]}$.
► Enfin, une remarque qui nous servira plus tard : si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $X^2 = X$.

[13] Qu'on appelle aussi expériences de Bernoulli.

Remarque

Pour une variable qui suit une loi de Bernoulli, la donnée de $\mathbf{P}(X = 1)$ suffit à caractériser entièrement la loi, puisqu'on a alors $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - \mathbf{P}(X = 1)$.
Ceci vaut plus généralement pour toute variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs.

La formule du binôme nous donne une famille de réels positifs dont la somme vaut 1 : si $p \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p))^n = 1$.
Faisons-en donc une loi de variable aléatoire[14] !

[14] C'est le sens de la proposition 29.11 : toute famille de réels positifs de somme 1 permet de définir la loi d'une variable aléatoire.

Définition 29.15 (Loi binomiale) – Soit $p \in]0,1[$, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!],\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Le contexte où l'on reconnaît naturellement une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est celui de n répétitions **indépendantes** d'épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p.
Alors la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des n répétitions suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Si nous aurons bientôt un argument plus rapide pour prouver ce résultat, expliquons d'où il vient, en notant S_i (resp. E_i) l'événement «la $i^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience a amené un succès (resp. un échec).
Soit alors X la variable qui compte le nombre de succès. Il est clair que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Et on a $[X=0] = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$, de sorte que par indépendance des répétitions,

$$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\cdots\mathbf{P}(E_n) = (1-p)^n = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}.$$

Ensuite, on a $[X=1] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left(S_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} E_j \right)$.

Détails
Il s'agit de distinguer n cas suivant la position de l'unique succès.

Par incompatibilité de ces événements[15], puis par indépendance, il vient

$$\mathbf{P}(X=1) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(S_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} E_j \right) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1} = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1}.$$

[15] Ceux qui forment l'union.

Ensuite, $[X=2] = \displaystyle\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(S_i \cap S_j \cap \bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{n} E_k \right)$.
Par le même type de raisonnement,

$$\mathbf{P}(X=2) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} p^2(1-p)^{n-2} = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}.$$

En effet, il y a autant de manières de choisir un couple (i,j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ qu'il y a de manières de choisir une partie à 2 éléments de $[\![1,n]\!]$, car il n'y aura alors qu'une façon d'ordonner ses éléments. D'où le coefficient $\binom{n}{2}$.
Plus généralement, pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$[X=k] = \bigcup_{\substack{I\subset[\![1,n]\!] \\ \mathrm{Card}(I)=k}} \left(\bigcap_{i\in I} S_i \cap \bigcap_{j\notin I} E_i \right)$$

et comme l'union comporte $\binom{n}{k}$ éléments[16] deux à deux incompatibles, tous de probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, il vient bien

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

[16] C'est le nombre de k combinaisons de $[\![1,n]\!]$.

Concrètement, c'est la loi que vous aurez le plus souvent à reconnaître directement, simplement en remarquant que la variable à laquelle vous avez affaire compte le nombre de succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

☠ Danger !
Méfiez-vous des intuitions que vous pouvez avoir sur l'indépendance...

Exemple 29.16

Un géantiste[17] enfourche à chaque manche avec probabilité p (auquel cas il est disqualifié), les manches étant supposées indépendantes les unes des autres.
Sachant que la saison compte n courses, quelle est la loi de la variable aléatoire X comptabilisant le nombre de courses de deux manches qu'il a terminées ?

Pour chacune des courses, la probabilité qu'il termine les deux manches est $(1-p)^2$. Et donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,(1-p)^2)$. En revanche, la variable comptant le nombre de courses où le skieur a pris le départ de la seconde manche suit la loi $\mathcal{B}(n, 1-p)$.

[17] Sportif spécialisée dans le slalom géant en ski alpin.

Notons que pour $n = 1$, la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Définition 29.17 (Loi uniforme) – Soit E un ensemble fini. Une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ suit la **loi uniforme sur** E si

$$X(\Omega) = E \text{ et } \forall x \in E,\ \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Les cas particuliers qui nous intéresserons seront ceux où $E = [\![a,b]\!]$, où $a < b$ sont deux entiers relatifs. Alors si $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, pour tout $k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.
En particulier, si $X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Ces lois se rencontrent essentiellement lors de lancers de dés équilibrés/ de tirages dans une urne, lorsqu'on est en situation d'équiprobabilité.

29.2 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Jusqu'à présent, la notion de variable aléatoire nous a surtout fourni des moyens pratiques de nommer des événements, mais guère plus. La notion d'espérance, qui vient donner un sens en probabilités à la notion de moyenne va nous fournir une bonne raison d'étudier davantage les variables aléatoires.

29.2.1 Définition

Définition 29.18 – Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P})$. On appelle alors **espérance de** X, et on note $\mathbf{E}(X)$ le réel défini par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x).$$

L'espérance correspond à la moyenne de X sur un grand nombre de répétitions de l'expérience sous-jacente.
En effet, considérons une expérience qui donne lieu à une variable aléatoire X, avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Alors si on répète N fois l'expérience, avec N très grand, on s'attend[18] à ce que X prenne $N \times \mathbf{P}(X = x_i)$ fois la valeur x_i, et donc qu'en moyenne sur les N répétitions, X prenne la valeur

[18] En tous cas c'est l'idée intuitive qu'on se fait d'une probabilité.

$$\frac{1}{N}(x_1 N\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n N\mathbf{P}(X = x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{E}(X).$$

Bien entendu, sur une réalisation de l'expérience, la notion d'espérance ne signifie rien, et le résultat obtenu peut être très éloigné de l'espérance : si je lance 10 fois une pièce, j'obtiens en moyenne 5 fois pile, mais en pratique vous pouvez tout à fait lancer une pièce

et obtenir 10 piles.
Il est même possible que vous effectuiez 5 séries de 10 lancers et que vous obteniez 5 fois 10 piles[19].

[19] Mais vous avez tout de même plus de chances de gagner au loto !

Notons que si X et Y sont deux variables aléatoires qui suivent la même loi, alors elles ont même espérance, puisque $\mathbf{E}(X)$ ne dépend que des $\mathbf{P}(X = x)$ (c'est-à-dire de la loi de X).

Exemple 29.19

Reprenons l'exemple de 29.10. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k\binom{k-1}{n-1} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} n\binom{k}{n} \\
&= \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}\right) \\
&= \frac{n}{\binom{N}{n}} \left(\binom{N+1}{n+1} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0}\right) \\
&= \frac{n(N+1)}{n+1}.
\end{aligned}$$

Formule de Pascal.

Somme télescopique.

Définition 29.20 – Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbf{P})$ est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$.

29.2.2 Espérance des lois usuelles

Les espérances des lois usuelles sont à connaître par cœur.

Théorème 29.21 : *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.*

1. *Si X suit la loi certaine égale à a, alors $\mathbf{E}(X) = a$.*
2. *Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $p \in [0,1]$, alors $\mathbf{E}(X) = p$.*
3. *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbf{N}^*$, alors $p \in]0,1[$, $\mathbf{E}(X) = np$.*
4. *Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, avec $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$, $a < b$, alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$.*

Intuition
En moyenne, on obtient le milieu de $\llbracket a, b \rrbracket$.

Démonstration.
1. $\mathbf{E}(X) = a\mathbf{P}(X = a) = a$.
2. $\mathbf{E}(X) = 0 \times \mathbf{P}(X=0) + 1 \times \underbrace{\mathbf{P}(X=1)}_{=p} = p$.
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{(n-1)-i} \\
&= np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i} (1-p)^{n-1-i} = np(p+1-p)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

Le terme en $k = 0$ est nul.

Chgt d'indice
$i = k - 1$

4. Enfin, si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=a}^{b} \frac{k}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1}\sum_{i=0}^{b-a}(i+a)$$

Chgt d'indice
$k = i + a \Leftrightarrow i = k - a.$

$$= \frac{1}{b-a+1}\left(\sum_{i=0}^{b-a} i + a(b-a+1)\right) = \frac{1}{b-a+1}\left(\frac{(b-a)(b-a+1)}{2} + a(b-a+1)\right) = \frac{a+b}{2}.$$

□

29.2.3 Propriétés de l'espérance

Lemme 29.22. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.

Démonstration. Souvenons-nous que $[X = x] = \bigcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} \{\omega\}$, de sorte que [20]

[20] L'union est évidemment disjointe.

$$\mathbf{P}(X = x) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Et donc il vient

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)=x}} \underbrace{x}_{=X(\omega)} \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

Mais chaque élément de Ω possède une et une seule image par X, et donc

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}).$$

□

Proposition 29.23 (Linéarité de l'espérance) : *L'espérance est une forme linéaire sur l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,*

$$\mathbf{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).$$

Démonstration. C'est essentiellement un calcul reposant sur le lemme précédent :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\lambda X + Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} (\lambda X(\omega) + Y(\omega))\mathbf{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) \\ &= \lambda \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

Double application du lemme précédent.

□

Corollaire 29.24 – *Si X est une variable aléatoire réelle, alors pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.*

Démonstration. Il suffit de prendre pour Y la variable constante[21] égale à b. □

[21] Qui suit donc une loi certaine.

Corollaire 29.25 – *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbf{P})$, alors $X - \mathbf{E}(X)$ est centrée.*

Démonstration.

$$\mathbf{E}(X - \underbrace{\mathbf{E}(X)}_{\in\mathbf{R}}) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0.$$

□

Proposition 29.26 (Positivité de l'espérance) : *Soit X une variable aléatoire positive sur Ω. Alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.*
De plus, $\mathbf{E}(X) = 0$ si et seulement si X suit la loi certaine égale à 0.

Démonstration. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i sont deux à deux distincts. Alors

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{P}(X = x_i) \geqslant 0$$

car somme de nombres positifs.
De plus, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, soit ici si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i\mathbf{P}(X = x_i) = 0$.
Donc si $x_i \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = x_i) = 0$.
Puisqu'on doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_i) = 1$, alors $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, de sorte que X suit bien la loi certaine égale à 0. □

Corollaire 29.27 (Croissance de l'espérance) – *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et telles que $X \leqslant Y$.*
Alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Inégalité
$X \leqslant Y$ signifie que quelle que soit l'issue de l'expérience, la valeur de X est inférieure à celle de Y.

Démonstration. Il suffit de noter que $Y - X$ est une variable positive, donc $\mathbf{E}(Y - X) \geqslant 0$ et donc par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$. □

En appliquant toute fonction à une variable aléatoire réelle, on obtient une autre variable aléatoire Y, par exemple e^X, $\frac{1}{X}$ ou X^2.

Notons au passage que si $\sim Y$, c'est-à-dire si X et Y ont même loi, et si f est une fonction définie sur $X(\Omega) = Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
En effet, pour tout $x \in f(X(\Omega))$,

$$\mathbf{P}(f(X) = x) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(\{x\})) = \mathbf{P}_X\left(f^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}_Y\left(f^{-1}(\{x\})\right) = \mathbf{P}(f(Y) = x).$$

Par exemple si X et Y suivent toutes les deux une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors X^2 et Y^2 suivent la même loi.

Comment calculer l'espérance de telles variables à partir de la loi de X ?
Une option serait de déterminer la loi de Y, mais si on ne veut que l'espérance, le résultat suivant nous permet d'aller plus vite.

Proposition 29.28 (Théorème de transfert) : *Soit X une variable aléatoire[22] sur Ω, et soit $g : X(\Omega) \to \mathbf{R}$. Alors*

$$\mathbf{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X = x).$$

[22] À valeurs réelles ou non.

Démonstration. Toujours par le même lemme,

$$\mathbf{E}(g(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega))\mathbf{P}(\{\omega\})$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} g(x)\mathbf{P}(\{\omega\})$$
$$= \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} \mathbf{P}(\{\omega\})$$
$$= \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X = x).$$

□

Détails
On a partitionné Ω en
$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} [X = x].$$
Autrement dit, on utilise le système complet d'événements associé à X.

Exemple 29.29

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, et soit $Y = X(X-1)$. Alors par le théorème de transfert, appliqué avec la fonction $x \mapsto x(x-1)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i}p^i(1-p)^{n-2-i} \\
&= n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

⚠ Attention !
L'espérance d'un produit n'est en général pas égale au produit des espérances.

Enfin, terminons par une inégalité, qui fait partie d'une grande famille d'inégalités[23] nommées inégalités de concentration, et qui visent à décrire comment les valeurs prises par une variable aléatoire X se «concentrent» autour de son espérance.

[23] Dont seules deux sont au programme, la suivante étant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 29.30 (Inégalité de Markov) : *Soit X une variable aléatoire **positive**. Alors pour tout $a > 0$,*
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

Démonstration. Soit $a > 0$, et notons $A = [X \geqslant a]$.
Alors $X \geqslant a\mathbb{1}_A$. En effet, pour $\omega \in \Omega$, on a :

- soit $\omega \in A$, auquel cas $X(\omega) \geqslant a$ et $a\mathbb{1}_A(\omega) = a$
- soit $\omega \notin A$, auquel cas $X(\omega) \geqslant 0$ et $a\mathbb{1}_A(\omega) = 0$.

Et donc par croissance de l'espérance, $\mathbf{E}(X) \geqslant a\mathbf{E}(\mathbb{1}_A)$.
Mais $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$, et donc $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X \geqslant a)$, de sorte que
$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

□

29.3 VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

29.3.1 Définition

Définition 29.31 – Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbf{P})$. On appelle **variance de** X le réel $\mathbf{V}(X)$ défini par
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right).$$

En une phrase : la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
L'intuition, vous l'avez déjà car vous connaissez la notion de variance en statistiques : la variance est une mesure de dispersion.
Plus la variance est élevée, plus X prend des valeurs éloignées de son espérance.
Et plus la variance est faible, plus, au contraire, X prend ses valeurs autour de $\mathbf{E}(X)$.

Comme pour l'espérance, la variance ne dépend que de la loi, au sens où deux variables de même loi auront même variance.
En effet, par le théorème de transfert, si X et Y ont même loi, alors

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} (y - \mathbf{E}(Y))^2 \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{V}(Y).$$

Définition 29.32 – Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbf{P})$, et soit $k \in \mathbf{N}^*$.
Le **moment d'ordre k de X** est $m_k(X) = \mathbf{E}\left(X^k\right)$.
Notons que par le théorème de transfert, $m_k(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \mathbf{P}(X = x)$.

Le moment d'ordre 2 est intimement lié à la variance, comme l'indique la formule ci-dessous, qui nous fournira souvent un moyen agréable de calculer une variance.

Proposition 29.33 (Formule de (Kœnig-)Huygens) : *Soit X une variable aléatoire réelle. Alors*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

> **Astuce**
> Cette formule relie trois quantités. Et cela signifie donc que si vous en connaissez deux vous connaissez la troisième.
> En particulier, pour les lois usuelles, dont vous connaissez déjà l'espérance, vous allez aussi apprendre la variance. Ce qui signifie que vous serez capable de retrouver le moment d'ordre 2 sans avoir à l'apprendre.

Démonstration. On a $(X - \mathbf{E}(X))^2 = X^2 - 2\underbrace{\mathbf{E}(X)}_{\in \mathbf{R}} X + \mathbf{E}(X)^2$.

Donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

□

29.3.2 Propriétés de la variance

Proposition 29.34 : *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$, et $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi certaine.*

Démonstration. Puisque $(X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant 0$, par positivité de l'espérance, $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$.
De plus, on a alors $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si $(X - \mathbf{E}(X))^2$ suit la loi certaine égale à 0.
Soit si et seulement si $X - \mathbf{E}(X)$ suit la loi certaine égale à 0.
Soit encore si et seulement si X suit la loi certaine égale à $\mathbf{E}(X)$. □

Proposition 29.35 : *Si X est une variable aléatoire réelle, alors $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$.*

⚠ Le fait que $\mathbf{V}(aX)$ ne soit en général pas égal à $a\mathbf{V}(X)$ prouve que, contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.
Nous verrons un peu plus loin ce qu'on peut dire de la variance d'une somme, mais ce n'est en général pas égal à la somme des variances.

Démonstration. On a $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$, et donc

$$(aX + b - \mathbf{E}(aX + b))^2 = (aX + b - a\mathbf{E}(X) - b)^2 = a^2 (X - \mathbf{E}(X))^2.$$

On conclut alors par linéarité de l'espérance. □

Proposition 29.36 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : *Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Notons que la variable $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est positive, et que par définition, son espérance est $\mathbf{V}(X)$. Appliquons lui l'inégalité de Markov : $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left((X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Mais les événements $\left[(X - \mathbf{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2\right]$ et $[|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon]$ sont égaux, et donc ont même probabilité. □

Définition 29.37 – L'écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Définition 29.38 – Une variable aléatoire X est dite **réduite** si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Proposition 29.39 : *Soit X une variable aléatoire qui ne suit pas une loi certaine*[24]*. Alors $Y = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}}$ est une variable centrée réduite, qu'on appelle variable centrée réduite associée à X.*

[24] De sorte que sa variance est non nulle

Démonstration. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}}\mathbf{E}\left(X - \mathbf{E}(X)\right) = \frac{\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}} = 0.$$

Donc Y est centrée. Et de plus,

$$\mathbf{V}(Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}}\right)^2 \mathbf{V}(X - \mathbf{E}(X)) = \frac{1}{\mathbf{V}(X)}\mathbf{V}(X) = 1$$

donc Y est réduite. □

29.3.3 Variance des lois usuelles

Théorème 29.40 : *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.*

1. *Si X suit une loi certaine, $\mathbf{V}(X) = 0$.*
2. *Si X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.*
3. *Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.*
4. *Si X suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, alors $\mathbf{V}(X) = \dfrac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.*

   En particulier, si $X \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$, alors $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration.

1. $X - \mathbf{E}(X)$ est une variable certaine égale à 0, donc il en est de même de son carré, et donc elle est d'espérance nulle.
2. On a $X^2 = X$, et donc $\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}(X) = p$, et donc par la formule de Kœnig-Huygens, on a $\mathbf{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

3. Plutôt que de calculer le moment d'ordre 2 de X, par le théorème de transfert, remarquons que dans l'exemple qui suit le théorème de transfert, nous avons déjà calculé $\mathbf{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2$.
   Et donc par linéarité de l'espérance,
   $$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}(X(X-1)) + \mathbf{E}(X) = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 + np(1-p).$$
   Par la formule de Huygens, il vient donc
   $$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p).$$
4. Commençons par traiter le cas de $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$. Alors
   $$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   Et donc par la formule de Kœnig-Huygens,
   $$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$
   Dans le cas général, si $X \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, alors $X-a+1$ suit la loi $\mathcal{U}\left([\![1,b-a+1]\!]\right)$.
   Et donc $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(X-a+1) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

□

Exemple 29.41

Donnons un exemple d'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour garantir avec moins de 5% d'erreur que la fréquence d'apparition du 2 sera $\frac{1}{6} \pm 0.01$?

Soit n le nombre de lancers, et soit X le nombre de lancers dont le résultat est 2.
La fréquence d'apparition du 2 est $Y = \frac{X}{n}$.
Nous cherchons donc quelle valeur donner à n pour avoir
$$P\left(\left|Y - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) > 0.95.$$
Autrement dit, nous voulons $P\left(\left|Y-\frac{1}{6}\right| \geqslant 0.01\right) \leqslant 0.05$.
Puisque X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{6}\right)$, on a $E(X) = \frac{n}{6}$ et $V(X) = n\frac{5}{36}$.
Et donc $E(Y) = \frac{1}{6}$ et $V(Y) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{5}{36n}$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à Y avec $\varepsilon = 0.01$,
$$P\left(\left|Y - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0.01\right) \leqslant \frac{50000}{36n}.$$
Ainsi, pour $n \geqslant \frac{50000}{36\times 0.05} \Leftrightarrow n \geqslant 27\,778$, on a l'inégalité souhaitée.
Cette inégalité est loin d'être optimale, et un calcul détaillé avec `Python`, en utilisant la loi binomiale, prouve qu'en fait $n \geqslant 5395$ suffit.

29.4 COUPLES ET n-UPLETS DE VARIABLES ALÉATOIRES

29.4.1 Définitions

Définition 29.42 – Soient E et E' deux ensembles. Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ sont deux variables aléatoires sur Ω, alors l'application $(X,Y) : \left|\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}\right.$
est appelée **couple de variables aléatoires sur Ω**.
Et si X, Y sont des variables aléatoires réelles, on dit que (X,Y) est un couple de variables aléatoires réelles.

Autrement dit
Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans $E \times E'$.

Bref, rien de très surprenant : un couple de variables aléatoires, c'est la donnée de deux variables aléatoires.

Exemple 29.43

On tire deux boules sans remise dans une urne qui en contient n, et on note X le numéro de la plus petite des deux et Y le numéro de la plus grande.
Alors (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles sur l'espace Ω modélisant cette expérience.

Comme pour toute variable aléatoire, à un couple (X, Y) est associé un système complet d'événements, qui est $\{[(X, Y) = (x, y)],\ (x, y) \in (X, Y)(\Omega)\}$. Si on a toujours $(X, Y)(\Omega)$ inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, il n'y a pas nécessairement égalité.
Dans l'exemple ci-dessus, $(3, 3) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, mais n'est pas dans $(X, Y)(\Omega)$.
Quitte à ajouter des événements vides, on préférera souvent manipuler le système complet d'événements $\{[(X, Y) = (x, y)],\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$.
Enfin, notons que $[(X, Y) = (x, y)] = [X = x] \cap [Y = y]$, notation souvent plus explicite.
On pourra donc considérer que le système complet d'événements associé au couple (X, Y) est $\{[X = x] \cap [Y = y],\ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$.

29.4.2 Loi conjointe, lois marginales

Définition 29.44 – Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur Ω, la loi de $(X, Y) : \Omega \to E \times E'$ est appelée **loi conjointe** du couple (X, Y).

Notons que par la proposition 29.9, pour caractériser entièrement la loi conjointe, il suffit de se donner les $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition 29.45 – Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$, la loi de X est appelée première **loi marginale** du couple (X, Y), et la loi de Y est appelée seconde loi marginale.

La proposition qui suit nous dit que la loi conjointe permet de retrouver les lois marginales.
Mais insistons tout de suite sur le fait qu'il n'y a pas de réciproque : deux couples de lois conjointes distinctes peuvent avoir les mêmes lois marginales.
Pour donner un exemple simple, toujours avec deux lancers de dés, où l'on note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second.
Dans ce cas, les couples (X, Y) et (X, X) ont mêmes lois marginales, les deux lois marginales de chacun des couples sont des lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.
Pour autant, il est clair que ces couples n'ont pas même loi conjointe. Osons prononcer le mot même s'il ne sera défini qu'un peu plus tard : dans le premier cas, les deux variables sont *indépendantes*, alors que dans le second elles ne le sont pas.
Plus explicitement : on a $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = \dfrac{1}{36}$ alors que $\mathbf{P}([X = 1] \cap [X = 2]) = 0$.
Donc les lois conjointes ne sont pas identiques.
La subtilité vient du fait que la loi conjointe, «contient» non seulement les lois marginales, mais aussi les éventuels liens qui peuvent exister entre les deux variables.

Proposition 29.46 : *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Alors*

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left([X = x] \cap [Y = y]\right).$$

> **Et pour Y ?**
> Il y a bien entendu une formule analogue pour la loi de Y, en sommant sur le support de X.

Démonstration. Ce n'est rien d'autre que la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y = y],\ y \in Y(\Omega)\}$. □

Exemple 29.47

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n (avec $n \geqslant 3$). On tire sans remise 3 jetons de l'urne, et on note X (resp. Y) le plus petit (resp. le plus grand) des numéros ainsi obtenus.
Puisque les tirages sans remise peuvent être assimilés à des tirages simultanés, et que tous les tirages sont équiprobables, on peut déterminer la loi conjointe de (X, Y) par dénombrement.
Il y a en tout $\binom{n}{3}$ tirages possibles.
Sans vouloir décrire complètement le support de (X, Y), notons qu'il est inclus dans $[\![1, n]\!]^2$.
► Si $i \geqslant j$, il n'y a évidemment pas de possibilité d'avoir $[X = i] \cap [Y = j]$, et donc $\mathbf{P}((X, Y) = (i, j)) = 0$.
► De même, si $i = j - 1$, alors il n'y a pas de tirage dont le plus grand numéro serait j et le plus petit serait i (quel numéro devrait alors porter le troisième jeton ?).
► Enfin, si $i < j - 1$, alors il y a $j - i - 1$ tirages dont le plus grand numéro est j et le plus petit est i, soit autant qu'il y a de manières de tirer le troisième jeton dans $[\![i + 1, j - 1]\!]$.
Donc la loi conjointe de (X, Y) est

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbf{P}\big((X,Y) = (i,j)\big) = \begin{cases} \dfrac{j-i-1}{\binom{n}{3}} & i \leqslant j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour obtenir la loi de X, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[Y = j], 2 \leqslant j \leqslant n\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=i+2}^{n} \frac{j-i-1}{\binom{n}{3}} = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-i-1} k \\ &= \frac{3(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

On obtiendrait de même la seconde loi marginale (la loi de Y).

Remarque
Si on se donne un ensemble qui contient strictement le support, alors certaines des probabilités qui suivent vont être nulles. Mais lorsque cela simplifie la rédaction, il ne faut pas se priver.

Et $j = 1$?
Le système complet d'événements donné commence à 2 puisque Y ne peut pas prendre la valeur 1.
Mais si vous ajoutez $[Y = 1]$ (qui est $\emptyset$), vous avez toujours un système complet d'événements.

29.4.3 Lois conditionnelles

Il n'est pas rare qu'une expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, et que le résultat de la première influe sur le déroulement des suivantes.

Exemple 29.48

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
On tire une boule de l'urne, on note X le numéro qu'elle porte, et on ne la remet pas dans l'urne.
On effectue alors n tirages avec remise dans cette urne, et on note Y le nombre de boules portant des numéros impairs ainsi obtenus.
Il est évident que X suit une loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.
Si $[X = 2]$ ou $[X = 4]$, alors Y suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$, alors que si $[X = 1]$ ou $[X = 3]$, alors Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
Mais quelle est la loi de Y ? Entendons-nous bien qu'on ne peut pas faire de

distinction de cas dans notre réponse, et donner un résultat du type :

$$\mathbf{P}(Y=k) = \begin{cases} \star & \text{si } X \text{ est pair} \\ \diamond & \text{si } X \text{ est impair} \end{cases}$$

une proba est **un** réel.
En réalité, les lois données plus haut ne sont pas directement la loi de Y pour la probabilité $\mathbf{P}$, mais des probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{P}_{[X=2]}(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}.$$

Définition 29.49 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, et soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$.
Alors la **loi conditionnelle de Y sachant** $[X = x]$ est la loi de Y pour la probabilité $\mathbf{P}_{[X=x]}$ (et non pour la probabilité $\mathbf{P}$).
Autrement dit, c'est la donnée des $\mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y)$, pour $y \in Y(\Omega)$.
On définit de même la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$.

Hypothèse
La condition qui est là sert juste à légitimer l'emploi de probabilités conditionnelles.

Notons qu'on pourrait plus généralement définir des lois conditionnelles sachant un événement A de probabilité non nulle.

⚠ Il n'y a pas de notation standard pour les lois conditionnelles, n'allez pas en inventer, du type $Y \mid [X=2] \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$.
Cette notation est vraiment incorrecte car elle laisse entendre qu'il existe une variable $Y \mid [X = 2]$, alors que les événements conditionnels n'existent pas.

Comme dans l'exemple ci-dessus, il arrive qu'on reconnaisse directement des lois conditionnelles, par exemple car il s'agit de lois usuelles.
Mais alors pour obtenir la loi (sans condition cette fois), il suffit d'appliquer une formule des probabilités totales :

Exemple 29.50

On reprend l'exemple ci-dessus. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X = i],\ 1 \leqslant i \leqslant 4\}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k) &= \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k) \\ &= \frac{1}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} + \frac{1}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2\cdot 3^n}\binom{n}{k}\left(2^{n-k}+2^k\right).\end{aligned}$$

Détails
On a regroupé les termes $X = 1$ et $X = 3$, ainsi que $X = 2$ et $X = 4$.

29.4.4 Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires

Tout ce qui vient d'être fait pour deux variables peut être généralisé à n variables. Les énoncés sont alors laborieux, je les donne pour que vous puissiez vous assurer que vous les comprenez. Si c'est le cas, c'est que vous avez bien compris le cas des couples. Sinon, c'est sûrement qu'il vous reste des points à clarifier.
Dans les deux cas, il est inutile[25] d'apprendre par cœur les définitions ou formules qui vont suivre.

[25] Contre-productif ?

Définition 29.51 – Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω, à valeurs dans respectivement $E_1, E_2, \dots, E_n$, on dit que l'application

$$(X_1, \dots, X_n) : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

est un **n-uplet de variables aléatoires** sur Ω (ou encore un vecteur aléatoire).
La loi de la variable aléatoire[26] $(X_1, \dots, X_n)$ est alors appelée loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$, et les lois des X_i sont appelée lois marginales du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$.

[26] À valeurs dans le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Comme pour les couples, la loi conjointe est caractérisée par la donnée des

$$\mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]),\ (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega).$$

La formule des probabilités totales permet d'obtenir la $i^{\text{ème}}$ loi marginale à partir de la loi conjointe : $\forall x \in X_i(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(X_i = x) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}(\Omega) \\ x_{i+1} \in X_{i+1}(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)}} \mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_i = x] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]).$$

Enfin, comme pour les couples, il existe un système complet d'événements associé à $(X_1, \dots, X_n)$, je vous laisse le soin de l'écrire.

29.5 Indépendance de variables aléatoires

Comme pour l'indépendance des événements, vous devez avoir déjà une intuition de ce que sont deux variables indépendantes : la valeur de l'une n'influe pas sur la valeur de l'autre. Reste à formaliser cela, et ce n'est pas le plus agréable. Toutes les preuves de cette partie peuvent être mises de côté, mais les définitions et les résultats sont évidemment à connaître.

29.5.1 Définition

Définition 29.52 – Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$. On dit que **X et Y sont indépendantes** si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$ et $\forall B \in \mathscr{P}(E')$, les événements $[X \in A]$ et $[Y \in B]$ sont indépendants :

$$\mathbf{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B).$$

Les événements $[X \in A]$, c'est-à-dire ceux de la forme $[X = 1]$, $[X \geqslant 3]$, $[|X| > 5]$, etc sont ceux «qui ne dépendent que de X», et idem pour Y.
Par exemple, pour un lancer de deux dés, «X est pair», «X ne vaut ni 1 ni 6» sont des événements de la forme $[X \in A]$ pour un $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ bien choisi, mais «la somme des deux dés vaut 7», ou «les deux dés donnent des résultats identiques» ne le sont pas.
L'indépendance des variables aléatoires X et Y peut se résumer en «tout événement ne dépendant que de X est indépendant de tout événement ne dépendant que de Y».

Le principal inconvénient de cette définition est que l'indépendance semble fastidieuse à vérifier, s'il faut le faire pour toutes parties de E et de E'. Penser par exemple au cas[27] de variables aléatoires à valeurs réelles !

[27] Il y a **beaucoup** de parties de $\mathbf{R}$!

Proposition 29.53 : *Deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathbf{P})$ sont **indépendantes** si et seulement si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants :*

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

Conjointe/marginales
Ceci signifie que pour deux variables **indépendantes**, les lois marginales caractérisent entièrement la loi conjointe.

Démonstration. Un des sens est évident, il suffit de prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.
Dans l'autre sens, on a

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbf{P}(X = x).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}[X \in A] \cap [Y \in B] &= \left(\bigcup_{x\in A}[X = x]\right) \cap \left(\bigcup_{y\in B}[Y = y]\right)\\ &= \bigcup_{x\in A}\bigcup_{y\in B}([X = x] \cap [Y = y]).\end{aligned}$$

Loi de De Morgan.

Détails

L'hypothèse faite par l'énoncé était que cette relation ne valait que pour $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. Mais si $x \notin X(\Omega)$, alors $[X = x] = \emptyset$ et donc

$\mathbf{P}([X = x]\cap[Y = y]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$

et on a aussi

$\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y) = 0.$

Il est évident que cette union est disjointe, et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) &= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B}\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])\\ &= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B}\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)\\ &= \sum_{x\in A}\mathbf{P}(X = x)\sum_{y\in B}\mathbf{P}(Y = y)\\ &= \sum_{x\in A}\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B).\end{aligned}$$

□

En pratique prouver l'indépendance de variables aléatoires, même à l'aide de cette caractérisation reste fastidieux. Fort heureusement, vous aurez rarement à le faire, l'indépendance étant plus souvent une hypothèse fournie par l'énoncé.
En revanche, il est plus fréquent d'avoir à justifier la non indépendance de deux variables aléatoires. Il est clair qu'il faut alors exhiber un couple (x, y) pour lequel $[X = x]$ et $[Y = y]$ ne sont pas indépendants.
Le plus simple est souvent de trouver un couple (x, y) tel que les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ soient de probabilité non nulles, mais incompatibles.
Car alors $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 \neq \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$.

Exemple 29.54

On tire deux boules sans remise dans une urne qui en contient n, numérotées de 1 à n. On note X le numéro de la première et Y le numéro de la seconde.
Alors $\mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{P}(Y = 1)$ sont non nuls
En revanche, on ne peut avoir la même boule aux deux tirages, donc $\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0$, de sorte que X et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque

En fait on a immédiatement $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{n}$, et il n'est pas beaucoup plus cher de prouver que $\mathbf{P}(Y = 1)$ vaut aussi $\frac{1}{n}$, mais ne perdons pas de temps à le faire, tout ce qui compte est leur non nullité.

Proposition 29.55 : *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est égale à la loi de X.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit y tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, et soit $x \in X(\Omega)$. Alors

$$\mathbf{P}_{[Y=y]}(X = x) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}(Y = y)} = \frac{\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)}{\mathbf{P}(Y = y)} = \mathbf{P}(X = x).$$

Donc la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est égale à la loi de X.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
► Si $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(Y = y)\mathbf{P}_{[Y=y]}(X = x) = \mathbf{P}(Y = y)\mathbf{P}(X = x).$$

► Si $\mathbf{P}([Y = y])$, alors $[X = x] \cap [Y = y] \subset [Y = y]$, et donc par croissance de la probabilité,

$$0 \leqslant \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \leqslant \mathbf{P}(Y = y) = 0$$

si bien que $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$.
Donc X et Y sont bien indépendantes. □

Là aussi c'est assez intuitif : par exemple lors d'un lancer de deux dés, lorsqu'on dit que le résultat du second dé est indépendant de celui du premier, on entend par là que la connaissance du résultat du premier dé ne change rien au comportement du second dé. Autrement dit que sa loi n'est pas changée par la connaissance du premier dé.

Enfin, notons que l'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité $\mathbf{P}$ choisie. Sur un même espace Ω, on peut avoir des variables aléatoires X et Y qui sont indépendantes pour une probabilité $\mathbf{P}_1$ et pas pour une probabilité $\mathbf{P}_2$.

Exemple 29.56

Lançons deux fois une pièce. On peut alors prendre $\Omega = \{P, F\}^2$, la probabilité qu'on met sur cet espace dépendant de la probabilité que notre pièce a de tomber sur chacun de ses côtés.
Soit X la variable indicatrice de «les deux lancers donnent le même résultat», et soit Y la variable indicatrice de «le premier lancer donne *face*».
Alors X et Y suivent des lois de Bernoulli. Donc elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \{0,1\}^2,\ \mathbf{P}([X=x] \cap [Y=y]) = \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y).$$

Mais un résultat classique affirme que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si tout couple d'événements dans $\{A, \overline{A}\} \times \{B, \overline{B}\}$ est formé de deux événements indépendants. Puisqu'ici $[X=0] = \overline{[X=1]}$, il suffit donc de déterminer quand $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants.
Notons p la probabilité qu'a notre pièce de tomber sur *face*.
Alors $\mathbf{P}(Y=1) = p$, et $\mathbf{P}(X=1) = p^2 + (1-p)^2$.
Par ailleurs, $\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \mathbf{P}(\{(F_1, F_2)\}) = p^2$.
On vérifie alors facilement[28] qu'on a $\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1)$ si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.
Donc pour $p = \frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes, alors qu'elles ne le sont pas sinon. Bien que d'un point de vue «fonction sur Ω», ce soient toujours les mêmes objets qui sont en jeu.

[28] Il faut étudier un polynôme de degré 2.

On a parfois besoin d'étudier la loi d'une somme de deux variables indépendantes, l'outil indispensable est alors la formule des probabilités totales.

Exemple 29.57 Loi triangulaire

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Soit alors $Z = X + Y$. On a évidemment $Z(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$.
Et pour $k \in [\![2, 2n]\!]$, par la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $\{[X=i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, il vient

$$\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([Z=k] \cap [X=i]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X=i] \cap [Y=k-i]).$$

Et alors par indépendance de X et Y, on a

$$\mathbf{P}(Z=k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(Y=k-i).$$

► <u>**Si $k \leqslant n$.**</u> Alors pour $i \geqslant k$, on a $k - i \leqslant 0$ et donc $\mathbf{P}(Y = k-i) = 0$.
Il reste donc

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2}.$$

▶ Si $k \geqslant n+1$, alors pour $i < k-n$, on a $k-i > n$ et donc $\mathbf{P}(Y = k-i) = 0$.
Et de même, pour $i > n$, $\mathbf{P}(X = i) = 0$. Donc il reste

$$\mathbf{P}(X+Y = k) = \sum_{i=k-n}^{n} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

Ainsi, la loi de $X+Y$ est donnée par

$$\mathbf{P}(X+Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

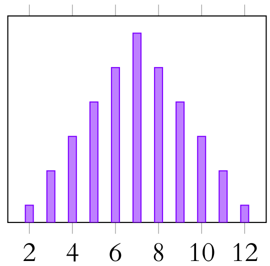


FIGURE 29.1– La loi de Z lorsque $n = 6$. (c'est la somme de deux dés).

La méthode ci-dessus peut s'adapter à toute variable aléatoire de la forme $Z = g(X, Y)$.

29.5.2 Indépendance de n variables aléatoires

Définition 29.58 – Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$ sont dites **mutuellement indépendantes** si $\forall A_1 \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)), \dots, \forall A_n \in \mathscr{P}(X_n(\Omega))$,

$$\mathbf{P}([X_1 \in A_1] \cap \dots \cap [X_n \in A_n]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \in A_i).$$

Remarque. En fixant certains A_i à $X_i(\Omega)$, on constate que si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.
En particulier, les X_i sont deux à deux indépendantes[29].
En revanche, la réciproque est fausse, on peut construire un triplet de variables aléatoires deux à deux indépendantes qui ne sont pas mutuellement indépendantes.

[29] C'est-à-dire que pour $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

Déjà fait ?
Nous avions donné un exemple de trois événements deux à deux indépendants, mais non mutuellement indépendants.
Considérer alors les indicatrices de ces événements.

Proposition 29.59 : *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si*

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, \forall x_n \in X_n(\Omega),\ \mathbf{P}([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

Démonstration. C'est essentiellement la même que la proposition 29.53, avec n sommes au lieu de deux. □

29.5.3 Le lemme des coalitions

Proposition 29.60 : *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, et soient $f_1, \dots, f_n$ des applications telles que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i soit définie sur $X_i(\Omega)$ (les espaces d'arrivée pouvant être ou ne pas être les mêmes).*
Alors les variables $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Autrement dit
Appliquer une fonction (n'importe laquelle : le carré, la valeur absolue, etc) à chacune des variables aléatoires préserve l'indépendance mutuelle.

Démonstration. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, et pour A_i partie de $f_i(X_i(\Omega))$, on a

$$[f_i(X_i) \in A_i] = \left[X_i \in f_i^{-1}(A_i)\right].$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left([f_1(X_1) \in A_1] \cap \dots \cap [f_n(X_n) \in A_n]\right) &= \mathbf{P}\left([X_1 \in f_1^{-1}(A_1)] \cap \dots \cap [X_n \in f_n^{-1}(A_n)]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i \in f_i^{-1}(A_i)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(f_i(X_i) \in A_i). \end{aligned}$$

Indépendance des X_i.

□

Le résultat qui suit, bien que très utile est assez indigeste ne serait-ce qu'à énoncer[30]. Pourtant l'intuition qui se cache derrière est très simple, et vous n'aurez jamais besoin d'énoncer rigoureusement ce résultat.

[30] Et encore, l'énoncé que je donne n'est pas complètement rigoureux.

Proposition 29.61 (Lemme des coalitions) : *Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathbf{P})$.*
Soit alors $I_1,\dots,I_p$ une partition de $[\![1,n]\!]$, et pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, soit Y_k une variable aléatoire qui est fonction[31] des $X_j, j\in I_k$.
Alors $Y_1,\dots,Y_p$ sont mutuellement indépendantes.

[31] Et c'est là que mon énoncé est flou. Une version plus rigoureuse se trouve dans la preuve, mais je préfère que vous le reteniez sous cette forme imprécise !

Intuitivement, ceci signifie que si on regroupe nos variables aléatoires en p «paquets» disjoints, et que pour chaque paquet on crée une nouvelle variable aléatoire ne dépendant que des X_i dans le paquet, alors les p variables ainsi obtenues sont indépendantes.

Démonstration. Renumérotons les variables de chaque «paquet» et notons

$$\{X_{1,1},X_{1,2},\dots,X_{1,i_1}\}=\{X_j,j\in I_1\},\dots,\{X_{p,1},\dots,X_{p,i_p}\}=\{X_j,\ j\in I_p\}.$$

Alors pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, il existe une fonction f_k telle que $Y_k=f_k(X_{k,1},\dots,X_{k,i_k})$.
Pour une fois, il est intéressant de voir ici un k-uplet de variables aléatoires comme une variable aléatoire à valeurs dans un produit cartésien.
On prouve alors que les **variables aléatoires** $(X_{1,1},\dots,X_{1,i_1}),\dots,(X_{p,1},\dots,X_{p,i_p})$ sont mutuellement indépendantes.
Prouvons-le pour $p=2$, mais le principe est le même dans le cas général : soient $x_{1,1},\dots,x_{1,i_1},x_{2,1},\dots,x_{2,i_2}\in X_{1,1}(\Omega)\times\cdots\times X_{2,i_2}(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left([(X_{1,1},\dots,X_{1,i_1})=(x_{1,1},\dots,x_{1,i_1})]\cap[(X_{2,1},\dots,X_{2,i_2})=(x_{2,1},\dots,x_{2,i_2})]\right)\\
=&\mathbf{P}([X_{1,1}=x_{1,1}]\cap\cdots\cap[X_{2,i_2}=x_{2,i_2}])\\
=&\prod_{j=1}^{i_1}\mathbf{P}(X_{1,j}=x_{1,j})\times\prod_{j=1}^{i_2}\mathbf{P}(X_{2,j}=x_{2,j})\\
=&\mathbf{P}((X_{1,1},\dots,X_{1,i_1})=(x_{1,1},\dots,x_{1,i_1}))\mathbf{P}((X_{2,1},\dots,X_{2,i_2})=(x_{2,1},\dots,x_{2,i_2})).
\end{aligned}$$

Indépendance.

C'est l'indépendance mutuelle de $X_{1,1},\dots,X_{1,i_1}$.

Et alors il suffit d'appliquer la proposition précédente avec les fonctions f_k. □

Exemple 29.62

Si (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) sont mutuellement indépendantes, alors $(X_3,X_1+X_5,X_2^2e^{X_4})$ sont encore mutuellement indépendantes.
En revanche, on ne peut rien dire[32] de l'indépendance éventuelle de (X_3,X_1+X_3,X_1X_2), puisque X_3 «figure» dans deux des trois variables, de même que X_1 (les «paquets» ne sont pas disjoints).

[32] Le lemme des coalitions n'est pas un «si et seulement si» !

29.5.4 Un résultat de stabilité

Rappelons une formule qui ne figure pas explicitement au programme, mais que nous avons déjà prouvée deux fois (une avec des polynômes dans le TD17, une autre par dénombrement dans le TD24) : l'identité de Vandermonde[33] :

[33] C'est le même VANDERMONDE que pour le déterminant.

$$\forall(m,r,n)\in\mathbf{N}^3,\ \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{n+m}{r}.$$

Proposition 29.63 : *Soient $n_1,n_2\in\mathbf{N}^*$, soit $p\in]0,1[$ et soient X_1,X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathbf{P})$ telles que $X_1\sim\mathcal{B}(n_1,p)$ et $X_2\sim\mathcal{B}(n_2,p)$.*
Alors $X_1+X_2\sim\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.

⚠ Attention ! Le second paramètre p doit être le même pour les deux lois.

Démonstration. Puisque X_1 prend des valeurs entre 0 et n_1, et que X_2 prend des valeurs entre 0 et n_2, $X_1 + X_2$ est à valeurs dans $[\![0, n_1 + n_2]\!]$.
Soit $\ell \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$. Appliquons alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_1 = k],\ 0 \leqslant k \leqslant n_1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 + X_2 = \ell) &= \sum_{k=0}^{n_1} \mathbf{P}(X_1 = k)\mathbf{P}(X_2 = \ell - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{\ell - k} p^{\ell-k}(1-p)^{n_2-(\ell-k)} \\
&= p^\ell (1-p)^{n_1+n_2-\ell} \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{\ell-k} \\
&= p^\ell (1-p)^{n_1+n_2-\ell} \binom{n_1+n_2}{\ell}.
\end{aligned}$$

Identité de Vandermonde.

Donc $X_1 + X_2 \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$. □

Ce résultat est somme toutes assez intuitif : si on se souvient qu'une loi binomiale compte le nombre de succès lors de répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli, la somme $X_1 + X_2$ est le nombre de succès lors d'une première série de n_1 répétitions indépendantes et du nombre de succès lors d'une seconde série de n_2 répétitions indépendantes, et indépendantes des précédentes[34]
C'est donc en tout le nombre de succès lors de $n_1 + n_2$ répétitions de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

[34] C'est l'hypothèse d'indépendance de X_1 et X_2.

Corollaire 29.64 – *Soit $p \in [0,1]$, et soient $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes telles que $X_i \sim \mathscr{B}(n_i, p)$. Alors*

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right).$$

Démonstration. Pour $k = 2$, c'est la proposition précédente.
Procédons par récurrence sur n, et supposons le résultat vrai pour k variables aléatoires indépendantes, et soient $X_1, \dots, X_{k+1}$ $k+1$ variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$ telles que $X_i \sim \mathscr{B}(n_i, p)$.
Par le lemme des coalitions, $X_1 + \cdots + X_k$ est indépendante de X_{k+1}. De plus, par hypothèse de récurrence,

$$X_1 + \cdots + X_k \sim \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right).$$

Ainsi,

$$(X_1 + \cdots + X_k) + X_{k+1} \sim \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i + n_{k+1}, p\right) = \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{k+1} n_i, p\right).$$

Par le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout k. □

Corollaire 29.65 – *En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la loi de Bernoulli de paramètre p est également la loi binomiale de paramètres 1 et p. □

Remarques. ▶ Cela permet de justifier un principe connu depuis longtemps : une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ correspond au nombre de succès lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
▶ On retrouve ainsi sans calculs le fait que l'espérance d'une loi binomiale est np.

Variance
En réalité, on retrouve aussi la variance, si on sait que la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances, cf le paragraphe suivant.

29.6 COVARIANCE

Dans cette partie, on construit une quantité qui en quelque sorte mesure le défaut d'indépendance de deux variables aléatoires.

29.6.1 Espérance d'un produit

Proposition 29.66 : *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors*

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Démonstration. C'est le théorème de transfert appliqué à la variable[35] (X, Y) et à la fonction $(x, y) \mapsto xy$. □

[35] À valeurs dans $\mathbf{R}^2$

Proposition 29.67 : *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, alors $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbf{P}([x = x] \cap [Y = y]) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y) = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y = y)\right) \\ &= \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).\end{aligned}$$

Indépendance de X et Y.

□

Sans l'hypothèse d'indépendance, cette propriété est absolument fausse.
Par exemple, on n'a pas en général[36] $\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}(XX) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X)$.

[36] Sauf si X suit une loi certaine.

Corollaire 29.68 – *Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, alors $\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i)$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est la proposition précédente.
Supposons la formule vraie pour un produit de n variables aléatoires indépendantes, et soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes. Alors par le lemme des coalitions, $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ est indépendante de X_{n+1}. Et alors

$$\mathbf{E}\left((X_1 \cdots X_n)X_{n+1}\right) = \mathbf{E}\left(X_1 \cdots X_n\right)\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)\cdots\mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(X_{n+1}).$$

Donc par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n. □

29.6.2 Covariance

Définition 29.69 – Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$. La covariance de X et Y est alors définie par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))).$$

Remarque

Notons que la covariance n'est définie que pour deux variables définies sur le même espace probabilisé.

Remarques. ▶ Il est possible d'interpréter le signe de la covariance. En effet, s'il est positif, cela signifie qu'en moyenne, $X - \mathbf{E}(X)$ et $Y - \mathbf{E}(Y)$ sont de même signe, donc que lorsque X augmente, en moyenne Y augmente aussi.
En revanche s'il est négatif, cela signifie qu'en moyenne, $X - \mathbf{E}(X)$ et $Y - \mathbf{E}(Y)$ sont de signes opposés, donc que lorsque X augmente, en moyenne Y diminue.
▶ Notons tout de suite que $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{V}(X)$.

Proposition 29.70 (Formule de Huygens) : *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, alors*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Remarque
Pour $X = Y$, on retrouve

$$\mathbf{V}(X) = \mathrm{Cov}(X, X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Démonstration.

$$(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)) = XY - X\underbrace{\mathbf{E}(Y)}_{\in \mathbf{R}} - Y\underbrace{\mathbf{E}(X)}_{\in \mathbf{R}} + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Donc par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

□

Terminologie
Les points 2 et 3 signifient que la covariance est une **forme bilinéaire** sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur Ω.
Le premier point s'appelle la **symétrie**, et on dit alors que la covariance est une forme bilinéaire symétrique.
Nous rencontrerons de nouveau ce vocabulaire dans les deux prochains chapitres d'algèbre.

Proposition 29.71 : *Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors*

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$
3. $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \mathrm{Cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$
4. $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X) \geqslant 0$.

Démonstration. 1. Évident.

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\lambda X + Y, Z) &= \mathbf{E}((\lambda X + Y)Z) - \mathbf{E}(\lambda X + Y)\mathbf{E}(Z) \\
&= \lambda \mathbf{E}(XZ) + \mathbf{E}(YZ) - (\lambda \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y))\,\mathbf{E}(Z) \\
&= \lambda\,(\mathbf{E}(XZ) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Z)) + \mathbf{E}(YZ) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(Z) \\
&= \lambda \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z).
\end{aligned}$$

3. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a, en utilisant les deux premières propriétés

$$\mathrm{Cov}(X, \lambda Y + Z) = \mathrm{Cov}(\lambda Y + Z, X) = \lambda \mathrm{Cov}(Y, X) + \mathrm{Cov}(Z, X) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z).$$

4. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{V}(X) \geqslant 0$.

□

Danger !
La réciproque est **FAUSSE** ! Deux variables aléatoires peuvent avoir une covariance nulle sans être indépendantes.

Corollaire 29.72 – *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors* $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration. Puisque X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$, et alors par la formule de Huygens, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$. □

Remarques. ▶ Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées**. Ainsi, deux variables indépendantes sont non corrélées, mais la réciproque est fausse.
D'ailleurs un exercice où on vous fait calculer une covariance, qu'elle est nulle, et que la question suivante est «les variables sont elles indépendantes ?» ressemble franchement à un piège dans lequel on attend de voir si vous tombez. Réfléchissez bien avant de répondre, et si malgré tout les deux variables sont indépendantes, ce n'est pas la nullité de la covariance

qui vous permettra de l'affirmer.
▸ En revanche, une covariance non nulle clôt la discussion : les variables ne sont pas indépendantes.

Exemple 29.73

Soit X une variable aléatoire telle que[37]

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit Y une variable aléatoire sur le même espace qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, avec $p \in]0, 1[$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, et on note $Z = XY$.
Par indépendance de X et Y, on a $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$ car $\mathbf{E}(X) = 0$.
D'autre part, on a $\mathbf{E}(ZY) = \mathbf{E}\left(XY^2\right) = \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$.
Et donc, $\mathrm{Cov}(Z, Y) = \mathbf{E}(ZY) - \mathbf{E}(Z)\mathbf{E}(Y) = 0$.
Pourtant Z et Y ne sont pas indépendantes, car

$$\mathbf{P}([Z = 0] \cap [Y = 1]) = 0 \text{ et } \mathbf{P}(Z = 0)\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = 0)\mathbf{P}(Y = 1) = p(1 - p) \neq 0.$$

[37] Une telle variable est parfois appelée variable de Rademacher

Détails
Puisque Y ne prend que les valeurs 0 et 1, $Y^2 = Y$.

29.6.3 Variance d'une somme

Proposition 29.74 : *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$. Alors*

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Démonstration. Par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X + Y) &= \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y) = \mathrm{Cov}(X, X + Y) + \mathrm{Cov}(Y, X + Y)\\ &= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) + \mathrm{Cov}(Y, Y)\\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$

□

Linéarité à gauche.

Par symétrie,

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.

Corollaire 29.75 – *Si X et Y sont indépendantes, alors*

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Écart-type
Il n'y a pas de formule analogue pour l'écart-type.
En particulier, on n'a jamais (ou presque jamais) $\sigma_{X+Y} = \sigma_X + \sigma_Y$.

Proposition 29.76 : *Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, alors*

$$\mathbf{V}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

En particulier, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes[38]

$$\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \dots + \mathbf{V}(X_n).$$

[38] Et donc aussi si elles sont mutuellement indépendantes.

Démonstration. C'est encore de la bilinéarité couplée à la symétrie :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right)\end{aligned}$$

Rédaction
La deuxième somme a subtilement changé d'indice, et c'était fondamental ici puisque la première somme porte déjà sur i.

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Par symétrie de la covariance, chaque terme apparaissait deux fois dans la somme.

□

Comme mentionné plus haut, dans le cas où les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi $\mathscr{B}(p)$, on retrouve la variance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

29.6.4 Coefficient de corrélation linéaire (hors programme)

Cette partie est hors programme en MPSI/MP2I, mais également en MPI/MP. En revanche elle figure au programme de PSI (dans un cadre plus général que celui abordé ci-dessous). J'en parle tout de même car il s'agit d'une bonne illustration de l'intérêt de la covariance, mais aussi car dans le prochain chapitre d'algèbre, nous prouverons une célèbre inégalité[39] par une méthode en tous points analogue à celle qui suit. Autant la comprendre dès maintenant.

[39] L'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 29.77 – Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, de variance non nulle[40]. Le **coefficient de corrélation linéaire de** X **et** Y est

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}}.$$

[40] Donc ne suivant pas une loi certaine.

Proposition 29.78 : *Sous les hypothèses ci-dessus :*

$$|\rho(X,Y)| \leqslant 1.$$

De plus, $\rho(X,Y) = \pm 1$ si et seulement si il existe un couple (a,b) de réels, avec $a \neq 0$, tels que $\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1$. Dans ce cas

- *si $\rho(X,Y) = 1$, alors $a > 0$: X et Y varient dans le même sens.*
- *si $\rho(X,Y) = -1$, alors $a < 0$: X et Y varient dans des sens opposés.*

Démonstration. Considérons la fonction $f(t) = \mathbf{V}(tX - Y)$.
Alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $f(t) \geqslant 0$ car une variance est toujours positive.
De plus, $f(t) = \mathbf{V}(tX) + \mathbf{V}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(tX, Y) = t^2\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) - 2t\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Ainsi, f est une fonction polynôme du second degré, et puisqu'elle est toujours positive, c'est qu'elle ne possède qu'au plus une racine, et son discriminant est donc négatif ou nul.
Ainsi, $4\,\mathrm{Cov}(X,Y)^2 - 4\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) \leqslant 0$.
On en déduit que $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)$ et donc

$$|\,\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)} \Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}}\right| \leqslant 1.$$

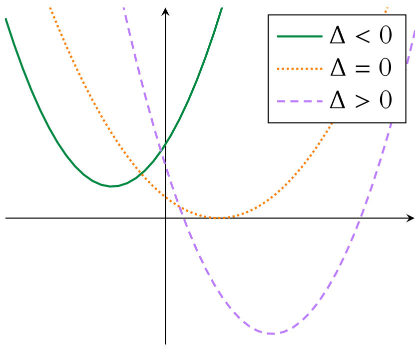


FIGURE 29.2– Un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.

De plus, on a l'égalité si et seulement si le discriminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si f s'annule en un certain réel a.
Mais alors $\mathbf{V}(aX - Y) = 0$, et donc $aX - Y$ suit une loi certaine :

$$\exists b \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(aX - Y = -b) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{P}(Y = aX + b) = 1.$$

Notons que a est alors non nul car le polynôme f a un terme constant non nul, donc ne s'annule pas en 0.

Dans ce cas, on a alors $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$ et donc $\sqrt{\mathbf{V}(Y)} = |a|\sqrt{\mathbf{V}(X)}$.
De même, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, aX+b) = a\,\mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,b) = a\mathbf{V}(X) + \mathrm{Cov}(X,b).$$

Mais, $\mathbf{V}(b) = 0$ et donc $|\mathrm{Cov}(X,b)| \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(b)} = 0$.
Ainsi $\mathrm{Cov}(X,Y) = a\mathbf{V}(X)$. On en déduit que

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}} = \frac{a}{|a|}.$$

Valeur absolue

$\frac{a}{|a|}$ vaut 1 si $a > 0$ et -1 si $a < 0$.

Et donc $\rho(X,Y)$ est du signe de a. □

Le coefficient de corrélation linéaire est donc en quelques sortes une mesure de l'indépendance de deux variables aléatoires. En effet, pour des variables indépendantes il est nul. Et dans le cas où l'une des variables est fonction affine de l'autre, c'est-à-dire à peu près ce qu'on peut imaginer de moins indépendant, il prend les plus grandes valeurs possibles (± 1).

C'est un indicateur très utilisé en pratique, en physique, en biologie, en économie, etc, bref, partout où on a besoin de statistiques.
Notons que comme son nom l'indique, il ne détecte que les corrélations **linéaires**. Si $Y = f(X)$, où f n'est pas linéaire, X et Y ne sont pas généralement pas indépendantes, mais la valeur de $\rho(X,Y)$ n'a alors pas beaucoup de signification.

Exemple 29.79

Considérons une variable U qui suit la loi uniforme sur $[\![-n,n]\!]$, et soit $V = U^2$.
Alors $\mathbf{E}(UV) = \mathbf{E}\left(U^3\right) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} k^3 \frac{1}{2n+1}$.
Mais cette somme est clairement nulle par un argument d'imparité[41].
Et donc $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbf{E}(UV) - \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V) = 0$.
Pour autant, n'allons pas affirmer que V «ne dépend pas» de U.

[41] La couper en deux en 0 si vous n'êtes pas convaincu.

29.6.5 Vers la loi faible des grands nombres (hors programme en sup)

La partie qui suit ne figure pas au programme de sup, car un énoncé correct nécessiterait un espace probabilisé infini, ou en tous cas serait quasiment vidé de sa substance[42] sur un espace fini.

[42] Il ne s'appliquerait qu'à des variables certaines...

Considérons donc $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, qui suivent toute la même loi, et notons $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Notons également μ l'espérance des X_i et σ^2 leur variance.
Alors par linéarité de l'espérance $\mathbf{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$. On a également

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_n)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + \cdots + \mathbf{V}(X_n)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\frac{S_n}{n}$, il vient alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Ce n'est pas tant l'inégalité qui est remarquable[43], mais le fait que le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

[43] La majoration est trop générale pour être bonne pour toutes les lois.

Et c'est cela qu'on appelle la loi faible des grands nombres.

Là où le programme de sup montre ses limites, c'est justement en passant à la limite, car sur un espace fini, il ne sera pas possible de construire une infinité de variables aléatoires indépendantes et de même loi, sauf à considérer des variables certaines. Mais malgré tout, il serait envisageable de construire un espace fini sur lequel il y a un nombre n arbitrairement grand (mais fixé) de variables indépendantes et de même loi. Et alors la majoration ci-dessus vaut toujours, avec un majorant qui est de plus proche de 0 pour n grand.

Très bien, mais tout ceci ne nous dit pas pourquoi cette limite est intéressante...
Cela signifie tout simplement que l'espérance, telle que nous l'avons définie, est bien ce que vous pensez.
En effet, si on répète un grand nombre n de fois une même expérience, qu'on note $X_1, \dots, X_n$ les résultats de l'expérience considérée, et qu'on calcule la moyenne de ces résultats (c'est $\frac{S_n}{n}$), alors la probabilité que cette moyenne soit à distance plus de $\varepsilon > 0$ de $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc en résumé, que si on répète un grand nombre de fois l'expérience, la moyenne des résultats va être proche de l'espérance.

La formulation avec ce ε peut sembler laborieuse, mais pourtant on ne peut guère faire mieux : la probabilité que $\dfrac{S_n}{n}$ soit à distance plus de ε de μ a beau tendre vers 0 elle n'est nulle.
Vous savez par exemple que si on joue 10 000 fois la même grille au loto, la probabilité de gagner à chaque fois le gros lot est très[44] faible mais elle n'est pas nulle.
Et alors le gain moyen sur ces 10 000 parties est assez éloigné du gain moyen que peut espérer un joueur de loto, mais la probabilité que ceci se produise est assez faible.

[44] très, très, très, très

En particulier, si les X_i suivent une loi de Bernoulli de paramètre p, et qu'on voit chaque variable de Bernoulli comme la variable indiquant le résultat (échec ou succès) d'une expérience de Bernoulli, alors $\frac{S_n}{n}$ est le nombre moyen de succès lors des n répétitions.
Et donc il est «proche» quand n est grand, de $\mathbf{E}(X_1) = p$.
Le fait de disposer de ce résultat est somme toute assez rassurant, et signifie que tout le formalisme avec lequel nous travaillons depuis le début nous permet bien de modéliser l'intuition qu'on se fait d'une probabilité.

Savoir si «n grand» signifie $n = 100$, $n = 1\,000$ ou $n = 100\,000\,000$ dépasse le cadre des probabilités telles qu'elles sont enseignées en prépa scientifique, mais est tout de même une question intéressante lorsqu'on étudie les statistiques, et vous avez effleuré la question en terminale en parlant d'intervalles de confiance.
Pour un sondeur politique, $n = 1000$ est suffisamment grand. Mais les marges d'erreur sont alors conséquentes[45].
Dans d'autres domaines où le droit à l'erreur n'existe pas, 1 000 est probablement trop petit.
La majoration de $p = \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$ obtenue ci-dessus permet en réalité de trouver, à ε fixé, quelle valeur de n permet de rendre p suffisamment petit, et ça donne parfois lieu à des exercices de concours[46].
Mais en pratique, la majoration donnée par Bienaymé-Tchebychev est trop grossière, et donc les valeurs de n obtenues sont très loin d'être optimales.

[45] Je sais que vous n'étiez pas bien vieux à l'époque, mais avez-vous déjà entendu parler du 21 avril 2002 ?

[46] Par exemple l'exercice 100 de la banque CCP.

EXERCICES DU CHAPITRE 29

▶ Lois de variables aléatoires, espérance, variance

EXERCICE 29.1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Déterminer la loi de $Y = n - X$. F

EXERCICE 29.2 Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. PD
Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs.
On note X le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de X.
Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de Y.

EXERCICE 29.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. PD
On effectue alors un second tirage et on note Y le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

EXERCICE 29.4 **Loi triangulaire** PD
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, 2n-1]\!]$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(X=i) = \lambda i,\ \forall i \in [\![n+1, 2n-1]\!],\ \mathbf{P}(X=i) = \lambda(2n-i)$$

où λ est un réel fixé.

1) À quelle condition sur λ définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2) Prouver alors que X et $2n - X$ ont même loi. En déduire $\mathbf{E}(X)$.
3) Calculer $\mathbf{V}(X)$. *On pourra admettre que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 29.5 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. PD
On tire simultanément deux boules, on note X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.
Déterminer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

EXERCICE 29.6 On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une permutation σ de $[\![1,n]\!]$. AD
On note alors N le plus grand entier $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

EXERCICE 29.7 **De l'intérêt des variables indicatrices** AD
Un ascenseur dessert les k étages d'un immeuble ($k \in \mathbf{N}^*$). Au rez-de-chaussée, n personnes ($n \in \mathbf{N}^*$) entrent dans l'ascenseur, et chacune descend à un étage donné avec probabilité $\frac{1}{k}$ indépendamment du choix de ses voisins. On suppose de plus que personne ne monte dans l'ascenseur aux étages.
On note X_i la variable indicatrice de l'événement «l'ascenseur s'arrête à l'étage i», et X le nombre total d'arrêts de l'ascenseur.

1) Déterminer la loi de X_i.
2) En déduire $\mathbf{E}(X)$.

EXERCICE 29.8 Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$. PD

EXERCICE 29.9 **Le problème des rencontres** AD
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne par des tirages successifs (et sans remise !), et on dit qu'il y a une rencontre une $i^{\text{ème}}$ tirage si celui-ci donne la boule numéro i.
Donner le nombre moyen de rencontres.

EXERCICE 29.10 Une urne contient b boules blanches et b boules rouges. On y effectue une suite de tirages de la manière suivante : on replace dans l'urne la boule obtenue, en rajoutant b boules de la même couleur. AD
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1) Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2) Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

EXERCICE 29.11 PD

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Montrer que $\mathbf{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X\geqslant k)$.

2) **Application** : une urne contient n boules numérotées de 1 à n, que l'on tire successivement et sans remise. On note alors X_i la variable aléatoire égale au numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée, et on note X la variable aléatoire égale au plus grand entier k tel que $X_1<X_2<\cdots<X_k$.
Déterminer les valeurs de $\mathbf{P}(X\geqslant k)$, et en déduire $\mathbf{E}(X)$.

EXERCICE 29.12 On dispose de N urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note Z_n la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.
Déterminer $\mathbf{P}(Z_n\leqslant k)$, et en déduire la loi de Z_n.

EXERCICE 29.13 (Banque CCP) AD
Un téléconseiller effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à $p\in]0,1[$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X.
2) Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
   a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbf{N}$, $\mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k)$.
   b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   c) Déterminer alors l'espérance et la variance de Z, ainsi que $\mathbf{E}(Y)$.

EXERCICE 29.14 Un téléphone contient $n\geqslant 2$ chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les n, s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. AD
Pour $k\in\mathbf{N}^*$, on note X_k le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les k premières chansons.

1) Déterminer le support de X_k.
2) Pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_k=1)$ et $\mathbf{P}(X_k=k)$.
3) Pour $k\in\mathbf{N}^*$, prouver que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\frac{i}{n}\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{n-i+1}{n}\mathbf{P}(X_k=i-1)$.
4) Donner alors une relation entre $\mathbf{E}(X_{k+1})$ et $\mathbf{E}(X_k)$, puis l'expression générale de $\mathbf{E}(X_k)$ en fonction de k et n.

EXERCICE 29.15 Une loi finie est caractérisée par ses moments D
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$. Montrer que si X et Y ont même loi si et seulement si $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathbf{E}\left(X^k\right)=\mathbf{E}\left(Y^k\right)$.
($\star$) Plus généralement, montrer que deux variables aléatoires X et Y sur des univers finis ont même loi si et seulement si $\forall k\in\mathbf{N}$, $\mathbf{E}\left(X^k\right)=\mathbf{E}\left(Y^k\right)$.

▸ Couples et n-uplets de variables aléatoires

EXERCICE 29.16 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathbf{P})$, suivant deux lois de Bernoulli. Déterminer la loi de la variable aléatoire XY. F

EXERCICE 29.17 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega,\mathbf{P})$ soit indépendante de toute variable aléatoire sur $(\Omega,\mathbf{P})$. PD

EXERCICE 29.18 Une caractérisation algébrique de l'indépendance AD
Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,\dots,y_p\}$ (où les x_i et les y_i sont deux à deux distincts).
Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note $m_{i,j}=\mathbf{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$.
Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est de rang 1.

EXERCICE 29.19 Soient $(X_1,\dots,X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, $p\in]0,1[$. AD
On pose, pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, $Y_i=X_iX_{i+1}$.
Montrer que Y_i et Y_j sont indépendantes si et seulement si $|i-j|>1$.

EXERCICE 29.20 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega,\mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$. AD

1) On pose $Z = \max(X, Y)$. Pour $k \in \mathbf{N}$, Déterminer $\mathbf{P}(Z \leqslant k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X \leqslant k)$. En déduire la loi de Z.
2) Déterminer de même la loi de $U = \min(X, Y)$.
3) Donner la loi de $T = X - Y$.

EXERCICE 29.21 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$. PD
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

EXERCICE 29.22 Déterminant aléatoire (Oral Mines MP 2017) D
Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles $A_{i,j}$ centrées, réduites, identiquement distribuées et mutuellement indépendantes sur un univers probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.
Calculer $\mathbf{E}(\det(A))$ et $\mathbf{V}(\det(A))$.

EXERCICE 29.23 Dés dont la somme suit une loi uniforme D
On souhaite prouver qu'il n'est pas possible de truquer deux dés à n faces numérotées 1 à n de telle sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$.
Pour cela, on suppose que deux tels dés existent, et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au numéro du premier (resp. du second) dé.
On note alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

1) Déterminer une relation entre p_1 et q_1, ainsi qu'une relation entre p_n et q_n.
2) Montrer que $p_1 q_n + p_n q_1 \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$.
3) Conclure.

EXERCICE 29.24 Inégalité de Hoeffding (Oral X-ENS PSI) TD
Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, vérifiant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a \leqslant X_i \leqslant b$.
On pose alors $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall t > 0,\ \mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

1) Soient $c < d$ deux réels et $\Phi : [c, d] \to \mathbf{R}$, continue, et $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$, telle que $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$ et $\forall x \in]c, d[$, $\Phi''(x) > 0$. Montrer que $\Phi \leqslant 0$.
2) En déduire que : $\forall s > 0$, $\forall y \in [c, d]$, $e^{sy} \leqslant \dfrac{c-y}{c-d} e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d} e^{sc}$.
3) Soit Y une variable aléatoire réelle centrée à valeurs dans $[c, d]$, et soit $s > 0$.
Montrer que $\ln\left(\mathbf{E}\left(e^{sY}\right)\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right)$, puis que : $\mathbf{E}\left(e^{sY}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{s^2(d-c)^2}{8}\right)$.
Indication : remarquer que : $\ln\left(\dfrac{c}{c-d} e^{sd} - \dfrac{d}{c-d} e^{sc}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$.
4) Prouver que $\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(e^{s(X_i - \mathbf{E}(X_i))}\right)$.
5) En choisissant judicieusement les Y_i, prouver à l'aide de la question 3 que :
$$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-st + n\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$
6) Conclure.

▸ Covariance

EXERCICE 29.25 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Comparer $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. PD

EXERCICE 29.26 Soit $p \in]0;1[$ et $n \geqslant 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc. **PD**

1) Déterminer la loi de X.
2) Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
3) On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

EXERCICE 29.27 (Oral Mines-Ponts PC) **PD**
On lance deux dés équilibrés à n faces. Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1) Déterminer la loi et l'espérance de X.
2) Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
3) Calculer de même XY et en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

EXERCICE 29.28 On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu. **AD**

1) Déterminer la loi des variables X_i.
2) Déterminer l'espérance de X.
3) Pour $(i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2, i \neq j$, déterminer la loi de $X_i X_j$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4) Déterminer la variance de X.

EXERCICE 29.29 Loi trinomiale **AD**
Soit $n \geqslant 2$, et soient $p, q \in]0, 1[$ tels que $p + q < 1$.

1) Montrer qu'on définit bien une loi conjointe en posant $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} p^k q^\ell (1 - p - q)^{n-k-\ell}.$$

Dans toute la suite, on considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée ci-dessus.

2) Déterminer les lois de X et Y.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $\mathbf{E}(XY)$, puis $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

EXERCICE 29.30 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$. **PD**

1) Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
2) Les variables $X + Y$ et XY sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 29.31 Soit $n \geqslant 2$. On choisit au hasard une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, et on note N son nombre de points fixes. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i l'événement «i est un point fixe de σ» **PD**

1) Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbf{P}(F_i)$ et $\mathbf{P}(F_i \cap F_j)$.
2) Déterminer $\mathbf{E}(N)$.
3) Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j})$. En déduire $\mathbf{V}(N)$.
4) Prouver que $\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

EXERCICE 29.32 (Oral ENS PSI) **D**
Pour n un entier supérieur à 2, soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
Soit θ la variable aléatoire indiquant l'unique argument de Z dans $[0, 2\pi[$, soit X la partie réelle de Z et soit Y sa partie imaginaire.

1) Calculer $\mathbf{E}(\theta)$, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.
2) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 29

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.1

Il suffit de noter que $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et que $\forall k \in Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(n-X = k) = \mathbf{P}(X = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}.$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.

Intuitivement : si X désigne le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de proba de succès égale à p, alors $Y = n - X$ représente le nombre d'échecs lors de la répétition de ces n épreuves.

Mais l'échec se produit avec probabilité $1 - p$, donc logiquement, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.

Toutefois, ce raisonnement, qui doit guider l'intuition, ne peut suffire : si l'énoncé nous dit juste que X est une variable aléatoire, il n'y a pas derrière de notion de succès, d'échec ou de répétitions.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.2

Notons $p = 0.9$.

Pour chacune des courses, la probabilité de réaliser un 20/20 est p^{20} (qui vaut environ 0.12). Et donc par indépendance des 18 courses, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(18, p^{20})$.

Pour chaque saison, la probabilité de n'avoir aucun 20/20 est $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{18}{0}\left(p^{20}\right)^0\left(1 - p^{20}\right)^{18}$.

Et donc la probabilité d'obtenir au moins un 20/20 est $1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}$ (qui vaut environ 0.096).

Par indépendance des saisons[1], Y suit donc la loi $\mathscr{B}\left(10, 1 - \left(1 - p^{20}\right)^{18}\right)$.

[1] Ce qui est plutôt légitime si les tirs sont déjà supposés indépendants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.3

Notons X le numéro porté par la boule obtenue au premier tirage. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Ensuite, la loi de Y sachant $[X = k]$ est une loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Danger ! Ne pas penser à distinguer les cas peut conduire à écrire $\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \frac{1}{k}$ pour tout i, ce qui change vraiment la donne dans la suite.

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = k],\ k \in [\![1, n]\!]\}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{k}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y) &= \sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{n} i\frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\frac{i}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

Permutation des sommes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.4

1. Nous savons que les conditions cherchées sont :

- ►les probas annoncées sont positives (ce qui est le cas si $\lambda \geqslant 0$)
- ►leur somme vaut 1.

Soit encore, à l'aide du changement d'indice $j = 2n - i$,

$$\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=n+1}^{2n-1}(2n - i) = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = n^2.$$

Et donc $\lambda = \frac{1}{n^2}$ est l'unique solution.

2. Commençons par noter que X et $2n-X$ ont toutes les deux $[\![1, 2n-1]\!]$ pour support. Pour X, c'est par définition, et pour $2n-X$, il suffit de regarder les valeurs que prend $2n-k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

► Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\mathbf{P}(2n-X=k) = \mathbf{P}(X=2n-k) = \frac{1}{n^2}(2n-(2n-k)) = \frac{k}{n^2} = \mathbf{P}(X=k).$$

► Et de même si $n+1 \leqslant k \leqslant 2n-1$,

$$\mathbf{P}(2n-X=k) = \mathbf{P}(X=2n-k) = \frac{2n-k}{n^2} = \mathbf{P}(X=k).$$

Donc X et $2n-X$ suivent bien la même loi.
On en déduit qu'elles ont mêmes espérances, et donc que

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(2n-X) \Leftrightarrow 2\mathbf{E}(X) = 2n \Leftrightarrow \mathbf{E}(X) = n.$$

Méthode
Avoir même loi, c'est avoir même support, et pour chaque élément x du support, avoir même probabilité de prendre la valeur x.

3. Utilisons la formule de Huygens : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.
Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \sum_{i=1}^{2n-1} i^2\mathbf{P}(X=i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=n+1}^{2n-1} i^2(2n-i)\\
&= \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}(2n-j)^2 j = \frac{(n+1)^2}{4} + 4\sum_{j=1}^{n-1} j - \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} j^3\\
&= \frac{(n+1)^2}{4} + 2n(n-1) - \frac{2(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)^2}{4}\\
&= \frac{7n^2-1}{6}.
\end{aligned}$$

Et donc $\mathbf{V}(X) = \dfrac{7n^2-1}{6} - n^2 = \dfrac{n^2-1}{6}$.

Méthode
Pour calculer une variance à partir de la loi, la formule de Huygens est presque toujours le moyen le plus efficace.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.5

Commençons par déterminer les lois de X et Y.
On a $X(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$.
Les $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ tirages sont équiprobables.
Pour $k \in [\![2, n]\!]$, il y a $k-1$ tirages réalisant $[X=k]$: il faut tirer la boule k, et une boule portant un numéro strictement inférieur (et il y a $k-1$ telles boules).
Donc $\mathbf{P}(X=k) = \dfrac{k-1}{\dbinom{n}{2}} = \dfrac{2k}{n(n-1)}$.
De même, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, il y a $n-k$ tirages réalisant $[Y=k]$, et donc

$$\mathbf{P}(Y=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Méthode
Pour déterminer une loi, il faut commencer par déterminer le support.

Il vient donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{n(n-1)}k^2\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}
\end{aligned}$$

Le terme correspondant à $k=1$ est nul.

$$= \frac{2n+2}{3}.$$

Et de même,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\mathbf{P}(Y=k)\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\\
&= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= n - \frac{2}{n(n-1)}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\
&= n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 29.6

Il est évident que N est à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.
Il y a en tout $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, il s'agit donc de trouver combien parmi elles réalisent $[N = k]$.

Mais lorsqu'on essaie de le faire, on réalise assez vite que c'est plutôt difficile, car pour choisir une permutation réalisant $[N = k]$, il faut choisir la valeur de $\sigma(k)$, choisir toutes les valeurs de $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$ dans l'ordre croissant, mais surtout aller ensuite choisir $\sigma(k+1)$ inférieur à $\sigma(k)$, mais pas égaux aux précédents[2].

[2] Faute de quoi on n'a plus une permutation.

Dénombrons plutôt les issues réalisant $[N \geqslant k]$.
Pour cela il suffit de choisir les k premiers éléments ordonnés par ordre croissant, et une permutation des autres.
Mais une fois choisis les k premiers éléments (et il y a $\binom{n}{k}$ manières de le faire), il n'y a qu'une manière de les ordonner par ordre croissant, et il y a $(n-k)!$ manières de choisir le $(n-k)$-uplet $(\sigma(k+1), \dots, \sigma(n))$.

Donc $\mathbf{P}(N \geqslant k) = \dfrac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!}\dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{k!}$.

Et puisque N est à valeurs entières, on a $[N \geqslant k] = [N = k] \cap [N \geqslant k+1]$, si bien que

$$\mathbf{P}(N \geqslant k) = \mathbf{P}(N = k) + \mathbf{P}(N \geqslant k+1) \Leftrightarrow \mathbf{P}(N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Sauf dans le cas où $k = n$, puisqu'alors $\mathbf{P}(N \geqslant n+1)$ est nul, et donc
$\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(N \geqslant n) = \dfrac{1}{n!}$.

Solution de l'exercice 29.7

1. Soit $i \in [\![1, k]\!]$.
Remarquons que X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si au moins une personne descend à l'étage i et 0 sinon.
Alors la probabilité que personne ne s'arrête à l'étage i est la probabilité que les n personnes aient choisi un étage autre que le numéro i.
Mais pour une personne donnée, la probabilité que ceci se produise est $1 - \dfrac{1}{k}$, et donc par indépendance des choix des n personnes, $\mathbf{P}(X_i = 0) = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$.
On en déduit que $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$, donc que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)^n$.

Bernoulli
Rappelons qu'une variable indicatrice, par définition ne prend que les valeurs 0 et 1, et donc suit une loi de Bernoulli.

2. Il s'agit de remarquer que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.
Les X_i n'étant pas indépendantes, ceci ne nous aiderait pas à déterminer la loi de X, problème qui est difficile. En revanche, l'espérance étant linéaire, il vient tout de suite

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{k}\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\right) = k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^n\right).$$

Exercice
Vous pouvez tout de même déterminer $\mathbf{P}(X = 1)$.
Calculer $\mathbf{P}(X = 2)$ vous donnera une idée de la complexité combinatoire derrière le calcul de $\mathbf{P}(X = i)$.

Solution de l'exercice 29.8

Y est une variable aléatoire à support fini, donc elle admet une espérance.
De plus, par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\mathbf{P}(X = k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k}\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left((p+(1-p))^{n+1}) - (1-p)^{n+1}\right)\\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.
\end{aligned}$$

Rappel
On a
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{n-1}.$$
(formule dite «du capitaine»)

Solution de l'exercice 29.9

Encore un exercice où les indicatrices vont nous sauver la mise ! Notons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage et 0 sinon.

Alors X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, et le nombre total de rencontres est $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$.
Reste à déterminer les espérances des X_i. Mais X_i est l'indicatrice de l'événement A_i : «il y a rencontre au $i^{\text{ème}}$ tirage».
Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A_i)$.
Mais les $n!$ façons de vider l'urne sont toutes équiprobables, et parmi elles, il y en a $(n-1)!$ pour lesquelles il y a rencontre en i. En effet, on peut choisir les numéros des boules obtenues aux autres tirages comme on le souhaite.
Et donc $\mathbf{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Donc $\mathbf{E}(X_i) = \mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{n}$, de sorte que $\mathbf{E}(X) = n\frac{1}{n} = 1$.

Indicatrices
L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli.
Et puisque $[\mathbb{1}_A = 1] = A$, son paramètre est $\mathbf{P}(A)$.

Solution de l'exercice 29.10

1. Il est évident que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$: on avait une chance sur deux d'obtenir une boule blanche au premier tirage.
2. Considérons le système complet d'événements $\{[X_1 = 0], [X_1 = 1]\}$.
Alors, X_2 prend ses valeurs dans $[\![0, 2]\!]$, et

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}_{[X_1=0]}(X_2 = 0)\mathbf{P}(X_1 = 0) + \underbrace{\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 0)}_{=0}\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

De même, puisque l'événement $[X_2 = 2] \cap [X_1 = 0]$ est impossible, on a

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 2)\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

On pourrait de même faire le calcul pour $\mathbf{P}(X_2 = 1)$, mais si nous sommes convaincus que X_2 prend ses valeurs dans $[\![0, 2]\!]$, alors il est évident que

$$\mathbf{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_2 = 0) - \mathbf{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur n. Nous venons d'initialiser la récurrence pour $n = 1$ et $n = 2$.
Supposons donc que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$, et donc que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
Si $X_n = k$, alors l'urne contient, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage $b + kb = b(k+1)$ boules blanches, et au total $2b + nb = b(n+2)$ boules.
Ainsi, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{k+1}{n+2}$ et $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n+2}$.
Et évidemment, pour $i \notin \{k, k+1\}$, $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i) = 0$.
Puisque $\{[X_n = i], i \in [\![0, n]\!]\}$ forme un système complet d'événements, on a $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

⚠ Attention !
Un système complet d'événements doit recouvrir Ω tout entier. Donc ici, il est hors de question de se limiter à $[X_n = k]$, $[X_n = k-1]$, même si vous sentez bien qu'eux seuls sont pertinents pour la suite, **ils ne forment pas un système complet d'événements.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = i)\mathbf{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) \\
&= \mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \mathbf{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\mathbf{P}(X_n = k) + \mathbf{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{n-k+1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Enfin, le même raisonnement reste valable pour $\mathbf{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1)$:

Pourquoi les séparer ?
Ces cas sont traités à part pour ne pas avoir eu à écrire par exemple $\mathbf{P}_{[X_n=-1]}(X_{n+1} = 0)$. L'événement $[X_n = -1]$ étant de probabilité nulle, on ne peut pas l'utiliser pour conditionner des probas.

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbf{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0)\mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = n+1) = \mathbf{P}_{[X_n=n]}(X_{n+1} = n+1)\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

En conclusion, $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![0, n+1]\!]$.
Commentaires : cet exercice est une très légère variation de l'exercice 14 du TD28, où c'est essentiellement la formulation qui a changé. Je vous laisse en revanche constater que les calculs sont exactement les mêmes dans ces deux exercices.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.11

1. Remarquons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}(X = i)$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \mathbf{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{E}(X).
\end{aligned}$$

Permutation de sommes.

2. Il y a en tout $n!$ manières de vider l'urne, toutes équiprobables.
Parmi celles-ci, il y en a $\dbinom{n}{k} \times (n-k)!$ qui réalisent $[X \geqslant k]$. En effet, il suffit de choisir quels sont les numéros des k premières boules, il n'y aura alors qu'une seule manière de les ordonner, les $n-k$ boules suivantes pouvant être tirées dans n'importe quel ordre.
Et donc $\mathbf{P}(X \geqslant k) = \dfrac{\binom{n}{k}(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k!}$.
Il vient donc, par la formule de la question 1 : $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Détails
L'événement $[X \geqslant k]$ ne regarde pas ce qui se passe après le $k^{\text{ème}}$ tirage.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.12

Commençons tout de suite par noter que $Z_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
L'événement $[Z_n \leqslant k]$ est réalisé si et seulement si dans chaque urne on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à k, ce qui se produit avec probabilité $\frac{k}{n}$.
Et les tirages dans les différentes urnes étant indépendants, on a donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \left(\dfrac{k}{n}\right)^N$.

Méthode
Une question du type «déterminer la loi de X» doit nécessairement commencer par la détermination du support de X, afin de savoir pour quelles valeurs de k on aura besoin de calculer $\mathbf{P}(X = x)$. C'est de plus souvent un moyen de détecter des erreurs grossières.

Mais Z_n étant à valeurs entières, $[Z_n \leqslant k] = [Z_n \leqslant k-1] \cup [Z_n = k]$, ces deux événements étant incompatibles.
Donc $\mathbf{P}(Z_n \leqslant k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) + \mathbf{P}(Z_n = k) \Leftrightarrow \mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1)$.

Astuce
Cette formule sert régulièrement pour déterminer la loi de variables pour lesquelles il est plus facile d'obtenir $\mathbf{P}(X \leqslant k)$ que $\mathbf{P}(X = k)$.
Elle ne vaut que pour des variables à valeurs entières (qui ne peuvent prendre aucune valeur entre $k-1$ et k).

Ensuite, pour tout $k \in Z_n(\Omega)$

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbf{P}(Z_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.13

1. C'est évidemment une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

2.a. La loi de Y sachant $[X=i]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n-i,p)$, et donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k) = \begin{cases} \dbinom{n-i}{k} p^k(1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \leqslant n-i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.b. Il est clair que $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, puisque le téléconseiller aura au maximum obtenu une fois chaque personne.
Appliquons alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X=i], 0 \leqslant i \leqslant n\}$: $\forall k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([Z=k]\cap[X=i]) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}([X+Y=k]\cap[X=i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}([Y=k-i]\cap[X=i]) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(X=i)\mathbf{P}_{[X=i]}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{(n-i)-(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!\cancel{(n-i)!}}\frac{\cancel{(n-i)!}}{(k-i)!(n-k)!}p^k(1-p)^{2n-k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{i!(k-i)!}p^k(1-p)^{2n-k-i} \\
&= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-p)^{-i} \\
&= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\underbrace{\left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k}_{=\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k} = \binom{n}{k}(p(2-p))^k(1-p)^{2n-2k} \\
&= \binom{n}{k}(p(2-p))^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Si on a une loi binomiale, c'est nécessairement la loi $\mathscr{B}(n,p(2-p))$, et il suffit de vérifier que $(1-p)^2 = 1-p(2-p)$, ce qui est bien le cas.
Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p(2-p))$.

Alternative : vu la formulation des questions, la solution ci-dessus est probablement celle qui était attendue. Proposons-en tout de même une autre, qui explique probablement mieux l'origine de la loi binomiale.
La variable aléatoire $n-Z$ représente le nombre de personnes qui n'ont pas répondu aux deux appels. Or pour chaque personne, la probabilité de ne pas répondre aux deux appels est $(1-p)^2$. Donc $n-Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n,(1-p)^2)$.
Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(n-Z=k) = \binom{n}{k}(1-p)^{2k}\left(\underbrace{1-(1-p)^2}_{=p(2-p)}\right)^{n-k}.$$

Et donc
$$\mathbf{P}(Z=k)=\mathbf{P}(n-Z=n-k)=\binom{n}{n-k}(1-p)^{2(n-k)}(p(2-p))^k.$$

2.c. Il suffit d'appliquer des formules du cours :

$$\mathbf{E}(Z)=np(2-p) \text{ et } \mathbf{V}(Z)=np(2-p)(1-p)^2.$$

Enfin, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(Z)-\mathbf{E}(X)=np(1-p)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.14

1. Dans le pire des cas, une seule chanson a été jouée, et donc $X_k=1$, et au mieux, k chansons distinctes ont été jouées, sauf si $k>n$, auquel cas au maximum n chansons auront été jouées.
Donc $X_k(\Omega)=[\![1,\min(n,k)]\!]$.

2. Pour que X_k soit égal à 1, il faut que la même chanson ait été jouée en boucle, c'est-à-dire qu'à chacune des étapes, la même chanson ait été choisie.
Donc $\mathbf{P}(X_k=1)=n\left(\frac{1}{n}\right)^k=\frac{1}{n^{k-1}}$.
Si $k>n$, alors $[X_k=k]=\emptyset$, et donc $\mathbf{P}(X_k=k)=0$.
Si $k\leqslant n$, alors on peut s'en tirer par dénombrement : il y a n^k façons de jouer k chansons à la suite.
Et pour choisir une playlist formée de chansons différentes, il faut choisir ces chansons (il y en a $\binom{n}{k}$), puis l'ordre dans lequel on les joue (il y a k choix).
Donc $\mathbf{P}(X_k=k)=\frac{\binom{n}{k}k!}{n^k}=\frac{n!}{(n-k)!n^k}$.

Détails
Le facteur n vient du choix de la chanson.

3. Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Alors par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_k=j],1\leqslant j\leqslant\min(k,n)\}$, il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{k+1}=i)&=\sum_{j=1}^{\min(k,n)}\mathbf{P}(X_k=j)\mathbf{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i)\\&=\mathbf{P}(X_k=i)\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i)+\mathbf{P}(X_k=i-1)\mathbf{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i).\end{aligned}$$

Mais $\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i)$ est la probabilité que la $(k+1)^{\text{ème}}$ chanson figure parmi les i déjà jouée, et donc vaut $\frac{i}{n}$.
Et $\mathbf{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1}=i)$ est la probabilité que la $(k+1)^{\text{ème}}$ chanson figure parmi les $n-i+1$ qui n'ont pas encore été jouées, et donc vaut $\frac{n-i}{n}$.
Donc comme annoncé : $\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\frac{i}{n}\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{n-i+1}{n}\mathbf{P}(X_k=i-1)$.
Le cas $i=1$ mériterait un traitement à part, car $\mathbf{P}(X_k=0)=0$, mais on arrive bien entendu au même résultat.

4. Multiplions par i la relation précédente, puis sommons les relations ainsi obtenues pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n i\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i(n-i+1)\mathbf{P}(X_k=i-1)$$

On a évidemment[3] $\sum_{i=1}^n i\mathbf{P}(X_{k+1}=i)=\mathbf{E}(X_{k+1})$. Et donc

[3] Car X_{k+1} est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{k+1})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)\mathbf{P}(X_k=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2\mathbf{P}(X_k=i)+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(j+1)(n-j)\mathbf{P}(X_k=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(i^2+(n-1)i-i^2+n)\mathbf{P}(X_k=i)\end{aligned}$$

Le terme $j=n$ de la seconde somme est nul.

$$= \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\mathbf{P}(X_k = i) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(X_k = i)$$
$$= \frac{n-1}{n}\mathbf{E}(X_k) + 1.$$

La suite $(\mathbf{E}(X_k))_k$ est donc une suite arithmético-géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$.
Posons $u_k = \mathbf{E}(X_k)$, de sorte que $u_{k+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)u_k + 1$.
Nous savons alors que si ℓ est l'unique solution de $\ell = (1 - \frac{1}{n})\ell + 1 \Leftrightarrow \ell = n$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_k = \ell + \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$.
En particulier, pour $k = 1$, il vient

$$u_1 = 1 = n + \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)^1 \Leftrightarrow \lambda = -n.$$

Et donc $\forall k \in \mathbf{N}$,
$$\mathbf{E}(X_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

Remarque *: ce résultat ressemble beaucoup à celui de l'exercice 5. Et pour cause, c'est la même situation (sauf qu'au lieu de choisir des étages on choisit des chansons) !*
Et donc nous avons là deux méthodes différentes qui permettent toutes deux de calculer l'espérance. Celle de l'exercice 5 était bien plus efficace, mais celle que nous avons mis en œuvre ici permet également de calculer récursivement (c'est la question 3) la loi de X_k.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.15

Prouvons qu'il existe au plus une loi de moments fixés.
Plus précisément, donnons nous $(a_1, \dots, a_n)$ des réels, et prouvons qu'il existe au plus une loi de variable aléatoire X telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{E}\left(X^k\right) = a_k$.
Par le théorème de transfert, cela revient à demander que les $\mathbf{P}(X = x_i)$ soient solution de

$$\begin{cases} x_0\mathbf{P}(X = x_0) + x_1\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n\mathbf{P}(X = x_n) & = a_1 \\ x_0^2\mathbf{P}(X = x_0) + x_1^2\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n^2\mathbf{P}(X = x_n) & = a_2 \\ & \vdots \\ x_0^n\mathbf{P}(X = x_0) + x_1^n\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + x_n^n\mathbf{P}(X = x_n) & = a_n \end{cases}$$

Ajoutons en plus la contrainte évidente $\mathbf{P}(X = x_0) + \mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_n) = 1$.
Alors $(\mathbf{P}(X = x_0), \dots, \mathbf{P}(X = x_n))$ est solution d'un système dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Or cette matrice est inversible. Ce sera du cours une fois le chapitre de déterminants abordé, mais nous l'avons en fait déjà rencontrée : c'est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_n[X]$ et $\mathbf{R}^{n+1}$ de l'application $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$, qui est un isomorphisme. Elle est donc inversible.
Donc le système possède une unique solution.
Notons que cette solution n'est pas forcément une loi de probabilité, parce qu'il se pourrait que l'une de ses composantes soit négative, mais en tous cas ceci prouve bien qu'il existe au plus une loi de probabilité qui satisfait les conditions requises.

Plus généralement, soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$.
Les deux supports de X et de Y étant finis, l'union des deux supports l'est également.
Soient alors $\{x_0, \dots, x_n\}$ tels que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) \subset \{x_0, \dots, x_n\}$. Alors par la question précédente, X et Y ont même loi.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.16

Puisque X et Y ne prennent que les valeurs 0 ou 1, il en est de même de XY, qui suit donc une loi de Bernoulli.
Et alors son paramètre est $\mathbf{P}([XY = 1]) = \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$.

> **Remarque** Ce paramètre est égal au produit des paramètres de X et Y si (et seulement si) X et Y sont indépendantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.17

Si X est une variable indépendante de toute variable, alors en particulier elle est indépendante d'elle même.
Nous allons prouver que X suit une loi certaine : supposons par l'absurde qu'il existe $a \neq b$ deux éléments de $X(\Omega)$ tels que $\mathbf{P}(X = a) \neq 0$ et $\mathbf{P}(X = b) \neq 0$.
Alors $\mathbf{P}([X = a] \cap [X = b]) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
Mais cette probabilité doit être égale à $\mathbf{P}(X = a)\mathbf{P}(X = b) \neq 0$.
Donc X ne peut pas prendre deux valeurs distinctes avec probabilités non nulles.
Elle suit donc une loi certaine.

> **Remarque** En réalité, il reste un tout petit peu de travail : elle prend **au plus** une valeur avec proba non nulle.
> Mais «la somme des probas vaut 1» (ou plutôt devrais-je dire $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1$) donc elle prend au moins une valeur, donc exactement une, qui est donc avec proba 1.

Inversement, si X suit la loi certaine égale à a, et si Y est une variable aléatoire quelconque, alors pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \cap Y(\Omega)$, on a :

- si $x \neq a$: $[X = x] \cap [Y = y] \subset [X = x]$, et donc

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

- si $x = a$, alors $[Y = y] = ([Y = y] \cap [X = a]) \cup ([Y = y] \cap [X \neq a])$ et donc

$$\mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}([Y = y] \cap [X = a]) + \mathbf{P}([Y = y] \cap [X \neq a]).$$

Mais[4] $0 \leqslant \mathbf{P}([Y = y] \cap [X \neq a]) \leqslant \mathbf{P}(X \neq a) = 0$, et donc

$$\mathbf{P}([Y = y] \cap [X = a]) = \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}(Y = y) \times 1 = \mathbf{P}(Y = y)\mathbf{P}(X = a).$$

[4] Par croissance de la probabilité.

Alternative si X est à valeurs réelles : si X est indépendante de toute variable, alors elle est indépendante d'elle même, et donc $0 = X - X$, et ces deux variables sont indépendantes, de sorte que

$$0 = \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}(X - X) = \mathbf{V}(X) + (-1)^2\mathbf{V}(X) = 2\mathbf{V}(X).$$

Donc $\mathbf{V}(X) = 0$, et par conséquent X suit une loi certaine.

> **⚠ Attention !** La variance d'une différence n'est pas la différence des variances : le signe moins sort avec un carré.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.18

Supposons X et Y indépendantes. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$,

$$m_{i,j} = \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j).$$

Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est $\mathbf{P}(Y = y_j)\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \mathbf{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

Donc toutes les colonnes de M sont colinéaires à $\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \mathbf{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$, et donc M est de rang au plus 1.
N'étant pas nulle[5], M est de rang exactement 1.

[5] La somme de ses coefficients vaut 1 car

$$\{[X = x_i] \cap [Y = y_j]\}$$

est un système complet d'événements.

Inversement, supposons M de rang 1. L'une de ses colonnes C_i est non nul nulle, et quitte à renuméroter les x_i, supposons que c'est C_1.
Alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_1$.
D'autre part, on a

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_p = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_1] \cap [Y = y_j]) \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_2] \cap [Y = y_j]) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{P}([X = x_n] \cap [Y = y_j]) \end{pmatrix}$$

Mais par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{[Y = y_j],\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$, on reconnaît là les probabilités $\mathbf{P}(X = x_1), \dots, \mathbf{P}(X = x_n)$.

Donc $C_1 + \cdots + C_p = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)C_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$. Appelons C_X ce vecteur colonne.

Et donc pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, il existe μ_j (qui est en fait $\dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}$) tel que $C_j = \mu_j C_X$.

Appliquons cette fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X = x_i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de sorte que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{n} \mu_j \mathbf{P}(X = x_i) = \mu_j \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X = x_i) = \mu_j.$$

Et donc on a bien pour tout (i, j),

$$\mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \mu_j \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(Y = y_j)\mathbf{P}(X = x_i).$$

Par conséquent, X et Y sont indépendantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.19

Notons que la condition $|i - j| > 1$ signifie $i \neq j$ (mais il est évident que si $i = j$, alors Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes[6]) et i et j non consécutifs.
Commençons par supposer que $|i - j| > 1$. Alors, les variables X_i, X_{i+1}, X_j et X_{j+1} étant mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions[7], il en est de même de $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$.

Supposons au contraire que $|i - j| \leqslant 1$. Comme on a déjà traité le cas $i = j$, on peut[8] supposer que $j = i + 1$.
Alors $Y_i = X_i X_{i+1}$ et $Y_j = X_{i+1} X_{i+2}$.
Y_i et Y_j suivent des lois de Bernoulli puisqu'elles ne prennent que les valeurs 0 et 1, et de plus, on a

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = \mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1]).$$

Par indépendance de X_i et X_{i+1}, il vient alors

$$\mathbf{P}(Y_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = 1)\mathbf{P}(X_{i+1} = 1) = p^2$$

et donc Y_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2. On prouverait le même résultat pour Y_j.
Or

$$\mathbf{P}([Y_i = 1] \cap [Y_j = 1]) = \mathbf{P}([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_{i+2} = 1]) = p^3 \neq p^4 = \mathbf{P}(Y_i = 1)\mathbf{P}(Y_j = 1),$$

donc Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

[6] car elles sont égales !

[7] Qui s'applique car $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$.

[8] Quitte à échanger i et j.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.20

1. Il est clair que $Z(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et pour $k \in Z(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Z \leqslant k) = \mathbf{P}([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]) = \mathbf{P}(X \leqslant k)\mathbf{P}(Y \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Et alors, puisque Z est à valeurs entières, pour tout k,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leqslant k) - \mathbf{P}(Z \leqslant k - 1) = \frac{k^2}{n} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

Remarque
En réalité il y aurait quelques précautions à prendre pour $k = 1$, c'est-à-dire s'assurer que la formule donnée ci-dessus pour $\mathbf{P}(Z \leqslant 0)$ est valable.

2. Sur le même principe, $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et pour $k \in U(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(U \geqslant k) = \mathbf{P}([X \geqslant k] \cap [Y \geqslant k]) = \mathbf{P}(X \geqslant k)\mathbf{P}(Y \geqslant k) = \left(\frac{n - k + 1}{n}\right)^2$$

puis $\mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(U \geqslant k) - \mathbf{P}(U \geqslant k + 1) = \frac{2n-2k+1}{n^2}$.

3. On a $T(\Omega) = \llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$.
Et alors, pour $k \in \llbracket T(\Omega)$, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = i],\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, on a

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X = i] \cap [T = k]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = i - k]).$$

Et donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = i - k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(Y = i - k).$$

Danger ! Ne remplaçons pas trop vite $\mathbf{P}(Y = i - k)$ par $\frac{1}{n}$, ceci ne vaudra que si $1 \leqslant i - k \leqslant n$.

► **Si** $k \geqslant 0$, alors $i - k \geqslant 1 \Leftrightarrow i \geqslant k + 1$ et $i - k \leqslant n \Leftrightarrow i \leqslant n + k$, et cette dernière condition est toujours vérifiée.
Donc

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n - k + 1}{n^2}.$$

► **Si** $k < 0$, alors pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a bien $i - k \geqslant 1$, et $i - k \leqslant n \Leftrightarrow i \leqslant n + k$. Et donc

$$\mathbf{P}(T = k) = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{n^2} = \frac{n + k}{n^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.21

L'énoncé peut sembler bancal au premier abord, mais l'événement A dont nous cherchons la probabilité est

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \det(M(\omega)) \neq 0\}$$

et donc est parfaitement défini. Mais $\det(M(\omega)) \neq 0$ si et seulement si $X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0$.
Il s'agit donc de calculer la probabilité $\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 \neq 0\right)$.
Cherchons plutôt la probabilité de l'événement contraire $\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right)$.
À cet effet, utilisons le système complet d'événements $\{[X = k],\ -n \leqslant k \leqslant n\}$.
On a alors par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right) = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{P}([X = k] \cap [X^2 - Y^2 = 0]) = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y^2 = k^2]).$$

Puisque X et Y sont indépendantes, par le lemme des coalitions[9] il en est de même de X et Y^2, et donc $\mathbf{P}([X = k] \cap [Y^2 = k^2]) = \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y^2 = k^2)$.
Nous savons déjà que $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2n+1}$.
Et $\mathbf{P}(Y^2 = k^2) = \begin{cases} \mathbf{P}(Y = 0) & \text{si } k = 0 \\ \mathbf{P}(Y = -k) + \mathbf{P}(Y = k) & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{si } k = 0 \\ \frac{2}{2n+1} & \text{sinon} \end{cases}.$
Il vient donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X^2 - Y^2 = 0\right) &= \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \frac{1}{2n+1}\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{4n+1}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

En passant à l'événement contraire, $\mathbf{P}(A) = 1 - \dfrac{4n+1}{(2n+1)^2} = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^2$.

[9] On a ici des «paquets» formés d'une seule variable aléatoire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.22

Attention ! Cet exercice n'est pas abordable pour l'instant, vous pourrez le reprendre une fois le déterminant défini (chapitre 30).

Rappelons que les $A_{i,j}$ étant centrées, on a $\mathbf{E}(A_{i,j}) = 0$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
On a alors

$$\mathbf{E}(\det A) = \mathbf{E}\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i),i}\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)$$

Linéarité de l'espérance.

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(A_{\sigma(i),i}\right)$$

L'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit de l'espérance.

$$= 0.$$

De même, on a

$$\mathbf{V}(\det(A)) = \mathbf{V}\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)$$
$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{V}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right) + \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} \mathrm{Cov}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}, \varepsilon(\tau)\prod_{j=1}^n A_{\tau(j),j}\right).$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons alors $A_\sigma = \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}$, si bien que

$$\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)^2}_{=1} \mathbf{V}(A_\sigma) + \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\,\mathrm{Cov}(A_\sigma, A_\tau).$$

Pour $\sigma \neq \tau \in \mathfrak{S}_n$, il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(k) \neq \tau(k)$, et alors

$$\mathbf{E}\left(A_\sigma, A_\tau\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i} \prod_{j=1}^n A_{\tau(j),j}\right) = \mathbf{E}\left(A_{\sigma(k),k} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^n A_{\sigma(i),i} A_{\tau(k),k} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n A_{\tau(j),j}\right).$$

Mais $A_{\sigma(k),k}$ est indépendante de toutes les autres variables apparaissant dans le produit, donc par le lemme des coalitions, est indépendante du produit, si bien que

$$\mathbf{E}(A_\sigma A_\tau) = \mathbf{E}\left(A_{\sigma(k),k}\right) \mathbf{E}\left(A_{\tau(k),k} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^n A_{\sigma(i),i} A_{\tau(i),i}\right) = 0.$$

On a alors, par la formule de Huygens,

$$\mathrm{Cov}(A_\sigma, A_\tau) = \mathbf{E}\left(A_\sigma A_\tau\right) - \mathbf{E}(A_\sigma)\mathbf{E}(A_\tau) = 0 - 0 \times 0 = 0.$$

Et donc il ne reste que

$$\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{V}(A_\sigma).$$

Mais pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\mathbf{V}(A_\sigma) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A^2_{\sigma(i),i}\right) - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i),i}\right)^2$$
$$= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(A^2_{\sigma(i),i}\right) - \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(A_{\sigma(i),i})\right)^2$$
$$= \prod_{i=1}^n \underbrace{\left(\mathbf{V}(A_{\sigma(i),i}) + E(A_{\sigma(i),i})^2\right)}_{=1} - \left(\prod_{i=1}^n 0\right)^2$$
$$= 1^n = 1.$$

Détails

Dans les deux cas, on a affaire à l'espérance d'un produit de variables indépendantes (les $A^2_{\sigma(i),i}$ le sont car les $A_{\sigma(i),i}$ le sont).

Et donc au final, $\mathbf{V}(\det(A)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{V}(A_\sigma) = n!$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.23

Nous allons utiliser dans toute la suite une formule qui découle directement des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $\{[X = \ell], 1 \leqslant \ell \leqslant n\}$:

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}([X+Y=k] \cap [X=\ell]) = \sum_{\ell=1}^n \mathbf{P}(X=\ell)\mathbf{P}(Y=k-\ell).$$

1. Notons que X et Y sont indépendantes, et par hypothèse, $X+Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2,2n]\!])$.
On a alors,
$$p_1q_1 = \mathbf{P}(X+Y=2) = \frac{1}{2n-1} \text{ et } p_nq_n = \mathbf{P}(X+Y=2n) = \frac{1}{2n-1}.$$

2. Par indépendance de X et Y, on a
$$\frac{1}{2n-1} = \mathbf{P}(X+Y=n+1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X=k]\cap[Y=n-k]) = \sum_{k=1}^{n} p_q q_{n-k}.$$
Et donc
$$\frac{1}{2n-1} = p_1q_n + p_2q_{n-1} + \cdots + p_{n-1}q_2 + p_nq_n \geqslant p_1q_n + p_nq_1.$$

3. Dans l'inégalité qui précède, substituons q_1 par $\dfrac{1}{(2n-1)p_1}$ et q_n par $\dfrac{1}{(2n-1)p_n}$.
Il vient alors
$$\frac{1}{2n-1}\frac{p_1}{p_n} + \frac{1}{2n-1}\frac{p_n}{p_1} \leqslant \frac{1}{2n-1} \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_n} + \frac{p_n}{p_1} \leqslant 1.$$
Mais il est classique[10] que pour tout $x>0$, $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$, contredisant le fait que
$$\frac{p_1}{p_n} + \frac{1}{\frac{p_1}{p_n}} \leqslant 1.$$
On en déduit donc qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme.

[10] Étudier la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.24

1. Puisque Φ'' est positive, Φ' est croissante strictement sur $]c,d[$.
Mais par le théorème de Rolle, qui s'applique car Φ est continue sur $[c,d]$ et dérivable sur $]c,d[$, il existe $\alpha \in]c,d[$ tel que $\Phi'(\alpha)=0$.
Donc Φ' est strictement négative sur $]c,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,d[$.
Donc Φ est strictement décroissante sur $[c,\alpha]$, avec $\Phi(c)=0$, donc elle est négative sur $[c,\alpha]$.
Et de même, elle est croissante sur $[\alpha,d]$, avec $\Phi(d)=0$, donc elle est négative sur $[\alpha,d]$.
2. Utilisons donc la question précédente, en posant, à $s>0$ fixé
$$\Phi(t) = e^{st} - \frac{c-t}{c-d}e^{ds} - \frac{t-d}{c-d}.$$
Alors elle est évidemment $\mathscr{C}^2$ sur $[c,d]$, avec $\Phi(c)=\Phi(d)=0$, et $\Phi''(t)=s^2e^{st}>0$.
3. Rappelons que centrée signifie que $\mathbf{E}(Y)=0$.
La majoration de la question précédente prouve que
$$e^{sY} \leqslant \frac{c-Y}{c-d}e^{sd} + \frac{Y-d}{c-d}e^{sc}.$$
Et donc par croissance et linéarité de l'espérance,
$$\mathbf{E}\left(e^{sY}\right) \leqslant \frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{\mathbf{E}(Y)}{c-d}e^{sd} + \frac{\mathbf{E}(Y)}{c-d}e^{sc} - \frac{d}{c-d}e^{sc} \leqslant \frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{d}{c-d}e^{sc}.$$
Ne reste alors qu'à passer au logarithme pour obtenir l'inégalité demandée.
Si on dispose du résultat en indication[11], alors il suffit de composer par l'exponentielle, mais la difficulté réside donc dans la preuve de l'inégalité annoncée.
J'en donne ici une preuve, elle est sûrement instructive, mais gardons à l'esprit que sans indication, elle était très dure.

À c et d fixés, posons $u=s(d-c)$, de sorte que $s=\dfrac{u}{d-c}$.
Soit alors $\psi(u) = \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{sd} - \dfrac{d}{c-d}e^{sc}\right) = \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{ud/(d-c)} - \dfrac{d}{c-d}e^{sc/(d-c)}\right)$.

[11] Franchement peu utile, on comprend bien qu'il s'agit de démontrer ceci, toute la question est comment le prouver...

Soit alors $p = \dfrac{c}{c-d}$, de sorte que $\dfrac{d}{c-d} = \dfrac{c}{c-d} - 1 = p - 1$.
Alors $\psi(u) = \ln\left(pe^{u-up} + (p-1)e^{-up}\right) = \ln(e^{-up}) + \ln(pe^u + (p-1)) = -pu + \ln(pe^u + p - 1)$.
La fonction ψ est évidemment dérivable sur $\mathbf{R}_+$, avec

$$\psi'(u) = -p + \frac{p}{pe^u + p - 1} \text{ et } \psi''(u) = -\frac{p(p-1)e^u}{(pe^u + p - 1)^2}.$$

On a alors notamment $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, et donc par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $u > 0$,

$$\psi(u) = \psi(0) + \psi'(0)u + \int_0^u \psi''(t)(u-t)\,dt = \int_0^u \psi''(t)(u-t)\,dt.$$

Mais en posant $\alpha = pe^t$ et $\beta = p - 1$, on a $\psi''(t) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.
Et il est classique que pour $\alpha, \beta > 0$, $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$, et donc $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Et donc pour $u > 0$ fixé et tout $t \in [0, u]$, $\psi''(t) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
On en déduit que pour tout $u > 0$

$$\psi(u) \leqslant \int_0^u \frac{(u-t)}{4}\,dt \leqslant \left[\frac{-(u-t)^2}{8}\right]_0^u \leqslant \frac{u^2}{8}.$$

Et donc[12] en remplaçant p et s par leurs expressions, pour tout $s > 0$,

$$\ln\left(\frac{c}{c-d}e^{sd} - \frac{d}{c-d}e^{sc}\right) \leqslant \frac{s^2(d-c)^2}{8}.$$

[12] Ouf ! Je ne m'explique pas la raison pour laquelle le sujet d'origine ne comprenait pas de question intermédiaire...

4. On a, pour tout $s > 0$, $[S - \mathbf{E}(S) \geqslant t] = [e^{s(S-\mathbf{E}(S))} \geqslant e^{st}]$. Or la variable aléatoire $e^{s(S-\mathbf{E}(S))}$ est positive[13], donc par l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}\left(e^{s(S-\mathbf{E}(S))} \geqslant e^{st}\right) \leqslant e^{-st}\mathbf{E}\left(e^{s(S-\mathbf{E}(S))}\right).$$

[13] Hypothèse indispensable dans l'inégalité de Markov.

Mais $e^{s(S-\mathbf{E}(S))} = \displaystyle\prod_{i=1}^n e^{s(X_i - \mathbf{E}(X_i))}$. Et les X_i étant indépendantes, il en est de même[14] des $e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}$.
Donc $\mathbf{E}\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(e^{s(X_i-\mathbf{E}(X_i))}\right)$, d'où l'inégalité souhaitée.

[14] C'est le lemme des coalitions.

5. Posons $Y_i = X_i - \mathbf{E}(X_i)$, qui est centrée.
Puisque $\mathbf{E}(X_i) \in [a, b]$, on a $a - \mathbf{E}(X_i) \leqslant X_i - \mathbf{E}(X_i) \leqslant b - \mathbf{E}(X_i)$. Et donc par la question 3, avec $c = a - \mathbf{E}(X_i)$ et $d = b - \mathbf{E}(X_i)$, pour tout $s > 0$,

$$\mathbf{E}\left(e^{sY_i}\right) \leqslant \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

Et donc en reprenant la majoration de la question 4,

$$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st}\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right) \leqslant \exp\left(-st + n\frac{(b-a)^2}{8}\right).$$

6. Ne reste plus qu'à remarquer que l'inégalité ainsi obtenue est valable pour tout $s > 0$. Donc à a, b, n, t fixés, nous pouvons faire varier s pour trouver le meilleur majorant possible.
Mais le terme à l'intérieur de l'exponentielle est un polynôme de degré 2 en s, qui atteint son minimum en $s = \dfrac{4t}{ns^2(b-a)^2}$.
Ce minimum vaut donc $-\dfrac{2t^2}{n(b-a)^2}$, ce qui nous conduit bien à l'inégalité demandée :

$$\mathbf{P}(S - \mathbf{E}(S) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.25

Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.
Mais par bilinéarité de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y)$$

si bien que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.26

1. Chaque joueur marque (ou non) indépendamment des autres, et donc on compte le nombre de succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Et alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
2. La probabilité qu'un joueur rate ses deux lancers est $(1-p)^2$ (par indépendance des deux lancers), et donc la probabilité qu'il marque au moins un des deux lancers est $1-(1-p)^2$. On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-(1-p)^2)$.
3. Y représente le nombre de joueurs ayant marqué uniquement leur second lancer franc. Comme pour chaque joueur, ceci se produit avec probabilité $p(1-p)$, on en déduit que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p(1-p))$.
4. X et Y ne sont pas indépendantes car on a

$$\mathbf{P}(X=n) \neq 0, \mathbf{P}(Y=n) \neq 0, \text{et pourtant}^{15}\ \mathbf{P}([X=n] \cap [Y=n]) = 0.$$

De plus, on a $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$, ce qui peut encore se réécrire sous la forme

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}(X+Y) - \mathbf{V}(X) - \mathbf{V}(Y)\right).$$

Soit encore

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{n}{2}\left((1-p)^2(1-(1-p)^2) - p(1-p) - p(1-p)(1-p(1-p))\right)\\ &= \frac{n}{2p}(1-p)\left((1-p)(2-p) - 1 - (1-p+p^2)\right)\\ &= \frac{n(1-p)p}{2}\left(2-p-2p+p^2-1-1+p-p^2\right)\\ &= -np^2(1-p)\end{aligned}$$

Notons qu'on aurait pu commencer par calculer la covariance, constater qu'elle est non nulle, et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

[15] En effet, on ne peut avoir à la fois les n joueurs ayant marqué leur premier lancer franc et ayant manqué le premier et réussi le second.

Astuce
Cette formule est toujours vraie, et facile à retrouver. Elle permet de calculer la covariance si l'on connait $\mathbf{V}(X+Y)$, $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Signe
Notons qu'on a une covariance négative. Cela signifie qu'en moyenne, quand X augmente, Y a tendance à diminuer, et vice-versa. Cela semble conforme à l'intuition : plus le nombre de joueurs marquant leur premier panier est important, plus le nombre de joueurs manquant le premier et réussiant le second est faible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.27

1. Il est évident que U_1 et U_2 suivent toutes deux la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Donc X est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Et pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $[X \geqslant k] = [U_1 \geqslant k] \cap [U_2 \geqslant k]$.
Par indépendance de U_1 et U_2, il vient donc

$$\mathbf{P}(X \geqslant k) = \mathbf{P}(U_1 \geqslant k)\mathbf{P}(U_2 \geqslant k) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^2.$$

Puis $\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(X \geqslant k) - \mathbf{P}(X \geqslant k+1) = \dfrac{2n-2k+1}{n^2}$.
Et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2n-2k+1}{n^2}\\ &= \frac{2n+1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}\\ &= (n+1)\frac{3(2n+1)-2(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

Remarque : si on connait la formule $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k)$, l'espérance se calcule plus facilement.

2. Des deux variables X et Y, l'une représente le dé qui a donné le plus grand résultat, l'autre représente l'autre dé, et donc $X + Y = U_1 + U_2$.
Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(U_1) + \mathbf{E}(U_2)$ soit

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(U_1) + \mathbf{E}(U_2) - \mathbf{E}(X) = 2\frac{n+1}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

3. Sur le même principe, $XY = U_1U_2$, et par indépendance de U_1 et U_2,

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(U_1)\mathbf{E}(U_2) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Il vient alors, par la formule de Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^2(4n-1)(2n+1)}{36n^2} = \frac{(n^2-1)^2}{36n^2}.$$

⚠ Attention !
On ne dit pas que l'une des deux variables U_1 ou U_2 est égale à X.
Mais que pour chaque $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est égal soit à $U_1(\omega)$, soit à $U_2(\omega)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.28

1. X_i est une variable de Bernoulli car elle ne prend que les valeurs 0 et 1. De plus, $[X_i = 0]$ si et seulement si tous les dés ont donné un nombre différent de i, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Donc X_i suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

Astuce
Pour une loi de Bernoulli, il suffit de déterminer l'un des deux nombres $\mathbf{P}(X = 0)$ et $\mathbf{P}(X = 1)$ pour déterminer le paramètre. Autant choisir celui qui est le plus facile à obtenir !

2. On a $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ et donc par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{6} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right).$$

3. Notons que X_iX_j est encore une variable de Bernoulli car elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. De plus, $[X_iX_j = 1]$ si et seulement si les numéros i et j sont apparus au cours des n lancers. En passant à l'événement contraire, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([X_iX_j = 0]) &= \mathbf{P}([X_i = 0] \cup [X_j = 0])\\ &= \mathbf{P}(X_i = 0) + \mathbf{P}(X_j = 0) - \mathbf{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0])\\ &= 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Explication
Si $X_i = 0$ et $X_j = 0$, alors les différents lancers n'ont donné que des faces portant des numéros différents de i et de j, ce qui arrive à chaque lancer avec probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On en déduit que X_iX_j suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ et donc

$$\mathbf{E}(X_iX_j) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Par la formule de Huygens, on en déduit que la covariance $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ vaut

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}(X_iX_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j) = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n.$$

En particulier, cette covariance est non nulle, et donc X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Intuition
Cette non indépendance est intuitive... mais pas trop. L'idée est que si on sait que i n'est pas sorti, alors j a plus de chances d'être sorti (puisque tous les dés ont donné un résultat parmi les cinq faces qui ne sont pas égales à j).

4. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(X_1 + \cdots + X_6) &= \sum_{i=1}^{6} \mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\\ &= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right)\\ &= 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n + 30\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Détails
Le nombre de termes de la somme est le nombre de parties à deux éléments de $[\![1, 6]\!]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 29.29

1. Il s'agit donc de prouver que les n^2 nombres donnés par l'énoncé sont positifs, et que leur somme vaut 1.
La positivité ne pose pas de difficulté.
Pour la somme, n'oublions pas que $\binom{n-k}{\ell} = 0$ si $\ell > n-k$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^kq^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= (p+1-p)^n = 1.$$

Loi conjointe

La loi conjointe d'un couple n'est rien d'autre que la loi de la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]^2$.
Il s'agit donc ici d'appliquer la proposition 28.11 du cours pour une variable à valeurs dans $[\![0,n]\!]^2$.

Binôme de Newton.

Re-binôme.

2. Puisque la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\{[Y=\ell], \ell \in [\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, pour $k \in [\![0,n]\!]$, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{\ell=0}^{n}\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\ &= \binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell r^{n-k-\ell}\\ &= \binom{n}{k}p^k(q+r)^{n-k}\\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Explication

Si $k+\ell > n \Leftrightarrow \ell > n-k$, alors

$$\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell]) = 0.$$

Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On montrerait de même[16] que Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.

[16] En notant tout de même que

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}$$

ce qui se prouve en revenant aux factorielles.

3. On a $\mathbf{P}([X=n]\cap[Y=n]) = 0$, alors que $\mathbf{P}(X=n)$ et $\mathbf{P}(Y=n)$ sont non nuls, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}k\ell\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=\ell])\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}k\ell\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^kq^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n-k}k\ell\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}p^kq^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\sum_{\ell=1}^{n-k}(n-k)\binom{n-k-1}{\ell-1}p^kq^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^kq\sum_{\ell'=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{\ell'}q^{\ell'}(1-p-q)^{n-k-1-\ell'}\\ &= \sum_{k=1}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^kq(1-p)^{n-k-1}\\ &= \frac{q}{1-p}\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Si k ou ℓ est nul, le terme correspondant l'est aussi.

Binôme.

À ce stade, il est possible, mais un peu fastidieux de calculer directement les sommes. Notons plutôt que

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{q}{1-p}\left(n\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right).$$

Mais ces deux sommes nous sont familières : la première est $\mathbf{E}(X)$, la seconde est $\mathbf{E}(X^2)$. Et par la formule de Huygens, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2$. Donc

$$\mathbf{E}(XY) = \frac{q}{1-p}\left(n^2p - np(1-p) - n^2p^2\right) = n(n-1)pq.$$

Et donc enfin, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = n(n-1)pq - n^2pq = -npq$.

Commentaires *: ces lois se rencontrent en fait lors de répétitions d'une expérience à trois issues*[17]*, où X compterait le nombre de fois où l'on a obtenue la première issue, de probabilité p, lors de n répétitions, et où Y compte le nombre de fois où on obtient la seconde issue, de probabilité q lors des mêmes répétitions.*

On peut alors prouver que la loi de (X, Y) est celle ci-dessus, et on comprend alors mieux l'origine des binomiales, ainsi que le fait que la covariance soit négative (plus on a de 1, moins on a de 2).

[17] D'où le nom de loi trinomiale.

Solution de l'exercice 29.30

1. Puisque X et Y sont indépendantes, on a $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = M^2$.
De plus, par la formule de Huygens, on a $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = V + M^2$ et de même $\mathbf{E}(Y^2) = V + M^2$.
Et alors, X^2 et Y^2 étant indépendantes[18], il vient

$$\mathbf{E}((XY)^2) = \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) = (V + M^2)^2.$$

Alors, toujours par la formule de Huygens,

$$\mathbf{V}(XY) = \mathbf{E}((XY)^2) - \mathbf{E}(XY)^2 = (V + M^2)^2 - (M^2)^2 = V^2 + 2VM^2 + M^4 - M^4 = V^2 + 2VM^2.$$

[18] Car X et Y le sont.

2. D'après la formule de Huygens[19], on a

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X+Y, XY) &= \mathbf{E}(X+Y(XY)) - \mathbf{E}(X+Y)\mathbf{E}(XY)\\ &= \mathbf{E}(X^2Y) + \mathbf{E}(XY^2) - (\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y))\mathbf{E}(XY)\\ &= \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\ &= (V + M^2)M + M(V + M^2) - M^3 - M^3 = 2MV.\end{aligned}$$

Et donc $\text{Cov}(X + Y, XY) \neq 0$, de sorte que XY et $X + Y$ ne sont pas indépendantes.

[19] Celle pour la covariance.

X^2 et Y sont indépendantes, de même que X et Y^2.

Solution de l'exercice 29.31

1. Il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ possédant i pour point fixe que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, c'est-à-dire $n - 1$.
Et donc $\mathbf{P}(F_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

De même, pour $i \neq j$, il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ possédant i et j pour point fixe que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$, donc $(n-2)!$.
Et donc $\mathbf{P}(F_i \cap F_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. Ici la loi de N serait trop difficile à obtenir, car il est délicat de dénombrer le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ possédant exactement k points fixes.
En revanche, on peut remarquer que $N = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{F_i}$.
Or par ce qui précède, les $\mathbb{1}_{F_i}$ suivent toutes la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right)$, si bien que $\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) = \frac{1}{n}$.
Et alors par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

En moyenne, une permutation de $[\![1, n]\!]$ possède un seul point fixe.

Remarque
Cela peut paraître peu au premier abord, mais il ne faut pas oublier que beaucoup de permutations n'ont pas de point fixe, et font donc considérablement baisser l'espérance de N.

3. On a donc

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) = \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}\right) - \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right)\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_j}\right) = \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}\right) - \frac{1}{n^2}.$$

Si $i = j$, on a évidemment $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}) = \mathbf{V}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$.
Si $i \neq j$, alors la variable $\mathbb{1}_{F_i}\mathbb{1}_{F_j}$ vaut 1 si et seulement si F_i et F_j sont simultanément réalisés. Autrement dit, il s'agit de $\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}$, qui suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$ d'après la question 1.
Et donc $\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{F_i}\ \mathbb{1}_{F_j}\right) = \frac{1}{n(n-1)}$.
On en déduit que $\mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}\right) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Et alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(N) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{F_i}\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{V}\left(\mathbb{1}_{F_i}\right) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{n^2(n-1)}\\
&= \frac{n-1}{n} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)}\\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.
\end{aligned}$$

4. Par l'inégalité de Markov[20], on a

$$\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \frac{\mathbf{E}(N)}{4} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Ce n'est pas la majoration attendue, Markov est trop grossière...

Notons plutôt que $[N \geqslant 4] = [N-1 \geqslant 3] \subset [|N-1| \geqslant 3]$.
Or par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbf{P}(|N-1| \geqslant 3) = \mathbf{P}(|N - \mathbf{E}(N)| \geqslant 3) \leqslant \frac{\mathbf{V}(N)}{3^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Et donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(N \geqslant 4) \leqslant \mathbf{P}(|N-1| \geqslant 3) \leqslant \frac{1}{9}.$$

[20] N est bien une variable aléatoire positive.

Solution de l'exercice 29.32

On sent bien qu'il va être désagréable de travailler avec Z, tout simplement car on ne sait pas comment l'écrire.
Mais nous savons que $\mathbf{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$.
Notons U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. Alors $Z' = e^{\frac{2i\pi}{n}U}$ suit la même loi que Z.
Et par conséquent, pour toute application f définie sur $\mathbf{U}_n$, $f(Z)$ et $f(Z')$ ont même loi.
Donc ceci vaut en particulier si f est la fonction «module dans $[0, 2\pi[$, la fonction partie réelle, la fonction partie imaginaire.
Mieux : cela vaut aussi pour la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array}\right.$, de sorte que les lois conjointes de (X, Y) et de $(\mathrm{Re}(Z'), \mathrm{Im}(Z'))$ sont les mêmes.

Remarque
On a ici choisi de voir un couple de variables aléatoires réelles comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^2$. Le fait que la loi conjointe soit la même sera important lorsqu'on en viendra à l'étude de la covariance, qui dépend de la loi conjointe, et pas seulement de marginales.

1. L'argument dans $[0, 2\pi[$ de Z' est $\frac{2\pi}{n}U$, et donc puisque θ a même loi que $\frac{2\pi}{n}U$, $\mathbf{E}(\theta) = \frac{2\pi}{n}\mathbf{E}(U) = \pi$.

Par ailleurs, $\mathrm{Re}(Z') = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}U\right)$.
Par le théorème de transfert, on a donc

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}U\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\mathbf{P}(U=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Sur le même principe, $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

Et alors

$$\mathbf{E}(X) + i\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = 0.$$

Et donc $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$.

2. Avec nos notations, on a cette fois $XY = \cos\left(\frac{2\pi}{n}U\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}U\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{n}U\right)$.
Et donc, toujours par le théorème de transfert,

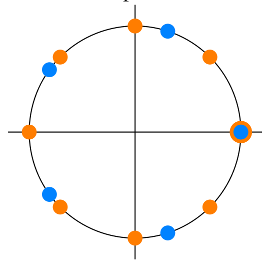
$$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$$

dont on prouve par des arguments similaires à ceux employés ci-dessus qu'elle est nulle.
Et donc par la formule de Huygens, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$.

3. Ce type de question sent le piège à plein nez, et on attend bien entendu de voir si vous allez ou non dire que les variables sont indépendantes *car la covariance est nulle*[21].
Bref, les variables sont non corrélées, mais il faut encore travailler pour déterminer si elles sont ou non indépendantes.
Mais, pour $n \geqslant 3$, prenons $x = 1$ et $y = \sin\frac{2\pi}{n}$, de sorte que $\mathbf{P}(X=x) \neq 0$ et $\mathbf{P}(Y=y) \neq 0$.
Mais $x+iy$ n'est pas dans $\mathbf{U}_n$, donc $\mathbf{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \mathbf{P}(Z=x+iy) = 0$.
Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
En revanche, ce raisonnement ne tient plus pour $n=2$, mais alors Y est une variable constante égale à 0, et donc indépendante de toute autre variable aléatoire (et en particulier de X).

Prévisible

Placer les racines de l'unité sur un cercle trigonométrique permet d'anticiper ce résultat.
Peut-être que pour en être totalement convaincu, il est plus sage de faire une figure avec une valeur paire de n et une valeur impaire.



La seule qui n'est pas complètement évidente est $\mathbf{E}(X)$ dans le cas où n est impair (ici en bleu).

21 Rappelons que c'est la réciproque qui est vraie.

Groupes symétriques et déterminants

30

Il s'agit dans ce chapitre de généraliser la notion de déterminant que nous avons déjà rencontrée pour les matrices 2×2.
Originellement introduits pour l'étude de systèmes d'équations linéaires, ce sont aujourd'hui des outils omniprésents en mathématiques, en algèbre linéaire bien entendu (systèmes d'équations, inversibilité de matrices, formule générale pour l'inverse d'une matrice $n \times n$), mais aussi en géométrie (volume d'un parallélépipède à n dimensions, définition du produit vectoriel), ou encore en analyse (étude d'équations différentielles linéaires du second ordre[1], formule de changement de variable pour des intégrales multiples).

[1] À l'aide d'un déterminant appelé *wronskien* dont vous croiserez la route l'an prochain.

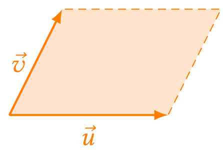
Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne un corps (quelconque, même si une fois de plus le programme nous demanderait de ne considérer que les cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

30.1 Motivations géométriques à l'étude du déterminant

Cette partie a pour but de motiver géométriquement l'introduction du déterminant. On cherche à y faire passer des idées, quitte à faire des concessions à la rigueur, et nous allons donc y parler d'aire et d'orientation sans définir du tout ce que nous entendons par là. Laissez-vous guider par votre intuition, acceptez de ne pas tout comprendre et lisez ce paragraphe **jusqu'au bout**. Puis relisez-le une seconde fois, la notion d'orientation devra déjà vous paraître plus claire à la seconde lecture.

Comme nous l'avons déjà mentionné lors de l'étude des intégrales, la formalisation de la notion intuitive d'aire dans le plan (ou de volume en plus grande dimension) n'est pas triviale.
Nous n'allons sûrement pas définir l'aire d'un cercle ici, mais ne considérer que des aires de parallélogrammes.

Dans toute la suite, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, on note $\mathscr{P}(\vec{u}, \vec{v})$ le parallélogramme orienté construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Sans définir ce qu'on entend vraiment par «orienté», signalons qu'on tient à distinguer $\mathscr{P}(\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathscr{P}(\vec{v}, \vec{u})$, ces deux parallélogramme ayant des aires orientées (voir ci-dessous pour les détails) de signes opposés.
Plaçons-nous dans le plan muni d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, orthonormée directe[2].
Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, notons $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ l'aire orientée de $\mathscr{P}(\vec{u}, \vec{v})$.
Orientée signifiant que si $(\vec{u}, \vec{v})$ a même orientation[3] que $(\vec{i}, \vec{j})$, alors on compte l'aire au sens usuel du terme (donc positive), et sinon on prend l'opposé de l'aire.



Le parallélogramme $\mathscr{P}(\vec{u}, \vec{v})$

[2] Au sens intuitif du terme, nous en donnerons une définition précise plus tard.

[3] Une autre manière de le dire est : si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a une mesure principale (dans $]-\pi, \pi]$) de même signe que celle de $(\vec{i}, \vec{j})$.

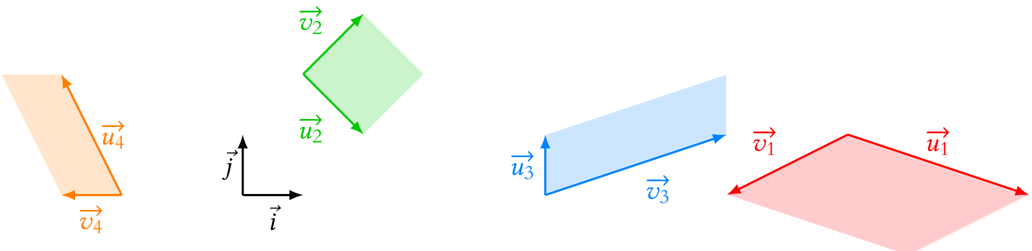


Figure 30.1 – $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_2}, \vec{v_2})$ et $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_4}, \vec{v_4})$ sont positifs, alors que $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_1}, \vec{v_1})$ et $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_3}, \vec{v_3})$ sont négatifs.

Plusieurs propriétés des déterminants se lisent alors géométriquement :

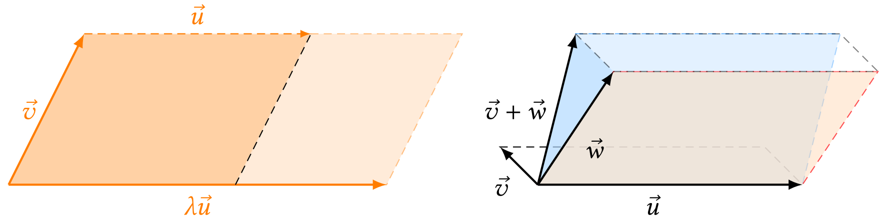


FIGURE 30.2 – Figure de gauche : $\det_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$.
Figure de droite : l'aire du parallélogramme bleu ($\mathscr{P}(\vec{u},\vec{v}+\vec{w})$) est égale à la somme des deux autres ($\mathscr{P}(\vec{u},\vec{v})$ en blanc et $\mathscr{P}(\vec{u},\vec{w})$ en orange).

⚠ Attention !
Contrairement aux apparences, cette figure est bien dessinée dans le plan (en deux dimensions), il n'est question que de parallélogrammes et d'aires, pas de volumes.

Donc l'application $\det_{\mathscr{B}}$, qui à un couple de vecteurs du plan associe un scalaire «doit» vérifier :

1. $\det_{\mathscr{B}}(\vec{v},\vec{u}) = -\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ (renversement de l'orientation)
2. $\det_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$
3. $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}+\vec{u}',\vec{v}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}',\vec{v})$
4. si $\vec{u}=\vec{v}$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) = 0$, puisqu'il s'agit alors de l'aire d'un parallélogramme «aplati». Plus généralement, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Les points 2) et 3) se condensent simplement sous la forme suivante : on a

$$\det_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u}+\vec{u}',\vec{v}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}',\vec{v}).$$

Autrement dit, à $\vec{v}$ fixé, l'application $\vec{u}\mapsto\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ est linéaire. C'est ce que nous appellerons la **linéarité à gauche** du déterminant.
De même, on doit avoir $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\lambda\vec{v}+\vec{v}') = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}')$ (ce sera la **linéarité à droite**).
Notons que cela découle alors directement du point 1) et de la linéarité à gauche car

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\lambda\vec{v}+\vec{v}') = -\det_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{v}+\vec{v}',\vec{u}) = -\lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{v},\vec{u}) - \det_{\mathscr{B}}(\vec{v}',\vec{u}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}').$$

Dans le cas général, si $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}$, alors

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) &= \det_{\mathscr{B}}(x\vec{i}+y\vec{j}, x'\vec{i}+y'\vec{j})\\ &= x\det_{\mathscr{B}}(\vec{i},x'\vec{i}+y'\vec{j}) + y\det_{\mathscr{B}}(\vec{j},x'\vec{i}+y'\vec{j})\\ &= xx'\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\vec{i},\vec{i})}_{=0} + xy'\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\vec{i},\vec{j})}_{=1} + x'y\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\vec{j},\vec{i})}_{=-\det_{\mathscr{B}}(\vec{i},\vec{j})=-1} + yy'\underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\vec{j},\vec{j})}_{=0}\\ &= xy'-yx'.\end{aligned}$$

Linéarité à gauche.

Linéarité à droite.

Notons, et ce n'est sûrement pas un hasard, qu'il s'agit là du déterminant[4] de

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix}\vec{u} & \vec{v}\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y'\end{pmatrix} & \begin{matrix}\vec{i}\\ \vec{j}\end{matrix}\end{array}.$$

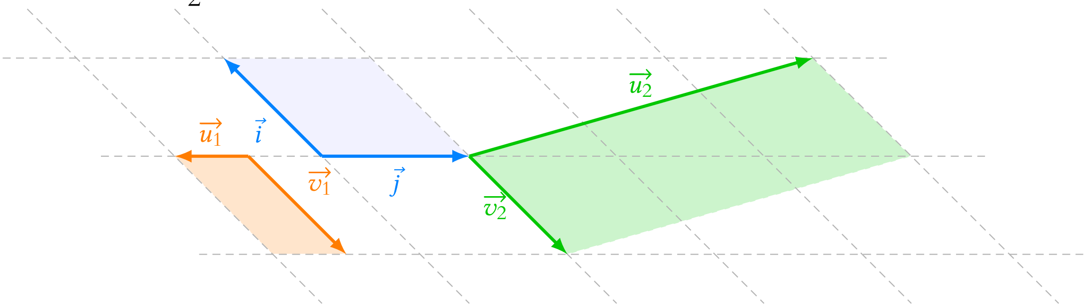
[4] Au sens où nous avons défini le déterminant d'une matrice 2×2.

Cette formule donnant l'aire d'un parallélogramme pourrait également se retrouver par des arguments géométriques simples, en manipulant des rectangles.
Notons au passage que $\det_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u},\lambda\vec{v}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\lambda\vec{v}) = \lambda^2\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ qui est un résultat bien connu («quand on multiplie les longueurs par λ, on multiplie les aires par λ^2»).

Maintenant, était-il vraiment indispensable que notre base $\mathscr{B}$ soit orthonormée ? Non, nous ne l'avons utilisé à aucun moment !
Donc soit $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j})$ une base de $\mathbf{R}^2$, et prenons comme unité d'aire orientée l'aire de $\mathscr{P}(\vec{i},\vec{j})$.
Pour $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs du plan, notons alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ l'aire orientée de $\mathscr{P}(\vec{u},\vec{v})$, au sens du nombre de parallélogrammes $\mathscr{P}(\vec{i},\vec{j})$ nécessaires pour le recouvrir, agrémenté d'un éventuel signe moins si l'orientation de $(\vec{u},\vec{v})$ n'est pas la même que celle de $(\vec{i},\vec{j})$.

Entendons-nous bien : ici l'orientation ne dépend que de $(\vec{i},\vec{j})$, et n'est pas forcément l'orientation du plan dont on a l'habitude[5] : choisir la base $\mathscr{B}$, c'est choisir une orientation du plan, c'est-à-dire quelles aires orientées sont positives, et lesquelles sont négatives.
Par exemple, sur la figure suivante, où $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j})$ est orientée dans le sens horaire, $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_1},\vec{v_1}) = -\dfrac{1}{2}$ et $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u_2},\vec{v_2}) = +3$.

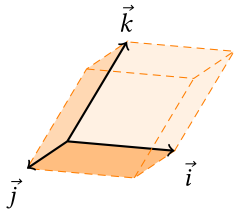
[5] le sens trigonométrique.



On prouve sans difficulté que les propriétés 1) à 4) évoquées dans le cas d'une base orthonormée restent valables.
Par ailleurs, si l'on se donne deux bases $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j})$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e_1},\vec{e_2})$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ est le nombre de parallélogrammes $\mathscr{P}(\vec{i},\vec{j})$ nécessaires pour recouvrir $\mathscr{P}(\vec{u},\vec{v})$.
Mais pour recouvrir $\mathscr{P}(\vec{i},\vec{j})$, il faut $\det_{\mathscr{B}'}(\vec{i},\vec{j})$ parallélogrammes $\mathscr{P}(\vec{e_1},\vec{e_2})$.
Et donc pour recouvrir $\mathscr{P}(\vec{u},\vec{v})$, il faut $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})\times\det_{\mathscr{B}'}(\vec{i},\vec{j})$ parallélogrammes de la forme $\mathscr{P}(\vec{e_1},\vec{e_2})$.
En d'autres termes, nous devons avoir

$$\det_{\mathscr{B}'}(\vec{u},\vec{v}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})\times\det_{\mathscr{B}'}(\vec{i},\vec{j}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})\times\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \qquad \text{(formule de changement de base)}$$

Une étude similaire pourrait être conduite dans $\mathbf{R}^3$, où l'on prendrait comme unité de volume orienté le volume d'un parallélépipède formé sur les trois vecteurs d'une base $\mathscr{B} = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
La notion d'orientation est un peu plus difficile à appréhender dans l'espace, mais vous l'avez déjà rencontrée en physique et/ou en SI, c'est la «règle de la main droite» ou «règle des trois doigts» (et donc la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ représentée ci-contre est une base indirecte *avec l'orientation usuelle*).
Il n'y a alors que deux orientations possibles pour une famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de trois vecteurs non coplanaires : main droite ou main gauche. Donc la notion de volume orienté a bien un sens : c'est le volume au sens usuel du terme, affublé d'un éventuel signe moins suivant l'orientation.



Une unité de volume orienté dans l'espace

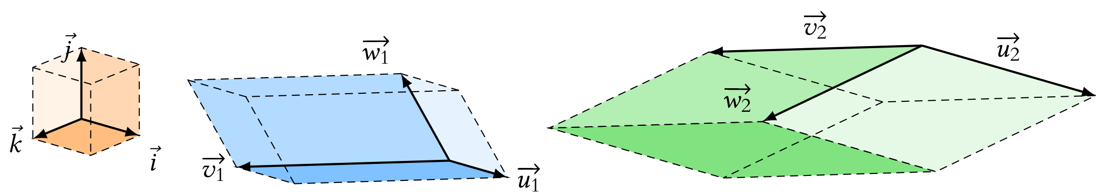


FIGURE 30.3 – Si la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe, c'est aussi le cas $(\vec{u_2},\vec{v_2},\vec{w_2})$, mais la base $(\vec{u_1},\vec{v_1},\vec{w_1})$ est indirecte.

Pour trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de l'espace, notons $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Ce volume est nul si et seulement si $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, soit si et seulement si $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une famille liée.
Par ailleurs, tout échange de deux des trois vecteurs change[6] l'orientation du parallélépipède, et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = -\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

[6] À vos mains droites pour vous en convaincre !

En revanche, une permutation circulaire des trois vecteurs préserve l'orientation et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

Il n'est pas très difficile de se convaincre que multiplier l'un des trois vecteurs par λ multiplie le volume par λ, et donc que multiplier les trois vecteurs par λ multiplie le

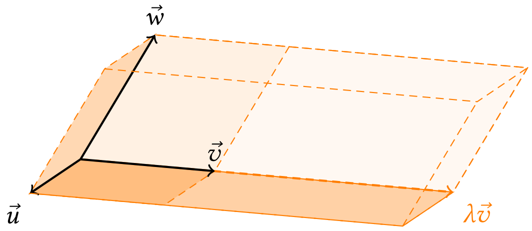


FIGURE 30.4 – $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

volume par λ^3. En revanche, il est graphiquement plus difficile[7] de se convaincre que $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}+\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}) = \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}', \vec{v}, \vec{w})$, et qu'il en est de même pour les deux autres variables.
On dit alors que $\det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

[7] Et nous ne le ferons donc pas.

30.2 FORMES MULTILINÉAIRES ALTERNÉES

30.2.1 Formes multilinéaires

Définition 30.1 – Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et soit $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$.
On dit que f est une application **multilinéaire** sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ si : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$ fixé, l'application $f_i : x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\overset{\uparrow}{i^{\text{ème}}\text{ position}}}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ est linéaire de E_i dans F.
Autrement dit si $\forall (x, y) \in E_i^2$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x+y, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{x}, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, \underset{\overset{\uparrow}{i}}{y}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dans le cas particulier où $n = 2$, on dit que f est **bilinéaire**, et cela revient à demander que :

1. $\forall (x, x') \in E_1^2, \forall y \in E_2, \forall \lambda \in \mathbf{K}$, $f(\lambda x + x', y) = \lambda f(x, y) + f(x', y)$.
   On dit alors que f est **linéaire à gauche**[8].
2. $\forall x \in E_1, \forall (y, y') \in E_2^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}$, $f(x, \lambda y + y') = \lambda f(x, y) + f(x, y')$.
   On dit alors que f est **linéaire à droite**[9].

[8] Ou linéaire par rapport à la première variable.

[9] Ou linéaire par rapport à la seconde variable.

⚠ Une application multilinéaire **n'est généralement pas** une application linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.
Tout simplement car on a alors

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n) = \cdots = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n).$$

Alors que pour une application linéaire sur l'espace produit, on devrait simplement avoir

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = f(\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n)) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

Exemples 30.2

► Les produits scalaires du plan et de l'espace sont bilinéaires :

$$(\lambda \vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

et de même pour la seconde variable.

► Plus généralement[10], l'application définie sur $(\mathbf{K}^n)^2$ par

$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est bilinéaire sur $\mathbf{K}^n$.

► Dans $\mathbf{R}[X]$, l'application $(P,Q) \mapsto PQ$ est bilinéaire, et plus généralement, $(P_1,\dots,P_n) \mapsto P_1P_2\cdots P_n$ est multilinéaire.

► Le produit matriciel $(A,B) \mapsto AB$ est bilinéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$: c'est une conséquence de la distributivité du produit.

► L'application $\det : ((a,b),(c,d)) \mapsto ad-bc = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ est bilinéaire sur $\mathbf{K}^2$.

En effet, pour $(a,b),(a',b'),(c,d) \in \mathbf{K}^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\begin{aligned}\det(\lambda(a,b)+(a',b'),(c,d)) &= \det((\lambda a+a',\lambda b+b'),(c,d)) = (\lambda a+a')d-(\lambda b+b')c \\ &= \lambda(ad-bc)+(a'd-b'c) = \lambda\det((a,b),(c,d))+\det((a',b'),(c,d)).\end{aligned}$$

10 Voyez-vous en quoi elle généralise le produit scalaire ?

Proposition 30.3 : *Soit $f : E_1\times\cdots\times E_n \to F$ une application multilinéaire, et soit $(x_1,\dots,x_n) \in E_1\times\cdots\times E_n$.*
S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_i = 0_{E_i}$, alors $f(x_1,\dots,x_n) = 0_F$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la linéarité de f_i, et du fait que l'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. □

Définition 30.4 – Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une application multilinéaire $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ est appelée **forme n-linéaire** sur E.

⚠ Attention !

Comme pour les **formes** linéaires, si on parle de **forme** n-linéaire, l'espace d'arrivée est nécessairement $\mathbf{K}$, le corps des scalaires.

30.2.2 Formes alternées

Définition 30.5 – Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ une forme n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$,

$$x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n) = 0.$$

Autrement dit, dès que deux éléments du n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ sont égaux, l'image de ce n-uplet par φ est nulle.

Exemples 30.6

► Le produit scalaire dans le plan n'est pas alterné car $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, qui n'est nul que si $\vec{u} = \vec{0}$.

► L'application det définie plus tôt sur $\mathbf{K}^2 \times \mathbf{K}^2$ est alternée car $\det((a,b),(a,b)) = ab-ab = 0$.

Proposition 30.7 : *Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ une forme n-linéaire alternée. Alors φ est **antisymétrique** : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i<j$, on a*

$$\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n).$$

Autrement dit, permuter deux des vecteurs du n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ change la valeur de son image par φ en son opposé.

Démonstration. Pour alléger les notations, nous ne faisons dans la suite apparaître que les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ variables.
On a $\varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) = 0$.
Mais par n-linéarité,

$$\begin{aligned}\varphi(\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) &= \varphi(\dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots)\\ &= \underbrace{\varphi(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots)}_{=0} + \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) + \underbrace{\varphi(\dots, x_j, \dots, x_j, \dots)}_{=0}\\ &= \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).\end{aligned}$$

Linéarité par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable.

Et donc on en déduit que

$$\varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -\varphi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).$$

□

Proposition 30.8 : *Une forme n-linéaire $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ antisymétrique est alternée.*

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ avec $x_i = x_j, i < j$. Alors

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = -f(x).$$

Donc $2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. □

Petite arnaque

En réalité, il existe des corps sur lesquels ceci est faux,, qui sont en gros tous ceux qui contiennent $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, car dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $2 = 0$, et donc dans tout $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel E, pour tout $x \in E$, $2x = 0_E$, sans que pour autant $x = 0_E$.
Plus généralement, cette propriété est fausse dans tous les corps tels que $2 = 0$, (où $2 = 1 + 1$), appelés corps de caractéristique 2.
Ce n'est pas le cas dans $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, seuls corps officiellement au programme.

Proposition 30.9 : *Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors :*

1. *l'image par φ d'une famille liée est nulle.*
2. *la valeur de φ ne change pas si on ajoute à une variable une combinaison linéaire des autres variables.*

Démonstration.

1. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ et des scalaires $(\lambda_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n\\ i \neq k}}$ tels que $x_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i x_i$.

   Et donc

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \varphi\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{x_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{\lambda_i x_i}, \dots, x_n) + \sum_{i=k+1}^{n} \varphi(x_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{\lambda_i x_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ i}}{x_i}, \dots, x_n)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, et soient $(\lambda_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n\\ i \neq k}}$ des scalaires. Alors

$$\varphi\left(x_1, \dots, x_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n\right) = \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + \varphi\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n\right).$$

   Mais la famille $\left(x_1, \dots, \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n \lambda_i x_i, \dots, x_n\right)$ est liée et donc son image par φ est nulle.

□

30.2.3 Formes n-linéaires alternées en dimension n

Proposition 30.10 : *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $(e_1, \dots, e_n)$, et soit $\varphi : E^p \to \mathbf{K}$ une forme p-linéaire. .*
Soit alors $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, et notons $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de x_j, de sorte que

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Alors : $$\varphi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \vdots\\ 1\leqslant i_p\leqslant n}} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_p,p}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_p}).$$

Remarque
Notons que p et n peuvent être différents.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer successivement les linéarités par rapport aux différentes variables :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1,\dots,x_p) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}e_{i_p}\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\varphi\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}e_{i_p}\right)\\
&= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\varphi\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_p,p}e_{i_p}\right)\\
&= \dots\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant n\\ 1\leqslant i_2\leqslant n\\ \vdots\\ 1\leqslant i_p\leqslant n}} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_p,p}\varphi(e_{i_1},\dots,e_{i_p})
\end{aligned}$$

□

Nous pouvons aller plus loin dans le cas où p est égal à n, la dimension de E, et où φ est alternée.
En effet, la somme-ci-dessus est donc une somme qui porte sur tous les n-uplets $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ de $[\![1,n]\!]^n$.
Mais un tel n-uplet peut être identifié à une application σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, où $\sigma(k) = i_k$.
Autrement dit, on a, avec les notations ci-dessus :

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in[\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\varphi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)}).$$

Lorsque σ n'est pas bijective, elle n'est pas injective[11], et donc deux des $e_{\sigma(i)}$ sont égaux.
Dans ce cas, φ étant alternée, $\varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$.
Donc la somme ci-dessus, qui comportait n^n termes, ne porte en fait que sur les permutations de $[\![1,n]\!]$ (et donc compte tout de même $n!$ termes[12]), de sorte que

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}\varphi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)}).$$

Mais lorsque σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, le n-uplet $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$ comporte une et une seule fois chacun des $e_i, 1\leqslant i\leqslant n$.
Et alors, par échanges successifs de deux termes, on peut réordonner ce n-uplet pour obtenir $(e_1,\dots,e_n)$. Mais chacun de ces échanges aura eu pour effet[13] de faire apparaître un facteur -1.
Donc au final, on doit arriver à $\varphi(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1,\dots,e_n)$, où $\varepsilon(\sigma)$ doit valoir 1

[11] Car une application entre deux ensembles finis de même cardinal est injective si et seulement si elle est bijective.

[12] Ce qui chiffre vite lorsque n est grand...

Rappel
On a noté $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

[13] C'est l'antisymétrie de φ.

ou -1, suivant la parité du nombre d'échanges de deux termes qu'il nous a fallu réaliser pour «réordonner» le n-uplet $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.

Au final, on a donc

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} \right) \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Cette formule est loin d'être anecdotique : elle nous dit qu'une forme n-linéaire alternée (où n est la dimension de E, et rien d'autre !) est entièrement déterminée par l'image d'une base : si on connaît $\varphi(e_1, \dots, e_n)$, alors on peut calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Le but de la partie suivante est de mieux comprendre ce qu'est ce $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, notamment qu'il est bien défini, ce qui nous permettra notamment de prouver qu'il existe toujours bien des formes n-linéaires alternées si $\dim E = n$.

Notons que nous avons une bonne intuition de ce que *doit être* $\varepsilon(\sigma)$: c'est -1 puissance le nombre de permutations de deux termes qu'il faut pour réordonner $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ en $(1, 2, \dots, n)$.
S'il semble assez intuitif qu'on puisse arriver à un tel réagencement par permutations successives de deux termes, il faudra le prouver rigoureusement. Sans compter qu'il existe probablement différentes manières de permuter des termes deux à deux pour arriver à ce but. Ces manières donnent-elle la même valeur à $\varepsilon(\sigma)$?

30.3 GROUPES SYMÉTRIQUES

Tous les résultats qui mentionnent des isomorphismes entre groupes, ou encore l'ordre d'un élément[14] débordent du programme de première année (et ne figurent même pas au programme de PSI), et ne sont là que pour aiguiser/satisfaire la curiosité de certains. Vous pouvez oublier ces résultats si vous le souhaitez.

[14] Notion qui n'a été définie que dans un DM facultatif.

30.3.1 Généralités

Nous savons que muni de la composition des applications, l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est muni d'une structure de groupe fini, de cardinal $n!$, appelé **groupe symétrique sur** $[\![1, n]\!]$. Il est non commutatif dès que $n \geqslant 3$.
Dans la suite, si σ et τ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$, nous noterons $\sigma\tau$ plutôt que $\sigma \circ \tau$, et id plutôt que $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.

Un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sera dans la suite représenté par une matrice $2 \times n$ sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Remarque — Plus qu'une matrice, voyons surtout là un tableau à 2 lignes et n colonnes, c'est tout ce dont nous aurons besoin.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est l'élément de $\mathfrak{S}_5$ qui échange 1 et 2, qui envoie 3 sur 5, 4 sur 3 et 5 sur 4.

Définition 30.11 – Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle alors **support de** σ l'ensemble des $k \in [\![1, n]\!]$ qui ne sont **pas** fixes par σ, c'est-à-dire tels que $\sigma(k) \neq k$.
On notera dans la suite $\mathrm{Supp}(\sigma)$ le support d'une permutation σ.

Pour la culture, mentionnons le résultat classique suivant (totalement hors-programme et assez difficile, vous pouvez ne pas le lire du tout !), dû à Cayley[15], qui dit que la structure de groupe de $\mathfrak{S}_n$ est très riche, en ce sens que $\mathfrak{S}_n$ «contient» une copie de chaque groupe de cardinal n.

[15] Arthur CAYLEY (1821–1895), algébriste britannique à qui on doit notamment la représentation matricielle des applications linéaires.

Proposition 30.12 : *Soit G un groupe fini de cardinal n. Alors il existe un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ isomorphe à G.*

Démonstration. Pour $g \in G$, soit $\varphi_g : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & g \cdot h \end{array} \right.$.
Alors φ_g est une application injective, car $\varphi_g(h) = \varphi_g(h') \Leftrightarrow g \cdot h = g \cdot h' \Leftrightarrow h = h'$.
Et comme toute application injective entre deux ensembles finis de même cardinal, elle est bijective. Donc $\varphi_g \in \mathfrak{S}_G$.
Par ailleurs, pour $g, g' \in G$, on a $\varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{g \cdot g'}$.
Autrement dit, l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_G \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.
Il est injectif car si $g \in \operatorname{Ker} \varphi$, alors $\varphi_g = \mathrm{id}_G$.
Et en particulier, $\varphi_g(e_G) = e_G \Leftrightarrow g \cdot e_G = e_G \Leftrightarrow g = e_G$.
Donc l'image de φ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_G$, isomorphe à G, l'isomorphisme n'étant rien d'autre que φ.
Et puisque $\mathfrak{S}_G$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$, on arrive bien à la conclusion annoncée. □

Remarque
Vous prouverez ceci en seconde année, mais c'est un bon exercice : si $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes, alors $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-groupe de G_2.

30.3.2 Permutations particulières

Définition 30.13 – Soit $p \geqslant 2$, et soient $a_1, \dots, a_p$ des éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Alors l'application $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ définie par

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{a_1, \dots, a_p\} \\ a_{k+1} & \text{si } \ i = a_k \text{ avec } \ 1 \leqslant k \leqslant p-1 \\ a_1 & \text{si } \ i = a_p \end{cases}$$

est une bijection (et donc un élément de $\mathfrak{S}_n$).
On la note alors $(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p)$, et un tel élément est appelé un **cycle de longueur p**, ou encore un **p-cycle.**

Autrement dit
On procède à une permutation circulaire de $a_1, a_2, \dots, a_p$ (dans cet ordre) et on laisse fixes les autres éléments.

Démonstration. Pour la bijectivité, il suffit de remarquer que si σ' est la permutation

$$i \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{a_1, \dots, a_p\} \\ a_{k-1} & \text{si } \ i = a_k \text{ avec } \ 2 \leqslant k \leqslant p \\ a_p & \text{si } \ i = a_1 \end{cases}$$

alors $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma = \mathrm{id}$. Et donc σ est bijective d'inverse σ'.
Remarquons au passage que $\sigma' = \sigma^{-1}$ est aussi un p-cycle : c'est $(a_p \quad a_{p-1} \quad \dots \quad a_2 \quad a_1)$. □

Notons en particulier qu'un p-cycle σ possède $n-p$ points fixes, et qu'il s'agit d'un élément d'ordre p de $\mathfrak{S}_n$ au sens où $\sigma^p = \mathrm{id}$ et pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\sigma^k \neq \mathrm{id}$.
En effet, pour $k \leqslant p-1$, $\sigma^k(a_1) = \sigma^{k-1}(a_2) = \dots = a_{k+1} \neq a_1$, et pour $k = p$,

$$\sigma^p(a_i) = \sigma^{p-1}(a_{i+1}) = \dots = \sigma^i(a_p) = \sigma^{i-1}(a_1) = \sigma^{i-2}(a_2) = \dots = a_i.$$

Exemple 30.14

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est en fait le 3-cycle $(2 \quad 5 \quad 4)$ (à ne pas confondre avec $(2 \quad 4 \quad 5)$).
Cela signifie juste que 2 est envoyé sur 5, 5 est envoyé sur 4 et 4 est envoyé sur 2, et que 1 et 3 sont fixes.
Remarquons qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'un cycle, et que

$$(2 \quad 5 \quad 4) = (5 \quad 4 \quad 2) = (4 \quad 2 \quad 5).$$

Exercice
Combien y a-t-il de manières d'écrire un p-cycle ?

⚠ Tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ ne sont pas des cycles, par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas un cycle. En effet, ne possédant pas de point fixe, ce ne pourrait qu'être un 5-cycle, ce qui n'est pas le cas !

Définition 30.15 – Un 2-cycle est appelé une **transposition**.
Autrement dit, une transposition de $\mathfrak{S}_n$ est une permutation qui possède exactement $n-2$ points fixes.

Les transpositions permettent de donner une définition plus concise de ce que nous avons appelé une forme n-linéaire antisymétrique.
En effet, $f : E^n \to \mathbf{K}$ est antisymétrique si pour toute transposition $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Proposition 30.16 : *Une transposition est égale à son propre inverse : $(i\,j)^{-1} = (i\,j)$.*

Exercice
Plus généralement, quel est l'inverse d'un p-cycle ?

Démonstration. Calculer $(i \quad j)(i \quad j)$... □

30.3.3 Structure des groupes symétriques pour $n = 2$ et $n = 3$

Le groupe $\mathfrak{S}_2$ est assez facile à décrire, puisqu'il ne contient que deux éléments, qui sont id et la transposition $(1\,2)$.
Nous avons déjà mentionné que tous les groupes d'ordre 2 ont la même table de multiplication, et donc sont isomorphes à $\mathbf{U}_2$ ou encore à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$.

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ en revanche contient $3! = 6$ éléments.
Il y a bien entendu l'identité, les trois transpositions $(1\,2), (1\,3)$ et $(2\,3)$.
Et pour compléter le tableau, on a deux 3-cycles, qui sont $(1 \quad 2 \quad 3)$ et $(1 \quad 3 \quad 2)$, inverses l'un de l'autre.
Notons que ce groupe n'est pas isomorphe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ car il n'est pas abélien, par exemple car $(1 \quad 2 \quad 3)(1 \quad 2) = (1 \quad 3)$ alors que $(1 \quad 2)\,(1 \quad 2 \quad 3) = (2 \quad 3)$.

Complément
$\mathfrak{S}_3$ est d'ailleurs le plus petit groupe non abélien : un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5 est abélien, et un groupe non abélien de cardinal 6 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

30.3.4 Décomposition en produit de cycles disjoints

La notion d'orbite qui suit n'est utile qu'en vue de la preuve du théorème 30.23 et n'est pas exigible.

Définition 30.17 – Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et soit $i \in [\![1, n]\!]$. On appelle **orbite** de i sous l'action de σ l'ensemble $\mathcal{O}_\sigma(i) = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbf{Z}\}$.
C'est évidemment un ensemble fini car inclus dans $[\![1, n]\!]$.

Exemple 30.18

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.
Alors $\sigma(1) = 2$, $\sigma^2(1) = \sigma(2) = 1$, $\sigma^3(1) = 2$, etc.
Et $\sigma^{-1}(1) = 2$, $\sigma^{-2}(1) = 1$, etc, de sorte que pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$\sigma^k(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Et donc l'orbite de 1 sous σ est $\{1, 2\}$.
De même, on prouve que $\sigma^k(3) = \begin{cases} 3 & \text{si } k \equiv 0 \pmod 3 \\ 5 & \text{si } k \equiv 1 \pmod 3 \\ 4 & \text{si } k \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$.
Et donc l'orbite de 3 sous σ est $\{3, 4, 5\}$.

Proposition 30.19 : *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors la relation binaire $\mathcal{R}_\sigma$ définie sur $[\![1,n]\!]$ par $i\mathcal{R}_\sigma j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, j = \sigma^k(i)$ est une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$, dont les classes d'équivalence sont les orbites sous l'action de σ.*

Démonstration. On a évidemment $i = \sigma^0(i)$, et donc $i\mathcal{R}_\sigma i$, donc $\mathcal{R}_\sigma$ est réflexive.
Si $i\mathcal{R}_\sigma j$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $j = \sigma^k(i)$, et donc $i = \sigma^{-k}(j)$, de sorte que $j\mathcal{R}_\sigma i$. Donc $\mathcal{R}_\sigma$ est symétrique.
Enfin, si $j = \sigma^{\ell_1}(i)$ et $k = \sigma^{\ell_2}(j)$, alors $k = \sigma^{\ell_1+\ell_2}(i)$. Donc $\mathcal{R}_\sigma$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence.

Il est alors évident que pour $i \in [\![1,n]\!]$, la classe d'équivalence de i est

$$\mathrm{cl}(i) = \{j \in [\![1,n]\!] \mid \exists k \in \mathbf{Z}, j = \sigma^k(i)\} = \{\sigma^k(i),\ k \in \mathbf{Z}\} = \mathcal{O}_\sigma(i).$$

□

Corollaire 30.20 – *Les orbites sous l'action de σ forment une partition de $[\![1,n]\!]$.*

Proposition 30.21 : *Deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ à support disjoints commutent entre elles.*

Démonstration. Soient σ, σ' deux permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\sigma') = \emptyset$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors

- si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$, alors $\sigma(i)$ est encore dans $\mathrm{Supp}(\sigma)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\sigma(\sigma(i)) = \sigma(i)$, et donc par injectivité de σ, $\sigma(i) = i$, ce qui contredit le fait que $i \in \mathrm{Supp}(\sigma)$.
  Et donc $\sigma(i) \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$, de sorte que $\sigma'(\sigma(i)) = \sigma(i)$.
  D'autre part, $i \notin \mathrm{Supp}(\sigma')$, donc $\sigma'(i) = i$, et donc
  $$\sigma(\sigma'(i)) = \sigma(i) = \sigma'(\sigma(i)).$$
- on raisonne de même si $i \in \mathrm{Supp}(\sigma')$.
- si $i \notin \mathrm{Supp}(\sigma) \cup \mathrm{Supp}(\sigma')$, alors $\sigma(i) = i$ et donc $\sigma'(\sigma(i)) = i$, et de même, $\sigma(\sigma'(i)) = i$.

□

Lemme 30.22. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $\mathcal{O}$ une orbite sous l'action de σ. Alors $\sigma_{|\mathcal{O}}$ est un cycle de support $\mathcal{O}$.

Démonstration. Soit $x \in [\![1,n]\!]$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbf{Z}\}$.
Puisque $\mathcal{O}_x$ est fini, il existe deux entiers positifs $p < q$ tels que $\sigma^p(x) = \sigma^q(x)$, et alors $\sigma^{q-p}(x) = x$.
Donc $\{k \in \mathbf{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\}$ est non vide, et par conséquent possède un plus petit élément s, pour lequel $\sigma^s(x) = x$ et donc $\sigma^{-s}(x) = x$.
Soit alors $k \in \mathbf{Z}$, et soit $k = sq + r$, avec $0 \leqslant r < s$ la division euclidienne de k par s.
Alors $\sigma^k(x) = \sigma^{sq+r}(x) = \sigma^r \circ (\sigma^s)^q\,(x) = \sigma^r(x)$.
Donc $\mathcal{O} = \{\sigma^i(x),\ 0 \leqslant i < s\}$.
Par ailleurs, ces éléments sont deux à deux distincts, car si $i \leqslant j$ sont deux éléments de $[\![0, s-1]\!]$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$, alors $x = \sigma^{j-i}(x)$, avec $0 \leqslant i - j \leqslant s - 1$. Par définition de s, on a donc $i - j = 0$, et donc $i = j$.

Notons alors, pour $i \in [\![0, s-1]\!]$, $x_i = \sigma^i(x)$, de sorte que $\mathcal{O} = \{x_0, \dots, x_{s-1}\}$.
Alors $\sigma(x_i) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } 0 \leqslant i < s-1 \\ x_0 & \text{si } i = s-1 \end{cases}$.
Donc $\sigma_{|\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{s-1} \end{pmatrix}$ est bien un cycle. □

Théorème 30.23 (Décomposition en produit de cycles à supports disjoints) :
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors σ s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints. De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près[16].

Démonstration. **Existence** : notons $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p$ les orbites non réduites à un point[17] sous l'action de σ.
On a alors $\mathrm{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{O}_i$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, notons C_i la permutation de $[\![1, n]\!]$ définie par

$$C_i : x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathcal{O}_i \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par le lemme précédent, C_i est un cycle de support $\mathcal{O}_i$, qui coïncide avec σ sur $\mathcal{O}_i$.

Les orbites étant deux à deux disjointes, les supports de $C_1, \dots, C_p$ le sont également. Et alors, pour $x \in [\![1, n]\!]$:

- soit $x \notin \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{O}_i$ (c'est-à-dire x est un point fixe de σ), auquel cas x est un point fixe de chacun des C_i, et donc de leur produit.
  Et donc $(C_1 \cdots C_p)(x) = x = \sigma(x)$.
- soit x est dans une et une seule orbite $\mathcal{O}_i$, auquel cas

$$\begin{aligned}(C_1 C_2 \cdots C_p)(x) &= (C_1 \cdots C_{i-1} C_{i+1} \cdots C_p) C_i(x) \\ &= (C_1 \cdots C_{i-1} C_{i+1} \cdots C_p)\sigma(x) \\ &= \sigma(x)\end{aligned}$$

Les C_i commutent 2 à 2.

C_i et σ coïncident sur $\mathcal{O}_i$.

$\sigma(x)$ est encore dans $\mathcal{O}_i$, et donc pas dans les $\mathcal{O}_j$, $j \neq i$.

Donc dans tous les cas, $\sigma(x) = (C_1 \cdots C_p)(x)$, et donc $\sigma = C_1 \cdots C_p$.

Unicité : supposons que $\sigma = C_1 \cdots C_p$, où les C_i sont des cycles à supports disjoints.
Alors il est évident que $\mathrm{Supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{Supp}(C_i)$.
Par ailleurs, si $x \in \mathrm{Supp}(C_i)$, alors x est fixe par les C_j, $j \neq i$.
Et donc l'orbite de x sous l'action de σ est aussi l'orbite de x sous l'action de C_i.
Or l'unique orbite non triviale[18] d'un cycle est égale à son support.
Donc le nombre p de cycles qui apparaissent dans la décomposition de σ est nécessairement égal au nombre d'orbites non triviales.
Et alors, sur l'orbite $\mathrm{Supp}(C_i)$, les restrictions de C_i et de σ coïncident.
Donc C_i est le cycle décrit dans la partie existence, et donc la décomposition $\sigma = C_1 \dots C_p$ est celle donnée plus haut. □

[16] Puisque des permutations à supports disjoints commutent, on peut les permuter.

[17] L'orbite de x est réduite à un point si et seulement si x est un point fixe de σ.

[18] Non réduite à un point.

Exemple 30.24

La preuve est en fait très constructive, et nous dit comment trouver la décomposition cherchée.
Considérons par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
Alors il nous faut commencer par déterminer ses orbites, ce qui est assez facile :

- les images de 1 par les puissances successives de σ sont $7, 3, 1, \dots$ **STOP !** Comme expliqué plus haut, si on trouve s tel que $\sigma^s(x) = x$, alors $\mathcal{O}_x = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)\}$.
  Donc ici $\mathcal{O}_1 = \{1, 3, 7\}$.
- Puis on prend le premier élément qui n'est pas dans $\mathcal{O}_1$, ici 2. Il est fixe, donc est seul dans son orbite : $\mathcal{O}_2 = \{2\}$.

▸ Puis le premier élément dont on ne connaît pas encore l'orbite est 4, son orbite est $\{4, 8, 5, 6\}$.

Tous les éléments sont alors dans une orbite, il suffit donc de regarder l'action de σ sur les orbites non réduites à un point. Or, $\sigma(1) = 7$, $\sigma(7) = 3$ et $\sigma(3) = 1$.
Donc le premier cycle de notre décomposition est $(1 \quad 7 \quad 3)$.
Et l'autre orbite non triviale correspond au 4-cycle $(4 \quad 8 \quad 5 \quad 6)$.
Donc la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints est

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 30.25 : *Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions.*

Terminologie
On dit encore que l'ensemble des transposition engendre le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Remarque. Concrètement, ce résultat signifie par exemple que si j'aligne les 48 élèves de MP2I sur 48 chaises, par ordre alphabétique, alors en procédant uniquement à des échanges successifs de deux élèves («Pierre échange sa place avec Paul», «Bob échange sa place avec Alice», «Alice échange sa place avec Pierre», etc), on peut atteindre n'importe quelle configuration des 48 élèves.
On pourrait même prouver[19] qu'on peut s'en tirer uniquement en permutant des voisins de chaise.

[19] Et nous le ferons en TD.

Démonstration. Il suffit pour cela de prouver que tout cycle est un produit de transpositions. Mais si $\sigma = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p)$ est un p-cycle, alors

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{p-1} & a_p \end{pmatrix}$$

⚠ Attention !
Les supports n'étant pas disjoints, ces transpositions ne commutent pas deux à deux !

Le mieux pour se convaincre de la validité de cette formule est de calculer quelques images «à la main» pour comprendre ce qu'elle signifie.
Donnons tout de même une preuve rigoureuse : notons $\tau_i = (a_i \quad a_{i+1})$, et prouvons donc que $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{p-1}$. Soit $x \in [\![1, n]\!]$.
▸ Si $x \notin \{a_1, \dots, a_p\}$, alors x est fixe par σ, mais aussi par tous les τ_i, donc par leur produit.
▸ Si $x = a_i$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Alors

$$\begin{aligned}(\tau_1\cdots\tau_{p-1})(x) &= (\tau_1\cdots\tau_i)(x) \\ &= (\tau_1\cdots\tau_{i-1})(a_{i+1}) \\ &= a_{i+1} = \sigma(a_i).\end{aligned}$$

Si $j > i$, $a_i \notin \operatorname{Supp}(\tau_j)$.

a_{i-1} est fixe par $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$.

▸ Si $x = a_p$, alors $\tau_{p-1}(x) = a_{p-1}$, puis $(\tau_{p-2}\tau_{p-1})(x) = \tau_{p-2}(a_{p-1}) = a_{p-2}$, etc, jusqu'à

$$(\tau_1\cdots\tau_{p-1})(x) = \tau_1\tau_2(a_3) = \tau_1(a_2) = a_1 = \sigma(a_p).$$

Ainsi, pour tout $x \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(x) = (\tau_1\cdots\tau_{p-1})(x)$, et donc $\sigma = \tau_1\cdots\tau_{p-1}$. □

Notons que cette fois, il n'y a pas unicité de la décomposition d'une permutation en produit de transpositions, par exemple car

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

30.3.5 Signature d'une permutation

Venons-en enfin au fameux $\varepsilon(\sigma)$ mentionné plus tôt qui, rappelons-le, doit[20] être égal à -1 puissance le nombre de transpositions qui figurent dans une décomposition de σ en produit de transpositions.
Ce qui n'est pas clair pour l'instant c'est que le nombre de telles transpositions ne dépend pas de l'écriture choisie.
En fait, il en dépend clairement, puisque si les τ_i sont des transpositions, $\tau_1\cdots\tau_p = \tau_1^3\cdots\tau_p^3$ s'écrit à la fois comme produit de p transpositions et de $3p$ transpositions.
Pour que $\varepsilon(\sigma)$ soit bien défini, il faudrait au minimum que la parité du nombre de transpositions ne dépende pas de la décomposition choisie.
Et donc qu'il ne puisse pas exister une décomposition de σ comme produit d'un nombre pair de transpositions et une autre comme produit d'un nombre impair de transpositions.

[20] S'il existe...

Théorème 30.26 : *Il existe une unique application non triviale $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1,1\}$ telle que $\forall(\sigma,\sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.*
Autrement dit, il existe un unique morphisme de groupes non trivial[21] de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$.
Cette application prend alors la valeur -1 sur toutes les transpositions.
*On dit alors que $\varepsilon(\sigma)$ est la **signature** de la permutation σ.*

[21] C'est-à-dire qui ne prend pas toujours la valeur 1.

Le programme officiel de MPSI précise que la preuve qui suit n'est pas exigible, je la donne tout de même pour la complétude du cours, mais vous pouvez la passer en première lecture.

Démonstration. **Existence** : notons A l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal 2, c'est-à-dire l'ensemble des paires[22] (ou encore des 2-combinaisons) $\{i,j\}$ avec $i \neq j$.

[22] Et pas des couples ! Une paire n'est pas ordonnée.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notons $\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i,j\}\in A} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Subtilité !
Voyez-vous pourquoi cette quantité est bien définie alors que
$$\prod_{\{i,j\}\in A} (i-j)$$
ne l'est pas (car une paire n'est pas ordonnée) ?

Cette quantité pourrait s'écrire plus simplement $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$, mais cette écriture est moins pratique pour prouver les propriétés de ε.
Puisque σ étant bijective, l'application $\{i,j\} \mapsto \{\sigma(i),\sigma(j)\}$ réalise une bijection de A sur lui-même. Et donc toute paire $\{k,\ell\} \in A$ s'écrit de manière unique $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ avec $\{i,j\} \in A$.
Ainsi, $\prod_{\{i,j\}\in A} |\sigma(i)-\sigma(j)| = \prod_{\{k,\ell\}\in A} |k-\ell|$.
Et par conséquent,
$$|\varepsilon(\sigma)| = \frac{\prod_{\{i,j\}\in A} |\sigma(i)-\sigma(j)|}{\prod_{\{i,j\}\in A} |i-j|} = \frac{\prod_{\{k,\ell\}\in A} |k-\ell|}{\prod_{\{i,j\}\in A} |i-j|} = 1.$$

Donc déjà ε est à valeurs dans $\{-1,1\}$.

On a alors, pour $\sigma,\sigma' \in \mathfrak{S}_n$,
$$\frac{\varepsilon(\sigma\sigma')}{\varepsilon(\sigma')} = \prod_{\{i,j\}\in A} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{i-j} \times \prod_{\{i,j\}\in A} \frac{i-j}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} = \prod_{\{i,j\}\in A} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)}.$$

Mais comme mentionné ci-dessus, $\{i,j\} \mapsto \{\sigma'(i),\sigma'(j)\}$ réalise une bijection de A sur lui-même.
Donc $\dfrac{\varepsilon(\sigma\sigma')}{\varepsilon(\sigma')} = \prod_{\{k,\ell\}\in A} \dfrac{\sigma(k)-\sigma(\ell)}{k-\ell} = \varepsilon(\sigma)$.
Et donc comme annoncé, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
Si $\tau = (k \quad \ell)$ est une transposition, avec $k < \ell$, alors lorsque ni i ni j ne sont égaux à k ou à ℓ, on a $\dfrac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} = \dfrac{i-j}{i-j} = 1$.
Et donc dans le produit définissant $\varepsilon(\tau)$, ne restent que les termes où l'un au moins des deux nombres i,j est dans $\{k,\ell\}$:

Détails
On a séparé les paires où un seul des deux nombres i, j est dans $\{k, \ell\}$ (et on a supposé que ce nombre était j) de la paire $\{i, j\} = \{k, \ell\}$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau) &= \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,\, i\neq \ell}}^{n} \frac{\tau(k)-\tau(i)}{k-i} \times \frac{\tau(\ell)-\tau(i)}{\ell-i}\right) \times \frac{\tau(k)-\tau(\ell)}{k-\ell}\\
&= \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,\, i\neq \ell}}^{n} \frac{\ell-i}{k-i} \times \frac{k-i}{\ell-i}\right) \times \frac{\ell-k}{k-\ell}\\
&= -1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, si $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p$, où les τ_i sont des transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.
Le fait que ε existe prouve en particulier que toutes les décompositions de σ en produit de transpositions font apparaître un nombre de transpositions dont la parité ne dépend que de

σ.

Unicité : soit ε un morphisme de groupe non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.
▶ **Si $n = 2$** : puisque $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$, si ε est non trivial, c'est que le seul élément de $\mathfrak{S}_2$ différent de id, à savoir $(1 \quad 2)$ a pour image -1.
On a donc bien l'application définie ci-dessus : à l'unique transposition elle associe -1, et à l'identité, elle associe 1.

> **Rappel**
> L'image de l'élément neutre par un morphisme de groupes est l'élément neutre.

▶ **Si $n \geqslant 3$** : notons que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a

$$\sigma\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i) & \sigma(j) \end{pmatrix}.$$

> **Prouvez-le !**
> Calculer l'image de k en distinguant trois cas : $\sigma^{-1}(k) \notin \{i, j\}$, $\sigma^{-1}(k) = i$ et $\sigma^{-1}(k) = j$.

Or, si $(i \quad j)$ et $(k \quad \ell)$ sont deux transpositions, il existe toujours[23] $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$.
Et alors $\sigma^{-1}\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix} k & \ell \end{pmatrix}$.
Donc si τ et τ' sont deux transpositions, et si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est telle que $\tau = \sigma\tau'\sigma^{-1}$, alors

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau')\underbrace{\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)}_{\varepsilon(\sigma)^{-1}} = \varepsilon(\tau')\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\tau').$$

[23] À vous de jouer !

> **Pour la culture**
> On dit alors que les deux transpositions $(i \quad j)$ et $(k \quad \ell)$ sont conjuguées dans le groupe $\mathfrak{S}_n$.
> La notion de conjugaison est un élément central de la théorie des groupes.

Donc toutes les transpositions ont même image par ε.
Si toutes les transpositions ont pour image 1, toute permutation étant produit de transpositions, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = 1$. Ce qui contredit le fait que ε n'est pas le morphisme trivial.
Si au contraire les transpositions ont toutes -1 pour image, alors une permutation σ qui s'écrit comme produit de p transpositions vérifie $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$, et donc on retrouve l'application définie ci-dessus.
Remarque *: nous avons prouvé ici qu'il y avait un unique morphisme de groupe non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, mais si on voulait seulement prouver qu'il existe un unique morphisme qui envoie toutes les transpositions sur -1, alors les deux dernières lignes suffisent.* □

Proposition 30.27 : *Si σ est un p-cycle, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$.*

Démonstration. Cela découle de la décomposition précédemment donnée d'un p-cycle en produit de $p - 1$ transpositions :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{p-1} & a_p \end{pmatrix}.$$

□

Et par conséquent, si l'on connaît la décomposition de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en produit de cycles disjoints, il est possible de calculer sa signature sans avoir besoin de décomposer σ en produit de transpositions.

Exemple 30.28

Nous avons prouvé plus tôt que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ se décompose en produit de cycles disjoints de la manière suivante : $(1 \quad 7 \quad 3)(4 \quad 8 \quad 5 \quad 6)$.
Donc

$$\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}\right)\times\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = (-1)^2\times(-1)^3 = -1.$$

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

30.4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Dans toute cette partie, on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

30.4.1 Définition

Maintenant que la notion de signature, que nous avions pressentie en début de chapitre, est clarifiée, revenons aux formes n-linéaires alternées.

Proposition 30.29 : *Soit $\varphi : E^n \to \mathbf{K}$ une forme n-linéaire alternée. Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,*

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. Notons $\tau_1, \dots, \tau_p$ des transpositions telles que $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_p$.
Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= \varphi(x_{\tau_1\cdots\tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_1\cdots\tau_p(n)})\\ &= -\varphi(x_{\tau_2\cdots\tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_2\cdots\tau_p(n)})\\ &= (-1)^2\varphi(x_{\tau_3\cdots\tau_p(1)}, \dots, x_{\tau_3\cdots\tau_p(n)})\\ &= (-1)^p\varphi(x_1, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

□

Comme annoncé plus tôt, si φ est une forme n-linéaire alternée sur E, on a donc pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}\right)\varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Et donc une forme n-linéaire alternée est uniquement déterminée par l'image d'une base. On appelle donc déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée qui envoie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sur 1 :

Définition 30.30 (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base) – Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
On pose alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

Rappel
Cela signifie que $\forall j \in [\![1, n]\!]$,
$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Le déterminant est défini sur E^n, où $n = \dim E$, donc on ne définira pas le déterminant de 2 vecteurs de $\mathbf{R}^3$ ou de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^2$, il faut autant de vecteurs que la dimension !
Insistons aussi sur le fait qu'on ne parle pas du déterminant de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, mais du déterminant de cette famille **dans une base** $\mathcal{B}$. En général, changer de base change la valeur du déterminant.

Proposition 30.31 : *L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{K}$ est une forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.*

Démonstration. ▶ **Multilinéarité** : soit $k \in [\![1, n]\!]$. Prouvons que $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ variable.
Soient donc $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E$, soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Notons alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Si on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \lambda x + y, x_{k+1}, \dots, x_n) = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a alors

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} = b_{i,j} & \text{si } j \neq k \\ \lambda a_{i,j} + b_{i,j} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},\lambda x+y,x_{k+1},\dots,x_n) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} c_{\sigma(i),i}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} c_{\sigma(i),i}\right)\times(\lambda a_{\sigma(k),k}+b_{\sigma(k),k})\\
&= \lambda\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_{\sigma(i),i}\right)a_{\sigma(k),k}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} b_{\sigma(i),i}\right)b_{\sigma(k),k}\\
&= \lambda\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},x,x_{k+1},\dots,x_n)+\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n).
\end{aligned}$$

Donc $\det_{\mathscr{B}}$ est linéaire par rapport à la $k^{\text{ème}}$ variable.

▶ **Caractère alterné** : soit $\tau\in\mathfrak{S}_n$ une transposition, et soient $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)})=(a_{i,\tau(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}}(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),\tau(i)}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(\tau^{-1}(j)),j}\\
&= \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma'\tau)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j),j}\\
&= -\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma')\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j),j} = -\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
τ réalise une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même.
On a donc posé $j=\tau(i)$.

Détails
$\sigma\mapsto\sigma\tau^{-1}$ réalise une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même.
Et donc on a posé $\sigma'=\sigma\tau^{-1}$.

Ceci prouve que $\det_{\mathscr{B}}$ est bien une forme anti-symétrique, et donc alternée.

Reste à calculer $\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)$.
Mais la matrice de $(e_1,\dots,e_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $I_n=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{si } i=j\end{cases}$.
Par conséquent, si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ n'est pas l'identité, il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i)\neq i$, et donc $a_{\sigma(i),i}=0$, de sorte que $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}=0$.
Ainsi, des $n!$ termes de la somme définissant le déterminant, il n'en reste qu'un :

$$\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)=\varepsilon(\mathrm{id})\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}=1.$$

□

Proposition 30.32 : *Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors il existe $\lambda\in\mathbf{K}$ tel que $\varphi=\lambda\det_{\mathscr{B}}$.*
Par ailleurs, $\lambda=\varphi(e_1,\dots,e_n)$, où $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

Autrement dit
L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1.

Démonstration. Ceci a en fait déjà été prouvé page 1048. □

Cas particuliers des déterminants en dimension 2 et 3.
▶ <u>Si $\dim E=2$</u> : soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2)$, et soient $x=x_1e_1+x_2e_2$ et $y=y_1e_1+y_2e_2$ deux vecteurs de E, décomposés dans la base $\mathscr{B}$.
Nous savons que $\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{id},\underbrace{(1\ \ 2)}_{=\tau}\}$, et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}=\varepsilon(\mathrm{id})x_1y_2+\varepsilon(\tau)x_2y_1=x_1y_2-y_1x_2.$$

Ce déterminant est usuellement noté $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.
On retrouve alors le déterminant d'une matrice 2×2, calculé selon la règle :

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y1 x_2.$$

► <u>Si $\dim E = 3$</u> : soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et soient x, y, z des vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ et (z_1, z_2, z_3) dans la base $\mathscr{B}$.
Alors $\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$.
Or, $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2), (1\ \ 2), (1\ \ 3), (2\ \ 3)\}$.
Les deux 3-cycles et l'identité ont pour signature 1 et les trois transpositions ont pour signature -1, de sorte que

$$\det_{\mathscr{B}}(x,y,z) = \underbrace{x_1y_2z_3}_{\mathrm{id}} + \underbrace{x_2y_3z_1}_{(1\,2\,3)} + \underbrace{x_3y_1z_2}_{(1\,3\,2)} - \underbrace{x_2y_1z_3}_{(1\,2)} - \underbrace{x_3y_2z_1}_{(1\,3)} - \underbrace{x_1y_3z_2}_{(2\,3)}.$$

Le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(x,y,z)$ se note généralement $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ et la formule donnée ci-dessus[24] se retient alors sous la forme suivante : $\begin{array}{c|ccc|ccc} & + & + & + & & & \\ & x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ & x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ & x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ & - & - & - & & & \end{array}$ ou plus simplement $\begin{array}{c|ccc|} & + & + & + \\ & x_1 & y_1 & z_1 \\ & x_2 & y_2 & z_2 \\ & x_3 & y_3 & z_3 \\ & - & - & - \end{array}$

[24] Nommée règle de SARRUS.

30.4.2 Propriétés des déterminants

Puisqu'à chaque base $\mathscr{B}$ de E correspond une forme n-linéaire alternée $\det_{\mathscr{B}}$, et que toutes ces formes sont colinéaires[25], quelle relation existe-t-il entre ces différentes formes n-linéaires ?

[25] C'est la proposition 30.32.

> **Proposition 30.33 (Formule de changement de base) :**
> *Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.*
> *Alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a*
>
> $$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque
Cette formule avait été «établie», ou du moins conjecturée, en termes d'aire au début du chapitre.

Démonstration. Puisque $\det_{\mathscr{B}'}$ est une forme n-linéaire alternée, par la proposition 30.32,

$$\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathscr{B}}.$$

□

> **Corollaire 30.34 –** *Soit $x_1, \dots, x_n$ une famille de n vecteurs de E. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.*

Démonstration. Si $\mathscr{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, on a

$$1 = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Et donc en particulier, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Inversement, si $(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas une base, étant de cardinal n elle ne peut être libre. Or nous avons mentionné précédemment que l'image d'une famille liée par une forme n-linéaire alternée est nulle, donc c'est le cas de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. □

30.5 Déterminant d'une matrice carrée

Le titre est explicite, mais insistons bien : la notion de déterminant d'une matrice n'a de sens[26] que pour les matrices **carrées**.

[26] À l'instar de la notion d'inversibilité.

30.5.1 Définition, premières propriétés

Définition 30.35 – Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **déterminant de** A et on note $\det(A)$ le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

On note alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Commentaire
Notons que cette somme fait apparaître tous les produits de n coefficients de A qui contiennent exactement un coefficient de chaque ligne et un coefficient de chaque colonne de A.

Soyez soigneux
Sur vos copies, essayez de bien différencier les parenthèses (dénotant une matrice) des barres verticales (pour signifier un déterminant).

Remarque. Les colonnes de la matrice I_n sont précisément les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et donc $\det(I_n) = \det_{\mathscr{B}_{can}}(\mathscr{B}_{can}) = 1$.

Pour les déterminants de matrices 2×2 et 3×3, on retrouve les formules établies précédemment : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ et

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}-a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1}.$$
$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ \end{array}$$

Pour $n = 4$, $\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_4) = 4! = 24$, et la formule définissant le déterminant n'est plus utilisable, et bien entendu, c'est pire pour $n \geqslant 5$.

Dans la suite, nous allons chercher à établir des moyens «simples» de calculer le déterminant d'une matrice.
Remarquons alors tout de suite que si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors pour $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, alors

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

et donc si on sait calculer le déterminant d'une matrice, on saura (enfin) calculer celui d'une famille de vecteurs dans une base.

Proposition 30.36 : *Soit E est un espace vectoriel de dimension n de base $\mathscr{B}$, et soient $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Démonstration. Si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors ces deux déterminants sont définis par la même formule : $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$. □

Proposition 30.37 : *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors*
1. $\forall\lambda\in\mathbf{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n\det(A)$
2. *le déterminant de A est inchangé si on ajoute à l'une des colonnes de A une combinaison linéaire des autres*
3. *échanger deux colonnes de A multiplie son déterminant par -1*
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

⚠ Le déterminant **n'est pas une forme linéaire** sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: non seulement nous n'avons pas $\det(\lambda A) = \lambda\det(A)$, mais surtout **le déterminant d'une somme n'est pas la somme des déterminants** (sauf cas particuliers) : $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$.

⚠ Attention !

Il y a un λ qui «sort» pour chaque colonne, et donc

$$\det(\lambda A)\neq\lambda\det(A).$$

En revanche, $\lambda\det(A)$ est le déterminant qu'on obtient en mulitpliant **une seule** colonne de A par λ.

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la n-linéarité et du caractère alterné.
Détaillons par exemple la première et notons $\mathscr{B}_{can}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A, de sorte que $\det(A) = \det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1,\dots,C_n)$ et donc

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det_{\mathscr{B}_{can}}(\lambda C_1,\dots,\lambda C_n)\\ &= \lambda\det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1,\lambda C_2,\dots,\lambda C_n)\\ &= \lambda^2\det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1,C_2,\lambda C_3,\dots,\lambda C_n)\\ &= \cdots = \lambda^n\det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1,\dots,C_n) = \lambda^n\det A.\end{aligned}$$

Pour le point 4, considérons l'application $\varphi_A : \left|\begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))^n & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ (C_1,\dots,C_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}_{can}}(AC_1,\dots,AC_n)\end{array}\right.$.
Il n'est pas difficile de prouver qu'elle est n-linéaire alternée, et par conséquent[27], $\varphi_A = \varphi_A(E_1,\dots,E_n)\det_{\mathscr{B}_{can}}$, où $(E_1,\dots,E_n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Mais $\varphi_A(E_1,\dots,E_n) = \det_{\mathscr{B}_{can}}(AE_1,\dots,AE_n)$, et AE_i n'est rien d'autre que la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
Donc $\varphi_A(E_1,\dots,E_n) = \det A$.
Enfin, $\varphi_A(B) = \det_{\mathscr{B}_{can}}(AC_1,\dots,AC_n)$ où $C_1,\dots,C_n$ sont les colonnes de B. Mais AC_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne[28] de AB, et donc $\varphi_A(B) = \det(AB)$.
On a donc bien

$$\det(AB) = \varphi_A(B) = \det(A)\det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1,\dots,C_n) = \det(A)\det(B).$$

□

[27] C'est encore la proposition 30.32.

[28] On l'a dit quand on a défini le produit de matrices, essayez de vous en re-convaincre si vous ne l'êtes plus !

Remarque. Puisque le produit de $\mathbf{K}$ est commutatif, $\det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$, et par conséquent, $\det(AB) = \det(BA)$.

Corollaire 30.38 : *Une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si* $\det(A)\neq 0$. *Et dans ce cas, on a* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible, alors $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$.
Ce qui prouve donc que $\det(A)\neq 0$, et que son inverse est $\det(A^{-1})$.

En revanche, si A n'est pas inversible, alors la famille de ses colonnes est une famille liée, et donc de déterminant[29] nul. Donc $\det(A) = 0$. □

[29] Dans la base canonique, mais en fait dans n'importe quelle base.

Remarque. Ceci signifie que $\det : GL_n(\mathbf{K})\to\mathbf{K}^*$ est un morphisme de groupes.

Exemple 30.39

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible car

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 4 \neq 0.$$

En revanche, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 15 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 15 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 10 + 30 + 18 + 2 + 30 - 90 = 0.$$

Corollaire 30.40 – *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables, et soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors

$$\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A).$$

□

Remarque. Nous avons dégagé plusieurs invariants de similitude[30], et savons que deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.
Malheureusement, cela ne suffit pas encore, deux matrices peuvent avoir tout ceci en commun et ne pas être semblables.
Et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est toujours un contre-exemple...

[30] Des quantités qui sont égales pour deux matrices semblables.

Proposition 30.41 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^\top)$.*
Et donc $\det(A)$ est aussi le déterminant de la famille des lignes de A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \underbrace{\varepsilon\left(\sigma'^{-1}\right)}_{=\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma'(i)} \\
&= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n [A^\top]_{\sigma'(i),i} = \det\left(A^\top\right).
\end{aligned}$$

Détails
On a réalisé le changement d'indice $j = \sigma(i)$, qui est légitime puisque σ réalise une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même.

Chgt d'indice
$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, donc on a posé $\sigma' = \sigma^{-1}$.

□

Une conséquence importante de ceci est que le déterminant est aussi une forme n-linéaire des vecteurs lignes de A, puisque les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$.
Et donc ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant, échanger deux lignes le multiplie par -1.

30.5.2 Calcul de déterminants

Le fait qu'une matrice soit inversible si et seulement si son déterminant est non nul nous donne envie[31] de calculer des déterminants, mais pour $n \geqslant 4$, la définition est quasi-inutilisable en pratique.
Pour l'instant, le seul outil dont nous disposons est de procéder à des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A, afin de faire apparaître une matrice dont on saurait calculer le déterminant.

[31] Même si ce n'est pas la seule raison d'être des déterminants.

Exemples 30.42

Avant de commencer, réfléchissons un peu à l'effet des trois opérations élémentaires sur les déterminants.
Puisqu'une opération sur les lignes revient à une opération sur les colonnes de $A^\top$, qui a même déterminant que A, bornons-nous à expliquer l'effet des opérations élémentaires sur les colonnes, en gardant à l'esprit que tout ce qui est permis sur les colonnes sera donc autorisé sur les lignes.
Nous savons déjà que l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres préserve le déterminant.
Le déterminant étant alterné, l'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par -1.
Et par n-linéarité, multiplier une colonne par $\lambda \neq 0$ multiplie également le déterminant par λ.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, et calculons son déterminant par opérations élémentaires :

$$\det(A) \underset{C_1 \leftrightarrow C_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

L'échange de colonnes multiplie le déterminant par -1.

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Le déterminant est inchangé.

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est la linéarité par rapport à la dernière ligne : on a «sorti» le -1. Puis par linéarité par rapport à l'avant dernière ligne, on a «sorti» le 2.

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 - L_4}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 - 2L_4}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Constat : on arrive bien à calculer $\det(A)$, mais c'est laborieux !

Sur le même principe, si A est non inversible, des opérations sur les lignes/colonnes vont finir par faire apparaître une matrice dont les colonnes sont liées (ou même dont une colonne est nulle), ce qui nous permettra d'affirmer que le déterminant est nul.

Heureusement, nous allons mettre en place d'autres outils plus efficaces pour un calcul de déterminant, ce qui ne voudra pas dire qu'il n'est pas intéressant de coupler ces outils à des opérations sur les lignes et les colonnes !

Pour les matrices triangulaires, le calcul du déterminant est en fait assez facile : il suffit de regarder les coefficients diagonaux :

Proposition 30.43 (Déterminant d'une matrice triangulaire) :
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *une matrice triangulaire.*
Alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ *est le produit des coefficients diagonaux de* A :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}.$$

Cas particulier
Ceci vaut bien entendu pour une matrice diagonale !

Démonstration. Prouvons-le dans le cas d'une matrice triangulaire supérieure, puisque si A est triangulaire inférieure, alors $\det(A) = \det(A^\top)$, et $A^\top$ est triangulaire supérieure avec les mêmes coefficients diagonaux que A.

Rappelons que A triangulaire supérieure signifie que pour $i > j$, $a_{i,j} = 0$.
Par définition, $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.
Soit alors $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
► Si $\sigma = \mathrm{id}$, alors $\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,1}\cdots a_{n,n}$.
► Si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{k \in [\![1,n]\!] \mid \sigma(k) \neq k\}$ est non vide.
Il possède donc un plus petit élément p, pour lequel $\sigma(p)$ est encore dans $\mathrm{Supp}(\sigma)$ (c'est-à-dire n'est pas fixe par σ).
Et donc $\sigma(p) > p$, de sorte que $a_{\sigma(p),p} = 0$, et donc $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$.
Ainsi, dans la somme définissant $\det(A)$, il ne reste que le terme correspondant à $\sigma = \mathrm{id}$. □

Remarques. ► Ce résultat englobe le cas des matrices diagonales, et on retrouve notamment le fait que $\det(I_n) = 1$.
► Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé, dans le produit $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ il y a un et un seul terme de chaque colonne, et un unique terme de chaque ligne.
Pour A triangulaire supérieure, si on veut que ce produit soit non nul, il faut que $\sigma(1) = 1$ (faute de quoi $a_{\sigma(1),1} = 0$).
Puis que $\sigma(2) \leqslant 2$. Mais on a déjà $\sigma(1) = 1$, donc nécessairement il faut $\sigma(2) = 2$.
Puis de proche en proche, on prouve que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$, et donc $\sigma = \mathrm{id}$.
Donc le seul terme restant dans la somme définissant $\det(A)$ est $\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Définition 30.44 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On appelle alors :
1. **mineur** d'ordre (i,j) de A, et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A obtenue par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.
2. **cofacteur** d'ordre (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

Théorème 30.45 (Développement de $\det(A)$ par rapport à une colonne) :
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, *et soit* $j \in [\![1,n]\!]$. *Alors*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}(A).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B}_{can} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, de sorte que

$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1, \dots, C_n) = \det_{\mathscr{B}_{can}}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j}E_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right)$$
$$= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Il s'agit donc de prouver que $D_{i,j} = \det_{\mathscr{B}_{can}}(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$. Or ce déterminant est

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-n} & 0 & a_{n,j+n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En procédant à $n-i$ échanges de lignes, on peut faire descendre la $i^{\text{ème}}$ ligne en dernière position. Comme chaque échange fait apparaître un facteur -1, on a donc

$$D_{i,j} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-n} & 0 & a_{n,j+n} & \dots & a_{n,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \end{vmatrix}$$

Alternative

Au lieu de procéder par échanges de lignes successifs, on peut directement appliquer le cycle

$$(n\ n-1\ \cdots\ i)$$

à la famille des lignes. Il est de longueur $n-i$, donc de signature $(-1)^{n-i-1}$.

Puis par $n-j$ échanges de colonnes, déplacer la $j^{\text{ème}}$ colonne en dernière position :

$$D_{i,j} = \underbrace{(-1)^{2n-i-j}}_{=(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

Notons $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont le déterminant figure ci-dessus.

Alors $\det(B) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i),i}$.

Si $\sigma(n) \neq n$, alors $b_{\sigma(n),n} = 0$, et sinon $b_{\sigma(n),n} = 1$.

Donc dans la somme définissant $\det(B)$, ne restent que les termes tels que $\sigma(n) = n$, qu'on peut identifier (quitte à considérer leur restriction à $[\![1, n-1]\!]$) à des éléments de $\mathfrak{S}_{n-1}$, identification qui préserve la signature[32].

Donc $\det(B) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n-1} b_{\sigma(i),i}$.

On reconnaît alors le déterminant de la matrice $(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$, extraite de B, qui n'est rien d'autre que la matrice extraite de A obtenue par suppression de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, dont le déterminant vaut[33] $\Delta_{i,j}(A)$. □

[32] La décomposition de σ en produit de transpositions de $\mathfrak{S}_{n-1}$ donne aussi une décomposition de σ en produit de transpositions de $\mathfrak{S}_n$.

[33] Par définition d'un mineur.

Corollaire 30.46 (Développement par rapport à une ligne) :
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $A^\top$. □

Exemple 30.47

L'intérêt de ces deux formules est de permettre un calcul récursif des déterminants : un déterminant $n \times n$ peut se calculer en calculant au plus n déterminants $(n-1)\times(n-1)$, qui nécessitent eux-mêmes chacun $n-1$ calculs de déterminant $(n-2)\times(n-2)$, etc.
▸ Dans le cas d'un déterminant 3×3, on a alors une alternative à la règle de Sarrus.
Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.
Développons alors $\det(A)$ par rapport à sa première ligne. On obtient alors

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} \times 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -21 - 14 - 112 =$$

-147.

▸ Certains développements sont plus intelligents que d'autres !

Considérons par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

S'il est possible de développer $\det(A)$ par rapport à la première ligne, cela ferait apparaître 4 déterminants 3×3, qui eux-mêmes nécessitent chacun 6 produits (si l'on utilise la règle de Sarrus) ou 3 déterminant 2×2 (si on les redéveloppe).
En revanche, la troisième ligne ne contient que deux coefficients non nuls, donc il est pertinent de développer par rapport à cette troisième ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 5 \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -3\left(-2\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 5\left(-2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= -3(-2\times 19 + 6\times 13) + 5(-2\times 22 + 3\times 7) = -235. \end{aligned}$$

Détails
On a développé chacun des déterminants 3×3 par rapport à leur ligne qui contenait le 0.

⚠ Ne surtout pas oublier les $(-1)^{i+j}$ dans les cofacteurs.
Un bon moyen de ne pas se tromper est de se rappeler que le coefficient en haut à gauche (le coefficient $(1,1)$) correspond à un $+1$, et que deux coefficients adjacents correspondent

à un signe opposé :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Proposition 30.48 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) :
Soient $A \in \mathcal{M}_r(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbf{K})$.
Alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Démonstration. Soit $\varphi : (\mathcal{M}_{r,1}(\mathbf{K}))^r \to \mathbf{K}$ l'application qui à $(X_1, \dots, X_r)$ associe

$$\varphi(X_1, \dots, X_r) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_r & B \\ 0_{n-r,1} & 0_{n-r,1} & \dots & 0_{n-r,1} & C \end{vmatrix}$$

qui est un déterminant de taille $n \times n$.
Il est facile de constater que φ est r-linéaire alternée.
Et donc, par la proposition 30.32, $\varphi = \varphi(E_1, \dots, E_r)\det_{\mathcal{B}_{can}}$ où $\mathcal{B}_{can} = (E_1, \dots, E_r)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_r(\mathbf{K})$.
En particulier, si $A_1, \dots, A_r$ sont les colonnes de A,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{vmatrix} = \varphi(A_1, \dots, A_r) = \varphi(E_1, \dots, E_r)\det_{\mathcal{B}_{can}}(A_1, \dots, A_r) = \varphi(E_1, \dots, E_r)\det(A).$$

Or, $\varphi(E_1, \dots, E_r) = \begin{vmatrix} I_r & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{vmatrix}$.
En développant ce déterminant par rapport à sa première colonne, on obtient $(-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} I_{r-1} & B' \\ 0_{n-r,r-1} & C \end{vmatrix}$ où B' est la matrice obtenue à partir de B en supprimant la première ligne.
En développant de nouveau ce déterminant par rapport à sa première colonne, et en répétant r fois le procédé, on obtient $\begin{vmatrix} I_r & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{vmatrix} = \det(C)$.
Et donc au final, $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$. □

Corollaire 30.49 – *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme* $\begin{pmatrix} A_1 & \star & \dots & \star \\ 0_{k_2,k_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0_{k_p,k_1} & \dots & 0_{k_p,k_{p-1}} & A_p \end{pmatrix}$ *avec $A_1 \in \mathcal{M}_{k_1}(\mathbf{K}), \dots, A_p \in \mathcal{M}_{k_p}(\mathbf{K})$, alors*

$$\det(A) = \det(A_1) \cdots \det(A_p).$$

Démonstration. Par récurrence sur p. □

Exemple 30.50

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 & 19 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \times 5 \times 6 = -240.$$

30.5.3 Un déterminant à connaître : le déterminant de Vandermonde.

Proposition 30.51 : *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $x_0, \dots, x_n$ des scalaires. Alors*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé ***déterminant de Vandermonde****.*

En particulier Il est non nul si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Démonstration. Procédons par récurrence sur n, et notons[34] $V_n(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

[34] On le note V comme Vandermonde bien entendu.

Pour $n = 1$, on a bien

$$V_1(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 1} (x_j - x_i).$$

Supposons donc la formule vraie pour $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$, et ce quels que soient les scalaires $(x_0, \dots, x_{n-1})$.
Soient alors $x_0, \dots, x_n$ $n + 1$ scalaires.
► **Si deux des x_i sont égaux**, alors le déterminant a deux colonnes identiques, donc est nul. Mais alors le produit $\displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ a un de ses facteurs qui est nul, donc est nul.
Et donc la formule $V(x_0, \dots, x_n) = \displaystyle\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ est valable.
► **Si les x_i sont deux à deux distincts**, considérons la fonction définie sur $\mathbf{K}$ par $V : x \mapsto V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}, x)$.
En développant $V(x)$ par rapport à la dernière colonne, on constate qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus n en x. En effet,

$$V(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n & x^n \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n \end{vmatrix} + (-1)^{n+3} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_{n-1}^n \end{vmatrix}$$
$$+ \dots + (-1)^{2n+2} x^n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}}_{=V_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}$$

Notons que le cofacteur de la dernière ligne prouve que le coefficient dominant de V est $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$.
Par ailleurs, $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des racines de V, puisqu'une fois encore $V(x_i)$ a deux colonnes identiques donc est nul.
Donc V est scindé[35], et

[35] Nous avons déjà autant de racines distinctes que le degré.

$$\forall x \in \mathbf{K},\ V(x) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

Coeff. dominant Nous n'avons pas oublié le coefficient dominant, qui est $V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Et donc en particulier, pour $x = x_n$,

$$V_n(x_0, \dots, x_n) = V(x_n) = V_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$$

$$= \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Par le principe de récurrence, la formule annoncée est vraie pour tout n. □

30.5.4 Comatrice

Définition 30.52 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **comatrice** de A, et on note $\operatorname{Com}(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs de A, c'est-à-dire définie par $[\operatorname{Com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

Taille
La comatrice de A est une matrice carrée de même taille que A.

Exemple 30.53

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\operatorname{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 & -8 & -6 \\ 15 & 4 & 3 \\ -25 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Théorème 30.54 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors $A\operatorname{Com}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$.*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$\begin{aligned}[A\operatorname{Com}(A)^\top]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [A]_{i,k}[\operatorname{Com}(A)^\top]_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k}[\operatorname{Com}(A)]_{j,k} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(-1)^{j+k}\Delta_{j,k}(A).\end{aligned}$$

► **Si $i = j$**, on reconnaît le développement de $\det(A)$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.
Donc $\left[A\operatorname{Com}(A)^\top\right]_{i,i} = \det(A)$.
► **Si $i \neq j$**, on reconnaît le développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ ligne de

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \leftarrow j^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarque
En écrivant ainsi les choses, on a implicitement supposé $i < j$, mais le principe est le même si $j < i$.

Autrement dit il s'agit du déterminant de A où on a remplacé la $j^{\text{ème}}$ ligne par la $i^{\text{ème}}$.
Mais comme toute matrice ayant deux lignes égales, cette matrice est de déterminant nul, donc $[A\operatorname{Com}A^\top]_{i,j} = 0$.

Et donc au final, on a bien $A\operatorname{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$.
La preuve est la même pour $\operatorname{Com}(A)^\top A$, en utilisant plutôt des développements par rapport à des colonnes. □

On obtient alors une formule générale exprimant l'inverse d'une matrice en fonction de ses coefficients :

Corollaire 30.55 – *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$.

Ne nous emballons pas trop vite : aussi jolie soit cette formule, elle a surtout un intérêt théorique, et n'est vraiment pratique[36] pour des calculs que pour $n \leqslant 3$ puisque la complexité des calculs explose rapidement.

[36] Et encore, pas toujours...

Exemples 30.56

▸ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc on retrouve une vieille connaissance : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

▸ Si $n = 3$, alors le calcul de la comatrice nécessite le calcul de 9 déterminants 2×2 **et du déterminant de** A, ce qui peut avoir un temps de calcul comparable à celui d'un calcul d'inverse par la méthode du pivot, mais qui surtout, nécessite d'en écrire moins.

Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Alors la règle de Sarrus nous donne : $\det(A) = -8 + 6 + 4 = 2$. Ce déterminant étant non nul, A est inversible.

Par ailleurs, $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculs

En revanche, cette méthode ne met pas à l'abri des erreurs de calcul, et de ce point de vue, n'est pas vraiment meilleure qu'un pivot.

30.6 DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

Comme mentionné précédemment, deux matrices semblables ont le même déterminant. Et en particulier, deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes ont le même déterminant. Donc le déterminant est une propriété intrinsèque de l'endomorphisme.

Définition 30.57 – Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle alors **déterminant de** f et on note $\det(f)$ le déterminant de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E.

Notons que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))\right) = \det{}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

et donc est le volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Les deux propriétés suivantes découlent immédiatement des propriétés analogues pour les matrices :

Proposition 30.58 : *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

1. *f est bijectif si et seulement si* $\det(f) \neq 0$
2. $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.

Proposition 30.59 : *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et toute base $\mathcal{B}$ de E,*

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ l'est aussi, donc dans ce cas les deux déterminants sont nuls.
En revanche, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, c'est une base $\mathcal{B}'$ de E.
Et donc, par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n)) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)\\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n))\right) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)\\ &= \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

□

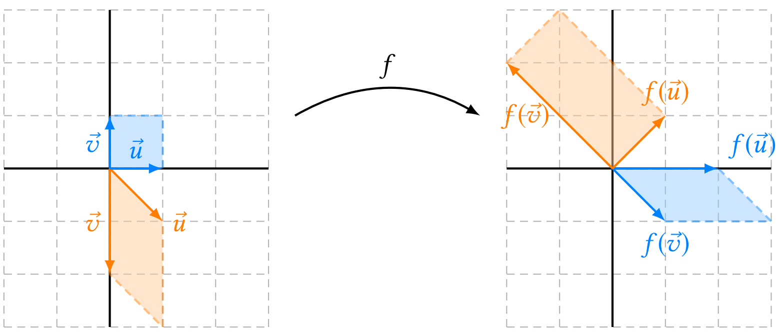
Détails
Par **définition**,

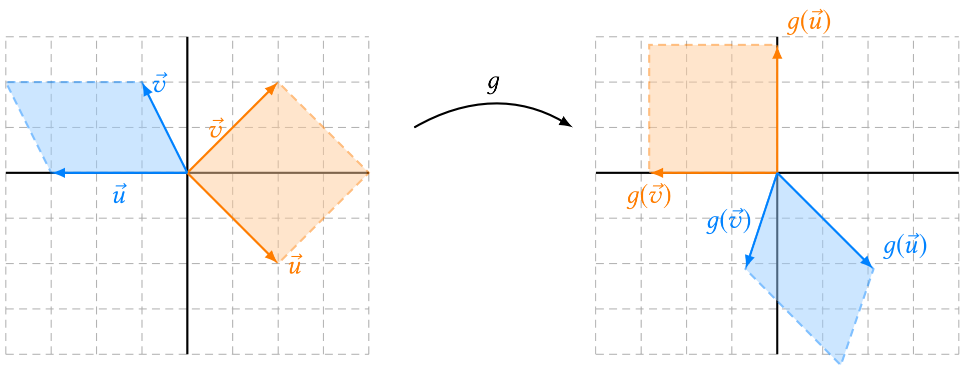
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_n)$.

Autrement dit, le déterminant de f décrit l'effet de f sur les aires/volumes/leur analogue en dimension n orientés. Ce qui est remarquable, c'est que pour tous les parallélépipèdes, le rapport entre le volume du parallélépipède d'origine et le volume de son image par f est constant (égal à $\det(f)$).

Par exemple, sur la figure ci-dessous on a représenté, pour deux endomorphismes de $\mathbf{R}^2$, deux parallélogrammes et leurs images.





Dans le cas de f, on constate que les aires orientées ont été multipliées par -2 (donc $\det f = -2$), et dans le cas de g, elles n'ont pas changé (donc $\det(g) = 1$).
Pour g, vous aurez sans doute reconnu une rotation, notion que nous définirons un peu plus tard , mais pour laquelle on n'est pas surpris que les aires soient préservées.

Spoiler
Comme vous avez déjà manipulé des rotations en physique ou en SI, vous ne serez pas surpris si je vous dis que la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, les endomorphismes non bijectifs, c'est-à-dire de déterminant nul, «aplatissent» tous les parallélépipède en les envoyant sur des parties de volume nul.
C'est assez logique si on y réfléchit, puisque leur image est incluse dans un hyperplan, qui doit être de volume nul. Sans une définition plus rigoureuse d'un volume[37], il est difficile de donner du sens à ceci en grande dimension, mais en dimensions 2 et 3, cela revient à dire qu'une droite est d'aire nulle et qu'un plan est de volume nul.

[37] Et pour aller plus loin que le volume d'un parallélépipède, il faut construire ce qu'on appelle la mesure de Lebesgue, qui permet entre autres de construire l'intégrale de fonctions définies sur des parties de $\mathbf{R}^n$ et pas seulement sur des segments.

EXERCICES DU CHAPITRE 30

► Groupe symétrique

EXERCICE 30.1 Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire leur signature F

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 30.2 Un résultat annoncé en cours PD
Soient $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$ et $k \neq \ell$.
Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = \ell$.
Rappelons que ce résultat nous a permis de prouver que si τ_1 et τ_2 sont deux transpositions, alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau_1 = \sigma\tau_2\sigma^{-1}$.

EXERCICE 30.3 Montrer par récurrence sur n que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est produit d'au plus $n-1$ transpositions. PD
Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produit d'au plus 4 transpositions.

EXERCICE 30.4 Groupe alterné AD
Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, de cardinal $\frac{n!}{2}$.

EXERCICE 30.5 D'autres générateurs du groupe symétrique AD

1) Monter que pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $(i \quad j) = (i \quad i+1 \quad \dots \quad j-1 \quad j)(j-1 \quad j-2 \quad \dots \quad i)$.
2) Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(i \quad i+1)$, $i \in [\![1, n-1]\!]$.
3) En déduire que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions de la forme $(1 \quad i)$, $2 \leqslant i \leqslant n$.

► Formes multilinéaires

EXERCICE 30.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto X^\top AY$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. F
Prouver qu'elle est alternée si A est antisymétrique.

EXERCICE 30.7 Soit $\varphi : E^2 \to \mathbf{K}$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E. F
Pour $(x,y) \in E^2$, exprimer $\varphi(x+y, x-y)$ en fonction de $\varphi(x,y)$.

EXERCICE 30.8 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit également $f \in \mathcal{L}(E)$. AD
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots x_n) = \operatorname{tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

EXERCICE 30.9 Dimension de l'espace des formes k-linéaires alternées (Oral ENS) TD
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, et soit $k \in \mathbf{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace $\mathcal{A}_k(E)$ des formes k-linéaires alternées sur E.

► Déterminants théoriques

EXERCICE 30.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique, avec n impair. Montrer que $\det A = 0$. Est-ce encore vrai si n est pair ? PD

EXERCICE 30.11 Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$. PD

EXERCICE 30.12 Montrer que le volume d'un parallélépipède de $\mathbf{R}^3$ dont les sommets sont dans $\mathbf{Z}$ est un entier. PD

EXERCICE 30.13 Formules de Cramer AD

Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, de sorte que pour $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, le système $AX = B$ possède une unique solution, que l'on notera $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note A_i la matrice dont toutes les colonnes sont celles de A, sauf la $i^{\text{ème}}$, qui est égale à B.

Prouver que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

Cas particulier : donner l'unique solution de $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ lorsque $ad-bc \neq 0$.

EXERCICE 30.14 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit $B = \left((-1)^{i+j}a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Comparer $\det A$ et $\det B$. AD

EXERCICE 30.15 Soient $(A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^4$, telles que $CD = DC$. D

1) Calculer le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

2) Dans le cas où D est inversible, prouver que $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$.

3) Prouver que le résultat reste valable lorsque D n'est plus inversible. On pourra à cet effet étudier la fonction $t \mapsto \det(D+tI_n)$.

EXERCICE 30.16 Un classique : deux matrices réelles semblables sur C sont semblables sur R D

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables en tant que matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire telles qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

On note alors $P = P_1 + iP_2$, avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

En considérant l'application $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$, prouver que A et B sont semblables sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

▶ Calcul de déterminants

EXERCICE 30.17 Calculer les déterminants suivants, par les méthodes de votre choix, en en donnant une forme la plus factorisée possible. Ici, a, b et c sont des scalaires. F

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

EXERCICE 30.18 Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbf{C}$ la famille $(8,-1,2-\lambda), (5,1-\lambda,1), (2+\lambda,-2,1)$ est-elle une base de $\mathbf{C}^3$? PD

EXERCICE 30.19 Oh la grosse astuce ! PD

Soient $a_1,\dots,a_n,h$ des réels. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) & \dots & \cos(a_n) \\ \cos(a_1+h) & \cos(a_2+h) & \dots & \cos(a_n+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_1+(n-1)h) & \cos(a_2+(n-1)h) & \dots & \cos(a_n+(n-1)h) \end{vmatrix}$

EXERCICE 30.20 Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ défini par $f(M) = M^\top$. Calculer $\operatorname{rg}(f), \operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$. PD

EXERCICE 30.21 Retour sur les déterminants par blocs AD

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$. Soit alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$.

1) Montrer que $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.

2) Retrouver alors l'expression de $\det(M)$ vue en cours.

EXERCICE 30.22 Pour $x \in \mathbf{C}$, on note $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$. AD

Montrer que D est une fonction polynomiale, divisible par $x \mapsto (x-1)^3$, dont on donnera une forme factorisée.

EXERCICE 30.23 Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, avec $n > p$. Calculer $\det(AB)$. AD

EXERCICE 30.24 Calculer par récurrence les déterminants suivants, où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires : AD

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

EXERCICE 30.25 Polynôme caractéristique AD

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \det(xI_n - A) \end{array} \right.$.

1) Montrer que χ_A est une fonction polynomiale, de degré n, dont on déterminera le coefficient dominant et le coefficient constant.
2) En déduire que $\{\lambda \in \mathbf{K} \mid A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}\}$ est de cardinal au plus égal à n.
3) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
   a) Montrer que $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.
   b) En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

EXERCICE 30.26 Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Pour $x \in \mathbf{K}$, on pose AD

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

1) Montrer que Δ_n est une fonction affine de x.
2) Calculer $\Delta_n(x)$, et en déduire $\Delta_n(0)$.

▸ Comatrice

EXERCICE 30.27 Groupe spécial linéaire PD

On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.
On note de plus $SL_n(\mathbf{Z}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{Z}) \mid \det A = 1\}$. Prouver que $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

EXERCICE 30.28 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent. On souhaite prouver que Com(A) et Com(B) commutent. D

1) Prouver le résultat si A et B sont inversibles.
2) Prouver que $f : t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale. En déduire que pour $p \in \mathbf{N}^*$ suffisamment grand, $A + \dfrac{1}{p}I_n$ et $B + \dfrac{1}{p}I_n$ sont inversibles.
3) Conclure en faisant tendre p vers l'infini.

EXERCICE 30.29 Rang et déterminant de la comatrice AD

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Prouver que $\operatorname{rg}(\operatorname{Com}(A)) = \begin{cases} n & \text{si } \operatorname{rg}(A) = n \\ 1 & \text{si } \operatorname{rg}(A) = n-1 \\ 0 & \text{si } \operatorname{rg}(A) \leqslant n-2 \end{cases}$.

Déterminer une expression de $\det(\operatorname{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 30

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.1

Rappelons que la méthode[1] est de déterminer les différentes orbites sous l'action de σ.
Alors σ_1 est un 5-cycle : $\sigma_1 = (1 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5)$.
Et $\sigma_2 = (1 \quad 3 \quad 6)(2 \quad 10 \quad 9 \quad 8 \quad 5)$.
Pour les signatures, ne revenons pas aux produits de transpositions, et souvenons-nous que la signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.
Donc $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^2(-1)^4 = 1$.

[1] Voir les exemples dans le cours.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.2

► Commençons par le cas où $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$.
Notons $\tau_1 = (i \quad k)$ et $\tau_2 = (j \quad \ell)$, et soit $\sigma = \tau_1\tau_2$.
Alors $\tau_2(j) = \ell$ et ℓ est un point fixe de τ_1, donc $\sigma(j) = \ell$.
Et i est un point fixe de τ_2, donc $\tau_2(i) = i$ et donc $\sigma(i) = \tau_1(i) = k$.

► Si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\}$ est un singleton. Quitte à échanger i et j et k et ℓ, on peut supposer que $i = k$ et $j \neq \ell$, alors $\sigma = (j \quad \ell)$ convient.

► Si $i = k$ et $j = \ell$, alors $\sigma = \mathrm{id}$ convient.

► Si $i = \ell$ et $j = k$, alors $\sigma = (i \quad j)$ convient.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.3

Pour $n = 2$, il n'y a pas grand chose à dire, il suffit de faire la liste de tous les éléments[2] de $\mathfrak{S}_2$.
L'identité est produit de 0 transpositions, et $(1 \quad 2)$ est une transposition, donc produit d'au plus une transposition.

[2] Il y en a 2...

Supposons la propriété vérifiée au rang n, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$.
► Si $\sigma(n+1) = n+1$. Alors $\sigma_{|[\![1,n]\!]}$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$. Donc par hypothèse de récurrence, il existe p transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p \in \mathfrak{S}_n$, avec $p \leqslant n-1$ telles que $\sigma_{|[\![1,n]\!]} = \tau_1 \cdots \tau_p$.
En posant alors $\widetilde{\tau_i} : \left|\begin{array}{ccc} [\![1,n+1]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \tau_i(k) & \text{si } k \leqslant n \\ n+1 & \text{si } k = n+1 \end{cases}\end{array}\right.$, alors $\widetilde{\tau_i}$ est une transposition de $\mathfrak{S}_{n+1}$ et $\sigma = \widetilde{\tau_1} \cdots \widetilde{\tau_p}$.
Donc σ est produit d'au plus p transpositions, avec $p \leqslant n-1 \leqslant n$.

► Si $\sigma(n+1) \neq n+1$.
Soit alors $\tau = (n+1 \quad \sigma(n+1))$.
Alors $\sigma' = \tau\sigma$ est une permutation de $[\![1,n+1]\!]$ qui possède $n+1$ comme point fixe.
Donc nous sommes ramenés au cas précédent : il existe $\tau_1, \dots, \tau_p$, $p \leqslant n-1$ des transpositions telles que $\sigma' = \tau_1 \cdots \tau_p$.
Et donc $\sigma = \tau\tau_1 \cdots \tau_p$ est produit d'au plus $p+1$ transpositions, avec $p+1 \leqslant n$.

En appliquant ce qui a été dit précédemment au σ de l'énoncé, il vient

$$(5 \quad 2)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 3)(4 \quad 2).$$

Et donc $\sigma = (5 \quad 2)\ (1 \quad 3)(4 \quad 2)$.

Remarque
On aurait pu itérer le procédé et commencer par composer par $(4 \quad 2)$, mais comme il est clair que les orbites non triviales sont de cardinal 2, la décomposition en produit de cycles disjoints est déjà une décomposition en produit de transpositions.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.4

L'ensemble $\mathfrak{A}_n$ est le noyau du morphisme $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1,1\}$.
Et donc comme le noyau de tout morphisme, c'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.
Pour son cardinal, notons que si τ est une transposition de $\mathfrak{S}_n$, par exemple on pourra prendre $\tau = (1 \quad 2)$, alors l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{A}_n$ sur $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\} = \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$.
En effet, elle est injective, car si $\tau\sigma = \tau\sigma'$, alors par multiplication par $\tau^{-1} = \tau$, on a $\sigma = \sigma'$.
Et si σ est une permutation de signature -1 (on dit que σ est *impaire*), alors $\tau\sigma \in \mathfrak{A}_n$ et

$\sigma = \tau(\tau\sigma)$.
Mais $\text{Card}(\mathfrak{A}_n) + \text{Card}(\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n) = \text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n! \Leftrightarrow 2\text{Card}(\mathfrak{A}_n) = n!$, d'où le résultat.

Généralisation
Prouver que si $\varphi : G \to H$ est un morphisme de groupes entre deux groupes finis G et H, alors $\text{Card}(\text{Ker}\,\varphi) = \dfrac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Im}\,\varphi)}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.5

1. Il «suffit» de faire le calcul...
Notons à cet effet $\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & i+1 & \dots & j \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} j-1 & j-2 & \dots & i \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.
Il s'agit donc de prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(k) = \tau(k)$.
▶ Si $k \notin [\![i, j]\!]$, alors k est invariant par σ_1 et σ_2, donc par leur produit. Mais par ailleurs $\tau(k) = k$.
▶ Si $k = i$, $\sigma_2(i) = j-1$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1(j-1) = j$.
▶ Si $k = j$, alors $\sigma_2(j) = j$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(k)) = \sigma_1(j) = i$.
▶ Enfin, si $i < k < j$, alors $\sigma_2(k) = k-1$ et donc $\sigma_1(\sigma_2(k)) = \sigma_1(k-1) = k = \tau(k)$.
Donc on a bien $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \tau$.

2. Nous savons que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions.
Donc si nous prouvons que toutes les transpositions sont produit de $\begin{pmatrix} k & k+1 \end{pmatrix}$, c'est gagné.
Il suffit d'utiliser la décomposition d'un cycle en produit de transpositions qui a été vue en cours, conjuguée à la question 1 :
$$\begin{pmatrix} i & i+1 & \dots & j-1 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i+1 & i+2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} j-1 & j \end{pmatrix}$$
et de même
$$\begin{pmatrix} j-1 & j-2 & \dots & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j-1 & j-2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} i+1 & i \end{pmatrix}.$$
Et donc
$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} j-2 & j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j-1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j-2 & j-1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}.$$

3. Il suffit de remarquer que $\begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$ si $i \geqslant 2$ et que sinon, c'est juste $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Et alors le résultat est immédiat en utilisant la question précédente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.6

Commençons par noter que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Soient $X, Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors
$$\varphi(\lambda X + Y, Z) = (\lambda X + Y)^\top AZ = \lambda X^\top AZ + Y^\top AZ = \lambda\varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z).$$
Donc φ est linéaire par rapport à sa première variable.
On prouve sans difficulté qu'elle l'est aussi par rapport à la seconde.

De plus, si A est antisymétrique, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a
$$\varphi(X, X) = X^\top AX = \left(X^\top A^\top X\right)^\top = \left(-X^\top AX\right)^\top = -\varphi(X, X).$$
Et donc $\varphi(X, X) = 0$, de sorte que φ est alternée.

Transposée
$X^\top AX$ est une matrice 1×1 (que l'on identifie donc à un scalaire).
Elle est donc égale à sa propre transposée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.7

Soient $(x, y) \in E^2$. Alors
$$\begin{aligned}\varphi(x+y, x-y) &= \varphi(x, x-y) + \varphi(y, x-y) \\ &= \underbrace{\varphi(x, x)}_{=0} - \varphi(x-y) + \varphi(y, x) - \underbrace{\varphi(y, y)}_{=0} \\ &= 2\varphi(y, x).\end{aligned}$$

Linéarité par rapport à la première variable.
Linéarité par rapport à la seconde variable.
φ est alternée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.8

Nous allons commencer par prouver que $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$ est une forme n-linéaire alternée.

Prouvons la linéarité par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.
Soient donc $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, et soient $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$.
Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{j-1} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &+ \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(\lambda x + y), x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=j+1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, \lambda x + y, x_{j+1}, \dots, f(x_i), \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} (\lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, y, \dots, x_n)) \\ &+ \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, \lambda f(x) + f(y), \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=j+1}^{n} (\lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, y, \dots, x_n)) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, y, \dots, x_n).\end{aligned}$$

On ne note plus que les vecteurs en $i^{\text{ème}}$ position.

On a seulement utilisé la linéarité de f.

Trop long !
Pour abréger, on n'a pas détaillé une dernière étape, qui utilise la linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.

Donc φ est n-linéaire.
De plus, si on suppose que $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est tel que $x_k = x_\ell$, $k < \ell$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_n) \\ &= \sum_{i \notin \{k, \ell\}} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_i), \dots, x_k) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_\ell, \dots, x_n) \\ &+ \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_\ell), \dots, x_n) \\ &= \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) + \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_k), \dots, x_n) \\ &= \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) - \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_k, \dots, x_n) = 0.\end{aligned}$$

Tous les termes pour $i \notin \{k, \ell\}$ sont nuls puisque deux des vecteurs sont identiques et que $\det_{\mathscr{B}}$ est alternée.

Donc φ est n-linéaire alternée.

On sait alors que

$$\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n)\det_{\mathscr{B}} = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n)\det_{\mathscr{B}}.$$

Rappel
L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1.

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n) &= \det_{\mathscr{B}}\left(e_1, \dots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j, e_{i+1}, \dots, e_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &= a_{i,i} \det_{\mathscr{B}}(e_1 j, \dots, e_n) = a_{j,j}.\end{aligned}$$

Détails
Les déterminants précédents sont nuls si $i \neq j$ car alors deux des vecteurs sont égaux.

Donc au final, $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{tr}(f)$.

Et donc $\varphi = \mathrm{tr}(f)\det_{\mathscr{B}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.9

L'énoncé suppose implicitement qu'on sait que $\mathscr{A}_k(E)$ est un espace vectoriel, ce n'est pas directement du cours, mais ce n'est pas difficile du tout de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E^k dans $\mathbf{K}$.

Notons tout de suite que pour $k > n$, il n'y a pas de forme k-linéaire alternée non nulle sur E.

En effet, toute famille de k vecteurs de E est alors liée, et donc possède une image nulle par toute forme k-linéaire alternée.
Autrement dit, pour $k > n$, $\dim \mathscr{A}_k(E) = 0$.
Dans la suite, nous supposons donc $k < n$.

Les mêmes arguments que ceux utilisés pour le déterminant prouvent que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, que $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ est une famille de vecteurs de E tels que $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, alors pour tout forme k-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_k,k} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) a_{i_{\sigma(1)},1} a_{i_{\sigma(2)},2} \cdots a_{i_{\sigma(k)},k}\right) f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \qquad (\star) \end{aligned}$$

Détails

On réordonne les vecteurs de la base par ordre croissant, et tout échange de deux vecteurs fait apparaître un -1.

Contrairement au cas des formes n-linéaires, il ne suffit ici pas[3] de connaître la valeur de f sur la base $(e_1, \dots, e_n)$, mais il faut la connaître sur chaque «p-uplet croissant de de $(e_1, \dots, e_n)$», c'est-à-dire sur chaque élément de

$$\mathscr{D}_k = \{(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n\}.$$

[3] Sauf si $k = n$.

Commençons par remarquer que le cardinal de $\mathscr{D}_k$ est $\binom{n}{k}$: choisir un élément de $\mathscr{D}_k$, c'est choisir une partie de cardinal p de $(e_1, \dots, e_n)$, il n'y aura alors qu'une seule manière de l'ordonner.
Donc $\displaystyle\binom{n}{k}$ est un bon candidat pour la dimension cherchée, ne reste plus qu'à le prouver...

Pour commencer, montrons que pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathscr{D}_k$,

$$f_{\underline{i}} : (x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{k} a_{i_{\sigma(j)},j}$$

est une forme k-linéaire alternée sur E.
La k-linéarité ne pose aucune difficulté, et pour le caractère alterné, la preuve donnée en cours de l'antisymétrie[4] reste valable.
Plus simplement, on peut remarquer que $f_{\underline{i}}(x_1, \dots, x_k)$ est le déterminant de la matrice extraite de $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant k}}$ obtenue en ne gardant que les lignes $i_1, \dots, i_k$.
Et alors le determiner étant n-linéaire alterné, il est facile de constater que $f_{\underline{i}}$ l'est aussi.
Ce point de vue nous permet d'aller plus loin : pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k)$ et $\underline{k} = (j_1, \dots, j_k) \in \mathscr{D}^n$,
on a $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{i} = \underline{j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

[4] Qui rappelons-le implique le caractère alterné, au moins pour les corps tels que $2 \neq 0$.

En effet, dans le cas $\underline{i} = \underline{j}$, alors $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ est le déterminant de la matrice I_k.
Et si $\underline{i} \neq \underline{j}$, l'un des éléments de $\underline{i}$, appelons-le i_p n'est pas dans $\underline{j}$, et donc la $p^{\text{ème}}$ ligne de la matrice dont $f_{\underline{i}}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ est le déterminant est nulle, donc le déterminant est nul.

Remarque

Le point que nous venons de prouver pourrait se retrouver sans parler de matrice.

Donc nous avons $\displaystyle\binom{n}{k}$ formes n-linéaires alternées, et la formule $(\star)$ prouve qu'elles engendrent $\mathscr{A}_k(E)$.
Il ne reste donc qu'à prouver qu'elles sont libres.
Soient alors $(\lambda_{\underline{i}})_{\underline{i} \in \mathscr{D}_k}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{\underline{i} \in \mathscr{D}_k} \lambda_{\underline{i}} f_{\underline{i}} = 0$.
Pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathscr{D}_k$, en évaluant la relation ci-dessus en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, on arrive à

$$\lambda_{\underline{i}} f_{\underline{i}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\underline{i}} = 0.$$

Et donc la famille $(f_{\underline{i}})_{\underline{i} \in \mathscr{D}_n}$ est libre, et donc est une base de $\mathscr{A}_k(E)$.
On en déduit que $\dim \mathscr{A}_k(E) = \displaystyle\binom{n}{k}$.

Remarque : *une vérification aisée : pour $k = n$, on obtient $\dim \mathcal{A}_n(E) = 1$, ce qui est un résultat du cours.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.10

Par n-linéarité, on a

$$\det(A) = \det\left(-A^\top\right) = (-1)^n \det\left(A^\top\right) = (-1)^n \det(A) = -\det(A).$$

Et donc $\det A = 0$.

Ce résultat n'est plus valable pour n pair, comme en témoigne le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Et plus généralement, si $n = 2p$ est pair, on peut considérer la matrice triangulaire par blocs

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est clairement antisymétrique et possède $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^p = 1$ comme déterminant.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.11

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel f existe, et notons $n = \dim E$.

Alors $\det(f^2) = \det(-\mathrm{id}_E) \Leftrightarrow (\det f)^2 = (-1)^n \det(\mathrm{id}_E) = -1$.

Et bien entendu, ceci n'est pas possible lorsque $\det f$ est réel.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.12

Notons $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ les vecteurs sur lequel est construit ce parallélépipède, qui sont à coordonnées entières, puisqu'il en est de même des sommets.

Le volume en question s'entend au sens usuel du terme, c'est-à-dire le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Donc le volume cherché est le déterminant d'une matrice 3×3 dont tous les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$.

Or, toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, à coefficients entiers possède un déterminant entier, puisque

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

est une somme de produits d'entiers.

> **En effet**
> Considérer le déterminant dans la base canonique, c'est prendre comme unité de volume un cube de côtés 1. C'est bien ce qu'on entend usuellement par *volume*.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.13

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

Puisque $AX = B$, on a donc $B = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n$.

Et donc

$$\begin{aligned} \det(A_i) &= \det\left(C_1, \dots, C_{i-1}, \sum_{k=1}^n x_kC_k, C_{i+1}, \dots, C_n\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_k, C_{i+1}, \dots, C_n) \\ &= x_i \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = x_i \det(A). \end{aligned}$$

Si $k \neq i$, le déterminant considéré possède deux colonnes égales, donc est nul.

Une autre preuve : une autre option est de noter que $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Mais nous savons que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$.

Donc x_i, le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne de X est égal à

$$x_i = [X]i, 1 = \frac{1}{\det A}[\mathrm{Com}(A)^\top B]_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n [\mathrm{Com}(A)^\top]_{i,j}[B]_{j,1}$$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}[\mathrm{Com}(A)]_{j,i}[B]_{j,1}$$
$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}\Delta_{j,i}(A)[B]_{j,1}.$$

Cette somme ressemble fortement à un développement, par rapport à une colonne[5]
Et en effet, c'est le développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\det(A_i)$, puisque $[B]_{j,1}$ est le coefficient (j,i) de A_i, et que les colonnes de A_i autres que la $i^{\text{ème}}$ étant celles de A, $\Delta_{j,i}(A_i) = \Delta_{j,i}(A)$.

[5] Puisque c'est j, le numéro de ligne qui varie.

Et donc on a directement $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.

Dans le cas où $n = 2$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, on trouve donc que l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{ed-bf}{ad-bc} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{af-ce}{ad-bc}.$$

Commentaires : *comme souvent avec le déterminant, ces formules sont très jolies, mais en pratique inutilisables lorsque n grandit, et ce n'est probablement pas la meilleure façon de résoudre un système linéaire !*

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.14

Pour passer de B à A, on a multiplié la ligne i par $(-1)^i$ et la colonne j par $(-1)^j$. Ainsi, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} (-1)^1(-1)^1a_{1,1} & (-1)^1(-1)^2a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^1(-1)^ja_{1,j} & \dots & (-1)^1(-1)^na_{1,n} \\ (-1)^2(-1)^1a_{2,1} & (-1)^2(-1)^2a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^2(-1)^ja_{2,j} & \dots & (-1)^2(-1)^na_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^i(-1)^1a_{i,1} & (-1)^i(-1)^2a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^i(-1)^ja_{i,j} & \dots & (-1)^i(-1)^na_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n(-1)^1a_{n,1} & (-1)^n(-1)^2a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^n(-1)^ja_{n,j} & \dots & (-1)^n(-1)^na_{n,n} \end{vmatrix}$$

La multilinéarité par rapport aux lignes nous permet de sortir le $(-1)^1$ de la première ligne.

$$= -\begin{vmatrix} (-1)^1a_{1,1} & (-1)^2a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^ja_{1,j} & \dots & (-1)^na_{1,n} \\ (-1)^2(-1)^1a_{2,1} & (-1)^2(-1)^2a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^2(-1)^ja_{2,j} & \dots & (-1)^2(-1)^na_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^i(-1)^1a_{i,1} & (-1)^i(-1)^2a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^i(-1)^ja_{i,j} & \dots & (-1)^i(-1)^na_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n(-1)^1a_{n,1} & (-1)^n(-1)^2a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^n(-1)^ja_{n,j} & \dots & (-1)^n(-1)^na_{n,n} \end{vmatrix}$$

Puis le $(-1)^2$ de la seconde, le $(-1)^3$ de la troisième, etc.

$$= -(-1)^{1+2+\dots+n}\begin{vmatrix} (-1)^1a_{1,1} & (-1)^2a_{1,2} & \dots & \dots & (-1)^ja_{1,j} & \dots & (-1)^na_{1,n} \\ (-1)^1a_{2,1} & (-1)^2a_{2,2} & \dots & \dots & (-1)^ja_{2,j} & \dots & (-1)^na_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^1a_{i,1} & (-1)^2a_{i,2} & \dots & \dots & (-1)^ja_{i,j} & \dots & (-1)^na_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^1a_{n,1} & (-1)^2a_{n,2} & \dots & \dots & (-1)^ja_{n,j} & \dots & (-1)^na_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2+\dots+n}(-1)^{1+2+\dots+n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Même principe mais pour les colonnes

$$= (-1)^{n(n+1)}\det(A) = \det(A).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.15

1. On a $\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$.

2. Si D est inversible, la matrice $\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs, de déterminant $\det(D)\det(I_n) = \det(D) \neq 0$, donc elle est inversible.
Il vient donc
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det(D) = \det\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$
Mais ce dernier déterminant est lui-même triangulaire par blocs, égal à $\det(AD-BC)\det(D)$.
Et donc $\det(D)$ étant non nul, on a bien $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$.

Analogie
Vos aurez sûrement reconnu que ce $AD-BC$ ressemble au $ad-bc$ du déterminant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3. La fonction $t \mapsto \det(D+tI_n)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n. En effet, c'est
$$\det(D+tI_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [D+tI_n]_{\sigma(i),i}$$
qui est une somme de produits de n termes polynomiaux en t de degré au plus 1.
De plus, à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé, $\prod_{i=1}^n [D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ est de degré n si et seulement si tous les $[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ sont de degré 1.
Ceci n'arrive que lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$, et donc pour $\sigma = \mathrm{id}$.
Et alors le coefficient de degré n est 1.
Ainsi, $P : t \mapsto \det(D+tI_n)$ est polynomiale, et non nulle. Donc elle ne possède qu'un nombre fini de racines (dont 0 fait partie puisque $\det(D) = 0$).
Soit alors $\alpha > 0$ la plus petite racine strictement positive de P si elle existe (sinon, posons $\alpha = +\infty$).
Alors pour $t \in]0,\alpha[$, $\det(D+tI_n) \neq 0$.
Donc par la question 2, puisque C et $D+tI_n$ commutent,
$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n \end{pmatrix} = \det(A(D+tI_n)-BC)$.
Or, par le même type d'arguments, les fonctions $t \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \det(A(D+tI_n)-BC)$ sont polynomiales, et en particulier sont continues sur $\mathbf{R}$. Et en particulier sont continues en 0.
Donc en passant à la limite lorsque $t \to 0^+$, il vient
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \lim_{t\to0^+}\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+tI_n \end{pmatrix} = \lim_{t\to0^+}\det(A(D+tI_n)-BC) = \det(AD-BC).$$

Détails
Pour $\sigma(i) \neq i$, le coefficient $(\sigma(i), i)$ de I_n est nul et donc $[D+tI_n]_{\sigma(i),i}$ est une constante indépendante de t.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.16

Commençons par remarquer que $A = PBP^{-1}$ s'écrit aussi $AP = PB$.
Soit encore $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$.
Puisque A, P_1, P_2 et B sont à coefficients réels, on a $AP_1 = P_1B$ et de même $AP_2 = P_2B$.
Donc si l'une des matrices P_1 ou P_2 est inversible, alors on a fini : il existe $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $AQ = QB \Leftrightarrow A = QBQ^{-1}$, donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Le problème va donc apparaître lorsque ni P_1 ni P_2 ne sont inversibles.
Dans ce cas, notons φ l'application définie sur $\mathbf{C}$ par $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.
Alors il s'agit d'une application polynomiale en t, de degré au plus n.
Pour le voir, écrivons, une fois n'est pas coutume,
$$\varphi(t) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [P_1+tP_2]_{\sigma(i),i}$$
qui fait apparaître des produits de n polynômes en t de degrés au plus 1.
De plus, φ n'est pas le polynôme nul puisque $P = P_1 + iP_2$ est inversible, donc $\varphi(i) \neq 0$.
Par conséquent, φ ne possède qu'un nombre fini de racines. Et donc il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow P_1 + t_0P_2$ soit inversible.
Et alors on a $A(P_1+t_0P_2) = (P_1+t_0P_2)B \Leftrightarrow A = (P_1+t_0P_2)B(P_1+t_0P_2)^{-1}$.
Comme $P_1 + t_0P_2$ est à coefficients réels, A et B sont semblables en tant que matrices réelles.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.17

1. Bien entendu, on pourrait développer par la ligne ou la colonne de notre choix. Dans ce cas, le meilleur choix est sûrement la troisième ligne puisqu'elle ne contient que deux coefficients non nuls, et donc il ne faudrait calculer que deux déterminants 3×3.
Préférons commencer par une opération sur les colonnes pour n'avoir qu'un déterminant 3×3 à calculer[6].

$$D \underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

[6] Ce qui peut se faire à l'aide de la règle de Sarrus, un développement, par opérations élémentaires, ou par une combinaisons des deux derniers.

2. 18.
3. Il suffit de développer par rapport à la première ligne, ce qui nous donne

$$-a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = 2abc.$$

4. Commençons par réaliser les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Alors on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

5. Commençons par des opérations élémentaires :

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 & b \\ c & a & b-a & c \\ c & b & a-b & c \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} a & c & 0 & b \\ c & a & b-a & c \\ 2c & a+b & 0 & 2c \\ b & c & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Puis développons par rapport à la troisième colonne :

$$D = (a-b)\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2c & a+b & 2c \\ b & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} (a-b)\begin{vmatrix} a-b & c & b \\ 0 & a+b & 2c \\ b-a & c & a \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & a+b & 2c \\ -1 & c & a \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne,

$$D = (a-b)^2\left[(a+b)a - 2c^2 - 2c^2 + (a+b)b\right] = (a-b)^2\left((a+b)^2 - 4c^2\right) = (a-b)^2(a+b+2)(a+b-2c).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.18

Écrivons la matrice de cette famille (nommons-la (e_1, e_2, e_3)) dans la base canonique : il s'agit de $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2+\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous savons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{C}^3$ si et seulement si $\det A \neq 0$.
Pour calculer $\det A$, commençons par des opérations sur les colonnes, en réalisant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - (2-\lambda C_3)$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$, de sorte que

Rappel
L'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 3-\lambda & 2+\lambda \\ 3-2\lambda & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\times 1\begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 3-\lambda \\ 3-2\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4+\lambda^2 & 1 \\ 3-2\lambda & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = (3-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Et donc ce déterminant est nul si et seulement si $\lambda \in \{-1, 3\}$.
Donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{C}^3$ si et seulement si $\lambda \notin \{-1, 3\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.19

Il faut faire un peu de trigo et se souvenir que $\cos(a_j + ih) = \cos(a_j)\cos(ih) - \sin(a_j)\sin(ih)$.

Notons alors $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(h) \\ \vdots \\ \cos((n-1)h) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(h) \\ \vdots \\ \sin((n-1)h) \end{pmatrix}$.

Alors la $j^{\text{ème}}$ colonne du déterminant Δ est $\cos(a_j)C - \sin(a_j)S \in \mathrm{Vect}(C, S)$.
Donc toutes les colonnes de Δ sont dans un espace de dimension au plus[7] 2.
En particulier, si $n \geqslant 3$, elles forment une famille liée, et donc $\Delta = 0$.
Et si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) \\ \cos(a_1 + h) & \cos(a_2 + h)\end{vmatrix} \\ &= \cos(a_1 + a_2 + h)\cos(a_1 - a_2 - h) - \cos(a_1 + a_2 + h)\cos(a_2 - a_1 - h) \\ &= \cos(a_1 + a_2 + h)\sin(h)\sin(a_1 - a_2).\end{aligned}$$

[7] En fait il est facile de constater (en utilisant leur première ligne) qui S et C ne sont pas proportionnelles, et donc engendrent un espace de dimension exactement 2.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.20

Le rang est facile car f est une symétrie : $f^2 = \mathrm{id}$, et en particulier est inversible, égale à son propre inverse[8].
Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$.
Pour la trace comme pour le déterminant, il nous faut la matrice de f dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Et pour que les calculs soient le plus faciles possibles, mieux vaut choisir intelligemment cette base.
Donnons deux solutions, juste pour prouver qu'il n'y a pas toujours qu'une bonne solution.

[8] On dit encore une involution.

► **Première option** : travaillons dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Celle-ci n'est pas canoniquement ordonnée, donc choisissons judicieusement l'ordre des éléments, et notons $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,3}, E_{3,1}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,n-1})$. Alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} f(E_{1,1}) & \dots & f(E_{n,n}) & f(E_{1,2}) & f(E_{2,1}) & f(E_{1,3}) & f(E_{3,1}) & \dots & f(E_{n-1,n}) & f(E_{n,n-1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & 1 &&&&& \\ &&& 1 & 0 &&&&& \\ &&&&& 0 & 1 &&& \\ &&&&& 1 & 0 &&& \\ &&&&&&& \ddots && \\ &&&&&&&& 0 & 1 \\ &&&&&&&& 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} E_{1,1} \\ \vdots \\ E_{n,n} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{1,3} \\ E_{3,1} \\ \vdots \\ E_{n-1,n} \\ E_{n,n-1} \end{array}$$

où tous les coefficients laissés vides sont nuls.
Autrement dit, A est diagonale par blocs, avec n blocs 1×1 égaux à 1 et $\dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Et donc non seulement on a tout de suite $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = n$, mais en plus, par déterminant par blocs :

$$\det(f) = \det(A) = \underbrace{1 \cdots 1}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\frac{n(n-1)}{2} \text{ fois}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dénombrement

Le $\frac{n^2-n}{2}$ vient du fait qu'aux n matrices de la base canonique, on a retiré les n de la forme $E_{i,i}$, et qu'on a regroupé celles qui restaient par deux.
Dit autrement, c'est $\binom{n}{2}$, le nombre de manières de choisir une paire formée de deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

► **Seconde option** : souvenons nous que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$, et que nous avons déjà établi que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Si $\left(S_1, \dots, S_{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ et que $\left(A_1, \dots, A_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbf{K})$,

alors leur concaténation $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(S_1) & \dots & f(S_{n(n+1)/2}) & f(A_1) & \dots & f(A_{n(n-1)/2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S_1 \\ \vdots \\ S_{n(n+1)/2} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n(n-1)/2} \end{array}$$

C'est donc une matrice diagonale avec $\dfrac{n(n+1)}{2}$ termes égaux à 1 et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes égaux à -1, de sorte que

$$\operatorname{tr}(f) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \text{ et } \det(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

> **Remarque**
> Le même raisonnement s'applique pour toute symétrie s, pour laquelle on a alors
> $$\det(s) = (-1)^{\dim \operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}_E)}.$$

Notons enfin que ceci se simplifie un peu $\det(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.21

1. C'est un simple calcul de produit par blocs :
$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_nA & BI_p \\ 0 & CI_p \end{pmatrix} = M.$$

2. On a donc $\det M = \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.

Mais si on développe $\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ par rapport à sa première colonne, on fait apparaître un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} I_{n-1} & C' \\ 0 & B \end{vmatrix}$, qui peut de nouveau se développer par rapport à la première colonne, etc.
Jusqu'à arriver à $\begin{vmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(B)$.

Et de même, pour $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_p \end{vmatrix}$, que l'on peut développer par rapport à sa dernière ligne, etc, pour prouver qu'il vaut $\det(A)$.
On retrouve ainsi $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.22

Commençons par procéder à des opérations sur les colonnes, en réalisant l'opération $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_3 + 3C_2 - C_1$, de sorte que, par le binôme de Newton

> **Remarque**
> Le binôme n'est pas apparu par hasard, l'énoncé nous demandait de faire apparaître $(x-1)^3$, nous nous sommes donc arrangés pour le faire apparaître !

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & (x-1)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve donc

$$D(x) = -(x-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît alors un déterminant de Vandermonde :

$$D(x) = -(x-1)^3(3-1)(3-2)(2-1) = -2(x-1)^3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.23

Commençons par noter que AB est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Nous allons prouver que $\mathrm{rg}(AB) < n$.
Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A (qui sont donc dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) et $D_1, \dots, D_n$ celles de B (qui sont donc dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$).
Alors les colonnes de AB sont $AD_1, \dots, AD_n$.
Mais si $D_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$, alors $AD_i = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p$.
Ainsi, toutes les colonnes de B sont dans $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$, qui est de dimension au plus p.
Et donc $\mathrm{rg}(AB) \leqslant p < n$. En particulier, AB ne saurait être inversible, et donc son déterminant est nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.23

Les trois vecteurs dirigeant les côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc à coordonnées entières. Et donc leur déterminant, qui est le volume cherché est encore dans $\mathbf{Z}$.
Le plus simple pour s'en convaincre est encore de remarquer que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le déterminant de la matrice de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base canonique, qui est à coefficients dans $\mathbf{Z}$.
Or, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est à coefficients entiers, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}}_{\in \mathbf{Z}} \in \mathbf{Z}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.24

Une des grosses difficultés de ce type d'exercice est la gestion des pointillés : assurez-vous d'avoir bien compris les matrices en jeu, et soyez soigneux dans votre rédaction.

1. Pour $n \geqslant 2$, réalisons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$. Alors

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 \dots & \dots & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Il est alors possible de procéder à un développement par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ -1 \dots & \dots & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} - (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = D_{n-1} + (-1)^n.$$

Détails
Pour le premier des deux déterminants, on reconnaît D_{n-1}, non pas sous la forme de l'énoncé, mais sous celle obtenue après opérations sur les lignes.

Puisque $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, on a donc $D_3 = D_2 - 1 = 0$, puis $D_4 = 1$, etc. Soit encore
$D_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
Notons que la matrice dont on calcule le déterminant est antisymétrique, donc pour n impair, il n'est pas surprenant de trouver 0, c'est le résultat de l'exercice 7.

Une autre solution : commençons par réaliser les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$, puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Développons alors par rapport à la première colonne :

$$D_n = (-1)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

On redéveloppe par rapport à la première ligne :

$$D_n = (-1)^{2n+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n-2]} = D_{n-2}.$$

Ambigu

Sur ce type d'exercice, la valeur de n à partir de laquelle le déterminant est clairement bien défini n'est pas toujours très claire...

$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, donc pour tout n pair, $D_n = 1$.
Si on a envie de donner un sens à D_1, c'est $D_1 = |0| = 0$.

Si on préfère commencer à $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Donc pour tout n impair, $D_n = 0$.

2. Notons $D_n(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant cherché.
Soustrayons la première ligne aux suivantes :

$$\begin{aligned} D_n(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_3-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = a_1 D_{n-1}(a_2-a_1,\dots,a_n-a_1). \end{aligned}$$

On a développé par rapport à la première colonne.

Puis sur le même principe, $D_{n-1}(a_2-a_1,\dots,a_n-a_1) = (a_2-a_1)D_{n-2}(a_3-a_2,\dots,a_n-a_2)$, etc, et donc au final

$$D_n(a_1,\dots,a_n) = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}).$$

Une autre solution : réalisons l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$:

$$\begin{aligned} D_n(a_1,\dots,a_n) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= (a_n-a_{n-1})(-1)^{2n}D_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) \\ &= (a_n-a_{n-1})D_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}) \end{aligned}$$

On a $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1(a_2-a_1)$.
Donc $D_3 = (a_3-a_2)D_2 = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)$.

Par récurrence, on prouve alors que

$$D_n = a_1(a_2-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) = a_1\prod_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i).$$

3. On a facilement $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ et $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$.

Et pour $n \geqslant 4$, on a, en développant par rapport à la première ligne

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n]} = -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-1]} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= -2D_{n-1} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & -2 \end{vmatrix}_{[n-2]} = -2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Astuce : Dans ce type de déterminants écrits avec des pointillés, on perd vite la taille de la matrice, il est utile de l'inscrire en bas à droite.

On reconnaît alors une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est X^2+2X+1, qui possède -1 comme racine double.
Donc il existe deux réels α et β tels que $D_n = (\alpha+\beta n)(-2)^n$. À l'aide des conditions initiales ($D_2 = 3$ et $D_3 = -4$), on trouve $D_n = (n+1)(-1)^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.25

1. Pour $x \in \mathbf{K}$, on a

$$\chi_A(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\sigma(i),i}.$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x \mapsto [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1.
En effet, elle est de degré 1 si $\sigma(i) = i$, et constante (donc de degré 0) sinon.

Donc pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \mapsto \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est polynomiale de degré au plus n.

Et donc χ_A l'est également.

Mieux : Le degré de cette fonction est exactement le nombre de i tels que $\sigma(i) = i$, c'est-à-dire le nombre de points fixes de σ.

Mieux : pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \mapsto \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est de degré n si et seulement si ses n facteurs sont de degré 1.
Donc si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$. Donc si et seulement si $\sigma = \mathrm{id}$.

Et donc $x \mapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\sigma(i),i}$ est de degré exactement n, puisque somme d'une fonction polynomiale de degré n et de fonctions[9] polynomiales de degré strictement inférieur à n.

[9] Au nombre de $n!-1$.

Son coefficient dominant est alors celui de $\prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{\mathrm{id}(i),i} = \prod_{i=1}^n [xI_n - A]_{i,i} = \prod_{i=1}^n (x - a_{i,i})$.
Il vaut donc 1.

Enfin, son coefficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n\det(A)$.

Remarque : une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ne peut pas posséder $n-1$ points fixes : soit elle en a n (et c'est l'identité), soit elle en a au plus $n-2$.
Donc tous les termes de la somme correspondant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ sont de degré au plus $n-2$.

Donc le coefficient de degré $n-1$ est précisément celui correspondant à $\sigma = \mathrm{id}$, donc le terme de degré $n-1$ de $x \mapsto \prod_{i=1}^{n}(x - a_{i,i})$.

Par les relations racines-coefficients, c'est $\sum_{i=1}^{n}(-a_{i,i}) = -\mathrm{tr}(A)$.

2. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, soit si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$.
Mais puisque χ_A est polynomiale de degré au plus n, elle s'annule au plus n fois sur $\mathbf{K}$.

3.a. Donnons deux preuves de ce résultat.
Pour la première, travaillons sur les lignes de $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, réalisons l'opération $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} L_j$.

Cela a pour effet de rendre le bloc en bas à gauche nul.
Et pour $k \in [\![1, n]\!]$, le coefficient $(n+i, n+k)$ devient

$$[I_n]_{i,k} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} = [I_n]_{i,k} - [AB]_{i,k}.$$

Autrement dit, le bloc en bas à droite devient $I_n - AB$.
Puisque les opérations que nous venons de réaliser n'ont à aucun moment changé le déterminant , on a donc

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0_n & I_n - AB \end{vmatrix} = \det(I_n)\det(I_n - AB) = \det(I_n - AB).$$

Sur le même principe, à l'aide d'opérations sur les colonnes, on peut montrer que

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n - BA \end{vmatrix} = \det(I_n - BA).$$

Intuition

À l'aide du 1 tout en haut à gauche, on peut annuler les coefficients du bloc A en bas à gauche à l'aide des opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - a_{1,1}L_1$, $L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} - a_{2,1}L_1$, etc.
Puis utiliser le 1 en position $(2, 2)$ pour annuler la deuxième colonne du bloc A.
Et ainsi de suite...

Rappel

Ajouter à une ligne une combinaison linéaire **des autres** préserve le déterminant.

Alternative, moins laborieuse mais plus astucieuse : on a

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - AB & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Et donc $\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0_n \\ -A & I_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n - BA & B \\ 0_n & I_n \end{vmatrix} = \det(I_n - BA)$.
Et de même, $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ A & I_n - AB \end{pmatrix}$.

3.b. Soit $x \in \mathbf{K}$.
Si $x = 0$, alors $\chi_{AB}(0) = \det(-AB) = (-1)^n \det(A)\det(B) = \det(-BA) = \chi_{BA}(0)$.
Si $x \neq 0$, alors par ce qui précède, on a

$$\chi_{AB}(x) = \det(xI_n - AB) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x}AB\right) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x}BA\right) = \det(xI_n - BA) = \chi_{BA}(x).$$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{K}$, $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.26

1. Au premier abord, un développement «brutal» de $\Delta_n(x)$ nous prouverait qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus n, mais il est alors bien difficile de constater que tous les termes de degré $2, 3, \dots, n$ en x se simplifient.
Plus simplement, commençons par l'opération $C_i \leftarrow C_i - C_1$, pour $2 \leqslant i \leqslant n$. Alors

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \dots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a - b \\ b + x & \dots & 0 & \lambda_n - b \end{vmatrix}.$$

Et alors un développement par rapport à la première colonne prouve[10] cette fois qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus 1, c'est-à-dire d'une fonction affine en x.

2. Nous savons donc qu'il existe deux réels α, β tels que pour tout $x \in \mathbf{K}$, $\Delta_n(x) = \alpha x + \beta$.
Or, on a[11] $\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a)$ et de même $\Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b)$.
Par résolution d'un système 2×2, on trouve donc

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b)}{b-a}, \ \beta = \frac{b\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - b)}{b-a}.$$

Et donc en particulier, $\Delta_n(0) = \beta$.

[10] Les cofacteurs sont des constantes indépendantes de x.

[11] Il s'agit de deux déterminants de matrices triangulaires.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.27

Il est clair que $I_n \in SL_n(\mathbf{Z})$ et que $SL_n(\mathbf{Z})$ est stable par produit.
Il s'agit donc de prouver la stabilité par passage à l'inverse.
Soit donc $A \in SL_n(\mathbf{Z})$. Alors toutes les matrices extraites de A sont à coefficients entiers.
Mais le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est à coefficients entiers. Le plus simple pour le voir est de se souvenir que

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i), i}.$$

Donc si A est à coefficients entiers, tous ses mineurs sont des entiers. Et par conséquent, $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Mais alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top$ est encore à coefficients entiers, et a pour déterminant $\frac{1}{\det(A)} = 1$. C'est donc une matrice de $SL_n(\mathbf{Z})$.
Et donc $SL_n(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

Remarque *: en revanche, il existe des matrices inversibles à coefficients entiers dont l'inverse n'est pas à coefficients entiers, prendre par exemple* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.28

1. Si A et B sont inversibles, et commutent, alors leurs inverses aussi[12].
Mais nous savons alors que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top$ et idem pour B.
Donc les transposées des comatrices commutent, et par transposition, $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent également.

[12] Passer à l'inverse dans la relation $AB = BA$.

2. Il s'agit de se souvenir que

$$f(t) = \det(A + tI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [A + tI_n]_{\sigma(i), i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i), i} + \delta_{\sigma(i), i} t).$$

On a donc une somme[13] de produit de n fonctions polynomiales de degré au plus 1.
Donc f est bien une fonction polynomiale, et en plus on peut affirmer que son degré au plus n.
Allons plus loin : il s'agit d'un polynôme de degré exactement n. En effet, pour $\sigma = \mathrm{id}$, $\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i), i} + \delta_{\sigma(i), i} t) = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} + t)$ est un polynôme de degré exactement n.
Et si $\sigma \neq \mathrm{id}$, alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i_0) \neq i_0$, et alors $\delta_{\sigma(i_0), i_0} = 0$, de sorte que $\prod_{i=1}^{n}(a_{\sigma(i), i} + \delta_{\sigma(i), i})$ est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
Donc par somme, f est une fonction polynomiale en t de degré n.
En particulier, elle n'est pas constante, et donc, comme tout polynôme, possède un nombre fini de racines (dont fait partie 0 si A n'est pas inversible).
En particulier, si p est assez grand, alors $\frac{1}{p}$ n'est pas l'une de ces racines, de sorte que

[13] À $n!$ termes.

Mieux
Le coefficient dominant est alors égal à 1.

$\det\left(A+\dfrac{1}{p}I_n\right)\neq 0$, et donc $A+\dfrac{1}{p}I_n$ est inversible.

De même, pour p suffisamment grand, $B+\dfrac{1}{p}I_n$ est inversible.

3. Il nous faudrait ici disposer d'une notion correctement définie de limite de suite de matrices[14] pour conclure rapidement, donc le raisonnement va être un peu laborieux.

[14] Ce sera fait en spé.

Mais l'idée principale, et vous pouvez probablement vous en contenter, est que $A+\dfrac{1}{p}I_n \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$, même si la signification de cette limite reste à préciser.

Et alors $\mathrm{Com}\left(A+\dfrac{1}{p}I_n\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Com}(A)$.

Comme on a le même résultat pour B et que pour p suffisamment grand,

$$\mathrm{Com}\left(A+\frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(B+\frac{1}{p}I_n\right)=\mathrm{Com}\left(B+\frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(A+\frac{1}{p}I_n\right)$$

en passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)=\mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$.

Plus précisément, notons $c_{i,j}$ (resp. $d_{i,j}$) les coefficients de $\mathrm{Com}(A)$ (resp. de $\mathrm{Com}(B)$), et $c_{i,j}^{(p)}$ (resp. $d_{i,j}^{(p)}$) ceux de $\mathrm{Com}\left(A+\dfrac{1}{p}I_n\right)$ (resp. $\mathrm{Com}\left(B+\dfrac{1}{p}I_n\right)$).

Alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j}^{(p)}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\left(A+\dfrac{1}{p}I_n\right)$.

Or, $\Delta_{i,j}\left(A+\dfrac{1}{p}I_n\right)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\Delta_{i,j}(A)$. Les détails resteraient (laborieusement) à écrire, mais l'idée est que $\Delta_{i,j}(A+tI_n)$ est un polynôme en t, donc continu en 0.

De même, $\Delta_{i,j}\left(B+\dfrac{1}{t}I_n\right)\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}\Delta_{i,j}(B)$.

Et donc on a à la fois $c_{i,j}^{(p)}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}c_{i,j}$ et $d_{i,j}^{(p)}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}d_{i,j}$. Notons que nous parlons ici de suites de complexes, pour lesquelles nous savons ce que signifie une limite.

Mais alors, pour p suffisamment grand pour que $A+\dfrac{1}{p}I_n$ et $B+\dfrac{1}{p}I_n$ soient inversibles, on a par la question 1, qui s'applique car $A+\dfrac{1}{p}I_n$ et $B+\dfrac{1}{p}I_n$ commutent, en identifiant les coefficients (i,j) de l'égalité $\mathrm{Com}\left(A+\frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(B+\frac{1}{p}I_n\right)=\mathrm{Com}\left(B+\frac{1}{p}I_n\right)\mathrm{Com}\left(A+\frac{1}{p}I_n\right)$

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{(p)}d_{k,j}^{(p)}=\sum_{k=1}^n d_{i,k}^{(p)}c_{k,j}^{(p)}$$

Et donc par passage à la limite,

$$\sum_{k=1}^n c_{i,k}d_{k,j}=\sum_{k=1}^n d_{i,k}c_{k,j}$$

ce qui signifie que le coefficient (i,j) de $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$ est égal à celui de $\mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$. Ceci étant vrai pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, il vient bien $\mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)=\mathrm{Com}(B)\mathrm{Com}(A)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 30.29

▶ **Si A est de rang n,** elle est inversible, et son inverse est $\dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^\top$.

Donc $\mathrm{Com}(A)^\top$ est de rang n, et par invariance du rang par transposition, $\mathrm{Com}(A)$ est également de rang n.

▶ **Si A est de rang $n-1$.** Alors nous savons que $A\mathrm{Com}(A)^\top=\det(A)I_n=0$.

Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A))\subset\mathrm{Ker}(A)$, et par le théorème du rang, $\dim\mathrm{Ker}\,A=n-\mathrm{rg}(A)=1$.

Donc soit $\dim\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)^\top)\leqslant 1$.

Soit encore $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)^\top)\leqslant 1\Leftrightarrow\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A))\leqslant 1$.

Détails

Il y a là un résultat classique sur les applications linéaires : $g\circ f=0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\,f\subset\mathrm{Ker}\,g$.

L'analogue matriciel est donc

$$AB=0\Leftrightarrow\mathrm{Im}\,B\subset\mathrm{Ker}\,A.$$

Mais A étant de rang $n-1$, elle possède une matrice extraite de taille $n-1$ qui est inversible. Et donc le déterminant de cette matrice extraite, qui est un mineur de A, est non nul.

Et par conséquent, $\mathrm{Com}(A) \neq 0$, et donc est de rang 1.

► **Enfin, si A est de rang inférieur à** $n-2$, alors toutes ses matrices extraites de taille $n-1$ sont non inversibles, et donc de déterminant nul.
Donc tous les mineurs de A sont nuls, de sorte que la comatrice de A est nulle.

Remarque *: puisque A est de rang inférieur à* $n-2$*, il existe au moins* 2 *colonnes de A qui sont combinaison linéaires des* $n-2$ *autres.*
Et donc dans toute matrice A' extraite de A de taille $n-1$ *se trouve encore l'une de ces deux lignes, qui est alors combinaison linéaire des autres lignes de A'.*
Donc A' n'est pas inversible, si bien que son déterminant est nul.
Et par conséquent tous les mineurs de A sont nuls, si bien que $\mathrm{Com}(A) = 0$.

Pour le déterminant de la comatrice, il suffit d'utiliser la relation $A\mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$, qui par passage au déterminant nous donne $\det(A)\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^n$.
Si A est inversible, il vient donc $\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$.
Et si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{Com}(A)$ non plus, donc est de déterminant nul.
Dans tous les cas, $\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det A)^{n-1}$.

Produits scalaires et espaces préhilbertiens

31

Dans tout ce chapitre, on ne considère que des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$.
Le but principal est de généraliser la notion de produit scalaire que vous avez déjà rencontrée dans $\mathbf{R}^2$ ou dans $\mathbf{R}^3$.
Rappelons que le produit scalaire de deux vecteurs est un réel (=un scalaire[1]), et pas un troisième vecteur.
Une fois la notion de produit scalaire généralisée, nous en déduirons une notion de norme et une notion d'orthogonalité.

[1] Ce qui explique la terminologie.

31.1 Produits scalaires

31.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
Rappelons qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ est une forme bilinéaire si pour tout $y \in E$, les applications $\varphi(\cdot, y) : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ et $\varphi(y, \cdot) : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(y,x) \end{array} \right.$ sont des formes linéaires sur E.

Définition 31.1 – Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ est dite **symétrique** si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Exemples 31.2

► $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$ est symétrique car

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n))$$

► Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$, alors l'application $\det_{\mathscr{B}} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ n'est pas symétrique[2] car $\det_{\mathscr{B}}(e_2, e_1) = -1 \neq \det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2) = 1$.

[2] Ce qui légitime l'appellation antisymétrique...

Remarques. ► Pour vérifier que $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ est bilinéaire symétrique, il suffit de vérifier que :

- $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$: φ est linéaire par rapport à sa première variable
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$: φ est symétrique.

En effet, on a alors

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ \varphi(x, \lambda y + z) = \varphi(\lambda y + z, x) = \lambda \varphi(y,x) + \varphi(z,x) = \lambda \varphi(x,y) + \varphi(x,z).$$

Donc φ est nécessairement linéaire par rapport à sa seconde variable.
► Plus généralement, on pourrait, à l'image de ce qui a été fait pour les formes n-linéaires, définir la notion de forme n-linéaire symétrique sur E^n, une telle forme étant invariante par échange de deux vecteurs.

Méthode
On procédera toujours ainsi pour prouver qu'une application est bilinéaire symétrique : on commencera par prouver la symétrie, puis on prouvera la linéarité par rapport à l'une des deux variables. On en déduira alors automatiquement la bilinéarité.

Il est alors facile de prouver[3] qu'il s'agit alors d'une application invariante par toute permutation des vecteurs de E^n.

[3] Car les transpositions engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Exemples 31.3

▸ Si $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, alors $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt\end{array}\right.$ est une forme bilinéaire symétrique car

$\forall (f,g,h)\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})^3$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))h(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)h(t)\,dt+\int_a^b g(t)h(t)\,dt$

et $\forall f,g\in\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b g(t)f(t)\,dt$.

▸ Si E est l'ensemble des variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbf{P})$, alors $\mathrm{Cov} : (X,Y)\mapsto \mathrm{Cov}(X,Y)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Espaces des V.A.R. ?

Cet ensemble est bien un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ en tant qu'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$.
Savez-vous prouver qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension ?

La proposition suivante n'est rien d'autre qu'une généralisation des identités remarquables habituelles.

Proposition 31.4 : *Si $\varphi : E\times E\to\mathbf{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, alors :*

1. $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)$.
2. $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x-y,x-y) = \varphi(x,x)-2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)$.
3. $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x+y,x-y) = \varphi(x,x)-\varphi(y,y)$.

Démonstration. Soient $x,y\in E$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y) &= \varphi(x,x+y)+\varphi(y,x+y) && \text{Linéarité à gauche.}\\ &= \varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,x) && \text{Linéarité à droite.}\\ &= \varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(x,y)+\varphi(y,y) && \text{Symétrie.}\\ &= \varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y).\end{aligned}$$

Pour la seconde égalité, il suffit de remplacer y par $-y$.
Et pour la dernière, on a

$$\varphi(x+y,x-y) = \varphi(x,x)+\varphi(x,-y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,-y) = \varphi(x,x)-\varphi(y,y).$$

□

Remarque

L'implication

$$x = 0_E \Rightarrow \varphi(x,x) = 0$$

est toujours vérifiée pour une forme bilinéaire, donc il s'agit surtout de vérifier que

$$\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

Définition 31.5 – Une application $\varphi : E\times E\to\mathbf{R}$ est **un produit scalaire sur** E si :

1. φ est une forme bilinéaire symétrique sur E
2. $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$ (on dit que φ est **positive**)
3. $\forall x\in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (on dit que φ est **définie**).

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarques. ▸ Pour prouver que $\varphi : E\times E\to\mathbf{R}$ est un produit scalaire, il faut vérifier quatre propriétés :

1) φ est linéaire par rapport à sa première variable.
2) φ est symétrique (et donc 1) et 2) impliquent la linéarité par rapport à la seconde variable).
3) Pour tout $x\in E$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$.
4) Si $\varphi(x,x) = 0$, alors $x = 0_E$ (comme indiqué précédemment, l'implication réciproque est toujours vraie et n'a donc pas besoin d'être vérifiée.)

Rédaction ✎

Ce dernier point est souvent celui qui est le plus difficile à prouver, et qui demande une vraie justification. Attention à ne pas le négliger.

► En général, on note $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ au lieu de $\varphi(x, y)$.
Dans ce cas, si on veut parler de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ (et pas du réel $\langle x, y\rangle$) on la note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (ou $(\cdot|\cdot)$).
► Le produit scalaire de deux vecteurs est, comme son nom l'indique, un scalaire. Rappelons qu'il n'y a pas de notion naturelle de produit de deux vecteurs dans un espace vectoriel, sauf dans quelques cas particuliers (produit de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$, produit de matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, produit vectoriel dans $\mathbf{R}^3$, etc).

Exemples 31.6

► $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$
On a déjà prouvé qu'il s'agissait d'une forme bilinéaire symétrique.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0.$$

De plus, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls, donc

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Donc φ est un produit scalaire, appelé **produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.**

Cas particuliers
Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve les produits scalaires du plan et de l'espace étudiés au lycée.

► Plus généralement, si E est un espace de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors l'application $\varphi_{\mathscr{B}}$ définie par

$$\varphi_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un produit scalaire sur E.

Exercice
Le prouver.

Notons qu'on peut aussi définir $\varphi_{\mathscr{B}}$ de la manière suivante :

$$\varphi_{\mathscr{B}}(x, y) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x))^\top \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$$

► $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$ car :

- nous avons déjà prouvé sa bilinéarité et sa symétrie
- $\forall f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R}),\ \displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).
- si $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$, alors puisque f^2 est continue et positive sur $[a, b]$, c'est que $\forall t \in [a, b],\ f^2(t) = 0$, et donc $\forall t \in [a, b],\ f(t) = 0$: f est la fonction nulle sur $[a, b]$.

Notons que sur $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est plus un produit scalaire, et pourtant il s'agit toujours d'une forme bilinéaire symétrique positive, c'est le dernier point qui fait défaut, puisque la nullité de l'intégrale de f^2 sur $[a, b]$ ne nous renseigne pas sur le comportement de f en dehors de $[a, b]$.
► Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, définissons une application $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$.
La bilinéarité de φ ne pose pas de problème, sa symétrie découle de l'invariance de la trace par transposition.
Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\varphi(A, A) = \mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n [A^\top A]_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A^\top]_{i,k}[A]_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2.$$

Donc non seulement $\varphi(A,A) \geqslant 0$, mais de plus[4], on a

$$\varphi(A,A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,i}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,i} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

On dit alors que φ est le **produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$** (et il faut savoir redémontrer qu'il s'agit d'un produit scalaire).
Par un calcul similaire au précédent, on prouve que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $\varphi(A,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$, et donc que si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, alors $\varphi = \varphi_{\mathscr{B}}$ défini à l'exemple ci-dessus.
► L'application Cov sur l'espace des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P})$ est bien bilinéaire, symétrique et positive. Mais elle n'est pas définie car $\mathrm{Cov}(X,X) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{V}(X) = 0$ est vérifié pour tout variable suivant une loi certaine, et pas seulement pour la variable nulle.
Donc il ne s'agit pas d'un produit scalaire.

Définition 31.7 – On appelle **espace préhilbertien** un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.
Un espace préhilbertien de dimension finie est alors appelé un **espace euclidien**.

S'il est assez clair que le terme euclidien fait référence à EUCLIDE[5], le sens de préhilbertien est peut-être moins clair.
Il s'agit en fait d'un hommage à David HILBERT[6], qui le premier s'est intéressé aux espaces qu'on appelle aujourd'hui espaces de Hilbert ou espaces hilbertiens[7], et qui sont des espaces munis d'un produit scalaire et vérifiant une hypothèse supplémentaire (appelée complétude). Si on enlève cette dernière hypothèse, on obtient donc les espaces pré-hilbertiens.

Notons bien que se donner un espace préhilbertien c'est se donner à la fois un espace vectoriel et un produit scalaire sur cet espace vectoriel.
Il est important de préciser quel produit scalaire on utilise car en général il existe une infinité de produits scalaires sur un même espace. Et les notions de norme et d'orthogonalité que nous allons définir par la suite dépendent du produit scalaire choisi.
Vous lirez parfois des énoncés du type «on munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique», il faudra comprendre par là qu'on considère $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, qui lui confère alors une structure d'espace euclidien.

[4] Toujours le même argument : une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ses termes le sont.

[5] Qui n'a jamais entendu parler ni d'espace vectoriel ni de produit scalaire.

[6] 1862–1943. Il a eu une grande influence sur les mathématiques du XXème siècle, notamment à travers la liste des 23 problèmes (aujourd'hui connus sous le nom de problèmes de Hilbert) qu'il présenta en 1900 au congrès international des mathématiciens, et dont une dizaine ne sont toujours pas complètement résolus 120 ans plus tard.

[7] Qui sont le «bon cadre» pour formuler la mécanique quantique.

31.1.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 31.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : *Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Alors,*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle \times \langle y,y\rangle$$

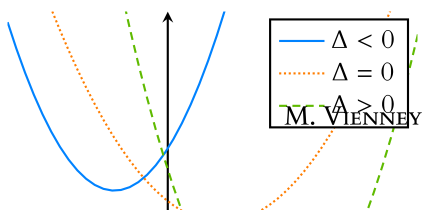
De manière équivalente, $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$.
De plus, on a l'inégalité ci-dessus est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Pour $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, c'est évident, donc nous supposons $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_E$.
Définissons une fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \langle tx+y, tx+y\rangle$.
Alors $\forall t \in \mathbf{R}$, $f(t) \geqslant 0$ par positivité de la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
De plus, pour $t \in \mathbf{R}$, on a, par bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$f(t) = \langle tx+y, tx+y\rangle = \langle tx, tx\rangle + 2\langle tx, y\rangle + \langle y,y\rangle = t^2\langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

et donc f est un polynôme du second degré en la variable t. Puisqu'elle est toujours positive, c'est que son discriminant est négatif ou nul. Mais

$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$



On en déduit que
$$\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$
D'autre part, si on a égalité alors $\Delta = 0$, et donc f possède alors une racine a.
Mais alors $\langle ax+y, ax+y\rangle = f(a) = 0$, et donc $ax+y = 0_E$: x et y sont colinéaires.
Inversement, si x et y sont colinéaires, alors soit $x = 0_E$ (auquel cas l'inégalité est bien une égalité : $0=0$), soit il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $y = \lambda x$. Mais alors
$$\langle x,y\rangle^2 = \langle x,\lambda x\rangle^2 = (\lambda\langle x,x\rangle)^2 = \lambda^2\langle x,x\rangle^2 = \langle x,x\rangle(\lambda^2\langle x,x\rangle) = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc bien une égalité. □

Remarque : cette preuve est la même que celle montrant que
$$|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}\sqrt{\mathbf{V}(Y)}.$$
C'est normal, car on n'utilise pas ici
$$\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$
et la covariance vérifie toutes les autres propriétés d'un produit scalaire.

Corollaire 31.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$) – *Pour tous n-uplets $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)$ de réels, on a*
$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Démonstration. Il s'agit simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$. □

Corollaire 31.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales) – *Si f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$, $a<b$, alors*
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Démonstration. C'est Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f,g)\mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$. □

31.1.3 Norme associée à un produit scalaire

Définition 31.11 – Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E, on appelle **norme associée à** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application
$$\|\cdot\| : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{array}\right.$$
En particulier, $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$.
On appelle alors norme du vecteur $x\in E$ le réel positif $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Exemple 31.12

La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ est
$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$
Pour $n=2$ ou $n=3$, on retrouve les normes d'un vecteur du plan ou de l'espace étudiées au lycée, où la norme d'un vecteur était définie comme étant sa «longueur». De manière générale, il faudra interpréter la norme d'un vecteur comme une mesure de sa longueur[8].

[8] En gardant à l'esprit que cette notion de longueur dépend tout de même du produit scalaire choisi, et donc n'est pas une propriété intrinsèque des vecteurs).

Remarque. En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se reformule en termes de normes de la façon suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2, |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Remarque
Dans le cas du produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^2$, étudié au lycée, cette propriété était déjà connue car :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos(\vec{x}, \vec{y}).$$

et puisque $|\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant 1$

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Proposition 31.13 : *Si φ est un produit scalaire sur E, et si $\|\cdot\|$ est la norme associée, alors*

- $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. *Cette inégalité s'appelle l'inégalité triangulaire*[9]. *De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire si $x = 0_E$ ou s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$.*

[9] En particulier, pour $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$ muni de son produit scalaire canonique, on retrouve l'inégalité triangulaire que l'on connaît bien pour des réels.

Démonstration.
- $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$.
- Il est clair que $\|0_E\| = 0$.
  Inversement, si $\|x\| = 0$, alors $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$, et donc $x = 0_E$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.
- Soient $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En prenant la racine carrée, il vient $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
De plus, le calcul précédent prouve qu'il y a égalité si et seulement si $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$.
Cela nécessite notamment qu'il y ait égalité dans Cauchy-Schwarz, et donc que x et y soient colinéaires.
Le cas $x = 0_E$ est trivial, et si $x \neq 0_E$, alors pour $y = \lambda x$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$, alors que $\|y\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
Et donc $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

□

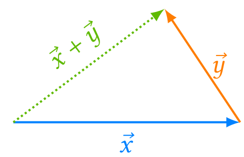


FIGURE 31.2– L'inégalité triangulaire : le plus court chemin entre deux points est la ligne droite.

Plus généralement, les propriétés évoquées à la proposition précédente définissent ce qu'on appelle une norme, objet que vous étudierez davantage l'an prochain.

Définition 31.14 – On appelle **norme** sur un espace vectoriel réel E toute application $N : E \to \mathbf{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Exemple 31.15

Sur $\mathbf{R}^n$, considérons l'application $N_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.
Alors les deux premiers points de la définition de norme sont assez évidents.
Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^n$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$$

et donc par passage au maximum, $N_\infty(x+y) \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$.
Donc N_∞ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.

Une norme permet de définir une notion de distance entre les éléments de E, en définissant la distance entre x et y comme étant le réel positif $d(x,y) = N(x-y)$.
On vérifie alors assez aisément que :

Dans $\mathbf{R}^2$
La distance entre deux points du plan est bien la longueur du vecteur qui joint ces deux points.

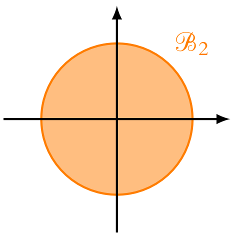
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

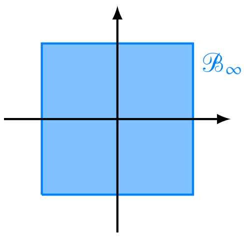
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Ce dernier point est appelé une fois de plus inégalité triangulaire, et découle directement de l'inégalité triangulaire pour N.
Cette notion de distance sera développée en seconde année, mais il est bon de savoir qu'elle est vraiment fondamentale par exemple lorsqu'on veut parler de limite/continuité/dérivée(s) de fonctions de plusieurs variables.

Ne nous attardons pas trop sur le sujet, mais certaines normes peuvent avoir des propriétés un peu déroutantes.
Par exemple dans $\mathbf{R}^2$, la norme que vous connaissez bien, qui est donc la norme associée au produit scalaire canonique correspond à la longueur d'un vecteur telle que vous l'imaginez.
Et donc $\mathscr{B}_2 = \{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\| \leqslant 1\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1\}$ est le disque centré en l'origine et de rayon 1.
Par contre, $\mathscr{B}_\infty = \{u \in \mathbf{R}^2 \mid N_\infty(u) \leqslant 1\}$ est un carré[10] centré en l'origine.
L'an prochain vous nommerez *boules* ces deux ensembles, et donc la norme N_∞ est une norme pour laquelle les boules sont carrées !

[10] Je vous laisse vous en convaincre.





Si à tout produit scalaire est associé une norme, la réciproque n'est pas vraie, et il existe des normes non associées à des produits scalaires, c'est par exemple le cas de N_∞ ci-dessus.

En revanche, lorsqu'une norme est associée à un produit scalaire, connaître la norme permet de retrouver le produit scalaire, c'est le but des identités (dites de polarisation) ci-dessous.

Proposition 31.16 (Identités de polarisation) : *Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a*

1. $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$
2. $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$
3. $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Remarque
Inutile de connaître par cœur ces identités, savoir qu'elles existent et être capable de les retrouver est largement suffisant.

Démonstration. Les trois découlent directement de la proposition 31.4. □

Corollaire 31.17 (Identité du parallélogramme) – *Soient (x,y) deux vecteurs d'un espace préhilbertien. Alors*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Démonstration. Soustraire les deux premières formules de polarisation (ou repartir des identités remarquables). □

Définition 31.18 – Un vecteur x est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

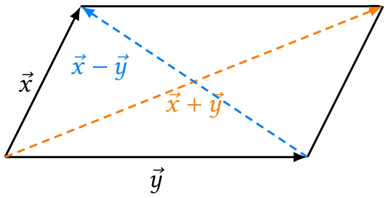


FIGURE 31.3 – Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Si x est non nul, alors $\dfrac{x}{\|x\|} = \dfrac{1}{\|x\|}x$ est unitaire. En effet,

$$\left\| \underbrace{\frac{1}{\|x\|}}_{\in \mathbf{R}_+} x \right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1.$$

Astuce
Cette remarque permet facilement, pour tout vecteur non nul x de produire un vecteur de norme 1 colinéaire à x : il suffit de le multiplier par l'inverse de sa norme.

31.2 ORTHOGONALITÉ D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

31.2.1 Définition

Définition 31.19 – Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$.

Exemples 31.20

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de E.
- Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $(1,0,1)$ et $(-1,-5,1)$ sont orthogonaux car $1\times(-1)+0\times(-5)+1\times 1 = 0$.
  En revanche, $(1,0,0)$ et $(2,0,1)$ ne sont pas orthogonaux.
- Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
  En effet, on a $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- Si (x, y) est une famille liée[11], alors x et y sont orthogonaux si et seulement $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

[11] C'est-à-dire si x et y sont colinéaires.

Définition 31.21 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont **orthogonaux** si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y\rangle = 0.$$

De manière équivalente, ceci signifie que **tout** vecteur de F est orthogonal à **tout** vecteur de G.

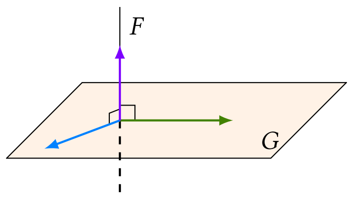


FIGURE 31.4– Tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.

Exemple 31.22

Dans $\mathbf{R}^3$, soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y = 0\}$ et $G = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x = y \text{ et } z = 0\}$.
Alors F et G sont orthogonaux. En effet, soit $(x,y,z) \in F : (x,y,z) = (x,-x,z)$.
Soit $(x',y',z') \in G$, alors $(x',y',z') = (x',x',0)$.
Et alors $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'+zz' = xx'-xx' = 0$.

Remarque. Nous avons donc deux notions d'orthogonalité : une pour les vecteurs et une pour les sous-espaces vectoriels de E.
Ces notions ne sont pas sans rapport, et un bon exercice pour manipuler les définitions est de prouver que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si les sous-espaces $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathrm{Vect}(y)$ sont orthogonaux.

Proposition 31.23 : *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent, F et G sont en somme directe.*

Démonstration. Soit $x \in F \cap G$. Alors on a à la fois $x \in F$ et $x \in G$, de sorte que $\langle \underbrace{x}_{\in F}, \underbrace{x}_{\in G} \rangle = 0$, et donc $x = 0_E$.
Ainsi, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$. □

⚠ Pour autant, deux sous-espaces orthogonaux ne sont pas forcément supplémentaires dans E. Par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}(1,0,0)$ et $G = \mathrm{Vect}(0,1,0)$ sont orthogonaux, mais $\dim F + \dim G = 2 \neq \dim \mathbf{R}^3$.

Définition 31.24 – Une famille de vecteurs de E est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
Autrement dit, $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$. On dit qu'une famille est **orthonormée** (ou orthonormale) si elle est orthogonale, **et** formée de vecteurs unitaires.
Autrement dit, $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I^2,\ \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Remarque. À partir d'une famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$ ne contenant pas le vecteur nul, il est facile d'obtenir une famille orthonormée : il suffit de considérer $\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$.

Intuition
En divisant un vecteur par sa norme, on modifie sa norme, mais pas sa direction. Or le fait que deux vecteurs soient ou non orthogonaux ne dépend que de leurs directions, et pas de leurs normes.

Exemples 31.25

- La base canonique de $\mathbf{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
- Plus généralement, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors elle est orthonormée pour le produit scalaire $\varphi_{\mathscr{B}}$ défini à l'exemple 31.6.
- Pour $k \in \mathbf{N}$, notons $f_k : \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \right.$. Alors la famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$.
En effet, pour $k \neq \ell$ deux entiers naturels distincts, on a

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_\ell \rangle &= \int_0^{2\pi} f_k(t) f_\ell(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\left((k+\ell)t\right)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\left((k-\ell)t\right)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2(k+\ell)} \sin\left((k+\ell)t\right)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{2(k-\ell)} \sin\left((k-\ell)t\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

En revanche, elle n'est pas orthonormée, par exemple car

$$\|f_0\|^2 = \langle f_0, f_0 \rangle = \int_0^{2\pi} f_0(t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Proposition 31.26 : *Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormée est libre*[12].

[12] Et en particulier est une base dès qu'elle a «le bon» cardinal.

Démonstration. Prouvons le résultat pour une famille finie, le cas infini en découlant directement. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$. Alors,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], 0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = \lambda_j \|x_j\|^2.$$

Mais $x_j \neq 0_E$, et donc $\|x_j\| \neq 0$. On en déduit que $\lambda_j = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. □

Proposition 31.27 (Théorème de Pythagore) : *Soient x, y deux vecteurs de E. Alors x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

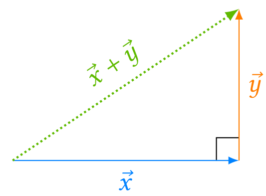


FIGURE 31.5– Théorème de Pythagore : pas de surprise...

Démonstration. On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

Et donc $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$. □

Remarques. ▶ Bien entendu, dans le cas de $\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on retrouve le théorème de Pythagore appris à la maternelle.
▶ Puisque l'énoncé est une équivalence, on a à la fois le théorème de Pythagore usuel, et sa réciproque.

Corollaire 31.28 – *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Démonstration. Utilisons la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle && \text{Linéarité à gauche.}\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle && \text{Linéarité à droite.}\\
&= \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle && \text{Si } i \neq j \text{, alors } \langle x_i, x_j \rangle = 0.\\
&= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

□

31.2.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Nous décrivons ici un algorithme permettant de construire une famille orthonormée de vecteurs à partir d'une famille libre.

Proposition 31.29 : *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Définissons par récurrence une famille $(x_1, \dots, x_n)$ en posant $x_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ et*

$$\forall k \in [\![2, n]\!], x_k = \frac{1}{\|x_k^*\|} x_k^* \text{ où } x_k^* = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, x_i \rangle x_i.$$

Alors :

- *la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthonormée*
- $\forall k \in [\![1, n]\!], \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.

Explications
Nous réinterprèterons cette formule un peu plus loin, et son origine sera alors plus claire.

La formule définissant x_k^* est à connaître et il faut savoir l'utiliser.
Mais avant de prouver ce résultat, essayons de comprendre sur un exemple les différentes étapes de cet algorithme :

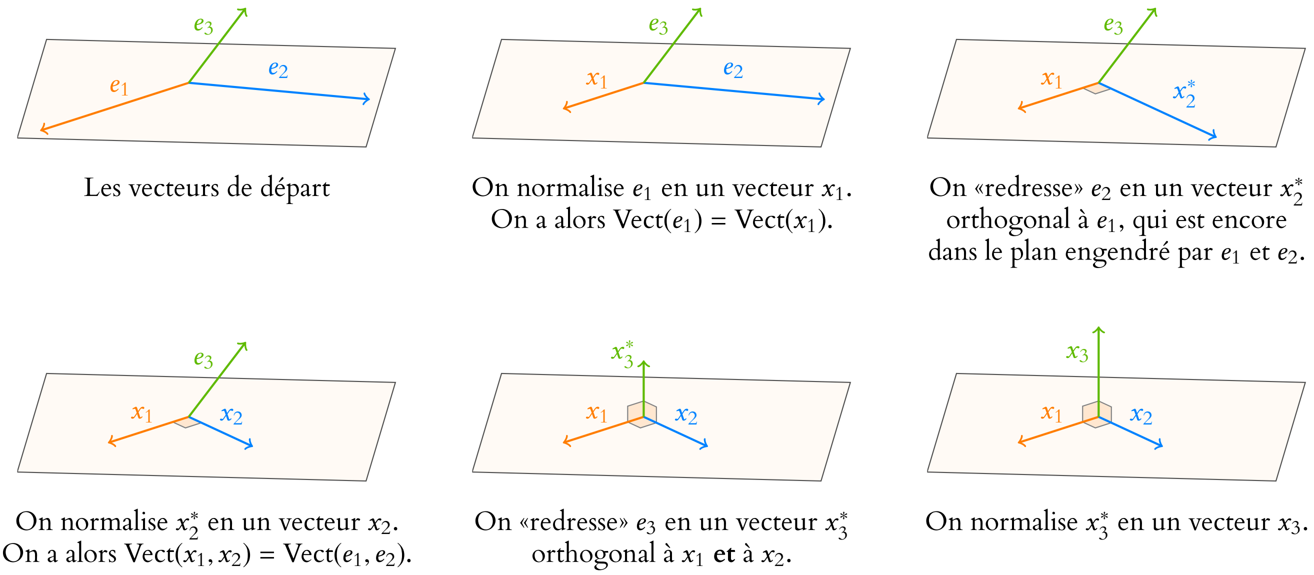


Figure 31.6– Un exemple d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur une famille de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur k que la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est orthonormée et que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
Pour $k = 1$, e_1 est non nul[13] et donc $\dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ est de norme 1.
Supposons que $(x_1, \dots, x_k)$ soit une famille orthonormée et que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_k)$.
Alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a

[13] Car la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et ne contient donc pas le vecteur nul.

$$\begin{aligned}
\langle x_{k+1}^*, x_i \rangle &= \left\langle e_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle e_{k+1}, x_j \rangle x_j, x_i \right\rangle \\
&= \langle e_{k+1}, x_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \langle e_{k+1}, x_j \rangle x_j, x_i \rangle \\
&= \langle e_{k+1}, x_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle e_{k+1}, x_j \rangle \langle x_j, x_i \rangle \\
&= \langle e_{k+1}, x_i \rangle - \langle e_{k+1}, x_i \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Détails
$\langle e_{k+1}, x_j \rangle$ est un réel, donc on peut le «sortir» du produit scalaire par linéarité à gauche.

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, x_{k+1}^* est orthogonal à tous les x_i, $i \leqslant k$, et donc il en est de même de x_{k+1}.

Notons que x_{k+1}^* est non nul[14], car si on avait $x_{k+1}^* = 0_E$, alors

$$e_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, x_i \rangle x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),$$

contredisant le fait que $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est libre.
Comme de plus les $x_i, i \in [\![1, k+1]\!]$ sont tous unitaires par construction, $(x_1, \dots, x_{k+1})$ est une famille orthonormée de E.

[14] Et donc il est légitime de le diviser par sa norme car celle-ci est non nulle.

Conséquence
Puisque $x_k^* \neq 0_E$, alors x_k est bien défini.

Il est clair que $x_{k+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ et donc, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$.
Mais $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ est de dimension $k+1$, et $x_1, \dots, x_{k+1}$ est libre[15] et génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$: c'est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$.
On en déduit que $\dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \dim \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ et donc que ces deux espaces sont égaux. □

[15] Car orthonormée.

Remarques. ► Les notations ne sont pas immuables, et il n'y a pas de notation canonique pour les vecteurs que j'ai noté ci-dessus $x_1^*, \dots, x_n^*$. De toutes façons, ils ne sont qu'une étape intermédiaire vers le résultat final.
► En particulier, lorsque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de E, car elle est libre[16] et génératrice grâce au second point de la proposition.
► Si $(e_1, \dots, e_n)$ est déjà orthogonale, alors $(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right)$.
Et si $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, alors $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$.

[16] Car orthogonale et ne contenant pas le vecteur nul (puisque formée de vecteurs unitaires).

Autrement dit
Si on applique Gram-Schmidt à une famille orthonormée, alors celle-ci n'est pas modifiée.

Exemple 31.30

Dans $\mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$.
Notons donc $P_1 = 1, P_2 = X$ et $P_3 = X^2$, et construisons une famille orthonormée (Q_1, Q_2, Q_3) à partir de (P_1, P_2, P_3).
On a $\|P_1\|^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ et donc $\|P_1\| = 1$. Soit donc $Q_1 = P_1 = 1$. Posons ensuite $Q_2^* = X - \langle X, 1 \rangle 1 = X - \int_0^1 t\,dt = X - \frac{1}{2}$.
Alors $\|Q_2^*\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$.
Posons donc $Q_2 = \frac{1}{\|Q_2^*\|} Q_2^* = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Soit ensuite Q_3^* défini par

$$\begin{aligned} Q_3^* &= X^2 - \langle X^2, Q_1 \rangle Q_1 - \langle X^2, Q_2 \rangle Q_2 \\ &= X^2 - \int_0^1 t^2\,dt - \sqrt{12}\left(\int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt \right) Q_2 \\ &= X^2 - \frac{1}{3} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|Q_3^*\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} - 2t^3\right) dt \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

Posons alors $Q_3 = \frac{Q_3^*}{\|Q_3^*\|} = \sqrt{180}Q_3^* = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$.

La famille (Q_1, Q_2, Q_3) est alors une famille orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$, donc libre. Elle est de cardinal $3 = \dim \mathbf{R}_2[X]$: il s'agit d'une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$.

Astuce : notons qu'il est possible de gagner un peu de temps dans les calculs, en remarquant que $x_i^* = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, x_k \rangle x_k$, s'écrit encore $e_i = x_i^* + \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, x_k \rangle x_k$ où x_i^* et les x_k sont deux à deux orthogonaux. Donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|e_i\|^2 = \|x_i^*\|^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, x_k \rangle^2 \underbrace{\|x_k\|^2}_{=1} \Leftrightarrow \|x_i^*\|^2 = \|e_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \langle e_i, x_k \rangle^2.$$

Ainsi, dans l'exemple précédent, on avait

$$\|Q_3^*\|^2 = \|X^2\|^2 - \langle X^2, Q_1 \rangle^2 - \langle X^2, Q_2 \rangle^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{180}.$$

Et donc le calcul de la norme de Q_3^* ne nous a pas demandé de nouveau[17] calcul d'intégrale (hormis celle définissant $\|P_3\|^2$, qui était somme toute assez simple à calculer).

[17] $\langle X^2, Q_1 \rangle$ et $\langle X^2, Q_2 \rangle$ ont de toutes façons été calculés pour obtenir l'expression de Q_3^*.

Corollaire 31.31 : *Soit E un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée de E.*

Démonstration. Voir la remarque ci-dessus. □

Corollaire 31.32 (Théorème de la base orthonormée incomplète) – *Soit E un espace euclidien, et soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée de E. Alors elle peut-être complétée en une base orthonormée de E.*

Démonstration. Par le théorème de la base incomplète, $(f_1, \dots, f_p)$ peut-être complétée en une base $(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ de E.
Notons alors $(e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(f_1, \dots, f_n)$.
Puisque $(f_1, \dots, f_p)$ est déjà orthonormée, $e_1 = f_1, e_2 = f_2, \dots, e_p = f_p$.
Et donc $(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée qui complète la famille $(f_1, \dots, f_p)$. □

31.2.3 Calculs dans une base orthonormée

Dans cette partie, notons E un espace euclidien muni d'une base **orthonormée** $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Dans une base orthonormée, il est aisé d'obtenir les coordonnées d'un vecteur, sans avoir besoin de résoudre un système[18].

[18] Ni d'utiliser une matrice de passage, ce qui souvent nécessite d'inverser une autre matrice de passage, ce qui demande autant de calculs que la résolution d'un système.

Proposition 31.33 (Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée) : *Pour tout vecteur $x \in E$, on a*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont données par $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base, il existe des scalaires uniquement déterminés $x_1, \dots, x_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Mais alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \langle x, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j} = x_i \langle e_i, e_i \rangle = x_i.$$

Et donc $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. □

Exemple 31.34

• Dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle, et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique c'est évident car $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et donc

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \langle x, e_i \rangle = x_i$$

Proposition 31.35 (Calcul de la norme à l'aide d'une base orthonormée) :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

⚠ Attention !
Ceci ne vaut que si l'on travaille dans une base orthonormée !

Encore une fois, dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on retrouve les classiques définitions du lycée :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Par la proposition précédente, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_i = \langle x, e_i \rangle$.

Mais alors

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

□

Notons que sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, l'application $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ est un produit scalaire. En effet, on a alors, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

On reconnaît alors le produit scalaire $\varphi_{\mathscr{B}_{can}}$ associé à la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, qu'on appelle produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Notons que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

Proposition 31.36 : *Soient $x, y \in E$, et soit $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (resp. $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$) le vecteur colonne des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathscr{B}$. Alors $\langle x, y \rangle = X^\top Y$.*

Démonstration. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, de sorte que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Alors $X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Mais par ailleurs,

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Donc $\langle x, y \rangle = X^\top Y$.

□

Cette proposition justifie l'intérêt de travailler en base orthonormée : tous les calculs de produits scalaires (et donc ceux de normes également) se font comme dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique (et donc comme dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique) : $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$.
En d'autres termes, l'application $x \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est ce qu'on aurait envie d'appeler un isomorphisme d'espaces euclidiens, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels, qui en plus préserve le produit scalaire, entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

31.3 ORTHOGONAL D'UNE PARTIE

31.3.1 Définition, première propriétés

Définition 31.37 – Soit E un espace préhilbertien, et soit A une partie de E. On appelle alors **orthogonal de** A, et on note $A^\perp$ la partie de E définie par

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x,a\rangle = 0\}.$$

Ainsi, $A^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à **tous** les vecteurs de A.

Exemples 31.38

- $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, si 0_E est orthogonal à tous les éléments de E, et si $x \neq 0_E$, alors $\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \neq 0$, de sorte que $x \notin E^\perp$.
- Puisque tout vecteur de E est orthogonal au vecteur nul, $\{0_E\}^\perp = E$.
- Si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux de E, alors $F \subset G^\perp$. En effet, si $f \in F$, alors pour tout $g \in G$, $\langle f,g\rangle = 0$, et donc $f \in G^\perp$.
Mieux : on a là une équivalence : $F \subset G^\perp$ si et seulement si tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, et donc si et seulement si F et G sont orthogonaux.

Encore mieux
Prouver que $G^\perp$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E orthogonal à G.

Proposition 31.39 : *Soient A et B deux parties d'un espace préhilbertien E. Alors*
1. *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
3. *$A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$*

Remarque
La plupart du temps, nous serons amenés à considérer le cas où A est un sev de E, mais notez que ce n'est nullement une obligation. Le troisième point nous dit toutefois qu'on peut toujours s'y ramener.

Démonstration.
1. Il est évident que $0_E \in A^\perp$ car le vecteur nul est orthogonal à tous les éléments de A.
Soient $x,y \in A^\perp$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $a \in A$,
$$\langle \lambda x + y, a\rangle = \lambda\langle x,a\rangle + \langle y,a\rangle = 0$$
de sorte que $\lambda x + y \in A^\perp$. Et donc $A^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. Supposons donc $A \subset B$, et soit $x \in B^\perp$.
Alors pour tout $a \in A$, on a $a \in B$, et donc $\langle x,a\rangle = 0$.
Ceci étant vérifié pour tout $a \in A$, $x \in A^\perp$, d'où l'inclusion annoncée.
3. Puisque $A \subset \operatorname{Vect}(A)$, par le point précédent on a déjà $(\operatorname{Vect} A)^\perp \subset A^\perp$.
Inversement, si $x \in A^\perp$, soit $u \in \operatorname{Vect}(A)$. Alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(a_1,\dots,a_n) \in A^n$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$.
Et alors $\langle x,u\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x,a_i\rangle$.
Mais $x \in A^\perp$, donc les $\langle x,a_i\rangle$ sont nuls, et donc $\langle x,u\rangle = 0$. On en déduit que

$x \in (\operatorname{Vect} A)^\perp$.
Donc $A^\perp \subset (\operatorname{Vect} A)^\perp$, et donc par double inclusion, ces deux ensembles sont égaux. □

Remarque. Le dernier point nous dit notamment que lorsque $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, un vecteur est dans $F^\perp$ si et seulement si il est dans $\{e_1, \dots, e_n\}^\perp$, c'est-à-dire si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F.

Exemples 31.40

▸ Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Alors F est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ (car noyau de la forme linéaire non nulle $(x, y, z) \mapsto x - y + z$), et les deux vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 1)$ forment une famille libre[19] de F, de cardinal $2 = \dim F$, donc c'est une base de F.
Un vecteur (x, y, z) de $\mathbf{R}^3$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$\begin{cases} \langle (x,y,z), (1,0,-1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z), (0,1,1)\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $F^\perp = \operatorname{Vect}((1, -1, 1))$.

▸ Sur $\mathbf{R}_n[X]$, posons $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0)$. Alors, il est facile de voir que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire symétrique. De plus, si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors

$$\langle P, P\rangle = \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(0)^2 \geqslant 0.$$

Enfin, $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P^{(i)}(0) = 0$.
Ce qui signifie alors que 0 est racine de P de multiplicité au moins $n+1$, et donc[20] que P est le polynôme nul.
Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit donc $F = \operatorname{Vect}(1 + X + \cdots + X^n)$. Alors $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbf{R}_n[X]$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$\langle P, 1 + X + \cdots + X^n\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i i!^2 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -a_1 - a_2 2^2 - \cdots - a_n n!^2.$$

Ainsi, une base de $F^\perp$ est $\left(X - 1, X^2 - 2!^2, \dots, X^n - n!^2\right)$.

[19] Car ils ne sont pas colinéaires.

Sans les mains !
Avez-vous remarqué qu'on a obtenu une base de F sans jamais avoir eu à résoudre un système, ni même à faire le moindre calcul ?
À l'écrit je ne suis pas sûr qu'on y gagne beaucoup, mais à l'oral de tels raisonnements seront grandement appréciés.

[20] P est de degré au plus n, donc s'il n'est pas nul il possède au plus n racines comptées avec multiplicité.

Proposition 31.41 : *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E. Alors $F \subset (F^\perp)^\perp$.*

Démonstration. Soit $x \in F$. Alors $\forall y \in F^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$.
Donc x est orthogonal à tout vecteur de $F^\perp$, de sorte que $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$. □

⚠ Nous allons tout de suite voir qu'en dimension finie, cette inclusion est une égalité.
Ce n'est pas vrai en toute généralité en dimension infinie[21].

[21] Voir le TD pour un exemple.

31.3.2 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Proposition 31.42 : *Soit F un sous-espace vectoriel* ***de dimension finie*** *d'un espace préhilbertien E.*
Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.
Mieux : si G est un supplémentaire de F orthogonal à F, alors $G = F^\perp$.
De plus, on a toujours $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration. Nous savons déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ puisque F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Soit donc $x \in E$, prouvons que $x \in F + F^\perp$.
Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k, f_i \right\rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle \langle f_k, f_i \rangle = \langle x, f_i \rangle - \langle x, f_i \rangle = 0.$$

Ceci prouve que $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k \in F^\perp$, et donc

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k}_{\in F^\perp} \in F + F^\perp.$$

Donc $E = F + F^\perp$, et puisque la somme est directe, $E = F \oplus F^\perp$.

À présent, soit G un supplémentaire de F dans E, orthogonal à F.
Alors nécessairement $G \subset F^\perp$.
Inversement, soit $x \in F^\perp$. Puisque $E = F + G$, il existe $u \in F, v \in G$ tels que $x = u + v$.
Mais alors $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \langle u, x - v \rangle = \langle u, x \rangle - \langle u, v \rangle = 0$.
Donc $u = 0_E$, et par conséquent, $x = v \in G$.

Enfin, nous savons déjà que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
Soit donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$, et notons $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$.
Alors $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, x - u \rangle = \langle v, x \rangle - \langle v, u \rangle = 0$.
On en déduit que $v = 0_E$, et donc $x = u \in F$.
Donc on a bien $\left(F^\perp\right)^\perp = F$. □

Définition 31.43 – Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on dit que $F^\perp$ est **le** supplémentaire orthogonal de F (dans E).

Proposition 31.44 : *Si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E,* $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Démonstration. Il s'agit simplement de noter que $F^\perp$ est un supplémentaire de F. □

Exemple 31.45

Si H est un hyperplan de E, alors $H^\perp$ est une droite.
Toute base de $H^\perp$ (autrement dit, tout vecteur non nul de $H^\perp$) est alors appelé **vecteur normal** à H.
Un tel vecteur[22] $a \in H^\perp$ suffit à caractériser H, qui est alors l'ensemble des vecteurs orthogonaux à a puisque

$$\{a\}^\perp = \mathrm{Vect}(a)^\perp = \left(H^\perp\right)^\perp = H.$$

Dans le cas d'un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, il est

[22] Et il y en a une infinité, mais qui sont tous colinéaires.

très facile d'obtenir un vecteur normal à partir d'une équation de l'hyperplan.
En effet, supposons qu'une équation de H soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, où les a_i ne sont pas tous nuls.
On peut alors encore écrire

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \langle (x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n) \rangle = 0\} = \{(a_1, \dots, a_n)\}^\perp$$

de sorte que $(a_1, \dots, a_n)$ est un vecteur normal à H.
Pour reprendre un exemple traité précédemment : un vecteur normal à $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ est $(1, -1, 1)$, et donc $H^\perp = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$.

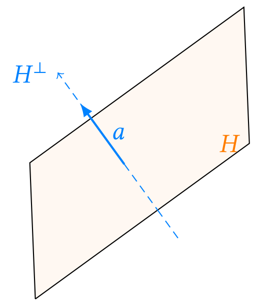


Figure 31.6– Un vecteur normal à un hyperplan de $\mathbf{R}^3$.

31.3.3 Projections orthogonales

Définition 31.46 – Soit E un espace préhilbertien, et soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.
On appelle **projection orthogonale sur** F (ou projecteur orthogonal sur F) la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.
Autrement dit, si $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_{F^\perp}$, avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$, alors $p_F(x) = x_F$.
On dit alors que $p_F(x)$ est le **projeté orthogonal de** x **sur** F.

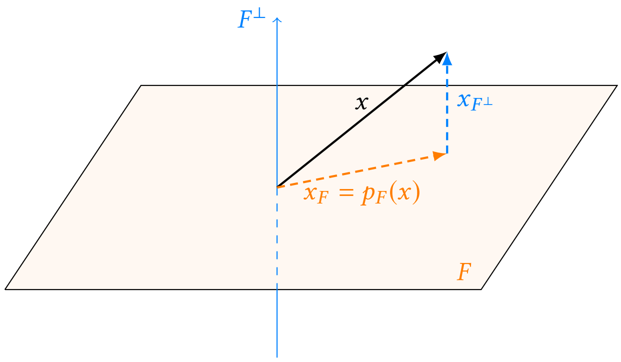


Figure 31.7 – Projection orthogonale sur un plan F.

Remarques. ► Jusqu'à présent, lorsque nous parlions de projection, il fallait toujours préciser sur quel espace on projetait (ici c'est F), mais également par rapport à quel supplémentaire de F on projetait.
Pour une projection **orthogonale**, il n'y a pas besoin de préciser ce supplémentaire, puisque si on parle justement de projection orthogonale, cela signifie que parmi tous les supplémentaires de F on en choisit un en particulier qui est $F^\perp$.
► En particulier, on a toujours $x - p_F(x) = (x_F + x_{F^\perp}) - x_F = x_{F^\perp} \in F^\perp$.
De toutes façons, nous savons que $\mathrm{id}_E - p_F$ est la projection sur $F^\perp$ parallèlement à $F = (F^\perp)^\perp$.
Et donc c'est la projection orthogonale sur $F^\perp$.
► On a donc $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}\, p_F = F^\perp$. Plus généralement, comme nous savons qu'un projecteur p est toujours la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$. Autrement dit, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $(\mathrm{Im}\, p)^\perp = \mathrm{Ker}\, p$.

⚠ Attention !
Si on parle d'une projection qui n'est pas une projection orthogonale, il faut toujours préciser parallèlement à quoi on projette.

Donnons deux méthodes pour calculer un projeté orthogonal.
La première consiste à remarquer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F, alors pour tout $x \in E$, on a

1. $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$
2. $x - p_F(x) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \langle x - p_F(x), e_i \rangle = 0$.

Ces deux conditions, qui caractérisent alors uniquement $p_F(x)$, permettent alors d'écrire un système linéaire de n équations à n inconnues (les coordonnées de $p_F(x)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$), qui possède une unique solution.
En effet, il existe un unique vecteur $u \in F$ tel que $x - u \in F^\perp$, et ce vecteur u est $p_F(x)$.
Mais un exemple sera plus parlant qu'un long discours.

Exemple 31.47

Dans $E = \mathbf{R}^3$, muni de son produit scalaire canonique, soit

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - \frac{y}{2} + z = 0\right\}.$$

Alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, où $e_1 = (1, 2, 0)$ et $e_2 = (1, 0, -1)$.
Soit $x = (2, 2, 2)$. Alors $p_F(x) \in F$ et donc il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $p_F(x) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
Or, $x - p_F(x) = (2, 2, 2) - \lambda_1(1, 2, 0) - \lambda_2(1, 0, -1) = (2 - \lambda_1 - \lambda_2, 2 - 2\lambda_1, 2 + \lambda_2)$.
Puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$, on a

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), e_1\rangle = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 + 2(2 - 2\lambda_1) = 0 \\ \langle x - p_F(x), e_2\rangle = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - (2 + \lambda_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} \\ \lambda_2 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Donc $p_F(x) = \dfrac{4}{3}e_1 - \dfrac{2}{3}e_2 = \dfrac{1}{3}(2, 8, 2)$.

Notons que cette méthode ne nécessite que la connaissance d'une base de F.
La seconde méthode, qui suit, donne une formule plus directe et plus élégante pour le calcul de $p_F(x)$, mais elle nécessite une base orthonormée de F. Ce qui peut toujours s'obtenir par Gram-Schmidt, mais coûte un peu plus cher en calculs. Cette formule sera davantage utile pour des exercices théoriques que pour calculer des projetés orthogonaux dans des cas concrets[23].

[23] Sauf si l'obtention d'une base orthonormée de F ne coûte pas cher.

Proposition 31.48 : *Soit F un sous-espace de dimension finie de E, et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé[24] que l'unique décomposition de x dans la somme directe $E = F + F^\perp$ est

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle e_k}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle e_k}_{\in F^\perp}.$$

Donc $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle e_k$.

□

[24] Voir la preuve de la proposition 31.42.

Exemples 31.49 **Cas particuliers**

▸ Soit $e \in E$ un vecteur non nul, et soit $F = \text{Vect}(e)$ la droite engendrée par e. Alors une base orthonormée de F est $\frac{e}{\|e\|}$, et la projection orthogonale sur F est alors

$$x \mapsto \left\langle x, \frac{e}{\|e\|}\right\rangle \frac{e}{\|e\|} = \frac{\langle x, e\rangle}{\|e\|^2} e.$$

En particulier, si e est un vecteur unitaire, le projeté orthogonal de x sur $\text{Vect}(e)$ est $\langle x, e\rangle e$.
▸ Si H est un hyperplan de E, et si $a \in H^\perp$ est un vecteur normal à H, alors pour $x \in E$,

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a.$$

Détails
a est une base de $H^\perp$, c'est la définition de vecteur normal.

Maintenant que nous disposons de cette formule, revenons un instant sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ la famille orthonormée obtenue par Gram-Schmidt. Celle-ci était définie par récurrence par

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ x_k = \frac{x_k^*}{\|x_k^*\|} \text{ où } x_k^* = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, x_i \rangle x_i.$$

Si on note $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$, alors $(x_1, \dots, x_{k-1})$ est une base orthonormée de F_{k-1} par construction, et donc $p_{F_{k-1}}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, x_i \rangle x_i$.
Autrement dit, on a $x_k^* = e_k - p_{F_{k-1}}(e_k) \in F_{k-1}^\perp$.
Et en particulier, x_k^* est orthogonal à tous les vecteurs $x_1, \dots, x_{k-1}$ précédemment construits (et c'est précisément ce que nous avions prouvé par récurrence dans la preuve de Gram-Schmidt).

31.3.4 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 31.50 – Soit E un espace préhilbertien, soit $x \in E$ et soit A une partie non vide de E.
On appelle alors **distance de x à A** et on note $d(x, A)$ le réel positif défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Inf
Cette borne inférieure existe bien car $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, minorée par 0 (une norme est positive).

Si A est quelconque, alors cette notion peut réserver quelques surprises, par exemple dans $E = \mathbf{R}$, muni du produit scalaire canonique, pour lequel $d(x, a) = |x - a|$, alors $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q}) = 0$.
En effet, cela découle directement de la densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$: il existe des rationnels arbitrairement proches de $\sqrt{2}$.
Pour autant, vous savez que cela ne signifie pas que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.

Dans le cas où A est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors la distance d'un point à A est facile à exprimer à l'aide d'un projeté orthogonal.

Théorème 31.51 : *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien[25] E, et soit p_F le projecteur orthogonal sur F.*
Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$, et le y en question est $p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F.
Autrement dit, la distance de x à F est atteinte[26] en un unique point de F, qui est $p_F(x)$.

[25] De dimension finie ou non.

[26] Et donc l'inf ci-dessus est en fait un min.

Pour le dire encore autrement :

1. $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$
2. $\forall y \in F,\ d(x, F) = \|x - y\| \Leftrightarrow y = p_F(x)$.

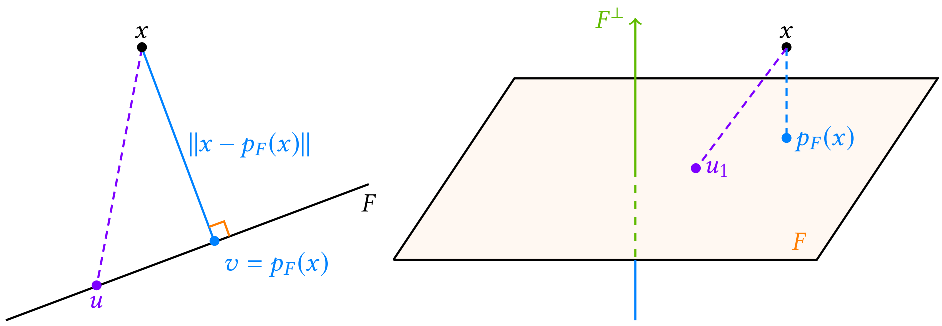


FIGURE 31.8 – En bleu : la distance d'un point x à une droite ou à un plan.

Démonstration. Soit $y \in F$. Alors $x - y = \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F}$.

Donc par le théorème de Pythagore, il vient

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2.$$

Et donc $\|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$, avec égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\|^2 = 0 \Leftrightarrow y = p_F(x)$.
Ceci prouve donc que $\|x - p_F(x)\|$ est le minimum de l'ensemble $\{\|x - y\|,\ y \in F\}$, et que ce minimum n'est atteint qu'en $y = p_F(x)$. □

Exemple 31.52

Cherchons $\Delta = \inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos(x) - b\sin(x))^2\, dx$.
S'il est clair que cette borne inférieure existe (car les intégrales en jeu sont positives), le lien avec ce qui précède n'est pas clair.
Plaçons nous dans l'espace préhilbertien $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbf{R})$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$.
Alors soit $f : x \mapsto x$, et soient $u = \cos_{|[0,2\pi]}$, $v = \sin_{|[0,2\pi]}$.
Lorsque (a, b) parcourt $\mathbf{R}^2$, $au + bv$ parcourt $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
Et alors $\int_0^{2\pi} (x - a\cos(x) - b\sin(x))^2\, dx = \|f - (au + bv)\|^2$, de sorte que $\Delta = \inf_{g\in F} \|f - g\|^2 = d(f, F)^2$.
Nous sommes bien en présence de la distance d'un vecteur **fixé** (ici f) à un sous-espace vectoriel de dimension finie (ici F).
Par le théorème précédent, Δ est atteint uniquement en $g = p_F(f)$.
Il nous faut donc calculer ce projeté orthogonal par l'une ou l'autre des méthodes à notre disposition.

Notons que (u, v) est une base orthogonale de F car

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}\, dt = \left[-\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

De plus,

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) + 1}{2}\, dt = \left[\frac{\sin(2t) + 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

De même, $\|v\|^2 = \pi$.
Donc $\left(\frac{u}{\sqrt{\pi}}, \frac{v}{\sqrt{\pi}}\right)$ est une base orthonormée de F.
On a donc $p_F(f) = \langle f, u\rangle \frac{u}{\pi} + \langle f, v\rangle \frac{v}{\pi}$. Mais alors

$$\langle f, u\rangle + i\langle f, v\rangle = \int_0^{2\pi} te^{it}\, dt = \left[-ite^{it}\right]_0^{2\pi} + i\int_0^{2\pi} e^{it}\, dt = -2i\pi.$$

Donc par identification des parties réelles et imaginaires, $\langle f, u\rangle = 0$ et $\langle f, v\rangle = -2\pi$.
Donc $p_F(f) = -2v$.

Ce n'est malheureusement pas tout à fait fini : on a donc

$$\Delta = \|f - p_F(f)\|^2 = \int_0^{2\pi} (x + 2\sin(x))^2\, dx = \int_0^{2\pi} x^2\, dx + 4\int_0^{2\pi} x\sin(x)\, dx + 4\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx.$$

Ce n'est alors que du calcul, on obtient tous calculs faits $\Delta = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi$.

EXERCICES DU CHAPITRE 31

▸ Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz

EXERCICE 31.1 Des produits scalaires F

1) Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$.
2) Montrer que $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)g'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([-1,1],\mathbf{R})$.
3) Montrer que $(P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
4) ($\star$) Montrer que si $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, alors $(P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

EXERCICE 31.2 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a PD

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} < \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$.

EXERCICE 31.3 Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}$ la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. AD
Prouver que pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$, $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

EXERCICE 31.4 (Extrait de Banque CCP 79) PD
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx < \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 31.5 Soit E un espace euclidien de dimension n, et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E. PD
On suppose que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1$. Calculer $\langle e_i, e_j\rangle$, puis montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

EXERCICE 31.6 (Mines-Ponts PC) AD
Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que $2\operatorname{tr}(AB) \leqslant \operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2)$.

EXERCICE 31.7 Théorème de représentation de Riesz AD
Soit E un espace euclidien, de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
Pour $a \in E$, on note φ_a l'application définie sur E par $x \mapsto (x|a)$.

1) Montrer que pour tout $a \in E$, φ_a est une forme linéaire sur E.
2) Montrer que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbf{R}) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}\right.$ est une application linéaire injective.
3) En déduire que pour toute forme linéaire $\psi : E \to \mathbf{R}$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \psi(x) = (a|x)$.
4) **Application** : soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $P(0) = \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,dt$.

EXERCICE 31.8 Stricte convexité de la sphère unité AD
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et soit $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.
On note $\mathscr{P}$ la propriété suivant : $\forall (x,y) \in S^2$ avec $x \neq y$, $\forall t \in]0,1[$, $tx + (1-t)y \notin S$.

1) Illustrer graphiquement la propriété $\mathscr{P}$ lorsque $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
2) Établir la propriété $\mathscr{P}$ dans le cas général (on utilisera pour cela la fonction polynomiale P définie pour tout $t \in \mathbf{R}$ par $P(t) = \|tx + (1-t)y\|^2$).
3) On note N_∞ l'application définie sur $\mathbf{R}^n$ par $N_\infty(x_1,\dots,x_n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
   a) Prouver que
      i) $\forall x \in \mathbf{R}^n, N_\infty(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbf{R}^n}$
      ii) $\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}, N_\infty(\lambda x) = |\lambda| N_\infty(x)$
      iii) $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, N_\infty(x+y) \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$.

b) Prouver qu'il n'existe pas de produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbf{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $N_\infty(x) = (x|x)$.

EXERCICE 31.9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que $\mathrm{rg}\left(A^\top A\right) = \mathrm{rg}\left(AA^\top\right) = \mathrm{rg}(A)$. AD

EXERCICE 31.10 Soient E et F deux espaces préhilbertiens, de produits scalaires respectifs $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, dont les normes associées sont notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. D
Soit $f : E \to F$ une application telle que $f(0_E) = 0_F$ et

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E.$$

1) Prouver que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle_E = \langle f(x), f(y) \rangle_F$.
2) Montrer alors que f est linéaire.

EXERCICE 31.11 Matrice de Gram (Oral X PC) D

Soient $a < b$ deux réels, et soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$. On note $A = \left(\displaystyle\int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

▶ Familles orthogonales/orthonormales

EXERCICE 31.12 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt PD
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0, -2,), (1, 1, 1))$ muni du produit scalaire canonique.
2. $E = F = \mathbf{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t)\, dt$
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.
4. $E = \mathbf{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique.
5. $E = \mathbf{R}[X]$, $F = \mathrm{Vect}(X^2 + 1, X^3 + 1)$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t)\, dt$

EXERCICE 31.13 Soit E un espace préhilbertien, et soient $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs unitaires de E tels que PD

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale, puis qu'il s'agit d'une base orthonormée de E.

EXERCICE 31.14 Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie, et soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille libre de vecteurs de E. AD
Montrer qu'il existe une unique famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

- ▶ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n)$.
- ▶ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\langle e_n, x_n \rangle > 0$.

EXERCICE 31.15 Décomposition QR et inégalité d'Hadamard (Oral X) TD
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite orthogonale si $M^\top M = I_n$.

1) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E. Montrer que $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est orthogonale.
2) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R), avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tel que $A = QR$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et soient $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.
Montrer que $|\det A| \leqslant \|C_1\| \cdot \|C_2\| \cdots \|C_n\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
4) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.
Prouver l'existence d'une constante c, indépendante de n telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $|\det A| \leqslant c \|A\|_\infty^n n^{\frac{n}{2}}$.

▸ Orthogonalité

EXERCICE 31.16 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace préhilbertien E. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de G.
Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\langle e_i, f_j\rangle = 0$. F

EXERCICE 31.17 Soit E un espace préhilbertien, et soit $\mathbf{S} = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Déterminer $\mathbf{S}^\perp$. F

EXERCICE 31.18 Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. PD

EXERCICE 31.19 **(Banque CCP 39)** AD
On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1) a) Montrer que pour $x = (x_n) \in \ell^2$ et $y = (y_n) \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   b) Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
   c) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2.
2) Soit F l'ensemble des suites presque nulles. Déterminer $F^\perp$, et comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

EXERCICE 31.20 **(Banque CCP 77)** AD
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que :

1) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2) $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

EXERCICE 31.21 On munit $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbf{R})$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$, et on pose AD

$$F = \{f \in E \mid f_{|[-1,0]} = 0\} \quad G = \{g \in E \mid g_{|[0,1]} = 0\}.$$

1) Montrer que $F^\perp = G$.
2) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

▸ Projecteurs orthogonaux, distance à un sous-espace vectoriel

EXERCICE 31.22 Soit E un espace euclidien de base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, et soit F la droite engendrée par $e_1 + \cdots + e_n$. Calculer $d(e_1, F)$. PD

EXERCICE 31.23 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la projection orthogonale (pour le produit scalaire canonique) sur $H = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$. PD

EXERCICE 31.24 **(Mines-Ponts MP)** AD
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Expliquer pourquoi le produit scalaire est bien défini. Quel est ce produit scalaire ?
2) Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

EXERCICE 31.25 **(Centrale PSI)** AD
Soit (a,b) une famille libre de $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, et soit $c \in \mathbf{R}^n$. On note $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$.

1) Montrer que $\langle a, b\rangle^2 \neq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$.
2) Déterminer les valeurs de λ et μ minimisant la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^n |\lambda a_k + \mu b_k + c_k|^2$.

EXERCICE 31.26 **Une caractérisation des projecteurs orthogonaux (Oral X)** D
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 31

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.1

*Je fais **une fois** la bilinéarité et la symétrie, pour le premier, mais c'est toujours la même chose, je vous laisse écrire les détails si vous en ressentez le besoin.*
À chaque fois je nommerai φ l'application donnée par l'énoncé dont on doit prouver qu'il s'agit d'un produit scalaire.

1. Soient $f, g, h \in \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))h(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \lambda \int_0^1 f(t)h(t)\sqrt{1-t^2}\,dt + \int_0^1 g(t)h(t)\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Donc $\varphi(\lambda f + g, h) = \lambda\varphi(f,h) + \varphi(g,h)$, donc φ est linéaire à gauche.
Par ailleurs, pour $f, g \in \mathscr{C}([0,1])$, on a

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \varphi(g,f).$$

Astuce
La symétrie permet de ne prouver la linéarité que d'un seul côté (à gauche ou à droite, au choix).

Donc φ est symétrique, et étant déjà linéaire à gauche, elle est bilinéaire.
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$. Alors $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^2\sqrt{1-t^2}\,dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Supposons à présent que $\varphi(f,f) = 0$. La fonction $t \mapsto f(t)^2\sqrt{1-t^2}$ étant positive et continue sur $[0,1]$, on a $\varphi(f,f) = 0$ si et seulement si pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)^2\sqrt{1-t^2} = 0$.
Pour $t \in [0,1[$, on a donc $f(t) = 0$. Et par continuité de f en 1, on a donc également $f(1) = 1$, de sorte que f est la fonction nulle.
Nous avons donc bien prouvé que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. Pour $f \in \mathscr{C}^{(}[-1,1], \mathbf{R})$, on a $\varphi(f,f) = f(0)^2 + \displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)^2\,dt \geqslant 0$.

Et si $\varphi(f,f) = 0$ alors on a à la fois[1] $f(0)^2 = 0$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)^2\,dt = 0$.
Puisque f'^2 est continue et positive sur $[-1,1]$, on a donc, pour tout $t \in [-1,1]$, $f'(t) = 0$.
Donc f est constante, et puisque $f(0) = 0$, f est la fonction nulle sur $[-1,1]$.

[1] Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

3. Notons que la somme est finie, puisque pour $k > \max(\deg P, \deg Q)$, $P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = 0$.

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, de degré au plus n, on a donc $\varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)^2 \geqslant 0$.

Et si $\varphi(P,P) = 0$, alors pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a $P^{(i)}(0) = 0$, et donc 0 est racine de multiplicité au moins $n+1$ de P. Et donc, puisque $P \in \mathbf{R}_n[X]$, c'est que $P = 0$.

4. Pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $\varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)^2 \geqslant 0$, et comme d'habitude, la somme est nulle si et seulement si tous les $P^{(k)}(a_k)$ le sont.

Notons $P = \displaystyle\sum_{i=0}^n c_i X^i$ les coefficients de P.

On a alors $P^{(n)} = c_n n!$. Il s'agit là d'un polynôme constant, et donc $P^{(n)}(a_n) = 0 \Leftrightarrow c_n n! = 0 \Leftrightarrow c_n = 0$.

Donc $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Donc $P^{(n-1)} = c_{n-1}(n-1)!$.

Et puisque $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$, alors $c_{n-1} = 0$.
De proche en proche, on prouve ainsi que tous les c_i sont nuls, et donc que P est le polynôme nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.2

1. Considérons les deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$

$$x = (1, 2, \dots, n) \text{ et } y = \left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}\right).$$

Alors dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à x et y affirme que

$$\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\|x\|}\sqrt{\|y\|} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}.$$

Or, nous savons que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}.$$

2. Toujours dans $\mathbf{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire canonique, appliquons Cauchy-Schwarz à $\left(\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}}\right)$ et $(1, 1, \dots, 1)$.

Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) \leqslant 2^n(n+1)$, de sorte qu'on a bien, après passage à la racine[2], l'inégalité souhaitée.

[2] La première somme est clairement positive.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.3

Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, et notons $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Alors on a

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 = \|C\|^2 = \operatorname{tr}(C^\top C) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2 \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \\
&\leqslant \|A\|^2 \cdots \|B\|^2.
\end{aligned}$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Scwharz dans $\mathbf{R}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.4

Plaçons nous dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni de son produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.
Appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f : t \mapsto \sqrt{t}$ et $g : t \mapsto e^{-t}$, de sorte que

$$\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t}\,dt = |\langle f, g\rangle| \leqslant \sqrt{\langle f, f\rangle}\sqrt{\langle g, g\rangle} \leqslant \sqrt{\left(\int_0^1 t\,dt\right)\left(\int_0^1 e^{-2t}\,dt\right)}.$$

Ne reste alors qu'à calculer ces deux intégrales, la première vaut évidemment $\frac{1}{2}$, et la seconde vaut $\frac{1-e^{-2}}{2}$.
Enfin, les fonctions f et g n'étant pas colinéaires, il ne peut pas y avoir égalité dans Cauchy-Schwarz, d'où l'inégalité stricte.

Solution de l'exercice 31.5

D'après l'identité de polarisation, pour $i \neq j$, on a

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{2}\left(\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - \|e_i - e_j\|^2\right) = \frac{1}{2}.$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.
Alors, pour $j \in [\![1, n]\!]$, en prenant le produit scalaire avec e_j, il vient

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

soit encore

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\lambda_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En particulier, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, et donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = -n\lambda_j$$

ce qui implique nécessairement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Précision — On vient de montrer que λ_j est égal à une somme qui ne dépend pas de j. Et donc tous les λ_j sont égaux.

Nous venons de prouver que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, et donc étant de cardinal $n = \dim E$, c'est une base de E.

Solution de l'exercice 31.6

Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (qui rappelons-le, est $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$), l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\operatorname{tr}(AB) = \langle A, B \rangle \leqslant \sqrt{\operatorname{tr}(A^2)}\sqrt{\operatorname{tr}(B^2)}.$$

Mais il est bien connu[3] que pour $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)$.
Et donc ici $\sqrt{\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2)\right)$.

[3] C'est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique, mais se redémontre facilement à l'aide d'identités remarquables.

Solution de l'exercice 31.7

1. Commençons par noter que φ_a est bien à valeurs dans $\mathbf{R}$, puisqu'un produit scalaire est un réel.
   Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité à gauche du produit scalaire, on a

   $$\varphi_a(\lambda x + y) = (\lambda x + y | a) = \lambda (x|a) + (y|a) = \lambda\varphi_a(x) + \varphi_a(y).$$

   Donc φ_a est linéaire, et donc est bien une forme linéaire sur E.
2. Soient $a, b \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Il s'agit de prouver que $\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b)$.
   Puisque nous parlons là d'applications définies sur E, il faut donc prouver qu'elles coïncident en tout point de E. Soit donc $x \in E$. Alors

   $$\begin{aligned}[\varphi(\lambda a + b)](x) &= \varphi_{\lambda a + b}(x) = (x | \lambda a + b)\\ &= \lambda (x|a) + (x|b) = \lambda\varphi_a(x) + \varphi_b(x)\\ &= \lambda[\varphi(a)](x) + [\varphi(b)](x).\end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $\varphi(\lambda a + b) = \lambda\varphi(a) + \varphi(b)$.
   Donc φ est linéaire.

   Soit à présent $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi_a = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbf{R})}$, ce qui signifie que pour tout $x \in E$, $\varphi_a(x) = 0$.
   Et en particulier, $\varphi_a(a) = 0 \Leftrightarrow \|a\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0_E$.
   Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$ et donc φ est injective.
3. Puisque nous sommes en dimension finie[4], $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.
   Et donc φ étant injective, elle est bijective.
   Donc pour tout $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\psi = \varphi(a) = \varphi_a$.

Méthode — Dans ce type de situation (où $\varphi(a)$ est elle-même une application), utiliser comme ici des crochets plutôt que de noter $\varphi(a)(x)$, qui peut vraiment porter à confusion. Avec les crochets, on comprend mieux que $[\varphi(a)](x)$ désigne l'image de x par l'application $\varphi(a)$ (elle-même image de a par φ).
Ici les notations sont vite agréables car $\varphi(a)$ s'appelle aussi φ_a, mais nous n'aurons pas toujours une telle notation.

[4] Hypothèse que nous n'avons pas utilisée jusqu'à présent.

4. Nous savons que $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
Par ailleurs, $\varphi : P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
Donc par la question 3, il existe un unique $A \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $\varphi = \varphi_A$, c'est-à-dire telle que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\varphi(P) = (P|A)$.

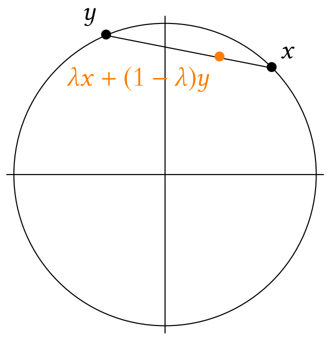
> ⚠ **Attention !**
> Le résultat est surprenant, mais il ne faut pas oublier que A dépend a priori de n. Calculer A pour $n = 0$ et $n = 1$ permet de s'en convaincre.
> Un peu plus de travail permet de prouver qu'il n'existe pas de $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)\,dt$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.8

1. Lorsque $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on a

$$S = \{(x, y) \in R^2 : \|(x, y)\| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

qui est donc le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
Soient donc x et y deux points de ce cercle. Les $\lambda x + (1 - \lambda)y$, pour $\lambda \in [0, 1]$ sont alors les points du segment qui joint x et y.
Et pour $\lambda \notin \{0, 1\}$, ce sont les points du segment différents de x et de y.
La propriété $\mathscr{P}$ dit alors que les points de ce segment ne sont plus sur le cercle, mais bien à l'intérieur du cercle.



2. Soit x, y deux éléments distincts de S, et notons, comme indiqué dans l'énoncé

$$P(t) = \|tx + (1-t)y\|^2 = \langle tx + (1-t)y, tx + (1-t)y\rangle = t^2 \underbrace{\|x\|^2}_{=1} + 2t(1-t)\langle x, y\rangle + (1-t)^2 \underbrace{\|y\|^2}_{=1}$$

$$= t^2(2 - \langle x, y\rangle) + 2t(\langle x, y\rangle - 1) + 1.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \leqslant 1$. Et donc le coefficient de degré 2 de P est non nul, de sorte que P est un polynôme de degré 2.
Mais $P(0) = P(1) = 1$, et donc pour $t \notin \{0, 1\}$, $P(t) \neq 1$.
Et donc pour $t \in]0, 1[$, $\|tx + (1-t)y\|^2 \neq 1 \Leftrightarrow tx + (1-t)y \notin S$.

> **Détails**
> Un polynôme P de degré 2 ne peut prendre qu'au plus deux fois une valeur $a \in \mathbf{R}$.
> En effet, $P - a$ est un polynôme de degré 2 qui possède donc au plus deux racines distinctes.

3. Raisonnons par l'absurde, et supposons que N_∞ soit une norme euclidienne, de sorte que ce qui précède s'applique.
On a alors $S = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1\right\}$.
En particulier, $x = (1, -1, 0, \dots, 0)$ et $y = (1, 1, 0, \dots, 0)$ sont dans S.
Mais $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = (1, 0, \dots, 0) \in S$, contredisant le résultat de la question précédente.
Donc N_∞ n'est pas une norme euclidienne.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.9

Le lien avec les produits scalaires n'est pas complètement évident, pourtant ils ne sont pas loin.
Nous allons prouver que $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$, sachant que l'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$ est évidente : si $AX = 0$, alors par multiplication par $A^\top$, il vient $A^\top AX$.

> **Rappel**
> Le noyau d'une matrice A est l'ensemble des vecteurs colonne X tels que $AX = 0$.

Inversement, supposons que $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A) \Leftrightarrow A^\top AX = 0$. Alors par multiplication par $X^\top$, on obtient $X^\top A^\top AX = 0$.
Mais $X^\top A^\top AX = (AX)^\top (AX) = \|AX\|^2$, où la norme s'entend pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$: $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$.
Et donc $AX = 0$, de sorte que $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$, et donc par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A^\top A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A^\top A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{rg}(A).$$

> ⚠ **Attention !**
> Mieux vaut ici avoir les idées claires quant à la nature des objets manipulés : si le 0 de l'égalité $A^\top AX = 0$ désignait le vecteur colonne nul, ici $X^\top A^\top AX$ désigne le produit d'un vecteur ligne $(X^\top)$ et d'un vecteur colonne $(A^\top AX)$: c'est donc une matrice 1×1, c'est-à-dire un réel.
> Et donc le 0 ci-dessus est bien le nombre 0.

Et en appliquant le même raisonnement non pas à A mais à sa transposée, il vient $\mathrm{rg}(AA^\top) = \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$.

Alternative : le recours au produit scalaire n'est en fait pas complètement indispensable, puisque si on a $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors $X^\top A^\top AX = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i^2$.
Et alors comme d'habitude, la somme est nulle si et seulement si tous les y_i sont nuls, donc si et seulement si $AX = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.10

1. Notons que puisque $f(0_E) = 0_F$, alors pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F = \|f(x) - f(0_E)\|_F = \|x\|_E$.
Et alors par identité de polarisation,

$$\langle x, y\rangle_E = \frac{1}{2}\left(\|x-y\|_E^2 - \|x\|_E^2 - \|y\|_E^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|f(x)-f(y)\|_F^2 - \|f(x)\|_F^2 - \|f(y)\|_F^2\right) = \langle f(x), f(y)\rangle_F.$$

2. Soient $(x, y) \in E^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\|f(\lambda x+y) - \lambda f(x) - f(y)\|_F^2 &= \|f(\lambda x+y)\|_F^2 - 2\langle f(\lambda x+y), \lambda f(x)+f(y)\rangle_F + \|\lambda f(x) + f(y)\|_F^2 \\ &= \|f(\lambda x+y)\|_F^2 - 2\lambda\langle f(\lambda x+y), f(x)\rangle_F - 2\langle f(\lambda x+y), f(y)\rangle_F + \lambda^2\|f(x)\|_F^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle_E + \|f(y)\|_F^2 \\ &= \|\lambda x+y\|_E^2 - 2\lambda\langle \lambda x+y, x\rangle_E - 2\langle \lambda x+y, y\rangle_E + \lambda^2\|x\|_E^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle_E + \|y\|_E^2 \\ &= \|\lambda x+y\|_E^2 - \lambda^2\|x\|_E^2 - 2\lambda\langle y, x\rangle_E - \|y\|_E^2 = 0.\end{aligned}$$

Identité remarquable pour développer $\|\lambda x + y\|^2$.

Donc le vecteur $f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)$ est nul, si bien que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.11

Rappelons que $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$, et donc que $A = (\langle f_i, f_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

► Supposons $(f_1, \dots, f_n)$ liée. Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0$.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$0 = \langle \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j, f_i\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle f_i, f_j\rangle.$$

Soit encore, en notant C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A, $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$.
Donc les colonnes de A forment une famille liée, de sorte que A n'est pas inversible, et donc $\det(A) = 0$.

► Inversement, supposons que $\det A = 0$. Alors A n'est pas inversible, et donc il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, non nul et tel que $AX = 0$.
Mais alors $X^\top AX = 0$. Mais si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$X^\top AX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_j \langle f_1, f_j\rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n x_j\langle f_n, f_j\rangle \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle f_i, f_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i f_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j\right\rangle = \left\|\sum_{i=1}^n x_i f_i\right\|^2.$$

Remarque
Une des raisons de vouloir faire apparaître $X^\top AX$, est qu'il s'agit du produit scalaire (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, qui est $(X, Y) \mapsto X^\top Y$) des vecteurs colonnes X et AX. C'est un réel, ce qui nous permet de ne plus manipuler des matrices (carrées ou colonnes), mais bien des nombres.

Donc $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$, de sorte que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Commentaire : *ici l'énoncé ne parlait pas directement de produit scalaire, et il fallait faire l'effort d'en reconnaître un. Mais une fois que c'est fait, tout le raisonnement est transposable à n'importe quel produit scalaire (et on dit alors que A est la matrice de Gram de la famille $(f_1, \dots, f_n)$.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.12

Ce qu'on va attendre de vous les fois où vous aurez à utiliser Gram-Schmidt, c'est un résultat juste. Pas une rédaction parfaite. Donc j'enrobe un peu ici (avec des «posons», «on a donc», etc), mais ne perdez pas de temps avec ça, la seule chose qu'on veut voir, c'est une base orthonormée à la fin !

1. Adoptons les mêmes notations que dans le cours et posons $e_1 = (1,0,-2)$, $e_2 = (1,1,1)$.
Posons alors $x_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{e_1}{\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)$.
Soit alors $x_2^* = e_2 - \langle e_2, x_1\rangle x_1 = e_2 - \langle e_2, (1,0,-2)\rangle \dfrac{(1,0,-2)}{5}$.
On a alors $\langle e_2, (1,0,-2)\rangle = 1\times 1 + 0\times 1 + (-2)\times 1 = -1$.
Et donc $x_2^* = (1,1,1) + \dfrac{1}{5}(1,0,-2) = \dfrac{1}{5}(6,5,3)$.
Enfin, $\|x_2^*\| = \dfrac{1}{5}\sqrt{6^2+5^2+3^2} = \dfrac{\sqrt{70}}{5}$. Posons alors $x_2 = \dfrac{x_2^*}{\|x_2^*\|} = \dfrac{1}{\sqrt{70}}(6,5,3)$.
Alors (c'est ce que nous dit l'énoncé de Gram-Schmidt) (x_1, x_2) est une famille orthonormée.

Astuce
Vérifier que les deux vecteurs sont orthogonaux ne coûte presque rien ici (car on travaille avec le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^3$), il serait dommage de s'en priver.

2. Il nous faut ici partir d'une base de F. Le plus simple est donc sans doute de partir de la base canonique (même si ce n'est absolument pas le seul choix possible).
Notons donc $(P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2)$ la base à laquelle on veut appliquer Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormée que nous nommerons (Q_1, Q_2, Q_3).
Posons $Q_1 = \dfrac{P_1}{\|P_1\|}$. Pour cela il nous faut la norme de P_1, qui vaut
$$\|P_1\|^2 = \int_{-1}^1 P_1(t)^2\,dt = \int_{-1}^1 dt = 2.$$
Donc $\|P_1\| = \sqrt{2}$, de sorte que $Q_1 = \dfrac{P_1}{\sqrt{2}}$.
Posons ensuite $Q_2^* = P_2 - \langle P_2, Q_1\rangle Q_1 = X - \langle X, 1\rangle \dfrac{1}{2}$.
Alors $\langle X, 1\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 t\,dt = 0$, et donc $Q_2^* = X$.
On a alors que $\|X\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,dt = \dfrac{2}{3}$.
Et donc posons $Q_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.
Enfin, soit $Q_3^* = P_3 - \langle P_3, Q_1\rangle Q_1 - \langle P_3, Q_2\rangle Q_2$.
Soit encore $Q_3^* = X^2 - \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,dt \times \dfrac{1}{2} - \int_{-1}^1 t^3\,dt \times \dfrac{3}{2}X = X^2 - \dfrac{1}{3}$.
Il vient alors $\|Q_3^*\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)^2 dt = \dfrac{8}{45}$.
Et donc on pose $Q_3 = \dfrac{Q_3}{Q_3^*} = \sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)$.
Alors (Q_1, Q_2, Q_3) est une base orthonormée de F.

Danger !
Ne pas croire un peu trop simplement que la norme de 1 (le polynôme constant égal à 1) vaut automatiquement. Cela dépend beaucoup du produit scalaire considéré !

3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$, $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2)$, $\dfrac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,-1,2)$

5. $\sqrt{\dfrac{15}{28}}(X^2+1)$, $\dfrac{\sqrt{7}}{2}(16X^3 - 15X^2 + 1)$

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.13

Notons qu'a priori nous ne savons pas que E est de dimension finie, donc il n'est pas question de raisonner en terme de cardinal.

Commençons par prouver qu'il s'agit d'une famille orthonormée de E, ce qui nous fournira tout de suite la liberté.

Soit donc $i \in [\![1, n]\!]$. En prenant $x = e_i$, il vient donc

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 1 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2.$$

Donc $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$, et comme il s'agit d'une somme de nombres positifs, tous sont nuls.
Donc pour $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. Puisque de plus les e_i sont unitaires, il s'agit d'une famille orthonormée, et donc libre.

Reste alors à prouver qu'elle est génératrice.
Notons que s'il s'agit bien d'une base orthonormée de E, alors pour tout $x \in E$, alors la décomposition de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ doit être $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$..

Astuce
Il n'est pas rare d'avoir à utiliser cette astuce pour prouver une égalité entre deux vecteurs : prouver que leur différence est nulle.
Car dans un espace préhilbertien, il existe un bon moyen de prouver qu'un vecteur est nul, c'est de prouver que sa norme est nulle.

Sont donc $x \in E$, et prouvons que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. À cet effet, posons $y = x - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j, e_i\right\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle x, e_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle\right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\|y\| = 0$ et donc $y = 0$, de sorte que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.
Ceci prouve donc que x est dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, et donc que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E.
Étant déjà libre, c'est une base.

Solution de l'exercice 31.14

Pour l'existence, il suffit de noter que la famille orthonormée obtenue à partir de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par le procédé de Gram-Schmidt convient.
Prouvons tout de même qu'elle satisfait le second point.
À chaque étape, le vecteur e_n construit est colinéaire, avec un coefficient de proportionnalité positif, à $e_n^* = x_n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \langle x_n, e_i\rangle e_i$.

En particulier, $\langle x_n, e_n^*\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \langle x_n, e_i\rangle^2$.

Mais puisque $x_n \in \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, on a $x_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \langle x_n, e_i\rangle e_i$, et donc[5]

$$\|x_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle x_n, e_i\rangle^2$$

si bien que $\langle x_n, e_n\rangle \geqslant 0$.
On ne peut pas avoir $\langle x_n, e_n\rangle = 0$, faute de quoi en remontant les calculs précédents, on prouverait que $x_n \in \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{n-1}) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_n)$ contredisant la liberté de $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Reste donc à prouver l'unicité d'une telle famille.
Supposons donc qu'il existe deux telles familles $(e_n)_n$ et $(e'_n)_n$.

[5] Voir les formules de calcul de la norme en base orthonormée.

Soit alors $k \in \mathbf{N}$. Alors $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(e'_0, \dots, e'_k) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_k)$, et $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{k-1}) = \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1}) = \mathrm{Vect}(e'_0, \dots, e'_{k-1})$.
Le vecteur e_k est alors dans le supplémentaire orthogonal D de $\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1})$ dans $\mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_k)$.
Mais il en est de même de e'_k.
Puisque $\dim D = \dim \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_k) - \dim \mathrm{Vect}(x_0, \dots, x_{k-1}) = k + 1 - k = 1$.
Puisque e_k et e'_k sont tous deux non nuls[6], ce sont deux bases de D.
Et par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $e_k = \lambda e'_k$.
Les deux vecteurs étant unitaires, $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = +\pm 1$.
Or $\langle e_k, x_k\rangle > 0$, et $\langle e_k, x_k\rangle = \lambda \underbrace{\langle e'_k, x_k\rangle}_{>0}$.
Donc $\lambda = 1$, si bien que $e_k = e'_k$.
Par conséquent, il existe au plus une telle famille, et donc il existe une unique telle famille.

Détails
La famille $(x_0, \dots, x_k)$ est libre.

[6] Ils sont unitaires.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.15

1. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (x_1, \dots, x_n)$.
Notons également $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, de sorte que $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_i)$. Alors le coefficient (i, j) de $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^\top P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est $C_i^\top C_j$.
Mais puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, il s'agit de $\langle x_i, x_j\rangle$.
Puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$.
Et donc les coefficients diagonaux de $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^\top P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ valent 1 et les autres sont nuls, donc $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^\top P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = I_n$, si bien que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est orthogonale.

Rappel
Si X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y dans une base **orthonormée** $\mathscr{B}$, alors $X^\top Y = \langle x, y\rangle$.

2. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
Notons également $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, qui forment une base $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ puisque A est inversible.
On a alors $A = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $(C_1, \dots, C_n)$ pour obtenir une base orthonormée $\mathscr{B}'' = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Puisque pour tout k, $X_k \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k)$, $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ est triangulaire supérieure.
Enfin, le coefficient diagonal (k, k) de $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''}$ est $\langle X_k, C_k\rangle$.
Or par construction[7], ce coefficient est positif. On a alors $A = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''} P_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}$.
Mais par la question 1, $Q = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$ est orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées.
Et $R = P_{\mathscr{B}''}^{\mathscr{B}'}$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
Reste à prouver l'unicité.
Supposons donc que $A = QR = Q'R'$, avec Q, Q' orthogonales et R, R' triangulaires à coefficients diagonaux strictement positifs.
Alors $QQ'^{-1} = R'R^{-1}$ est orthogonale[8], et elle est aussi triangulaire supérieure à coefficient diagonaux positifs puisque R' et R^{-1} le sont.
Prouvons donc qu'une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs et orthogonale est nécessairement égale à l'identité. Soit B une telle matrice.

Alors $1 = [I_n]_{1,1} = [B^\top B]_{1,1} = \displaystyle\sum_{k=1}^n [B]_{k,1}^2$.
Donc $[B]_{1,1}^2 = 1$, et puisque $[B]_{1,1} \geqslant 0$, $[B]_{1,1} = 1$.
Mais alors $1 = [I_n]_{1,1} = [BB^\top]_{1,1} = \displaystyle\sum_{k=1}^n [B]_{1,k}^2 = 1 + \sum_{k=2}^n [B]_{2,k}^2$.
Donc les coefficients de la première ligne de B, sauf le premier sont nuls.

On a alors

$$1 = [I_n]_{2,2} = [B^\top B]_{2,2} = \sum_{k=1}^n [B]_{k,2}^2 = \sum_{k=2}^2 [B]_{k,2}^2 = [B]_{2,2}^2.$$

Donc de même, par positivité de $[B]_{2,2}$, $[B]_{2,2} = 1$.

[7] Voir l'exercice précédent pour les détails.

[8] Il est aisé de vérifier que le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale.

Et alors
$$1 = [I_n]_{2?2} = [BB^\top]_{2,2} = \sum_{k=1}^n [B]_{2,k}^2 = \underbrace{[B]_{2,2}^2}_{=1} + \sum_{k=3}^n [B]_{2,k}^2.$$

Donc tous les coefficients de la seconde ligne de B, excepté le coefficient diagonal sont nuls.
De proche en proche, on prouve ainsi que $B = I_n$.

Donc ici on a $QQ'^{-1} = I_n \Leftrightarrow Q = Q'$, et donc $R = R'$.

3. Si A n'est pas inversible, l'inégalité est triviale puisque $\det(A) = 0$.
Nous supposons donc dans la suite que A est inversible.

Commençons par noter que si Q est orthogonale, alors $\det(I_n) = \det(Q^\top Q) = \det(Q)^2$, si bien que $\det(Q) = \pm 1$.
Donc avec les notations de la question précédente, $|\det(A)| = |\det(QR)| = |\det(R)|$.
Mais R étant triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, qui, toujours avec les notations de la question 2, sont égaux à $\langle X_i, C_i \rangle$.
Mais $\|C_i\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle C_i, X_j \rangle^2 \geqslant \langle C_i, X_i \rangle$, si bien que $|\langle C_i, X_i \rangle| \leqslant \|C_i\|$.
Et donc on a bien $|\det(A)| \leqslant \|C_1\| \cdot \|C_2\| \cdots \|C_n\|$.

4.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.16

Si F et G sont orthogonaux, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on a $e_i \in F$ et $f_j \in G$, si bien que $\langle e_i, f_j \rangle = 0$.

Inversement, si pour tout (i,j), e_i et f_j sont orthogonaux, alors : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $e_i \in \{f_1, \dots, f_p\}^\perp$.
Mais $\{f_1, \dots, f_p\}^\perp = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp = G^\perp$.
Donc $G^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $e_1, \dots, e_n$.
Il contient donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = F$, si bien que $F \subset G^\perp$.
Et donc[9] F et G sont orthogonaux.

[9] **Rappel** : F et G sont orthogonaux si et seulement si $F \subset G^\perp$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.17

Dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ munis de leurs produits scalaires usuels, on comprend bien que $\mathbf{S}$ est un cercle/une sphère centrée en l'origine et de rayon 1.
Et donc en particulier, $\mathbf{S}$ contient des vecteurs de toutes directions. Et donc un vecteur de $\mathbf{S}^\perp$ doit être orthogonal à toutes les directions, ce qui n'est possible que si c'est le vecteur nul.

Terminologie
D'ailleurs, en général on appelle $\mathbf{S}$ la **sphère unité**.

Le plus simple pour l'écrire proprement est probablement de remarquer que $\mathrm{Vect}(\mathbf{S}) = E$.
En effet, pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $x = \|x\| \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in \mathbf{S}} \in \mathrm{Vect}(\mathbf{S})$.

Et donc $\mathbf{S}^\perp = (\mathrm{Vect}(\mathbf{S}))^\perp = E^\perp = \{0_E\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.18

Soit S une matrice symétrique et A une matrice antisymétrique. Alors
$$\langle S, A \rangle = \mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}((S^\top A)^\top) = \mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(AS^\top) = -\mathrm{tr}(S^\top A) = -\langle S, A \rangle.$$

Donc $\langle S, A \rangle = 0$, si bien que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.19

1.a. On a $0 \leqslant |x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
Mais la série de terme général $\frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$ converge, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

1.b. La série $\sum 0^2$ converge évidemment, et si $(x_n), (y_n) \in \ell^2$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda x_n + y_n)^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + y_n^2$, qui est le terme général d'une série convergente, car somme de trois séries convergentes.

1.c. La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de difficulté.
Pour $x = (x_n) \in \ell^2$, on a évidemment $(x|x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \geqslant 0$.
Supposons de plus que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = 0$, et supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n_0} \neq 0$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} x_n^2}_{\geqslant 0} + x_{n_0}^2 + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} x_n^2}_{\geqslant 0} \geqslant x_{n_0}^2 > 0$$

ce qui est absurde. Donc $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\ell^2}$.

2. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in F^\perp$.
Pour $k \in \mathbf{N}$, considérons $y^{(k)} = (y_n^{(k)})_n$ la suite presque nulle définie par $y_n^{(k)} = \delta_{n,k}$.
On a alors $0 = (x, y^{(k)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n^{(k)} = x_k$.
Et donc x est la suite nulle, de sorte que $F^\perp = \{0\}$.
On a donc $(F^\perp)^\perp = \ell^2$, alors que $F \neq \ell^2$, par exemple car la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est dans ℓ^2 mais pas dans F.
Nous avons donc ici un exemple du fait qu'en dimension infinie[10], l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ peut être stricte.

> **Autrement dit**
> Seul le $k^{\text{ème}}$ terme de $y^{(k)}$ est non nul, et il vaut 1.

[10] Nous avons déjà prouvé que F est de dimension infinie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.20

1. Puisque $F \subset F + G$, on a $(F+G)^\perp \subset F^\perp$.
Et de même, $(F+G)^\perp \subset G^\perp$, et donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Inversement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, et soit $y \in F + G$.
Alors il existe $y_F \in F$ et $y_G \in G$ tels que $y = y_F + y_G$.
Et alors $\langle x, y\rangle = \langle x, y_F\rangle + \langle x, y_G\rangle$.
Mais $x \in F^\perp$, donc $\langle x, y_F\rangle = 0$, et de même $\langle x, y_G\rangle = 0$.
Et ainsi, $\langle x, y\rangle = 0$, de sorte que $x \in (F+G)^\perp$.
Donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$. Par double inclusion, on a donc l'égalité.

2. Rappelons[11] qu'en dimension finie, on a l'égalité $(A^\perp)^\perp = A$, pour tout sous-espace vectoriel A de E.
Appliquons alors le résultat de la question précédente non pas à F et G mais à $F^\perp$ et $G^\perp$. Il vient alors

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G.$$

Et alors en passant à l'orthogonal,

$$(F \cap G)^\perp = \left((F^\perp + G^\perp)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

[11] En réalité, la première question de l'exercice de CCP demandait de reprouver ce résultat. Ce qui doit nous faire penser à l'utiliser par la suite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.21

1. Il est facile de constater que si $f \in F$ et $g \in G$, alors

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{0} 0 \cdot g(t)\,dt + \int_0^1 f(t) \cdot 0\,dt = 0.$$

Donc déjà $G \subset F^\perp$.

Soit à présent $f \in F^\perp$, et supposons par l'absurde que $f \notin G$, c'est-à-dire qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0) \neq 0$.
On peut même supposer que $t_0 \in]0,1[$, puisque si f était nulle sur $]0,1[$, par continuité, elle le serait aussi sur $[0,1]$.
Soit donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, $f(x) \neq 0$.
Par continuité de f, elle est de signe constant[12] sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$.
Quitte à «rétrécir» η, on peut même supposer que $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\subset]0,1[$.

[12] Car si elle changeait de signe, elle s'annulerait aussi sur cet intervalle, c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit alors g une fonction continue sur $[-1,1]$, strictement positive sur $]t_0+\eta, t_0-\eta[$ et nulle en dehors. Par exemple on peut considérer

$$g : t \mapsto \begin{cases} t - t_0 + \alpha & \text{si } \ t \in [t_0-\alpha, t_0] \\ t_0 + \alpha - t & \text{si } t \in [t_0, t_0+\alpha] \\ 0 & \text{si } |t-t_0| > \alpha \end{cases}$$

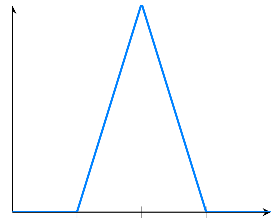


FIGURE 31.1– La fonction g.

Puisque $g \in F$, on a donc $\langle f, g\rangle = 0$.
Mais $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} f(t)g(t)\,dt$. Il s'agit là de l'intégrale d'une fonction continue, de signe constant[13].
Étant nulle, c'est que f et g le sont. Or en $t = t_0$, on a $f(t)g(t) \neq 0$, ce qui est absurde.
On en déduit que f est nécessairement nulle sur $[0,1]$, et donc dans G.
Donc $F^\perp \subset G$, de sorte que par double inclusion, $G = F^\perp$.

[13] Car f et g le sont sur $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

2. Les fonctions de F et celles de G s'annulent en 0. Donc $F+G$ est inclus dans l'hyperplan $\{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
Et donc $F + G \neq E$, de sorte que F et G ne sont pas supplémentaires.
Là encore, il s'agit d'un contre exemple en dimension infinie à un théorème bien connu en dimension finie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.22

Notons p_F le projecteur orthogonal sur F. Nous savons alors que $d(x, F) = \|e_1 - p_F(e_1)\|$.
Mais une base de F est $e_1 + \cdots + e_n$, qui n'est a priori pas unitaire.
Pour calculer sa norme, on peut tout simplement utiliser la formule qui donne la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées en base orthonormée :

$$\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 = n$$

et donc une base orthonormée de F est $\dfrac{e_1 + \cdots + e_n}{\sqrt{n}}$.
Alors le projeté orthogonal de e_1 sur F est

$$p_F(e_1) = \left\langle e_1, \frac{e_1 + \cdots + e_n}{\sqrt{n}}\right\rangle \frac{e_1 + \cdots + e_n}{\sqrt{n}} = \langle e_1, e_1 + \cdots + e_n\rangle \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} = \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n}.$$

Et donc il vient $e_1 - p_F(e_1) = \dfrac{1}{n}((n-1)e_1 - e_2 - \cdots - e_n)$, de sorte que

$$\|e_1 - p_F(e_1)\| = \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)^2 + (-1)^2 + \cdots + (-1)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)n} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Alternatives
On peut aussi faire un calcul «direct» à base de bilinéarité du produit scalaire, ou encore appliquer Pythagore, puisque les e_i sont deux à deux orthogonaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.23

Nous savons que $a = (1,1,1)$ est un vecteur normal à H, c'est-à-dire que $H^\perp = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.
Mais alors pour $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$,

$$p_{H^\perp}(u) = \langle u, a\rangle \frac{a}{\|a\|^2} = \frac{x+y+z}{3}a.$$

Et donc $p_H(u) = u - p_{H^\perp(u)} = (x,y,z) - \dfrac{x+y+z}{3}a$.
En particulier, si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbf{R}^3$, alors

$$p_H(e_1) = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$$

et de même $p_H(e_2) = \dfrac{1}{3}(-1,2,-1)$ et $p_H(e_3) = \dfrac{1}{3}(-1,-1,2)$.
Donc la matrice cherchée est

$$M = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(p_H) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_H(e_1) & p_H(e_2) & p_H(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}.$$

Méthode
Vérifier qu'il s'agit là d'une matrice de projecteur ne coûte pas forcément trop cher : il suffit de calculer M^2.
C'est une bonne idée que de le faire au brouillon.

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.24

1. Rappelons que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien, alors le produit scalaire de $x = \sum_i x_i e_i$ et de $y = \sum y_i e_i$ est $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i$.
Ici, le produit scalaire de deux matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est
$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$
Remarque *: le même raisonnement prouve que pour toute base $\mathscr{B}$ d'un espace de dimension finie, il existe un unique produit scalaire qui rend $\mathscr{B}$ orthonormée (et c'est celui que nous avons noté $\varphi_{\mathscr{B}}$ dans le cours).*
En revanche, il n'y a pas ici une bijection entre les produits scalaires et les bases orthonormées, puisque pour un même produit scalaire il existe plusieurs[14] bases orthonormées (on peut par exemple permuter les vecteurs, ou en multiplier certains par -1).

Remarque
On prouverait en fait sans grande difficulté qu'il s'agit du produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:
$$\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B).$$

[14] En fait une infinité dès que $\dim E \geqslant 2$.

2. Il s'agit de calculer la distance de M au sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(I_n, J)$.
Nous savons que cette distance est égale à $\|M - p_F(M)\|$, où $p_F(M)$ est le projeté orthogonal de M sur F.
Puisque $p_F(M) \in F$, il existe deux réels λ et μ tels que $p_F(M) = \lambda I_n + \mu J$.
De plus, $M - p_F(M) \in F^\perp$, donc $\langle M - p_F(M)|I_n\rangle = \langle M - p_F(M)|J\rangle = 0$.
Soit encore
$$\lambda\langle I_n|I_n\rangle + \mu\langle J|I_n\rangle = \langle M|I_n\rangle \Leftrightarrow \lambda n + \mu n = m\operatorname{tr}(M)$$
et
$$\lambda\langle I_n|J\rangle + \mu\langle J|J\rangle = \langle M|J\rangle \Leftrightarrow \lambda n + \mu n^2 = \sigma(M)$$
où on désigne par $\sigma(M)$ la somme des coefficients de M. On a donc
$$\begin{cases}\operatorname{tr}(M) = \lambda n + \mu n\\ \sigma(M) = \lambda n + \mu n^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tr}(M) = \lambda n + \mu n\\ \sigma(M) - \operatorname{tr}(M) = \mu n(n-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \frac{n\operatorname{tr}(M)-\sigma(M)}{n(n-1)}\\ \mu = \frac{\sigma(M)-\operatorname{tr}(M)}{n(n-1)}\end{cases}$$
On en déduit que la distance cherchée est
$$\|M-p(M)\|^2 = \langle M-p(M)|M\rangle = \|M\|^2-\lambda\langle I_n|M\rangle-\mu\langle J|M\rangle = \sigma(M^2)-\frac{\operatorname{tr}(M)(n\operatorname{tr}(M)-\sigma(M))+\sigma(M)(\sigma(M)-\operatorname{tr}(M))}{n(n-1)}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.25

1. Puisque a et b ne sont pas colinéaires, il n'y a pas égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Commençons par noter que les valeurs absolues ne sont là que pour nous perturber[15], et étant élevées au carré, on peut les supprimer.
Il s'agit donc de minimiser $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) + c_k)^2 = \|(\lambda a + \mu b) + c\|^2 = \|c - (-\lambda a - \mu b)\|^2$, lorsque (λ, μ) parcourt $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire lorsque $\lambda a + \mu b$ parcourt $F = \operatorname{Vect}(a, b)$.
Un théorème du cours nous assure alors que cette quantité, qui vaut $d(c, F)^2$, sera minimale lorsque $-\lambda a - \mu b = p_F(c)$, le projeté orthogonal de c sur F.
Ce projeté est alors caractérisé, parmi tous les vecteurs de $F = \operatorname{Vect}(a, b)$, par le fait que $c - p_F(c) \in F^\perp$.
Soit encore $c + \lambda a + \mu b \in F^\perp$, ce qui est le cas si et seulement si
$$\begin{cases}\langle c + \lambda a + \mu b, a\rangle = 0\\ \langle c + \lambda a + \mu b, b\rangle = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\|a\|^2 + \mu\langle a, b\rangle = -\langle c, a\rangle\\ \lambda\langle a, b\rangle + \mu\|b\|^2 = -\langle c, b\rangle\end{cases}$$
Notons alors ce système sous forme matricielle :
$$A = \begin{pmatrix}\|a\|^2 & \langle a, b\rangle\\ \langle a, b\rangle & \|b\|^2\end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix}-\langle c, a\rangle\\ -\langle c, b\rangle\end{pmatrix}.$$
On a alors $AX = Y$ soit encore
$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\|b\|^2 & -\langle a, b\rangle\\ -\langle a, b\rangle & \|a\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\langle c, a\rangle\\ -\langle c, b\rangle\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \frac{1}{\|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2}\begin{pmatrix}-\langle c, a\rangle\|b\|^2 + \langle a, b\rangle\langle c, b\rangle\\ \langle a, b\rangle\langle c, a\rangle - \langle c, b\rangle\|a\|^2\end{pmatrix}.$$

[15] Mais bien entendu il en faut plus que ça pour nous avoir !

SOLUTION DE L'EXERCICE 31.26

Supposons que p soit un projecteur orthogonal, et soit $F = \operatorname{Im} p$, de sorte que p est le projecteur orthogonal sur F.
Soit $x \in E$. Alors, de manière unique, $x = x_F + x_{F^\perp}$, avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$.
Par le théorème de Pythagore, qui s'applique car x_F et $x_{F^\perp}$ sont orthogonaux, on a

$$\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2.$$

D'autre part, $p(x) = x_F$ et donc $\|p(x)\|^2 = \|x_F\|^2$.
On en déduit que $\|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$ et $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

En revanche, si p n'est pas un projecteur orthogonal, cela signifie que $(\operatorname{Ker} p)^\perp \neq \operatorname{Im} p$.
De plus, ces deux sous-espaces vectoriels de E ont même dimension, égale à $\dim E - \operatorname{rg}(p)$.
Donc l'un ne peut être inclus dans l'autre. Par conséquent, il existe $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$ tel que $x \notin \operatorname{Im} p$.
Alors $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$, et donc $\langle x, x - p(x) \rangle = 0$.
x et $x - p(x)$ étant orthogonaux, on a, par le théorème de Pythagore,

$$\|p(x)\|^2 = \|x + (p(x) - x)\|^2 = \|x\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Notons que x n'étant pas dans $\operatorname{Im} p$, nécessairement $p(x) \neq x$, et donc $\|x - p(x)\| > 0$.
On en déduit donc que $\|p(x)\| > \|x\|$.

Autre solution : si p n'est pas un projecteur orthogonal, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ ne sont pas orthogonaux : il existe donc $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$ tels que $\langle x, y \rangle \neq 0$.
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a alors $p(\lambda x + y) = \lambda x$.
Or, $\|\lambda x + \lambda y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
Et donc on aura $\|\lambda x + y\| < \|p(\lambda x + y)\|$ si et seulement si $2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2 < 0$.
Un tel λ existe toujours, il suffit de prendre $\lambda < -\dfrac{\|y\|^2}{2\langle x, y\rangle}$ si $\langle x, y\rangle > 0$ et $\lambda > -\dfrac{\|y\|^2}{2\langle x, y\rangle}$ si $\langle x, y\rangle < 0$.

Projecteur

Rappelons qu'un projecteur, orthogonal ou non, est toujours la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

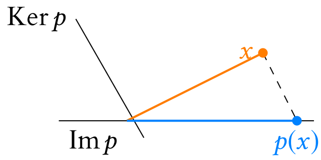


FIGURE 31.2– Un exemple de vecteur $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$ pour lequel $\|x\| < \|p(x)\|$.

Fonctions de deux variables

32

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions de deux variables à valeurs réelles, c'est-à-dire des fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$, ou une partie de $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}$.
La plupart des concepts que l'on utilise habituellement en analyse, et notamment les notions de croissance ou de décroissance n'ont plus cours[1].
Malgré tout, nous allons généraliser la notion de continuité et celle de dérivabilité à de telles fonctions, l'un des buts étant notamment de commencer à dégager des critères pour trouver les extrema d'une telle fonction, malgré l'absence d'un analogue à la notion de tableau de variations.
Tout ce travail sera poursuivi en seconde année, et élargi au cadre de fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$, et pas seulement sur $\mathbf{R}^2$.
Il est important d'essayer de vous faire une intuition géométrique pour les fonctions de deux variables, car nous pourrons représenter ces fonctions, ce qui ne sera plus possible pour des fonctions de n variables.

[1] Il n'y a pas de relation d'ordre «naturelle» sur $\mathbf{R}^2$.

Un certain nombre de preuves de ce chapitre seront très techniques, faute d'un vocabulaire adéquat, vous consacrerez du temps en seconde année à développer des outils simplifiant ces preuves, et les inscrivant dans un contexte plus général.

32.1 Introduction à la topologie de $\mathbf{R}^2$

Lors de l'étude des fonctions d'une variable, nous considérions souvent des fonctions définies sur des intervalles, ou des réunions d'intervalles. Et certains résultats de calcul différentiel[2] nécessitaient de se placer sur des intervalles ouverts.
Nous définissons dans cette partie les parties ouvertes de $\mathbf{R}^2$, qui sont «le bon cadre» pour faire du calcul différentiel.

[2] Notamment celui qui affirme qu'une fonction dérivable atteint ses extrema en des points critiques.

Dans tout le chapitre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^2$: $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$, et $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée : $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

32.1.1 Boules ouvertes, boules fermées

L'idée principale est que si $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ sont deux points de $\mathbf{R}^2$, alors $\|u - v\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ représente la distance entre u et v.

Définition 32.1 – Soit $a \in \mathbf{R}^2$ et $r > 0$. On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble

$$B_o(a, r) = \{b \in \mathbf{R}^2 \mid \|a - b\| < r\}.$$

La boule de centre a et de rayon r est donc l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ dont la distance à a est strictement inférieure à r.
C'est l'analogue, en dimension 2, de $]a - \eta, a + \eta[= \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < r\}$, l'ensemble des réels à distance strictement inférieure à r de a.

Remarque. Il est évident que si $0 < r < r'$, alors $B_o(a, r) \subset B_o(a, r')$.

Définition 32.2 – Soit $a \in \mathbf{R}^2$, et soit $r \geqslant 0$. On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{b \in \mathbf{R}^2 \mid \|a - b\| \leqslant r\}.$$

Notons qu'une boule fermée de rayon 0 n'est rien d'autre qu'un singleton : $B_f(a, 0) = \{a\}$.

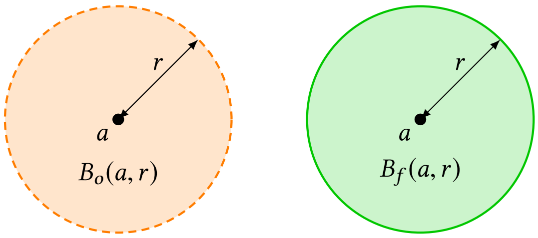


FIGURE 32.1 – Une boule ouverte et une boule fermée. La différence entre les deux est que les points du cercle de centre a et de rayon r (ceux qui sont exactement à distance r de a) sont dans la boule fermée, pas dans la boule ouverte.

32.1.2 Parties ouvertes, parties fermées

Nous avons utilisé à plusieurs reprises le fait que si un intervalle I de $\mathbf{R}$ est ouvert, alors pour tout $a \in I$, il existe $\eta > 0$ (dépendant de a) tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$. Autrement dit, les points suffisamment proches de a sont encore dans I.
C'est cette idée qui guide la définition de partie ouverte de $\mathbf{R}^2$.

Définition 32.3 – Soit $\mathscr{O}$ une partie de $\mathbf{R}^2$. On dit que $\mathscr{O}$ est un **ouvert** de $\mathbf{R}^2$ si

$$\forall a \in \mathscr{O}, \exists r \in \mathbf{R}_+^*, B_o(a,r) \subset \mathscr{O}.$$

Soit encore si

$$\forall a \in \mathscr{O}, \exists r \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}^2, \|a-x\| < r \Rightarrow x \in \mathscr{O}.$$

Une première intuition est qu'une partie ouverte est une partie qui ne contient pas son bord, ou sa frontière[3].

[3] Une définition précise de ces notions sera donnée l'an prochain.

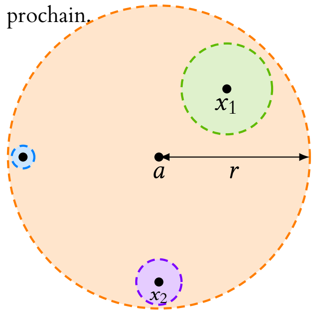


FIGURE 32.2– Le rayon r_1 de la «petite» boule dépend du point x.

Exemples 32.4

► Une boule ouverte est un ouvert. En effet, considérons $a \in \mathbf{R}^2$ et $r > 0$, et prouvons que $B_o(a,r)$ est un ouvert.
Soit $x \in B_o(a,r)$, de sorte que $\|a-x\| < r$.
Soit $r_1 > 0$ tel que $\|a-x\|+r_1 < r$ (notons qu'il existe toujours un tel r_1, par exemple $r_1 = \frac{r-\|x-a\|}{2}$).
Alors $B_o(x,r_1) \subset B_o(a,r)$.
En effet, pour $y \in B_o(x,r_1)$, on a

$$\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| \leqslant r_1 + \|x-a\| < r,$$

de sorte que $y \in B_o(a,r)$.
► $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
En effet, soit $a = (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.
Soit alors $r = \min(x,y) > 0$, et soit $u = (x',y') \in B_o(a, \sqrt{r})$.
Alors $|x-x'|^2 \leqslant (x-x')^2 + (y-y')^2 < r^2 \leqslant x$.
Donc $-x < x-x' < x$, si bien que $x' > 0$.
Et de même, on prouve que $y' > 0$, et donc que $u \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, si bien que $B_o(a,r) \subset \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.
► La boule fermée $B_f(0_{\mathbf{R}^2}, r)$ n'est en revanche pas un ouvert.
Si x est tel que $\|x\| = r$, alors quel que soit $r_1 > 0$, la boule $B_o(x,r_1)$ n'est pas incluse dans $B_f(0,r)$.
En effet, soit $y = \left(1+\frac{r_1}{2r}\right)x$. Alors $y \in B_o(x,r_1)$ car

$$\|x-y\| = \left\|x - \left(1+\frac{r_1}{2r}\right)x\right\| = \frac{r_1}{2r}\|x\| = \frac{r_1}{2} < r_1,$$

mais $\|0_{\mathbf{R}^2} - y\| = \left\|0_{\mathbf{R}^2} - \left(1+\frac{r_1}{2r}\right)x\right\| = \left(1+\frac{r_1}{2r}\right)\underbrace{\|x\|}_{=r} > r$, de sorte que

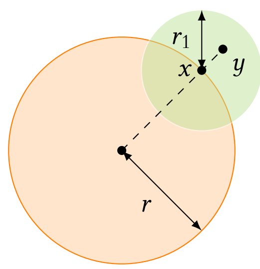


FIGURE 32.3– $B_o(x, r_1)$ n'est pas inclus dans $B_f(0, r)$. On constate que x et y sont colinéaires.

$y \notin B_f(0_{\mathbf{R}^2}, r)$.
Sur le même principe, on prouve qu'une boule fermée n'est jamais un ouvert.

Proposition 32.5 (Propriétés des ouverts) :

1. *$\emptyset$ et $\mathbf{R}^2$ sont des ouverts*
2. *si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille[4] d'ouverts de $\mathbf{R}^2$, alors $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.*
3. *si $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ sont des ouverts, en nombre fini, alors $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.*

[4] Indexée par un ensemble I potentiellement infini.

Démonstration. 1. $\emptyset$ est un ouvert puisque $\forall x \in \emptyset, \dots$ est toujours vrai.
Et $\mathbf{R}^2$ est un ouvert puisque pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, $B_o\left(x, \frac{\pi^2}{6}\right) \subset \mathbf{R}^2$.

2. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, et soit $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_{i_0}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

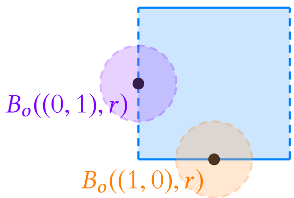
3. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B_o(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$.
En particulier, si on note $r = \min_{1\leqslant i\leqslant n} r_i$, alors pour tout i, $B_o(x, r) \subset \mathcal{O}_i$.
Et donc $B_o(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$.

□

La notion de partie fermée n'est pas explicitement au programme de première année. Mais puisque vous la rencontrerez en seconde année, autant s'en faire une intuition dès maintenant.

Définition 32.6 – Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathbf{R}^2$ est un **fermé** de $\mathbf{R}^2$ si son complémentaire $\overline{\mathcal{F}}$ est un ouvert.

⚠ Les fermés ne sont donc pas les parties non ouvertes. Il existe des parties de $\mathbf{R}^2$ qui ne sont ni ouvertes ni fermées. Par exemple $A =]0, 2[\times [0, 2]$ n'est ni ouvert ni fermé.
En effet, il n'est pas ouvert car il contient $(1, 0)$ mais que pour tout $r > 0$, $B_o((0, 1), r)$ contient $(-\frac{r}{2}, 1)$ qui n'est pas dans A.
Il n'est pas non plus fermé car $(0, 1) \in \overline{A}$, mais pour tout $r > 0$, $B_o((0, 1), r)$ contient $(\frac{r}{2}, 1) \notin \overline{A}$.



Proposition 32.7 :

1. *$\emptyset$ et $\mathbf{R}^2$ sont des fermés de $\mathbf{R}^2$*
2. *si $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de fermés, alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est un fermé*
3. *si $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sont des fermés, en nombre fini, alors $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ est un fermé.*

Démonstration. 1) $\emptyset$ et $\mathbf{R}^2$ sont des ouverts, donc leurs complémentaires respectifs, qui sont $\mathbf{R}^2$ et $\emptyset$ sont des fermés.
2) Pour tout $i \in I$, $\overline{\mathscr{F}_i}$ est un ouvert. Donc $\bigcup_{i\in I} \overline{\mathscr{F}_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i}$ est un ouvert, si bien que $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est fermé.
3) De même, $\bigcap_{i\in I} \overline{\mathscr{F}_i}$ est ouvert, donc son complémentaire, $\bigcup_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est fermé. □

32.2 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

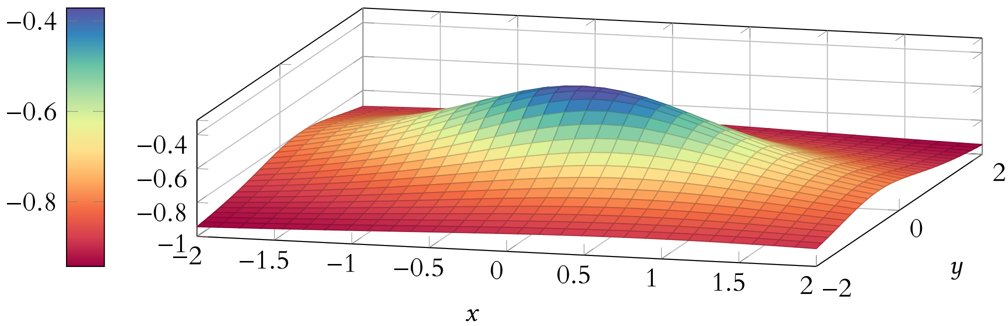
Dans la suite du chapitre, nous allons considérer des fonctions $f : A \to \mathbf{R}$ définies sur une partie A de $\mathbf{R}^2$.

Définition 32.8 – Soit $f : A \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbf{R}^2$. On appelle **graphe de** f l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in A \textbf{ et } z = f(x, y)\}$.

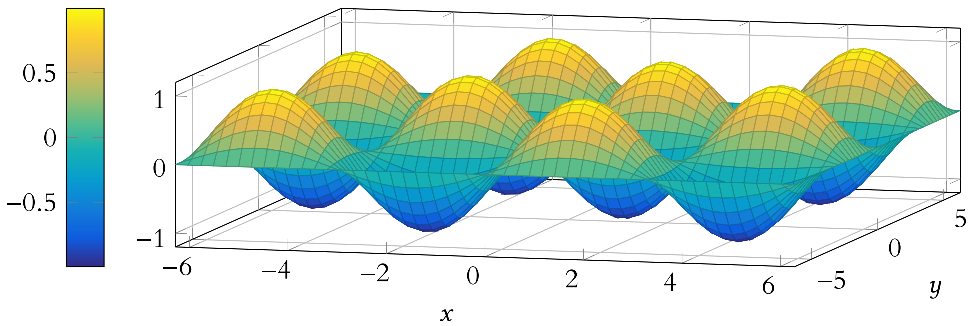
Le graphe d'une fonction est donc une surface tracée dans $\mathbf{R}^3$.

Exemples 32.9

- Soit $f(x, y) = -e^{-\frac{1}{x^2+2y^2+xy+1}}$. Alors le graphe de f est



- Soit $g(x, y) = \sin(x)\sin(y)$. Alors le graphe de g est

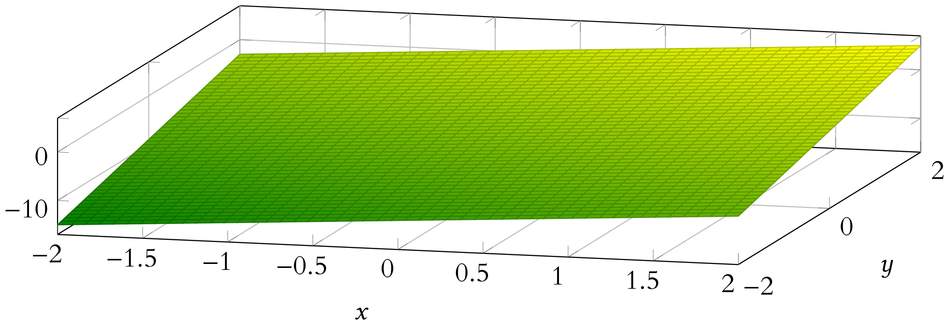


- Si l'on considère une partie de la surface du globe, et qu'on la suppose plate. Alors tout point de la surface est représenté par deux coordonnées x et y (qui sont la latitude et la longitude). Alors si l'on note $h(x, y)$ l'altitude en ce point, le graphe de la fonction h représente la surface de la Terre.

> **2D/3D**
> Bien qu'il s'agisse d'une représentation «en 3 dimensions», ces figures sont toujours représentées sur le plan de la feuille ou de l'écran. Les couleurs aident alors à se représenter une troisième dimension, les variations de couleurs représentant les variations d'altitude.

Cas particulier : si $f(x, y) = ax + by + c$, alors le graphe de f est un plan de l'espace, car c'est l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant

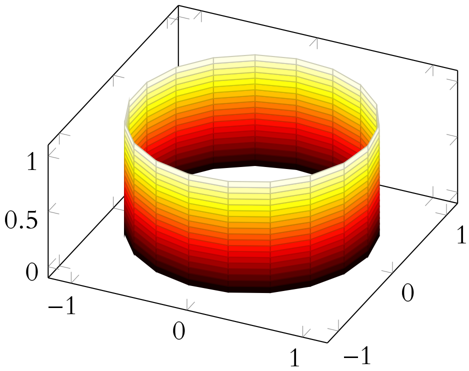
$$z = ax + by + c \Leftrightarrow z - ax - by - c = 0.$$

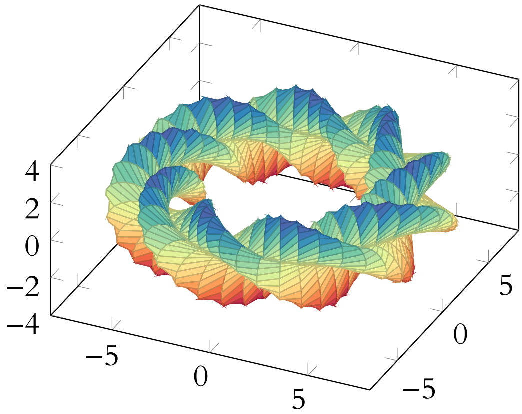


Bien entendu, toutes les «surfaces»[5] tracées dans $\mathbf{R}^3$ ne sont pas le graphe d'une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$, en particulier, le graphe d'une fonction ne peut pas contenir deux points distincts de même abscisse et même ordonnée.

[5] Whatever it means.

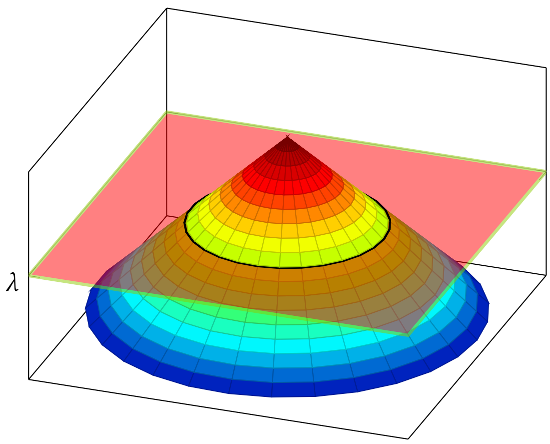
Par exemple, les surfaces suivantes ne sont pas des graphes de fonctions de deux variables.





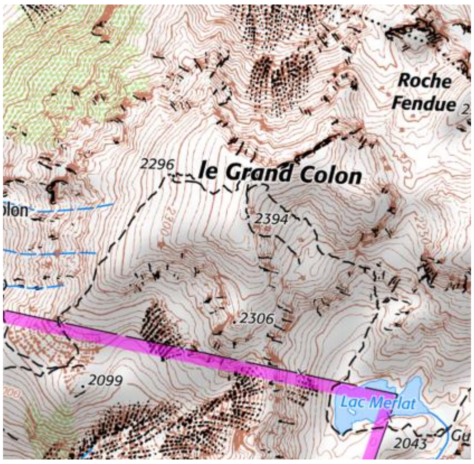
Définition 32.10 – Soit $f : A \to \mathbf{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note appelle **ligne de niveau λ de f** l'ensemble $\mathscr{C}_\lambda(f) = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in A \mid f(x) = \lambda\}$.

Les lignes de niveau sont des parties de $\mathbf{R}^2$, mais la ligne de niveau λ de f est reliée à l'intersection du graphe de f avec le plan (horizontal) d'équation $z = \lambda$.
Plus précisément, cette intersection est $\{(x, y, \lambda),\ (x, y) \in \mathscr{C}_\lambda(f)\}$.

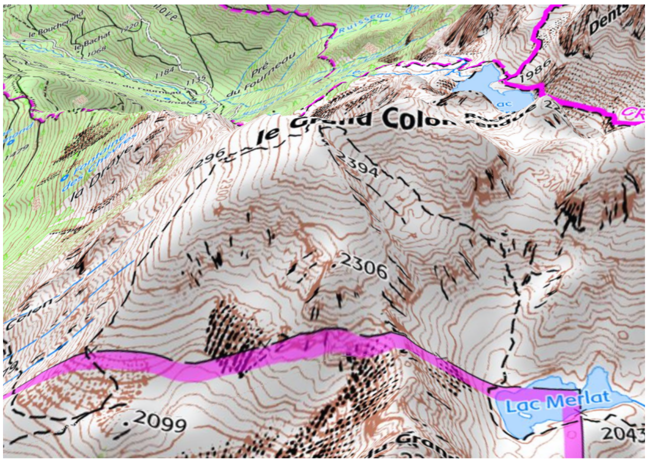


Exemples 32.11

Si f est la fonction qui à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend. Ce sont bien les lignes de niveau représentées sur les cartes topographiques.

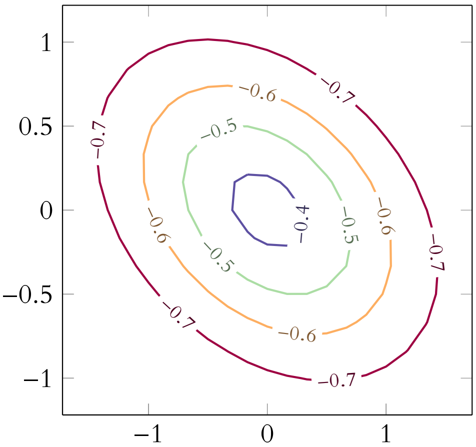


Des lignes de niveau en Belledonne

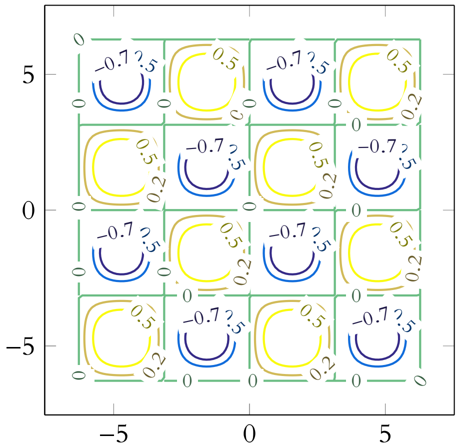


Les mêmes lignes de niveau en 3D.

Des courbes de niveau des deux fonctions f et g données précédemment sont tracées ci-dessous.



Des lignes de niveau de f.



Des lignes de niveau de g.

32.3 Fonctions continues

Définition 32.12 – Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$, soit $f : A \to \mathbf{R}$, et soit $a \in A$. On dit que f est **continue en a** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit encore si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B_o(a, \eta) \cap A,\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f **est continue sur** A si elle est continue en tout $a \in A$.

Remarques. ▸ Vous aurez bien sûr reconnu l'analogie avec la définition quantifiée de la continuité en a d'une fonction d'une seule variable.
L'intuition y est d'ailleurs la même : deux points suffisamment proches ont des images proches.
On pourrait de même définir une notion de limite en un point d'une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}^2$, vous le ferez l'an prochain.
▸ Si f est continue en a, alors elle est bornée sur un voisinage de a : il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in A \cap B_o(a, r)$, $|f(x)| \leqslant |f(a)| + 1$.

Exemples 32.13

▸ Une fonction constante est bien évidemment continue sur son ensemble de définition.
▸ Soit $p_1 : \begin{vmatrix} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{vmatrix}$.
Soit alors $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $(x,y) \in B_o(a,\varepsilon)$, on a $|a_1 - x| < \|a - (x,y)\| < \varepsilon$, soit encore $|p_1((x,y)) - p_1(a)| < \varepsilon$, de sorte que p_1 est continue en a, et donc sur $\mathbf{R}^2$.
On prouverait de même que $p_2 : \begin{vmatrix} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{vmatrix}$ est continue.
▸ La fonction norme, $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.
En effet, soit $a \in \mathbf{R}^2$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $\|x - a\| < \varepsilon$, on a

$$\big|\|x\| - \|a\|\big| \leqslant \|x - a\| < \varepsilon.$$

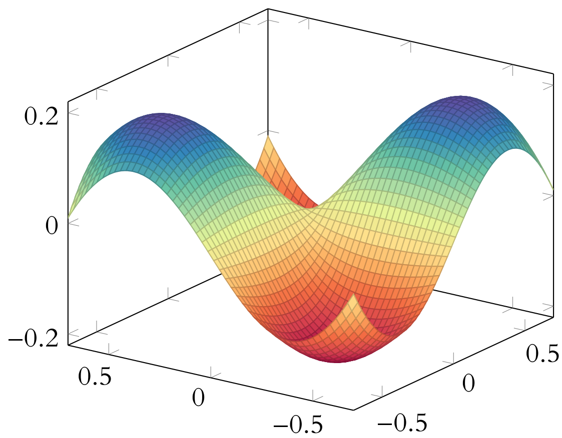
Ineg triang
L'inégalité triangulaire renversée se prouve de la même manière qu'elle se prouve dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{C}$ à partir de l'inégalité triangulaire classique.

▸ Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Alors pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|}{x^2+y^2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$

Rappel
$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Mais $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, si bien que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|t| < \eta \Rightarrow t|\ln(t)| < \varepsilon$.
Et donc pour $(x,y) \in B_o((0,0), \sqrt{\eta})$, on a $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$, si bien que f est continue en 0.



Proposition 32.14 : *Soit A une partie de $\mathbf{R}^2$. Et soient $f, g : A \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues sur A. Alors*

1. *$\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ est continue sur A.*
2. *$f \times g$ est continue sur A.*
3. *Si g ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur A.*
4. *Si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur une partie I de $\mathbf{R}$ et que f est à valeurs dans I, alors $\varphi \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue sur A.*

Démonstration. Dans toute la suite, on fixe $a \in A$, et on prouve les continuités annoncées en a.

1. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Alors il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que pour $x \in A$, $\|x - a\| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}$, et $\|x - a\| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, pour $x \in A \cap B_o(a, \eta)$,

$$|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)| \leqslant |\lambda||f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lambda f + g$ est continue en a.

2. Soit $\varepsilon > 0$, et soient alors η_1 et η_2 tels que $\forall x \in A$,

$$\|x - a\| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \textbf{ et } \|x - a\| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{|f(a)| + \varepsilon}.$$

Notons alors que pour $\|x - a\| < \eta_1$, on a $|f(x)| \leqslant |f(a)| + \varepsilon$.
Alors pour $\|x - a\| < \min(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(a)g(a)| &= |f(x)\left(g(x) - g(a)\right) + g(a)\left(f(x) - f(a)\right)| \\ &\leqslant |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon + |g(a)|\varepsilon \leqslant \varepsilon(1 + |g(a)|).\end{aligned}$$

Et donc fg est continue en a.

3. Pour $x \in A$, on a $\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(a)} = \dfrac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}$.
Mais puisque $g(a) \neq 0$, pour $\varepsilon = \frac{|g(a)|}{2}$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour $\|x - a\| < \eta_1$, $|g(x) - g(a)| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)| > \frac{|g(a)|}{2}$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit $\eta_2 > 0$ tel que pour $\|x - a\| < \eta_2$, $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$.
Alors pour $\|x - a\| < \min(\eta_1, \eta_2)$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)g(a)|} < \frac{2}{|g(a)|^2}\varepsilon$$

et donc $\frac{1}{g}$ est continue en a.
La continuité de $\frac{f}{g}$ découle alors du point 2.

4. Notons que φ est en particulier continue en $f(a)$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta_1 > 0$ tel que pour $t \in I$, $|t - f(a)| < \eta_1 \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$.
Soit alors $\eta > 0$ tel que pour $x \in A$, $\|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta_1$.
Alors pour $\|x - a\| < \eta$, on a $|f(x) - f(a)| < \eta_1$, et donc $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(a))| < \varepsilon$.
Donc $\varphi \circ f$ est continue en a.

□

Ça suffit ?
Normalement vous commencez à avoir l'habitude de ce type de raisonnement : si on arrive à rendre $|f(x) - f(a)|$ inférieur à $C\varepsilon$, avec C une constante (indépendante de x), et ce pour tout ε, alors quitte à remplacer ε par $\frac{\varepsilon}{C}$, on peut obtenir (pour x suffisamment proche de a), $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Remarques. ► Si on avait disposé d'une caractérisation séquentielle de la continuité[6], alors on aurait pu prendre exactement les mêmes preuves que celles qui ont été données dans le cas des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Cela dit, toutes les preuves que nous venons de donner, qui nécessitent un peu plus de «découpage d'ε» se transposent mot à mot au cas des fonctions réelles, en remplaçant les normes par des valeurs absolues.
► On déduit de ce qui précède que les fonctions continues sur A sont un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, \mathbf{R})$.

[6] Et elle existe, là encore vous en parlerez l'an prochain, mais elle nécessite de parler de limite de suites à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.
Avec un peu d'imagination, vous devriez pouvoir deviner ce qu'on a envie d'appeler une suite convergente à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, et énoncer un théorème de caractérisation séquentielle de la continuité.

Définition 32.15 – Une fonction **polynomiale** sur une partie A de $\mathbf{R}^2$ est une fonction pour laquelle il existe deux entiers naturels p, q et des réels $(\lambda_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}}$ tels que pour tout $(x, y) \in A$,

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \lambda_{i,j} x^i y^j.$$

Exemple 32.16

$f : (x, y) \mapsto 3x^3(y^2 + 1) + x^2 y + (y^2 + y + 1)x^7$ est une fonction polynomiale.

Il est facile de prouver que l'ensemble des fonctions polynomiales sur A est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur A, et qu'une famille génératrice en est la famille des $(x,y) \mapsto x^i y^j$, pour $(i,j) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice
Prouver que cette famille est une base de l'ensemble des fonctions polynomiales lorsque $A = \mathbf{R}^2$.

Proposition 32.17 : *Une fonction polynomiale est continue.*

Démonstration. Une fonction polynomiale est une combinaison linéaire de produits des fonctions $p_1 : (x,y) \mapsto x$ et $p_2 : (x,y) \mapsto y$ dont nous avons déjà dit qu'elles sont continues. □

La proposition suivante peut parfois aider à déterminer si une partie de $\mathbf{R}^2$ est ouverte ou fermée.

Proposition 32.18 : *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction continue.*

1. *pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a[)$ et $f^{-1}(]a, +\infty[)$ sont des ouverts de $\mathbf{R}^2$.*
2. *pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ et $f^{-1}([a, +\infty[)$ sont des fermés de $\mathbf{R}^2$.*

⚠ Attention !
On demande à ce que f soit définie sur $\mathbf{R}^2$ tout entier.

Démonstration.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$, et soit $x \in f^{-1}(]-\infty, a[)$, c'est-à-dire tel que $f(x) < a$.
   Prenons alors $\varepsilon = a - f(x) > 0$.
   Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}^2$, $\|x - y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
   Et en particulier, pour $y \in B_o(x,\eta)$, $f(y) < \varepsilon + f(x) = a$.
   Ceci signifie donc que $B_o(x,\eta) \subset f^{-1}(]-\infty, a[)$.
   Et donc $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est ouvert.

   Le même raisonnement[7] prouve que $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est ouvert.
2. Le complémentaire de $B = f^{-1}(]-\infty, a])$ est $f^{-1}(]a, +\infty[)$, qui est ouvert. Donc B est fermé.

□

[7] Par exemple en appliquant ce qui vient d'être prouvé à la fonction $-f$.

On en déduit notamment que $f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(-\infty, a]) \cap f^{-1}([a, +\infty[)$ est fermé car intersection de deux fermés, que $f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, b[)$ est ouvert car intersection de deux ouverts, que $f^{-1}(\mathbf{R}^*) = f^{-1}(]-\infty, 0[) \cup f^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert, etc.

On remarquera en particulier que les lignes de niveau d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ sont des fermés de $\mathbf{R}^2$.

Exemple 32.19

$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 3\}$ est ouvert car image réciproque de $]-\infty, 3[$ par la fonction continue[8] $(x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$.
Et de même, $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 3\}$ est fermé.

[8] Car polynomiale.

32.4 Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dans toute cette partie, $\mathscr{O}$ désigne un **ouvert** de $\mathbf{R}^2$.

32.4.1 Dérivées partielles

Définition 32.20 – Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$, et soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{O}$.
Soit alors $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset \mathcal{O}$.
Alors la première fonction partielle de f en a est

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]a_1 - r, a_1 + r[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x, a_2) \end{array} \right.$$

De même, la seconde fonction partielle de f en a est

$$f_2 : \left| \begin{array}{ccc}]a_2 - r, a_2 + r[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ y & \longmapsto & f(a_1, y) \end{array} \right. .$$

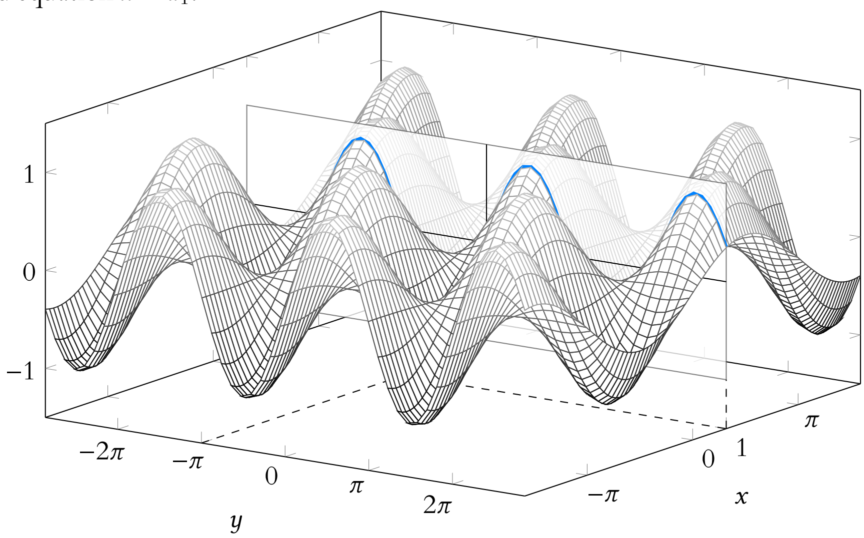
Autrement dit
f_1 est la fonction d'une seule variable obtenue en faisant varier x et en laissant y égal à a_2. Et de même pour a_1.

Remarques. ▸ Il est facile de prouver que si f est continue en a, alors f_1 est continue en a_1 et f_2 est continue en a_2.
▸ L'ensemble de définition des fonctions partielles n'est pas clairement défini puisqu'il n'y a pas unicité du r de l'énoncé. Mais ce n'est pas grave, seul leur comportement en a_1/a_2 va nous intéresser dans la suite, l'essentiel est donc qu'elles soient définies sur un voisinage de a_1/a_2.
Notons tout de même que si $B_o(a, r) \subset \mathcal{O}$, alors pour tout $x \in]a_1 - r, a_1 + r[$, $\|(x, a_2) - (a_1, a_2)\| = |x - a_1| < r$, si bien que $(x, a_2) \in \mathcal{O}$, et donc $f(x, a_2)$ est bien défini.

Exercice
Le prouver.

Exemple 32.21

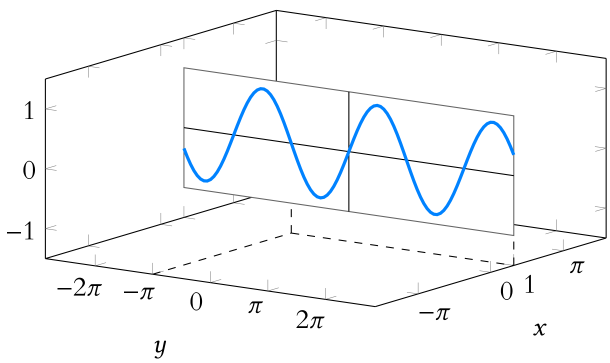
Si $a = (a_1, a_2)$. f_2 est alors la fonction $t \mapsto f(a_1, t)$.
La courbe de f_2 est alors obtenue en faisant l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $x = a_1$.

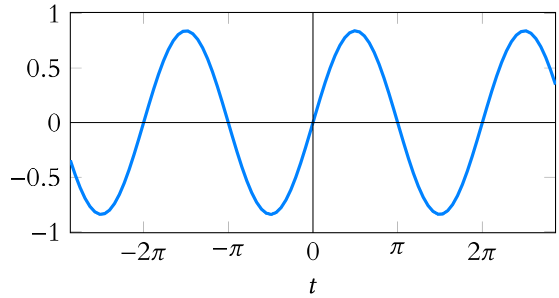


Ici, on considère la fonction

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

On souhaite tracer la courbe de la seconde fonction partielle de f en $a = (1, -\pi)$. Pour cela, on s'intéresse à l'intersection du graphe de f et du plan d'équation $x = 1$.





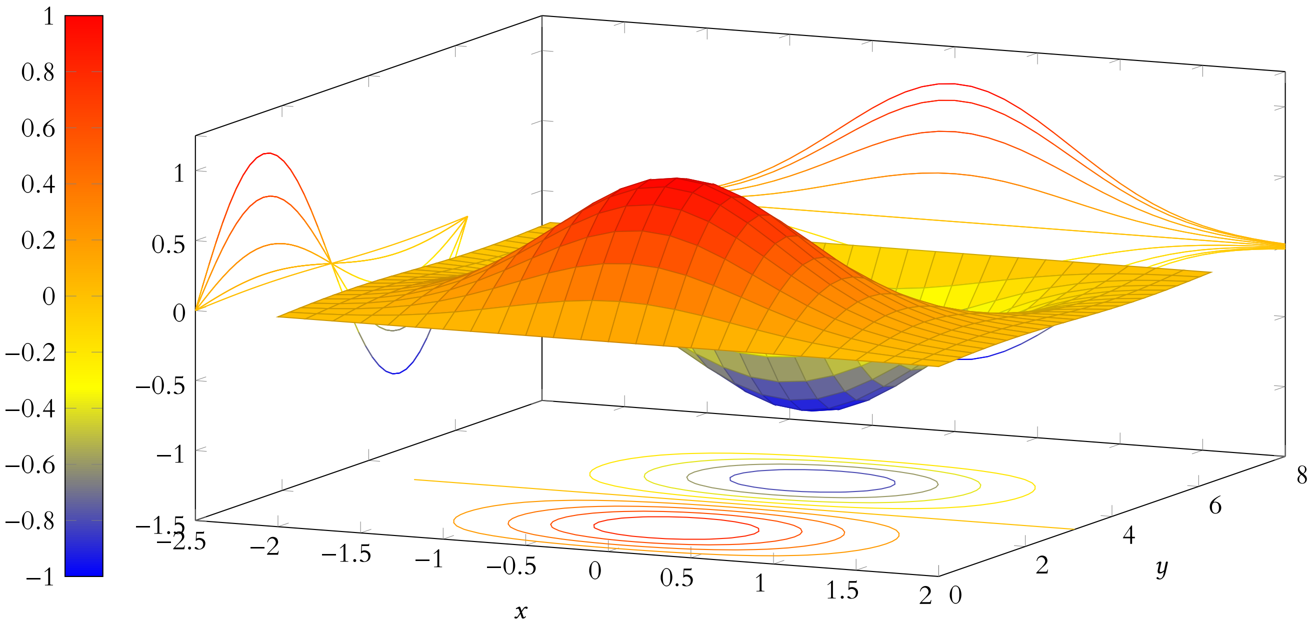


FIGURE 32.4 – Sur le plan du fond sont représentées des premières fonctions partielles (sections par les plans $y = \lambda$), sur le plan de gauche des secondes fonctions partielles, et sur le plan du bas, des lignes de niveau.

Définition 32.22 – Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$, et soit $a = (a_1, a_2) \in \mathscr{O}$. On dit que f admet une **première dérivée partielle** en a (ou dérivée par rapport à x) si f_1 est dérivable en a_1.

C'est-à-dire si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$ existe et est finie.

Lorsque c'est le cas, on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ cette limite.

De même, on définit la **seconde dérivée partielle de f en a** (ou dérivée par rapport à y) la dérivée en a_2, si elle existe, de f_2.

On la note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

En pratique

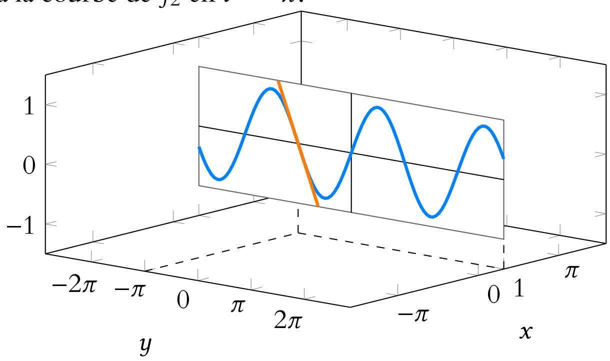
Pour étudier l'existence, et le cas échéant calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, il suffit de dériver f_1, qui est une fonction de **la seule** variable x. Toutes les règles sur la dérivation des fonctions d'une variable sont valables, et il n'est pas nécessaire de revenir au taux d'accroissement.

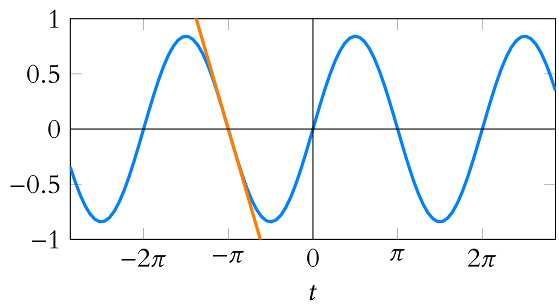
Exemple 32.23

Reprenons le cas de $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ et $a = (1, -\pi)$.
Alors la seconde fonction partielle de f en a est $f_2 : t \mapsto f(1, t) = \sin(1)\sin(t)$.

Sa dérivée est $t \mapsto \sin(1)\cos(t)$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -\pi) = \sin(1)\cos(\pi) = -\sin(1)$.

Graphiquement, cela signifie que $-\sin(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f_2 en $t = -\pi$.





Concrètement, pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, il suffit de considérer y comme une constante, et d'appliquer les règles de dérivation[9] usuelles.

[9] D'une somme, d'un produit, etc

Exemples 32.24

- Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = xy + 2x^3 + 3y^2$.
Alors f admet des dérivées partielles, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 6x^2, \ \frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = x + 6y.$$
- Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $g(x,y) = xe^{x^2+y^2}$. Alors g admet des dérivées partielles
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2xe^{x^2+y^2}, \ \frac{\partial g}{\partial y}g(x,y) = 2xye^{x^2+y^2}.$$

Remarque. Cette notation a un inconvénient, c'est qu'elle sous-entend que les deux variables dont dépend notre fonction s'appellent x et y, dans cet ordre.
Et si on décide que notre fonction f dépend des variables r et θ (pensez à des coordonnées polaires...), il faudrait tout de même noter $\dfrac{\partial f}{\partial x}f(r,\theta)$ lorsqu'on dérive par rapport à r ??
En pratique, si le cas se présente, on notera $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ la première dérivée partielle et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)$ la seconde.

Une notation plus simple[10] consiste à noter $\partial_1 f$ la dérivée de f par rapport à sa première variable, indépendamment du nom de celle-ci, et donc $\partial_2 f$ la dérivée par rapport à la seconde variable.

[10] Et une fois de plus, vous l'utiliserez en seconde année...

⚠ Contrairement au cas des fonctions d'une variable, pour lesquelles la dérivabilité implique la continuité, une fonction de deux variables peut avoir deux dérivées partielles en un point sans être continue en ce point.

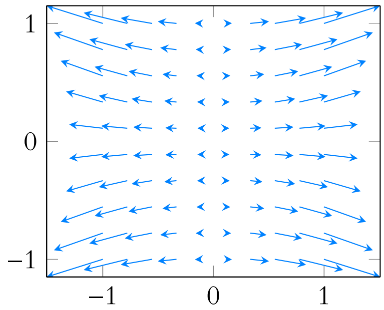
Définition 32.25 – Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ et $a \in \mathcal{O}$ tels que f possède des dérivées partielles en a.
Alors on appelle **gradient de f en a** et on note $\nabla f(a)$ le vecteur de $\mathbf{R}^2$ défini par
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

⚠ Attention !
Le gradient est un vecteur, c'est donc un couple de nombres, et non un seul !

Exemple 32.26

Soit $f(x,y) = x^2(1+\ln(1+y^2))$. Alors en tout point (x,y), on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1+\ln(1+y^2)), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^2}{1+y^2}, \ \nabla f(x,y) = \left(2x(1+\ln(y^2)), \frac{2yx^2}{1+y^2}\right) \in \mathbf{R}^2.$$

Nous reviendrons plus tard sur l'interprétation géométrique du gradient. Pour l'instant, disons que cela revient à se donner un vecteur en chaque point.



32.4.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 32.27 – Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ si pour tout $a \in \mathcal{O}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent, et que de plus les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathcal{O}$.
On note alors $\mathscr{C}^1(\mathcal{O}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.

Exemple 32.28

Reprenons la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
Alors pour $(x,y) \neq (0,0)$, f possède des dérivées partielles en (x,y), données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$$

De plus, pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
Et de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant |y\ln(x^2+y^2)| + \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant |y\ln(x^2+y^2)| + \frac{1}{2}x.$$

Si on suppose de plus que $(x,y) \in B_o((0,0),1)$, alors $y^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$ et donc $2\ln(|y|) \leqslant \ln(x^2+y^2) \leqslant 0$, si bien que $|\ln(x^2+y^2)| \leqslant 2|\ln(|y|)|$.
Mais alors pour $\varepsilon > 0$, puisque $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour $|y| < \eta_1$, $|y\ln(|y|)| < \varepsilon$.
Soit alors $\eta = \min(\eta_1, \varepsilon)$. Alors pour $(x,y) \in B_o((0,0),\eta)$, on a $|x| < \varepsilon$ et $|y| < \eta_1$, si bien que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| < 2\varepsilon.$$

Et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est bien continue en $(0,0)$.
On prouve de même la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.

Puisque par ailleurs, par opérations usuelles sur les fonctions continues, il est clair que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, elles sont continues sur $\mathbf{R}^2$, si bien que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Proposition 32.29 : *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$. Alors*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$, et*
$$\frac{\partial(\lambda f+g)}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial(\lambda f+g)}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}$$
2. *$f \times g$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et*
$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g \text{ et } \frac{\partial fg}{\partial y} = f\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}g.$$
3. *Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et*
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}.$$
4. *Si f est à valeurs dans un intervalle I, et si $\varphi : I \to \mathbf{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et*
$$\frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\varphi'\circ f \text{ et } \frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\times\varphi'\circ f.$$

⚠ Attention !
N'apprenez en aucun cas ces formules !
1) Elles sont là essentiellement pour vous dire qu'elles existent.
2) C'est du bon sens : dériver par rapport à x, c'est fixer y ,puis dériver une fonction d'une seule variable, pour lesquelles on dispose alors de formules pour la dérivée d'un produit/d'un quotient/d'une composée.

Démonstration. Prouvons par exemple le point 2) : soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{O}$.
Alors la fonction $x \mapsto (fg)(x, y_0)$ est dérivable en x_0 puisque les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $x \mapsto g(x, y_0)$ le sont.
Et alors sa dérivé en x_0 est $x \mapsto f(x_0, y_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)g(x_0, y_0)$.
Donc $\frac{\partial(fg)}{\partial x}$ est définie sur $\mathscr{O}$ et égale à $f\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}g$.
Puisque f, g, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont continues sur $\mathscr{O}$, $\frac{\partial(fg)}{\partial x}$ l'est aussi.
On raisonne de même pour la seconde dérivée partielle, qui existe et est continue sur $\mathscr{O}$, si bien que fg est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$. □

Proposition 32.30 : *Une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Démonstration. Si on note $p_1 : (x, y) \mapsto x$, alors $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ est constante égale à 1, et $\frac{\partial p_1}{\partial y}$ est constante égale à 0.
Donc ces deux dérivées partielles sont continues, si bien que p_1 est $\mathscr{C}^1$.
De même, $p_2 : (x, y) \mapsto y$ est $\mathscr{C}^1$, si bien que toute fonction polynomiale, qui est combinaison linéaire de produits de p_1 et p_2 est $\mathscr{C}^1$. □

Exemple 32.31

$f : u \mapsto \|u\|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0_{\mathbf{R}^2}\}$.
En effet, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Or la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale, donc $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Nous pouvons même calculer ses dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

En revanche, bien que f soit définie sur tout $\mathbf{R}^2$, elle ne possède pas de dérivées partielles en $(0,0)$, par exemple car $f_1 : x \mapsto f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ n'y est pas dérivable.

32.4.3 Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Pour une fonction f d'une variable, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I, la formule de Taylor-Young peut s'écrire de la manière suivante : pour tout $a \in I$,

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h).$$

Soit encore, en revenant à la définition de o : pour tout $a \in I$, il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de 0, telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, telle que pour tout $h \in V$,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h).$$

Le résultat qui va suivre est une généralisation de cette formule aux fonctions de deux variables.

Théorème 32.32 : *Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et soit $a \in \mathscr{O}$.*
Notons $r > 0$ tel que $B_o(a,r) \subset \mathscr{O}$.
Alors il existe une fonction $\varepsilon : B_o(0_{\mathbf{R}^2}, r) \to \mathbf{R}$, continue en $0_{\mathbf{R}^2}$ telle que pour tout $h = (h_1, h_2) \in B_o(0_{\mathbf{R}^2}, r)$,

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \|h\|\varepsilon(h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \|h\|\varepsilon(h).$$

Démonstration. Soit donc $a = (a_1, a_2) \in \mathscr{O}$, et $r > 0$ comme dans l'énoncé.
Notons que quitte à ajouter une constante[11] à f, on peut supposer que $f(a) = 0$.

[11] Ce qui ne change pas ses dérivées partielles, donc ne change pas son gradient.

On définit alors une fonction ε sur $B_o(0_{\mathbf{R}^2}, r)$ en posant, pour tout h tel que $\|h\| < r$:

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|h\|}\left(f(a+h) - \langle \nabla f(a), h\rangle\right) & \text{si } h \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors évident que ε vérifie l'égalité de l'énoncé, il s'agit donc essentiellement de prouver que ε est continue en $(0,0)$.

Soit donc $\varepsilon_0 > 0$. Par continuité des dérivées partielles de f, il existe η_1, η_2 tels que $\|h\| < \eta_1 \Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right\| < \varepsilon_0$ et $\|h\| < \eta_2 \Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right\| < \varepsilon_0$.
Posons donc $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, r)$, et soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|h\| < \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|f(a+h) - \langle \nabla f(a), h\rangle| &= \left|f(a_1+h_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\right| \\
&\leqslant \left|f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + f(a_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\right| \\
&\leqslant \left|f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1\right| + \left|f(a_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\right| \\
&\leqslant \left|\int_{a_1}^{a_1+h_1} \frac{\partial f}{\partial x}(u, a_2+h_2)\,du - \int_{a_1}^{a_1+h_1} \frac{\partial f}{\partial x}(a)\,dv\right| + \left|\int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, v)\,dv - \int_{a_2}^{a_2+h_2} \frac{\partial f}{\partial y}(a)\,dv\right| \\
&\leqslant \left|\int_{a_1}^{a_1+h_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right) du\right| + \left|\int_{a_2}^{a_2+h_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, v) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) dv\right|.
\end{aligned}$$

Mais pour tout u compris entre a_1 et $a_1 + h_1$, on a

$$\|(u, a_2+h_2) - a\| = \|(u - a_1, h_2)\| = \sqrt{(u-a_1)^2 + h_2^2} \leqslant \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \|h\| < \eta$$

si bien que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| < \varepsilon_0$.
Et donc par inégalité triangulaire[12],

$$\left|\int_{a_1}^{a_1+h_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right)\,du\right| < |h_1|\varepsilon_0.$$

[12] En commençant éventuellement par remettre les bornes dans le bon sens.

On prouve exactement sur le même principe que

$$\left|\int_{a_2}^{a_2+h_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, v) - \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\,dv\right| \leqslant |h_2|\varepsilon_0.$$

Et donc $|\varepsilon(h)| \leqslant |\frac{|h_1|+|h_2|}{\|h\|}\varepsilon_0 \leqslant 2\varepsilon_0$.

Détails
On a $|h_1| \leqslant \|h\|$.

Autrement dit, nous venons de prouver que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|h\| < \eta$, $|\varepsilon(h)| < \varepsilon_0$.
Sachant que $\varepsilon((0,0)) = 0$, c'est bien là la définition de la continuité de ε en $(0,0)$.

Remarques. Le $\|h\|\varepsilon(h)$ est l'analogue du $o(h)$ que l'on aurait écrit pour une fonction d'une seule variable. D'ailleurs vous emploierez des notations similaires l'an prochain.
Pour (x, y) «proche» de a, en notant $h = (x,y) - (a_1, a_2)$, on a donc

$$f(x,y) \simeq f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2).$$

Donc au voisinage de a, le graphe de f «ressemble» à l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$.
C'est là l'équation d'un plan de l'espace, que l'on appelle le plan tangent au graphe f en a.

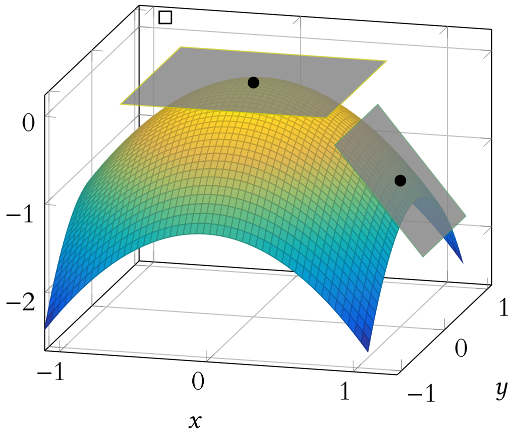


FIGURE 32.5– Deux plans tangents

> **Corollaire 32.33 –** *Si f est $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O}$, alors f est continue sur $\mathscr{O}$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathscr{O}$, soit ε définie sur $B_o(0_{\mathbf{R}^2}, r)$ comme ci-dessus, et soit $\varepsilon_0 > 0$.

Puisque $\mapsto \|h\|\varepsilon(h)$ est continue en $(0,0)$, car produit de fonctions qui le sont, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\|h\| < \eta_1 \Rightarrow |\|h\|\varepsilon(h)| < \varepsilon_0$.

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle\nabla f(a), h\rangle| \leqslant \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$, si bien que pour $\|h\| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{1+\|\nabla f(a)\|}$, $|\langle\nabla f(a), h\rangle| \leqslant \varepsilon_0$.
Notons alors $\eta = \min\left(\eta_1, \frac{\varepsilon_0}{1+\|\nabla f(a)\|}\right)$.
Alors pour $x \in B_o(a, \eta)$, si on pose $h = x - a$, alors $\|x\| < \eta$, si bien que

$$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)| \leqslant |\langle\nabla f(a), h\rangle| + |\|h\|\varepsilon(h)| \leqslant 2\varepsilon_0.$$

Et donc nous avons bien prouvé que f est continue en a. □

32.4.4 Dérivation selon un vecteur

Par définition, les dérivées partielles nous donnent la dérivée des fonctions d'une variable que l'on obtient lorsqu'on se «rapproche» d'un point $a \in \mathbf{R}^2$ parallèlement aux axes (l'axe des abscisses pour la première dérivée partielle, l'axe des ordonnées pour la seconde).
Plus généralement, que peut-on dire de la dérivabilité de $t \mapsto f(a+tu)$ où u est un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^2$. C'est-à-dire lorsqu'on se «rapproche» de a suivant une droite non nécessairement verticale ou horizontale ?
C'est ce à quoi répond le théorème suivant, et on constate qu'il suffit de connaître les deux dérivées partielles pour répondre à cette question.

Proposition 32.34 : *Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$, et soit $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$, que l'on supposera non nul[13].*
Soit $a \in \mathcal{O}$, et soit $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset \mathcal{O}$. Alors la fonction $g : t \mapsto f(a + tu)$ est définie sur $\left]-\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r}\right[$, et elle est $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, avec

$$g' : t \mapsto \langle \nabla f(a + tu), u\rangle.$$

En particulier, $g'(0) = \langle \nabla f(a), u\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)u_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)u_2$.
*La quantité $\langle \nabla f(a), u\rangle$ est appelée **dérivée de f en a selon le vecteur u.***

[13] Le cas $u = (0, 0)$ étant trivial.

Remarque. Le graphe de la fonction g est la section du graphe de f par le plan vertical contenant la droite D.
Par exemple, si $a = (0.5, -0.5)$, $u = (-1, 1)$, pour $f(x, y) = x^3 - 4xy^2$, on obtient la figure suivante :

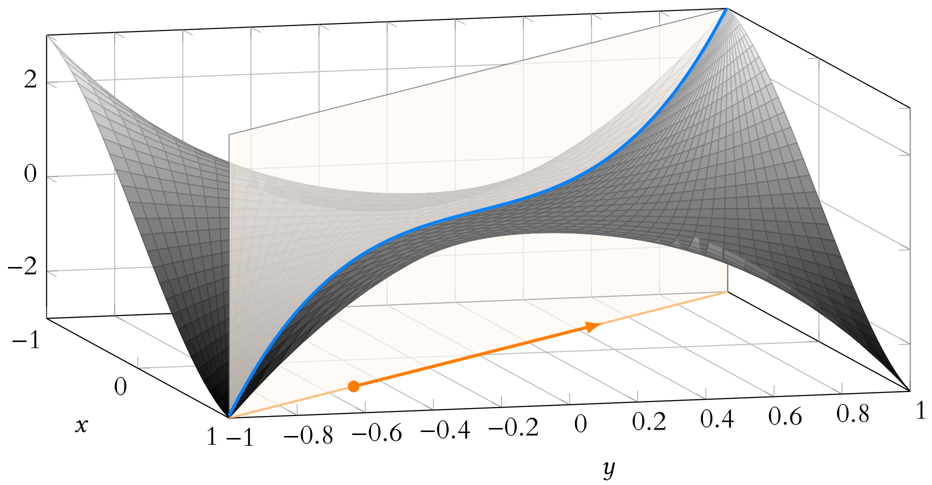


FIGURE 32.6 – En orange la droite D passant par a et de direction u et en bleu, la section du graphe de f par le plan vertical contenant D.

Démonstration. Soient $t, h \in \mathbf{R}$, avec $h \neq 0$, «suffisamment petits[14]».
Prouvons que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$ existe. On a

$$g(t + h) = f(a + (t + h)u) = f((a + tu) + hu).$$

[14] Pour que les quantités en jeu soient bien définies.

Par la formule de Taylor, il existe une fonction ε définie au voisinage de $(0, 0)$, nulle et continue en $(0, 0)$ telle que

$$g(t + h) = f(a + tu) + \langle \nabla f(a + tu), hu\rangle + \|hu\|\varepsilon(hu) = g(t) + h\langle \nabla f(a + tu), u\rangle + |h| \cdot \|u\|\varepsilon(hu).$$

On en déduit que

$$\frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \langle \nabla f(a + tu), u\rangle + \frac{|h|}{h}\|u\|\varepsilon(hu).$$

Mais ε est continue en $(0, 0)$, et $\varepsilon(0) = 0$, donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}\varepsilon(hu) = 0.$$

Remarque
$\frac{|h|}{h}$ vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$.

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} = \langle \nabla f(a + tu), u\rangle.$$

On en déduit que g est dérivable en t et

$$g'(t) = \langle \nabla f(a + tu), u\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a + tu)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a + tu)u_2.$$

Enfin, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a+tu)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(a+tu)$ sont continues sur $\left]-\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r}\right[$, et donc g' est continue sur $\left]-\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r}\right[$. Par conséquent, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r}\right[$. □

On note que lorsqu'on multiplie un vecteur u par λ (et donc qu'on multiplie sa norme par $|\lambda|$), alors la dérivée de $t \mapsto f(a+tu)$ est également multipliée par λ.
Pourtant, u et λu ont la même direction, et on a envie que cette dérivée représente «la variation de f dans la direction de u».
Afin de se débarrasser de cette dépendance en la norme de u, on peut considérer un vecteur u unitaire[15], et alors la dérivée directionnelle de f en a dans la direction de u est la dérivée de $t \mapsto f(a+tu)$, c'est-à-dire $\langle \nabla f(a), u\rangle$.
Notons que pour $u \neq (0,0)$, il existe encore deux vecteurs unitaires de même direction[16] que u, à savoir $\frac{u}{\|u\|}$ et son opposé.

[15] Rappelons que cela signifie que $\|u\| = 1$.

[16] c'est-à-dire colinéaires à u.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour u unitaire, on a donc

$$|\langle \nabla f(a), u\rangle \leqslant \|\nabla f(a)\| \underbrace{\|u\|}_{=1} = \|\nabla f(a)\|.$$

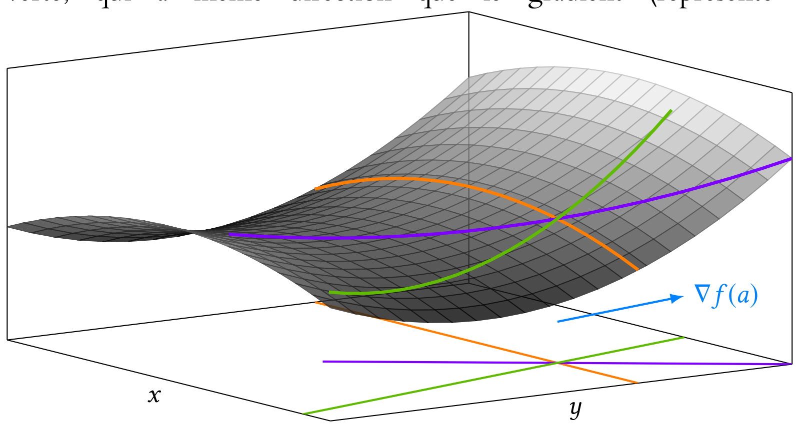
Et de plus, il y a égalité si et seulement si u et $\nabla f(a)$ sont colinéaires.
Autrement dit, $\langle \nabla f(a), u\rangle$ est maximal si et seulement si u est colinéaire à $\nabla f(a)$.
Donc la direction de $\nabla f(a)$ indique la direction de «la plus grande pente», et son sens est celui de la montée.

Détails

Dans Cauchy-Schwarz, on a égalité $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ (sans valeur absolue sur le produit scalaire) si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $x = \lambda y$.

Exemple 32.35

Pour la fonction suivante sont représentées plusieurs courbes dans différentes directions, passant toutes par le même point.
Celle de ces courbes qui possède la pente la plus importante est la verte, qui a même direction que le gradient (représenté en bleu).



Remarque : sur cet exemple, on constate que le sens du gradient indique la direction de la «montée», et non de la «descente». Ce fait est toujours vérifié.

Pour reprendre l'exemple où notre fonction représente l'altitude d'un point du globe, en tout point la direction du gradient indique la direction dans laquelle il faut marcher pour gagner le plus rapidement de l'altitude. Et une goutte d'eau posée en un point a partira dans la direction de $-\nabla f(a)$, la direction où elle descend le plus vite.

32.4.5 Dérivée d'une composée

Donnons nous deux fonctions d'une variable $x : t \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$, définies sur un intervalle I, ainsi qu'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.
On peut alors considérer la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$, qui est donc une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

Lorsque t parcourt I, le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ parcourt une courbe $\mathscr{C}$ tracée dans $\mathbf{R}^2$.
Et donc le point de coordonnées $(x(t), y(t), g(t))$ se «promène» le long d'une courbe tracée sur le graphe de f.

Remarque
Une telle courbe est appelée un arc paramétré, leur étude a désormais complètement disparu des programmes de prépa.

Prenons par exemple $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$.
La courbe parcourue par le point $(x(t), y(t))$ est appelée une astroïde et a l'allure ci-contre.
Lorsque t varie, le point de coordonnées $(x(t), y(t), f(x(t), y(t))$ parcourt donc une courbe tracée sur la surface représentant f.
La fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ représente l'altitude d'un point parcourant cette courbe au cours du temps.

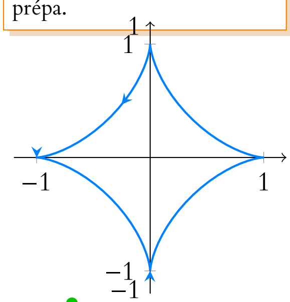
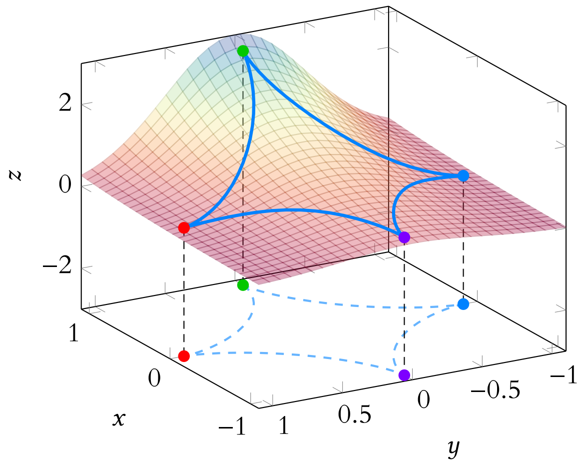
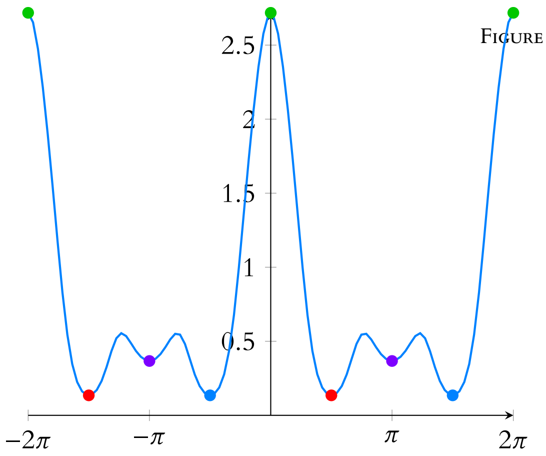


Figure 32.7– L'astroïde.





Ce que dit la proposition suivante, c'est qu'alors la dérivée de g en t_0 est égale à la dérivée directionnelle de f en $(x(t_0), y(t_0))$ dans la direction de $(x'(t_0), y'(t_0))$.
Or ce vecteur n'est rien d'autre qu'un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en $(x(t_0), y(t_0))$.

Proposition 32.36 : *Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.*
Soient $x, y : t \mapsto \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathscr{O}$.
Alors la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et

$$\forall t \in I, g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$ fixé.
Par la formule de Taylor-Young, il existe ε définie sur une boule ouverte de rayon $r > 0$ centrée en $(0, 0)$, nulle en $(0, 0)$ et continue en $(0, 0)$ telle que pour tout $u \in B_o((0, 0), r)$,

$$f((x(t_0), y(t_0)) + u) = f(x(t_0), y(t_0)) + \langle \nabla f(x(t_0), y(t_0)), u\rangle + \|u\|\varepsilon(u).$$

Pour $h \in I$, notons $u_h = (x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0))$, de sorte que

$$f(x(t_0 + h), y(t_0 + h)) = f(x(t_0), y(t_0)) + \langle \nabla f(x(t_0), y(t_0)), u_h\rangle + \|u_h\|\varepsilon(u_h).$$

On a donc[17] $x(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} x(t_0)+x'(t_0)h+o(h)$ et de même $y(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} y(t_0)+y'(t_0)h+o(h)$.
Autrement dit, il existe deux fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, nulles en 0, et de limites nulles en 0 telles que

$$x(t_0 + h) - x(t_0) = x'(t_0)h + h\varepsilon_1(h) \text{ et } y(t_0 + h) - y(t_0) = y'(t_0)h + h\varepsilon_2(h).$$

On a donc $u_h = h \cdot (x'(t_0) + \varepsilon_1(h), y'(t_0) + \varepsilon_2(h))$, si bien que

$$\|u_h\| = |h|\sqrt{(x'(t_0) + \varepsilon_1(h))^2 + (y'(t_0) + \varepsilon_2(h))^2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

[17] C'est Taylor-Young pour des fonctions d'une variable.

Par ailleurs, $\dfrac{\|u_h\|}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$, limite que nous noterons A.
Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que pour $|h| < \eta_1$, $\dfrac{\|u_h\|}{|h|} < A + 1$.
Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour $\|v\| < \eta_2$, $|\varepsilon(v)| < \dfrac{\varepsilon}{A+1}$.
Mais alors il existe $\eta_3 > 0$ tel que $|h| < \eta_3 \Rightarrow \|u_h\| < \eta_2$, et donc $|\varepsilon(u_h)| < \dfrac{\varepsilon}{A+1}$.
Et donc pour $|h| < \min(\eta_1, \eta_3)$, $\dfrac{\|u_h\|}{|h|}\varepsilon(u_h) < (A+1)\dfrac{\varepsilon}{A+1}$.
Autrement dit, $\dfrac{\|u_h\|}{|h|}\varepsilon(u_h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0, y(t_0))y'(t_0)\right)\right| \\ = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\varepsilon_1(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0, y(t_0)))\varepsilon_2(h) + \frac{\|u_h\|}{|h|}\varepsilon(u_h)\right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

C'est donc que g est dérivable en t_0, avec

$$g'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0, y(t_0))y'(t_0).$$

Il faudrait travailler encore un peu[18] pour établir la continuité de g', mais disons qu'elle vient de la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, de x, de y, de x' et de y'. □

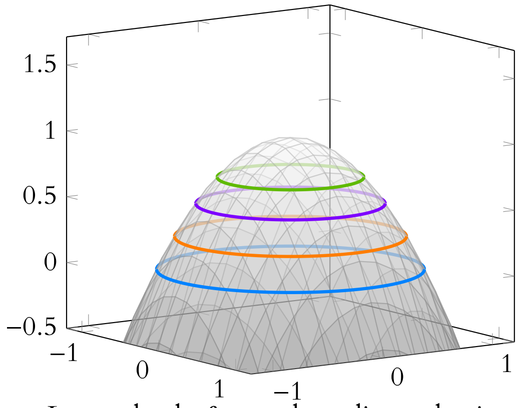
[18] Et notamment epsiloner faute de résultats de cours sur le sujet.

Exemple 32.37 Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

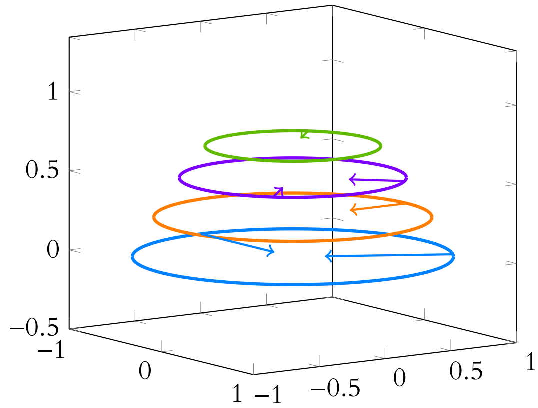
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O}$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Soit $a \in \mathscr{O}$ tel que $f(a) = \lambda$, c'est-à-dire un point de la ligne de niveau λ de f.
On suppose qu'il existe une boule $B_o(a, r)$, un intervalle ouvert I contenant 0 et deux fonctions x, y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que :

1. $a = (x(0), y(0))$
2. $\forall t \in I$, $(x(t), y(t)) \in B_o(a, r)$
3. $\forall (u, v) \in B_o(a, r)$, $f(u, v) = \lambda \Leftrightarrow \exists t \in I$, $(u, v) = (x(t), y(t))$.

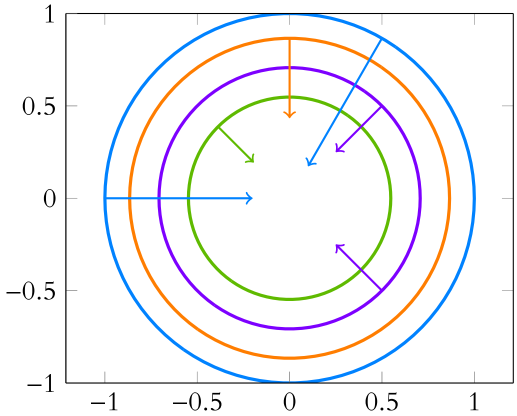
Autrement dit, au voisinage de a, la courbe de niveau λ de f est bien «une courbe».
Alors la tangente à la courbe $(x(t), y(t))$ a pour vecteur directeur $(x'(0), y'(0))$.
Mais par la proposition précédente, la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ vérifie $g'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)x'(0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)y'(0)$.
Puisque par ailleurs cette fonction est constante sur I égale à λ, on a $g'(0) = 0$.
Autrement dit, le vecteur $\nabla f(a)$ est orthogonal au vecteur $(x'(0), y'(0))$.
Et donc le gradient de f en a est orthogonal à la ligne de niveau λ.



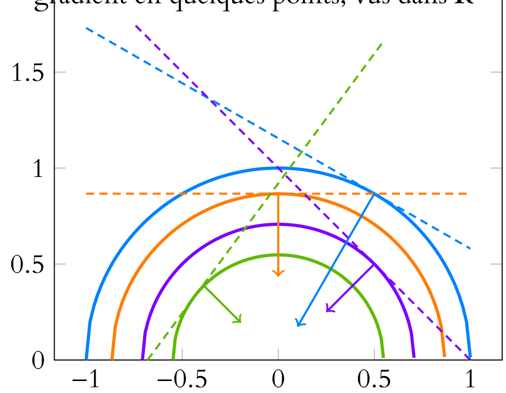
Le graphe de f et quelques lignes de niveau



Quelques lignes de niveau et le gradient en quelques points, vus dans $\mathbf{R}^3$



Lignes de niveau et gradients vus dans $\mathbf{R}^2$.



Les tangentes aux lignes de niveau sont orthogonales au gradient.

Proposition 32.38 (Règle de la chaîne[19]) : *Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et soient φ, ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O}'$ telles que $\forall (u,v) \in \mathscr{O}'$, $(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \mathscr{O}$.*
Ainsi, la fonction $g : (u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ est bien définie sur $\mathscr{O}'$.
Elle y est alors $\mathscr{C}^1$, et ses dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial x}(u,v)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial y}(u,v).\end{aligned}$$

[19] *Chain rule derivation* en anglais.

Démonstration. Soit $(u_0, v_0) \in \mathscr{O}'$.
Appliquons la proposition précédente à $x(t) = \varphi(u_0 + t, v_0)$ et $y(t) = \psi(u_0 + t, v_0)$.
Ce sont alors deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0 avec $x'(t) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0 + t, v_0)$ et $y'(t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(u_0 + t, v_0)$.
Donc la fonction $t \mapsto g(u_0 + t, v_0)$ est dérivable, de dérivée égale à

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u_0+t,v_0),\psi(u_0+t,v_0))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u_0+t,v_0),\psi(u_0+t,v_0))\frac{\partial \psi}{\partial x}(u_0+t,v).$$

Et donc sa dérivée en 0, qui est $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u_0,v_0))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u_0,v_0))\frac{\partial \psi}{\partial x}(u_0,v_0).$$

On prouverait de même la formule pour l'autre dérivée partielle.

Enfin la continuité de ces dérivées partielle découle de celles de φ, ψ, et de leurs dérivées partielles. □

Exemple 32.39 **Résolution d'une équation aux dérivées partielles à l'aide des coordonnées polaires**

Cherchons toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*,\ y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y). \qquad (\star)$$

Pour cela nous allons procéder à un changement de variable, en notant que tout $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ s'écrit de manière unique $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, avec $(r,\theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]0,\pi[$

Pour $(r,\theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]0,\pi[$, posons $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Autrement dit, nous sommes dans le cadre d'application de la proposition précédente, avec $\varphi(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $\psi(r,\theta) = r\sin(\theta)$.

Ainsi, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times]0,\pi[$, avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial d}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times (-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times (r\cos(\theta)).\end{aligned}$$

Donc f est solution de $(\star)$ si et seulement si pour tout (r,θ),

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = -g(r,\theta). \qquad (\star\star)$$

Nous allons donc plutôt chercher les fonctions qui satisfont cette condition[20].

Donc si g satisfait $(\star\star)$, pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$ $\theta \mapsto g(r,\theta)$ est solution de l'équation différentielle $y'(\theta) = -y(\theta)$.

Donc pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $C(r)$ tel que $g(r,\theta) = C(r)e^{-\theta}$.

Mais alors $C : r \mapsto e^{\frac{\pi}{2}} g\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

En effet, sa dérivée est $r \mapsto e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g}{\partial r}\left(r, \frac{\pi}{2}\right)$ qui est continue puisque $\frac{\partial g}{\partial r}$ est continue.

Et inversement, s'il existe C de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et si $g(r,\theta) = C(r)e^{-\theta}$, alors $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -C(r)e^{-\theta} = -g(r,\theta)$.

Donc les fonctions $g : \mathbf{R}_+^* \times]0,\pi[$ qui satisfont $(\star\star)$ sont les $(r,\theta) \mapsto C(r)e^{-\theta}$, avec $C \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.

Ne reste alors qu'à revenir à notre fonction f de départ, en «inversant» le changement de variable d'origine : pour $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ et $(r,\theta) \in \mathbf{R}_+^* \times]0,\pi[$, on a $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ si et seulement si

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Ainsi, $g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \Leftrightarrow f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$.

Et donc f est solution de $(\star)$ si et seulement si il existe $C \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*,\ f(x,y) = C\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{-\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}.$$

Notons qu'il y a donc beaucoup de telles fonctions, et que pour garantir l'unicité d'une solution à l'équation, il faut des conditions initiales assez fortes, bien plus que la connaissance de f en un point.

Polaires
Nous «passons» donc en coordonnées polaires, que vous utilisez en physique. Disons que pour se donner un point dans le plan, il suffit de se donner un complexe, et donc son module et son argument.

[20] Qui ne concerne plus qu'une seule dérivée partielle : en gros, il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre.

32.5 Extrema et points critiques

32.5.1 Extrema globaux, extrema locaux

Définition 32.40 – Soit $f : A \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbf{R}^2$, et soit $a \in A$.
On dit que f possède un **maximum** (resp. un **minimum**) en a si

$$\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp.} f(x) \geqslant f(a)).$$

Exemple 32.41

Soit $f : (x, y) \mapsto x^4 - 4x^2y + 5y^2 - 2y + 2$.
Alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = \left(x^2 - 2y\right)^2 + y^2 - 2y + 2 = (x^2 - 2y)^2 + (y-1)^2 + 1 \geqslant 1$.
De plus, on a $f(x, y) = 1$ si et seulement si $\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (\sqrt{2}, 1)$ **ou** $(x, y) = (-\sqrt{2}, 1)$.
Donc f possède un minimum atteint uniquement en $(\pm\sqrt{2}, 1)$.

Définition 32.42 – Soit $f : A \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbf{R}^2$, et soit $a \in A$.
On dit que f possède un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en a si

$$\exists r > 0,\ \forall x \in A \cap B_o(a, r),\ f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp.} f(x) \geqslant f(a)).$$

Bien entendu, si f possède un maximum (resp. un minimum) en a, alors f possède un maximum (resp. minimum) local en a, la réciproque étant fausse.

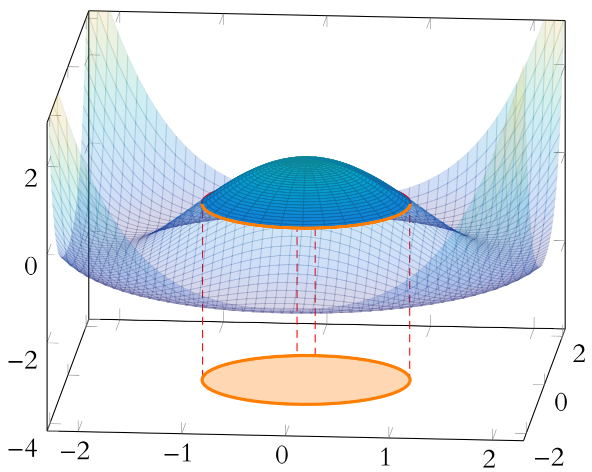


Figure 32.8 – Un maximum local en $(0, 0)$: pour tout $x \in B_o((0, 0), 1)$, on a $f(x) \leqslant f(0, 0)$. Notons qu'il ne s'agit pas d'un maximum global : en dehors de $B_o((0, 0), 1)$, f prend des valeurs supérieures à $f(0, 0)$.

Exemple 32.43

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^2$.
Alors pour $(x, y) \in B_o((0, 0), 1)$, on a $|x| \leqslant \|(x, y)\| \leqslant 1$, si bien que $(1 + x)^3 \geqslant 0$.
Et donc $f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$.

Ainsi, f admet un minimum local en $(0,0)$.

Pour autant, il ne s'agit pas d'un minimum global puisque

$$f(1,x) = (1+x)^3 + x^2 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

donc f prend des valeurs strictement inférieures à $0 = f(0,0)$.

32.5.2 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert

Définition 32.44 – Soit $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et soit $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$.
Un point $a \in \mathscr{O}$ est appelé un **point critique de** f si $\nabla f(a) = (0,0)$, soit encore si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Proposition 32.45 : *Soit $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si f possède un extremum local en $a \in \mathscr{O}$, alors a est un point critique de f.*

Démonstration. Supposons par exemple que f possède un maximum local en a.
Soit alors $r > 0$ tel que $\forall x \in B_o(x,r) \cap \mathscr{O}$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Quitte à diminuer r, on peut supposer que $B_o(x,r) \subset \mathscr{O}$.
Soit alors $u \in \mathbf{R}^2$, et soit $f_u : \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r}\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(a+tu) \end{array} \right.$.
Alors nous avons déjà prouvé que f_u est dérivable, et que $f_u'(0) = \langle \nabla f(a), u\rangle$.
Par ailleurs, par définition d'un extremum local, f_u possède un maximum local en 0.
Mais alors cela signifie[21] que sa dérivée en 0 est nulle, c'est-à-dire que $\langle \nabla f(a), u\rangle = 0$.
Ceci étant valable pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, c'est en particulier vrai pour $u = \nabla f(a)$, si bien que $\|\nabla f(a)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla f(a) = (0,0)$.
Et donc a est un point critique de f. □

[21] C'est un résultat bien connu pour les fonctions d'une variable sur un intervalle ouvert.

⚠ Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse, en un point critique, une fonction n'admet pas forcément d'extremum local.
L'exemple le plus classique est celui de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$.
Alors $(0,0)$ est un point critique de f.
Pourtant, pour tout $r > 0$, $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in B_o((0,0),r)$ et $f\left(\frac{r}{2},0\right) = \frac{r^2}{4}0 => f(0,0)$, si bien que f n'admet pas de maximum local en $(0,0)$.
Et de même, $\left(0,\frac{r}{2}\right) \in B_o((0,0,),r)$ et $f\left(0,\frac{r}{2}\right) = -\frac{r^2}{4} < 0$, si bien que f n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.

32.5.3 Fonctions continues sur un fermé borné

Définition 32.46 – Soit $A \subset \mathbf{R}^2$. On dit que A est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall a \in A$, $\|a\| \leqslant M$.

Autrement dit, une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule centrée en $0_{\mathbf{R}^2}$.

Proposition 32.47 : *Soit $A \subset \mathbf{R}^2$. Alors A est bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall (x,y) \in A$, $|x| \leqslant M$* **et** *$|y| \leqslant M$.*

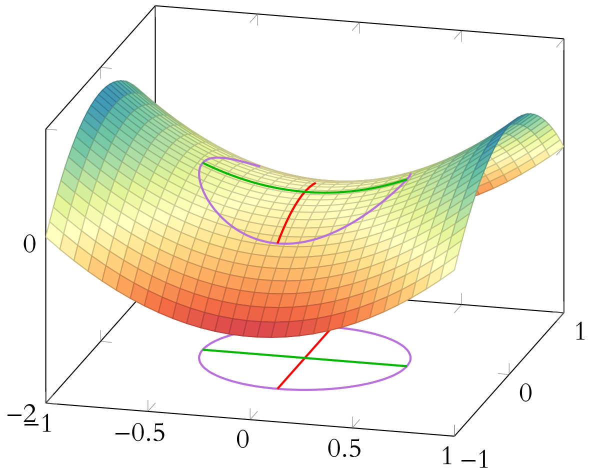


Figure 32.9 – $f(x,y) = x^2 - y^2$ n'a pas d'extremum local en son unique point critique.

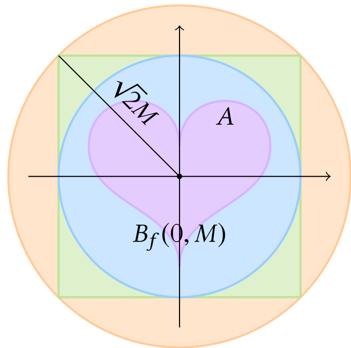


Figure 32.10– L'idée de la preuve est essentiellement de dire qu'une boule est incluse dans un cube, lui-même inclus dans une boule plus grande.

Démonstration. $\Rightarrow$ Si A est bornée, soit $M > 0$ tel que $A \subset B_f(0_{\mathbf{R}^2}, M)$.
Alors pour $(x,y) \in A$, on a $|x| \leqslant \|(x,y)\| \leqslant M$, et de même $|y| \leqslant M$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in A$, $|x| \leqslant M$ et $|y| \leqslant M$.
Alors pour $(x,y) \in A$, $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{M^2+M^2} \leqslant \sqrt{2}M$.
Et donc $A \subset B_o(0_{\mathbf{R}^2}, \sqrt{2}M)$. □

Encore une fois, le théorème qui suit est hors programme en sup, mais il est intéressant de comprendre en quoi il généralise le théorème des bornes atteintes, et il sera (très largement) généralisé en seconde année.

Proposition 32.48 : *Soit $\mathscr{F}$ une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$, et soit $f : \mathscr{F} \to \mathbf{R}$ une fonction continue.*
Alors f possède un maximum et un minimum.

Démonstration. Notons $M = \sup\{f(u),\ u \in \mathscr{F}\}$, éventuellement égal à $+\infty$.
Par caractérisation séquentielle des bornes supérieures, il existe une suite $(u_n) \in \mathscr{F}^{\mathbf{N}}$ telle que $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Notons A un réel positif tel que pour tout $x \in \mathscr{F}$, $\|x\| \leqslant A$.
Alors, pour tout $u = (x_u, y_u) \in \mathscr{F}$, on a $|x_u|^2 \leqslant x_u^2 + y_u^2 \leqslant A^2$, si bien que $|x_u| \leqslant A$.
Et de même, $|y_u| \leqslant A$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons $u_n = (x_n, y_n)$. Alors la suite (x_n) est une suite réelle bornée, si bien qu'on peut en extraire une suite convergente : il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers un réel x.
Puis alors la suite $(y_{\varphi(n)})$ est encore bornée, et on peut de nouveau en extraire une suite convergente : il existe une extractrice ψ telle que $(y_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers un réel y.

Prouvons alors que $(x,y) \in \mathscr{F}$. Supposons par l'absurde que $(x,y) \in \overline{\mathscr{F}}$. Puisque $\mathscr{F}$ est fermé, il existe $r > 0$ tel que $B_o((x,y),r) \subset \overline{\mathscr{F}}$.
Mais pour n suffisamment grand, $|x_{\varphi(\psi(n))} - x| < \frac{r}{\sqrt{2}}$ et de même, $|y_{\varphi(\psi(n))} - y| < \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Donc $\|u_{\varphi(\psi(n))} - (x,y)\| < \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = r$, si bien que $u_{\varphi(\psi(n))} \in B_o((x,y),r)$ et donc $u_{\varphi(\psi(n))} \notin \mathscr{F}$, ce qui contredit la définition de u_n.
Donc $(x,y) \in \mathscr{F}$.

Considérons à présent $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité de f en (x,y), il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $u \in \mathscr{F}$, $\|u - (x,y)\| < \eta \Rightarrow |f(u) - f(x,y)| < \varepsilon$.
Or, comme précédemment, si n est suffisamment grand, $\|u_{\varphi(\psi(n))} - (x,y)\| < \eta$.
Et donc $|f(u_n) - f(x,y)| < \varepsilon$.

Mais lorsque $n \to +\infty$, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.
Ce qui prouve déjà que $M \in \mathbf{R}$, et donc que f est majorée, mais en plus que $|M - f(x,y)| \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$.
On en déduit donc que $M = f(x,y)$, et donc que f possède un maximum atteint en (x,y).

Le raisonnement est le même pour l'existence d'un minimum[22]. □

[22] Appliquer ce qui précède à $-f$.

Exemple 32.49

Soit $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2} + (x+y)^2 - 1$, et soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 3\}$.
Alors $\mathscr{D}$ est un fermé, puisque c'est l'image réciproque par la fonction continue $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ de $]-\infty, 3]$.
Il est borné, puisque c'est une boule fermée centrée en $(0,0)$: $\mathscr{D} = B_0((0,0)), \sqrt{3})$.
Puisque f est continue sur $\mathscr{D}$, elle y possède un maximum et un minimum.

Mais comment les trouver ? Notons $\mathscr{D}_0 = B_o((0,0), \sqrt{3}) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 3\}$, qui cette fois est un ouvert puisque c'est une boule ouverte.
Alors sur l'ouvert $\mathscr{D}_0$, f est $\mathscr{C}^1$.
Donc si elle atteint son maximum ou son minimum sur $\mathscr{D}$ en un point de $\mathscr{D}_0$, il s'agira d'un extremum de f sur $\mathscr{D}_0$, nécessairement atteint en un point critique.
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2(x+y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2(x+y).$$

Et donc $(x,y) \in \mathscr{D}_0$ est un point critique de f si et seulement si

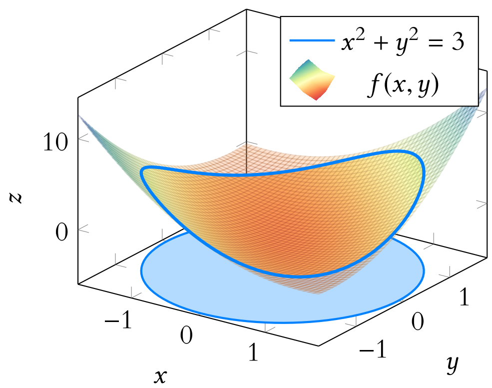
$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2(x+y) = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 4x\sqrt{1+2x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x\left(1+\sqrt{1+2x^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Donc $(0,0)$ est le seul point critique de f.
Ne cherchons pas à déterminer sa nature pour l'instant, et étudion le comportement de f sur le «bord» de $\mathscr{D}$, c'est-à-dire sur $\mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 3\}$.

Cet ensemble est également $\{(\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\sin(\theta)),\ \theta \in [-\pi,\pi]\}$.
Pour $\theta \in [-\pi,\pi]$, on a

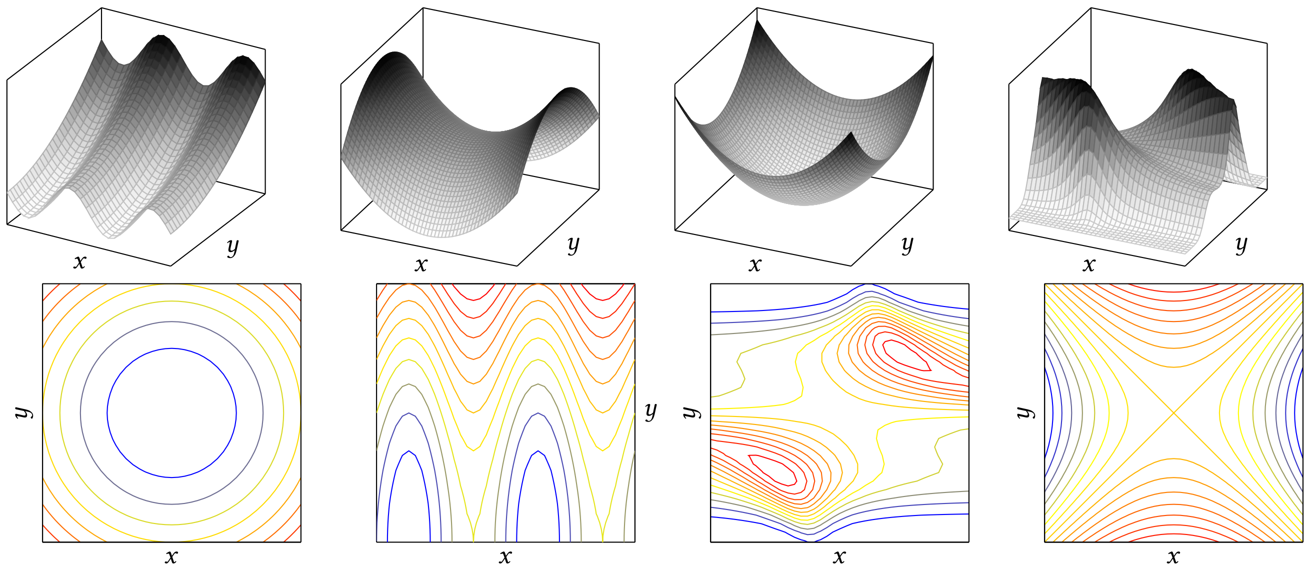
$$f\left(\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\sin(\theta)\right) = \sqrt{1+3} + 3(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 1 = 1 + 6\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 1 + 12\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Il est facile de constater que sur $[0, 2\pi]$, ceci est compris entre 1 et 13. Et la valeur 13 n'est atteinte qu'en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ et la valeur 1 n'est atteinte qu'en $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
Par ailleurs, $(0,0) = 0$. On en déduit que le minimum de f sur $\mathscr{D}$ est 0, atteint uniquement en $(0,0)$ et que le maximum est 13, atteint en $\left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et en $-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$



EXERCICES DU CHAPITRE 32

EXERCICE 32.1 Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau. F



▸ Topologie de $\mathbf{R}^2$

EXERCICE 32.2 Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés. On pourra s'appuyer d'un dessin lorsque c'est possible. F

1. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 3\}$ 2. $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x + 2y| = 1 \text{ ou } |y + 2x| \geqslant 4\}$.

EXERCICE 32.3 Montrer qu'une boule fermée est un fermé de $\mathbf{R}^2$. PD

▸ Fonctions continues

EXERCICE 32.4 Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. PD

EXERCICE 32.5 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon} \end{cases}$. AD

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE 32.6 Justifier que si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est continue, alors pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, $f_1 : t \mapsto f(t, a_2)$ et $f_2 : t \mapsto f(a_1, t)$ sont continues respectivement en a_1 et a_2. AD

En considérant la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, montrer que la réciproque est fausse.

▸ Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

EXERCICE 32.7 Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert que l'on précisera, et déterminer leurs dérivées partielles. F

1) $f : (x, y) \mapsto 3x^2y^2 + 2xy + xe^y$
2) $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}e^x$

3) $h : (x, y) \mapsto \ln(2xy)\sin(x^2 + y)$.

EXERCICE 32.8 Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pose alors $f(x, y) = \displaystyle\int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,dt$. F

Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et déterminer ses dérivées partielles.

EXERCICE 32.9 PD

1) Montrer que si $f : \mathscr{O} \to \mathbf{R}$ est une fonction constante sur un ouvert $\mathscr{O}$, alors et f est $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \mathscr{O}$, $\nabla f(x) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
2) Donner un exemple de fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, non constante mais dont le gradient est partout nul.

EXERCICE 32.10 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \forall t \in \mathbf{R}_+^*, f(tx, ty) = tf(x, y)$. AD

Pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, calculer la dérivée de f en $(0, 0)$ selon le vecteur u, et en déduire que f est linéaire.

EXERCICE 32.11 Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas continue en $(0, 0)$. AD

EXERCICE 32.12 Gradient en coordonnées polaires PD

Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

On définit alors une fonction $F : \mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ en posant $F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times [0, 2\pi[$, exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$.

On pourra utiliser les formules de Cramer rencontrées pour les systèmes 2×2.

EXERCICE 32.13 (Oral HEC ECS) D

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. On définit la fonction g de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y - x} \displaystyle\int_x^y f(t)\,dt & \text{si } x \neq y \\ f(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

1) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq y\}$. Justifier que D est ouvert. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et calculer ses dérivées partielles sur D.
2) Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer que g admet des dérivées partielles en (a, a) et les exprimer en fonction de $f'(a)$, où f' désigne la dérivée de f.
3) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $(x, y) \in D$.
   a) Montrer que : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a, a) = \dfrac{1}{(y - x)^2} \displaystyle\int_x^y (y - t)\left(f'(t) - f'(a)\right)\,dt$.
   b) En déduire que : $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a, a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2} \sup_{t \in S} |f'(t) - f'(a)|$, où S désigne le segment d'extrémités x et y.
4) Déduire des questions précédentes que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

EXERCICE 32.14 Fonctions 2-hölderiennes (Oral Centrale) AD

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. On suppose que $\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}^2\right)^2, |f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

EXERCICE 32.15 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si pour tout $(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$, $f(x + t, y + t) = f(x, y)$. PD

EXERCICE 32.16 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Soit alors g la fonction définie par $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$. F

Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer les dérivées partielles de g, notées $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction de celles de f.

▶ Exemples d'équations au dérivées partielles

EXERCICE 32.17 Déterminer les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ solutions de AD

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xyf(x, y) = 0.$$

EXERCICE 32.18 Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, et solution de $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$. **AD**

On pourra à cet effet utiliser le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = x - y \end{cases}$.

▸ Extrema des fonctions de deux variables

EXERCICE 32.19 **PD**

1) Déterminer les extrema de $t \mapsto t^{\ln t}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2) En déduire les extrema (locaux ou globaux) de $f(x, y) = x^{\ln x} + y^{\ln y}$ sur $]0, +\infty[^2$.

EXERCICE 32.20 Étude d'un extremum par variation de fonctions **PD**
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1) Montrer que f n'admet pas de maximum.
2) On se propose de montrer que f possède un minimum.
   a) En considérant $f(-x, -y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geqslant 0$.
   b) Pour $y \geqslant 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
   c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

EXERCICE 32.21 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$ convexe, c'est-à-dire telle que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, **AD**

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leqslant (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Montrer que si $a \in \mathbf{R}^2$ est un point critique de f, alors f admet un minimum global en a.

EXERCICE 32.22 Soit $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$. **AD**

1) Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathscr{D}$.
2) Montrer que sur $B_o(0, 1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire à propos de m et M ?
3) En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, déterminer les valeurs de m et M.

EXERCICE 32.23 Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = e^{x \sin(y)}$. **AD**

EXERCICE 32.24 Déterminer les extrema locaux de $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$.

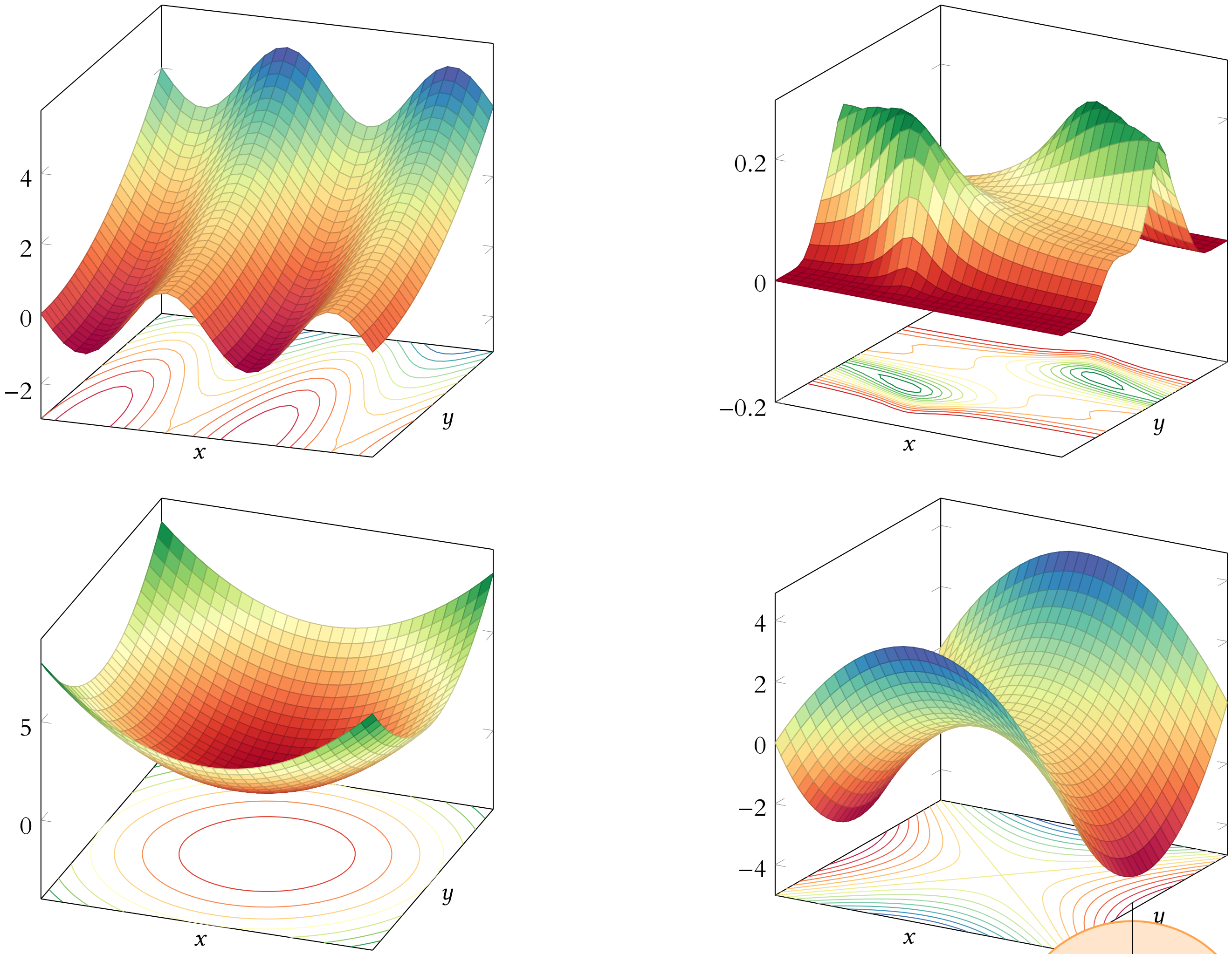
EXERCICE 32.25 Soit f la fonction définie sur $[0, 1] \times [0, 2]$ par $f(x, y) = xy^2 - xy + x^3y$. **AD**
Montrer que f possède un maximum et un minimum, et les déterminer.

EXERCICE 32.26 Soit $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$. **AD**
Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Correction des exercices du chapitre 32

Solution de l'exercice 32.1

Un dessin vaut mieux qu'une longue explication :



Solution de l'exercice 32.2

1. Notons tout simplement que $A = B_f\left((0,0), \sqrt{3}\right)$, et donc il s'agit d'un fermé (car une boule fermée est un fermé), borné (car une boule est toujours bornée).

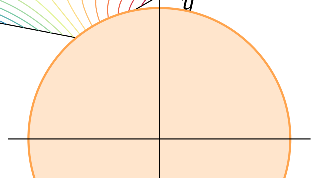


FIGURE … boule fermée.

2. Les fonctions $(x,y) \mapsto |x|$ et $(x,y) \mapsto |y|$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$. Donc

$$B_1' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\right\} \text{ et } B_2' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y| = 1\right\}$$

sont fermés. Leurs complémentaires

$$B_1 = \overline{E_1'} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \neq 1\right\} \text{ et } B_2 = \overline{E_2'} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \neq 1\right\}$$

sont donc des ouverts.
Et alors $B = B_1 \cap B_2$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ car intersection de deux ouverts.
B n'est pas borné car pour tout $x > 1$, $(x,x) \in B$.

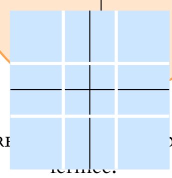


FIGURE 32.2– B est le plan privé des 4 droites $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ et $y = -1$.

Rappel
Par définition, un fermé est de complémentaire ouvert.

3. Les fonctions $(x,y) \mapsto |x + 2y|$ et $(x,y) \mapsto |y + 2x|$ sont continues sur $\mathbf{R}^2$, donc les deux ensembles

$$C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x + 2y| = 1\right\} \text{ et } C_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y + 2x| \geqslant 4\right\}$$

sont des fermés de $\mathbf{R}^2$. Alors $C = C_1 \cup C_2$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$.
C n'est pas borné car C_1 ne l'est pas : pour tout $y \in \mathbf{R}$, $(1 - 2y, y) \in C_1$.

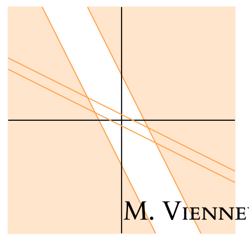


FIGURE 32.3– C est formé des points au dessus de la droite

Solution de l'exercice 32.3

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, et soit $r \geqslant 0$. On a donc

$$B_f(a,r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|(x,y)-(a_1,a_2)\| \leqslant r\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leqslant r^2\}.$$

Le plus simple pour prouver qu'il s'agit d'un fermé, est de noter qu'il s'agit de l'image réciproque par la fonction continue[1] $(x,y) \mapsto (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2$ de $]-\infty, r^2]$.
Et alors un résultat de cours garantit qu'il s'agit bien d'un fermé.

[1] Car polynomiale.

Toutefois, donnons une preuve de ce fait uniquement à l'aide de la définition de fermé.
Il s'agit donc de prouver que le complémentaire dans $\mathbf{R}^2$ de $B_f(a,r)$ est un ouvert.
Soit encore que pour $x \notin B_f(a,r)$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B_o(x,r_1) \subset \overline{B_f(a,r)}$, soit encore que $B_o(x,r_1) \cap B_f(a,r) = \emptyset$.

Soit donc $x \in \mathbf{R}^2$ tel que $x \notin B_f(a,r)$, c'est-à-dire tel que $\|x-a\| > r$.
Notons alors $r_1 = r - \|x-a\|$, et soit $y \in B_o(x,r_1)$.
Supposons par l'absurde que $y \in B_f(a,r)$, c'est-à-dire que $\|y-a\| \leqslant r$.
Alors il vient

$$\|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| < r_1 + r \leqslant \|x-a\| - r + r \leqslant \|x-a\|.$$

Soit donc $\|x-a\| < \|x-a\|$, ce qui est évidemment absurde.
Ainsi, nous venons de prouver que $B_o(x,r_1) \subset \overline{B_f(a,r)}$, et donc que $B_f(a,r)$ est fermé.

Solution de l'exercice 32.4

Il s'agit de noter que $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$.
Et alors $(x,y) \mapsto x+y$ est continue car polynomiale, de même que $(x,y) \mapsto x-y$. Donc par composition avec la valeur absolue, continue sur $\mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y|$ est continue sur $\mathbf{R}^2$, et donc par somme, $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Solution de l'exercice 32.5

Notons $f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 - 1$ et $f_2 : (x,y) \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2$, qui sont toutes deux continues sur $\mathbf{R}^2$ puisque polynomiales.

La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale, donc $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ est un fermé, si bien que son complémentaire est ouvert.

Sur l'ouvert $\mathcal{O}_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, f coïncide avec f_2.
Soit alors $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x^2+y^2 < 1$, et soit $r > 0$ tel que $B_o((x_0,y_0),r) \subset \mathcal{O}_1$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f_2, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta_1 \Rightarrow |f_2(x,y) - f_2(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Soit alors $\eta = \min(\eta_1, r)$, de sorte que $B_o((x_0,y_0),\eta) \subset \mathcal{O}_1$.
Alors pour tout $(x,y) \in B_o((x_0,y_0),\eta)$, on a $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |f_2(x,y) - f_2(x_0,y_0)| < \varepsilon$.
Ainsi, nous avons bien prouvé que f est continue en (x_0,y_0).

On prouve de même que f est continue sur $\mathcal{O}_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$, car elle y coïncide avec f_1.

Il reste donc à prouver qu'en un point (x_0,y_0) vérifiant $x_0^2+y_0^2 = 1$, f est continue.
Soit donc (x_0,y_0) un tel point.
Notons alors f_1 et f_2 les fonction définies sur $\mathbf{R}^2$ par $f_1(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2+y^2-1$ et $f_2(x,y) = -\dfrac{1}{2}x^2$.
Alors f_1 et f_2 sont continues sur $\mathbf{R}^2$ puisqu'elles y sont polynomiales, et donc en particulier sont continues en (x_0,y_0), avec $f_1(x_0,y_0) = \dfrac{1}{2}x_0^2 - x_0^2 = -\dfrac{1}{2}x_0^2 = f_2(x_0,y_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la continuité, il existe donc $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta_1 \Rightarrow |f_1(x,y) - f_1(x_0,y_0)| < \varepsilon \text{ et } \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta_2 \Rightarrow |f_2(x,y) - f_2(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Notons alors $\eta = \min(\eta_1,\eta_2)$. Soit $(x,y) \in B_o((x_0,y_0),\eta)$. Alors

- soit $x^2 + y^2 > 1$, et alors $f(x,y) = f_1(x,y)$, si bien que $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.
- soit $x^2 + y^2 \leqslant 1$, et alors $f(x,y) = f_2(x,y)$, si bien que $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|\varepsilon$.

On a donc prouvé que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.
Et donc f est continue en (x_0,y_0), et donc sur $\mathbf{R}^2$.
Commentaires *: nous venons donc de dire que les deux surfaces représentant f_1 et f_2 se «recollaient», le long du cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$ en une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$.*
Cela n'est possible que parce qu'elles coïncident sur ce cercle.
Nous connaissons[2] *un résultat analogue pour les fonctions d'une seule variable : si f_1, f_2 sont deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, alors la fonction $t \mapsto \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t \leqslant a \\ f_2(t) & \text{si } t > a\end{cases}$ est continue si et seulement si $f_1(a) = f_2(a)$.*
Le fait que le recollement soit dérivable ou $\mathscr{C}^1$ est plus compliqué, il en est de même pour les fonctions de deux variables.

[2] En tous cas il est facile de s'en convaincre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.6

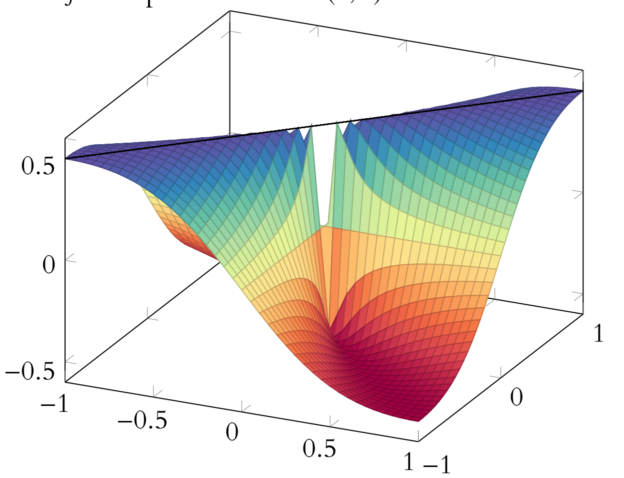
Si f est continue, fixons $(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2$, et soit $\varepsilon > 0$.
Soit alors $\eta > 0$ tel que pour $(x,y) \in B_o((a_1,a_2),\eta)$, $|f(x,y) - f(a_1,a_2)| < \varepsilon$.
Alors en particulier, pour $|t - a_1| < \eta$, on a $\|(t,a_2) - (a_1,a_2)\| = |t-a_1| < \eta$, si bien que

$$|f_1(t) - f_1(a_1)| = |f(t,a_2) - f(a_1,a_2)| < \varepsilon.$$

Et donc f_1 est continue en a_1.
On prouve sur le même principe que f_2 est continue en a_2.

Pour montrer que la réciproque est fausse, utilisons la fonction donnée dans l'énoncé, et considérons $(a_1,a_2) = (0,0)$.
Alors f_1 et f_2 sont constantes égales à 0. Donc en particulier, elles sont continues en 0.

Pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, pour $x \neq 0$, on a $f(x,x) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $r > 0$, $B_o(0_{\mathbf{R}^2}, r)$ contient des points de la forme (x,x) (par exemple $(\frac{r}{2},\frac{r}{2})$), pour lesquels $|f(x,x)| > \frac{1}{4}$.
Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 32.7

1. La fonction $(x,y) \mapsto 2x^2y^2 + 2xy$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale.
$(x,y) \mapsto y$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, et donc par composition avec la fonction exponentielle, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto e^y$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
Puisque $(x,y) \mapsto x$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, par produit $(x,y) \mapsto xe^y$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, et donc par somme, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

On a alors, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy^2 + 2y + e^y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y + 2x + xe^y.$$

2. Cette fois g est définie sur $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geqslant 0\}$, qui n'est pas un ouvert mais un fermé[3] de $\mathbf{R}^2$.
Notons alors $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$, qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ car image réciproque de $\mathbf{R}_+^*$ par une fonction continue[4].

Alors sur $\mathcal{O}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est $\mathscr{C}^1$, car polynomiale, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, et par composition avec la fonction racine carrée, qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.
Puisque de plus il est aisé[5] de prouver que $(x,y) \mapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, donc sur $\mathcal{O}$, par produit, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{O}$.
On a alors, pour $(x,y) \in \mathcal{O}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} e^x + e^x \sqrt{x^2 - y^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} e^x.$$

[3] Il est défini par une inégalité large.

[4] Qui est $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$.

[5] Voir la question précédente.

3. Cette fois le plus grand ouvert sur lequel h est définie est $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$.

On a alors

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}\sin(x^2+y) + \ln(2xy) 2x \cos(x^2+y) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}\sin(x^2+y) + \ln(2xy)\cos(x^2+y).$$

⚠ Attention !
S'il est tentant d'écrire

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

ceci n'est vrai que pour $x > 0$ et $y > 0$.
Alors que $\ln(xy)$ est par exemple défini si x et y sont tous deux négatifs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.8

Notons Φ une primitive de φ, qui est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
On a donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = \Phi(xy) - \Phi(x^2)$.
Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto x^2$ sont polynomiales, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
Donc par composition, les fonctions $(x,y) \mapsto \Phi(xy)$ et $(x,y) \mapsto \Phi(x^2)$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, et donc par somme, f est également $\mathscr{C}^1$.

On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\Phi'(xy) - 2x\Phi'(x^2) = y\varphi(xy) - 2x\phi(x^2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\Phi'(xy) = x\varphi(xy).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.9

1. Si f est constante, alors en tout point de $\mathcal{O}$, les deux fonctions partielles sont constantes, et donc dérivables de dérivée nulle. Donc pour tout $a \in \mathcal{O}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.
Donc bien entendu, ces deux dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{O}$, et donc f est de classe $\mathscr{C}^1$, avec un gradient partout nul.
2. Le résultat n'est pas si surprenant, déjà sur $\mathbf{R}$, une fonction dérivable sur une partie I, et de dérivée partout nulle n'est pas nécessairement constante.
Par exemple, c'est le cas de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.

Prenons $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts disjoints. Par exemple $\mathcal{O}_1 = B_o((0,1),1)$ et $\mathcal{O}_2 = B_o((0,-1),1)$.
Nous savons qu'alors $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ est ouvert.

Soit alors $f : \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \to \mathbf{R}$ non constante, mais constante sur chacun des deux ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$.
Par exemple la fonction $\mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}$.
Alors en tout point f possède un gradient nul, et mais pourtant f n'est pas constante.

⚠ Attention !
Les ouverts ne sont pas les analogues des intervalles !
Si les boules ouvertes sont les analogues des intervalles ouverts, les ouverts sont les analogues des unions d'intervalles ouverts.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.10

Notons que pour $t > 0$, on a $f(t,t) = tf(1,1)$, et donc lorsque $t \to 0$, $f(t,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Mais puisque f est continue en $(0,0)$, alors $f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t,t)$.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in B_o(0_{\mathbf{R}^2}, \eta)$, $|f(x) - f(0,0)| < \varepsilon$.
Or, pour $0 < t < \frac{\eta}{\sqrt{2}}$, $\|(t,t)\| = \sqrt{2}|t| < \eta$, si bien que $|f(t,t) - f(0,0)| < \varepsilon$.
Autrement dit, nous venons de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall t \in \mathbf{R}_+^*, t < \eta' \Rightarrow |f(t,t) - f(0,0)| < \varepsilon$$

ce qui est bien la définition de la limite annoncée : $\lim_{t\to 0^+} f(t,t) = f(0,0)$.
Donc $f(0,0) = 0$.

Prenons à présent $u = (1,0)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(1,0)}{x} = f(1,0).$$

Et de même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,1)$.

Donc pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$, la dérivée de f en $(0,0)$ dans la direction de u est

$$\langle \nabla f(0,0), u\rangle = u_1 f(1,0) + u_2 f(0,1).$$

Soit à présent $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Alors pour tout $t > 0$, $f(tx,ty) = tf(x,y)$, si bien que $f(x,y) = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(tx,ty)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t}$, ce qui est exactement la définition de la dérivée en 0 de $t \mapsto f((0,0)+t(x,y))$, c'est-à-dire de la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ selon le vecteur (x,y).
C'est donc $xf(1,0) + yf(0,1)$.
Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1)$.

Donc f est linéaire.

> **Détails**
> Il est classique que pour $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,
> $$(x,y) \mapsto ax + by$$
> est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^2$, nous l'utilisons tout le temps lorsque nous reconnaissons des hyperplans.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.11

On a, pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.
Et pour $y \neq 0$, $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 1 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, si bien que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 1.
Donc f possède des dérivées partielles en $(0,0)$.

Pourtant, elle n'est pas continue en $(0,0)$, puisqu'elle n'est pas bornée sur toute boule ouverte centrée en $(0,0)$.
En effet, pour $r > 0$, et pour $x > 0$ suffisamment petit, on a $(x^3, x) \in B_o((0,0), r)$ et $f(x^3, x) = \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.12

Le fait que F soit $\mathscr{C}^1$ découle directement du cours, puisque les fonctions $\varphi : (r,\theta) \mapsto r\cos(\theta)$ et $\psi : (r,\theta) \mapsto r\sin(\theta)$ le sont, de même que f.

On sait alors que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta).\end{aligned}$$

Et de même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\cos(\theta).\end{aligned}$$

A (r,θ) fixé, on a donc un système de deux équations de deux inconnues, de matrice $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}$, qui est inversible puisque de déterminant $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r \neq 0$.

Donc par les formules de Cramer, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) & \sin(\theta)\\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix} = \cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta).$$

Et de même,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \\ -r\sin(\theta) & \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\end{vmatrix} = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.13

Rappel
Pour tout n, on a

$$a^n - b^n = (a-b)\times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k\right).$$

1. Pour $x \neq y$, on a alors

$$g(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y t^2\,dt = \frac{1}{y-x}\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^y = \frac{1}{3}\frac{y^3-x^3}{y-x} = \frac{1}{3}\left(x^2+xy+y^2\right).$$

Pour $x = y$, on a $g(x,y) = x^2 = \frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)$ et donc

$$\forall (x,y)\in \mathbf{R}^2,\ g(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^2+xy+y^2\right) = \frac{1}{6}\left((x+y)^2+x^2+y^2\right).$$

Il est alors évident que $g(x,y) \geqslant 0$, car somme de carrés, et $g(x,y) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=0 \\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Donc g admet un minimum global, égal à 0, et atteint uniquement en $(0,0)$.

2. Notons F une primitive de f. Alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall (x,y)\in D,\ g(x,y) = \frac{1}{y-x}\left(F(y)-F(x)\right).$$

Or, les fonctions $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont $\mathscr{C}^1$ sur D, et donc par composition avec F, $(x,y)\mapsto F(x)$ et $(x,y)\mapsto F(y)$ sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur D.
Et alors, par somme de fonctions $\mathscr{C}^1$, $(x,y)\mapsto F(y)-F(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
Enfin, $(x,y)\mapsto y-x$ est polynomiale et donc $\mathscr{C}^1$ sur D, et ne s'y annule pas, de sorte que le quotient $(x,y)\mapsto \dfrac{F(y)-F(x)}{y-x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

On a alors

$$\partial_1 g(x,y) = \frac{-f(x)(y-x)+(F(y)-F(x))}{(y-x)^2} = \frac{g(x,y)-f(x)}{y-x}.$$

En notant que $g(x,y) = \dfrac{F(y)-F(x)}{x-y}$, on constate que x et y jouent des rôles symétriques, et donc le même calcul nous donnerait $\partial_2 g(x,y) = \dfrac{g(x,y)-f(y)}{y-x}$.

3. Sous réserve d'existence de la limite, on a

Détails
C'est la définition de la dérivée partielle : c'est la dérivée (si elle existe) en a de la fonction $t\mapsto g(t,a)$.

$$\begin{aligned}\partial_1 g(a,a) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h,a)-g(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt - f(a)\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{F(a+h)-F(a)}{h}-f(a)\right).\end{aligned}$$

Mais F étant $\mathscr{C}^1$, par la formule de Taylor-Young, on a

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

Soit encore

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} - f(a) = \frac{h}{2}f'(a) + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Et alors,

$$\frac{g(a+h,a)-g(a,a)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{F(a+h)-F(a)}{h}-f(a)\right) = \frac{1}{2}f'(a) + \underset{h\to 0}{o}(1) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}f'(a).$$

On en déduit que $\partial_1 g(a,a)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}f'(a)$.
De la même manière, on a

$$\partial_2 g(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a,a+h)-g(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt - f(a)\right) = \frac{1}{2}f'(a).$$

4.a. On a

$$\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a) = \frac{g(x,y)-f(x)}{y-x} - \frac{1}{2}f'(a) = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\int_x^y f(t)\,dt - (y-x)f(x) - \frac{(y-x)^2}{2}f'(a)\right).$$

Or, une intégration par parties sur l'intégrale fournie par l'énoncé nous donne

$$\begin{aligned}
\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))\,dt &= [(y-t)\,(f(t)-f'(a)t)]_x^y + \int_x^y (f(t)-f'(a)t)\,dt \\
&= -(y-x)(f(x)-f'(a)x) + \int_x^y f(t)\,dt - f'(a)\int_x^y t\,dt \\
&= -(y-x)(f(x)-f'(a)x) + \int_x^y f(t)\,dt - \frac{y^2-x^2}{2}f'(a) \\
&= \int_x^y f(t)\,dt - (y-x)f(x) - f'(a)(y-x)\left(\frac{y+x}{2}-x\right) \\
&= \int_x^y f(t)\,dt - (y-x)f(x) - f'(a)\frac{(y-x)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Factorisation
$y^2-x^2 = (y-x)(y+x)$.

Et donc, après division par $(y-x)^2 \neq 0$, on obtient bien

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (y-t)\,(f'(t)-f'(a))\,dt &= \frac{1}{(y-x)^2}\left(\int_x^y f(t)\,dt - (y-x)f(x) - \frac{(y-x)^2}{2}f'(a)\right) \\
&= \partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a).
\end{aligned}$$

Notation
L'énoncé note S le segment d'extrémités x et y, et non $[x,y]$, car si $y < x$, alors $S = [y,x]$.

4.b. Notons que f' étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment S d'extrémités x et y, elle y est bornée et atteint ses bornes, donc $\max\{|f'(t)-f'(a)|,\ t\in S\}$ existe bien.
Notons M ce maximum. Alors pour $t \in S$, on a

$$|y-t| \leqslant |y-x| \text{ et } |f'(t)-f'(a)| \leqslant M.$$

Et donc pour $x < y$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))\,dt\right| &\leqslant \int_x^y |y-t|\cdot|f'(t)-f'(a)|\,dt \\
&\leqslant \int_x^y M\underbrace{|y-t|}_{=y-t}\,dt \\
&\leqslant M\left[-\frac{(y-t)^2}{2}\right]_x^y \\
&\leqslant M\frac{(y-x)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Sens des bornes
C'est ici que l'hypothèse $x < y$ est importante : pour appliquer l'inégalité triangulaire, il faut que les bornes soient «dans le bon sens».

Si $y < x$, alors il faut changer le sens des bornes de l'intégrale dans l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^y (y-t)(f'(t)-f'(a))\,dt\right| &\leqslant \int_x^y |y-t|\cdot|f'(t)-f'(a)|\,dt \\
&\leqslant \int_y^x M\underbrace{|y-t|}_{=t-y}\,dt \\
&\leqslant M\left[\frac{(t-y)^2}{2}\right]_y^x \\
&\leqslant M\frac{(y-x)^2}{2}.
\end{aligned}$$

5. Puisque nous savons déjà que $\partial_1 g$ et $\partial_2 g$ sont définies sur $\mathbf{R}^2$ tout entier, et continues sur D, il s'agit de prouver qu'elles sont continues en (a, a), pour tout $a \in \mathbf{R}$.
Il suffit donc de prouver que $\partial_1 g$ et $\partial_2 g$ sont continues en tout point de

$$\mathbf{R}^2 \setminus D = \{(a,a),\ a \in \mathbf{R}^2\}.$$

Nous allons le faire pour $\partial_1 g$, les mêmes types de calcul pourraient s'appliquer pour $\partial_2 g$ en raison de la symétrie jouée par les rôles de x et y.
Soit donc $a \in \mathbf{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que

$$\exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \|(x,y)-(a,a)\| \leqslant \eta \Rightarrow |\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit

Si (x, y) est suffisamment proche de (a, a), alors $\partial_1 g(x, y)$ est suffisamment proche de $\partial_1 g(a, a)$.

Puisque f' est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in [a-\eta, a+\eta]$, $|f'(x) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon$.
Et alors, pour $(x,y) \in [a-\eta, a+\eta]^2 \cap D$, par la question précédente, on a

$$|\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a)| \leqslant \frac{1}{2} \sup\{|f'(t) - f'(a)|,\ t \in [a-\eta, a+\eta]\} \leqslant \frac{1}{2} 2\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, si b est un réel tel que $|b-a| \leqslant \eta$, alors $|f'(b) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon$, et donc

$$|\partial_1 g(b,b) - \partial_1 g(a,a)| = \frac{1}{2}|f'(b) - f'(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit donc $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(a,a)\| \leqslant \eta$.
Alors $\|(x,y)-(a,a)\|^2 \leqslant \eta^2 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant \eta^2$.
En particulier, $(x-a)^2 \leqslant \eta^2$ et donc$|x-a| \leqslant \eta$. De même, on a $|y-a| \leqslant \eta$.
Et donc d'après ce qui précède :

- soit $(x,y) \in D$, et alors $|\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a)| \leqslant \varepsilon$
- soit (x,y) est de la forme (b,b), avec $|b-a| \leqslant \varepsilon$, et alors on a également

$$|\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, nous avons bien prouvé que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\|(x,y)-(a,a)\| \leqslant \eta \Rightarrow |\partial_1 g(x,y) - \partial_1 g(a,a)| \leqslant \varepsilon.$$

Et donc $\partial_1 g$ est continue en (a,a). Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\partial_1 g$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.
On prouve de même que $\partial_2 g$ est continue sur $\mathbf{R}^2$, de sorte que g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.14

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$. Par la formule de Taylor, il existe donc ε nulle en 0 et continue en 0 telle que pour tout $h \in \mathbf{R}^2$,

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h).$$

Mais $|f(a+h) - f(a)| \leqslant \|h\|^2$, si bien qu'en prenant h de la forme $(h_1, 0)$, il vient

$$\forall h_1 \in \mathbf{R}, \left| h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) + |h_1|\varepsilon(h_1,0) \right| \leqslant \|(h_1,0)\|^2 = h_1^2.$$

En divisant par $|h_1| \neq 0$, il vient donc

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) + \varepsilon(h_1,0) \right| \leqslant |h_1|.$$

En faisant tendre h_1 vers 0, on a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2$, on a donc, pour tout $(a_1,a_2) \in \mathbf{R}^2$, $f_1 : t \mapsto f(t, a_2)$ qui est constante[6].

On prouve de même qu'en tout point, la seconde fonction partielle est constante, et donc f est constante.

[6] Sa dérivée est $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est nulle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.15

Supposons que pour tout $(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$, $f(x+t, y+t) = f(x, y)$.
Fixons alors $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Par hypothèse, la fonction $g : t \mapsto f(x+t, y+t)$ est constante, donc sa dérivée est nulle.
Or $g'(0) = \langle \nabla f(x, y), (1, 1)\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, si bien que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Et inversement, supposons que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Soit encore que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\langle \nabla f(x, y), (1, 1)\rangle = 0$.
Alors pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ la dérivée de $g : t \mapsto f((x, y) + t(1, 1))$ est nulle en tout point, si bien que g est constante, égale à $g(0) = f(x, y)$.
Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(x+t, y+t) = f(x, y)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.16

Les fonction $\varphi : (u, v) \mapsto u^2 + v^2$ et $\psi : (u, v) \mapsto uv$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ puisqu'elles sont polynomiales.
Donc la règle de la chaîne s'applique. Celle-ci nous affirme à la fois que g est de classe $\mathscr{C}^1$, mais aussi que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv).$$

Et de même,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2, uv) + u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2, uv).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.17

Si une fonction f est solution de l'équation, alors pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y)$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène $z'(x) + yxz(x) = 0$, où la fonction inconnue est notée z (pour éviter tout risque de confusion avec y).
Mais les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\frac{yx^2}{2}}$.
Soyons attentifs à une chose : le λ en question dépend de y ! Notons le donc $\lambda(y)$.
Ainsi, si f est solution, il existe une fonction λ définie sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \lambda(y)e^{-\frac{yx^2}{2}}.$$

Mais on a alors, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\lambda(y) = f(0, y)$, qui est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puisque f est $\mathscr{C}^1$.

Inversement, si λ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, soit alors $f : (x, y) \mapsto \lambda(y)e^{-\frac{yx^2}{2}}$.
Alors f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ puisque $(x, y) \mapsto \dfrac{yx^2}{2}$ est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, et donc par composition avec la fonction exponentielle, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-\frac{yx^2}{2}}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
De même, $(x, y) \mapsto y$ est $\mathscr{C}^1$, et donc par composition, $(x, y) \mapsto \lambda(y)$ est $\mathscr{C}^1$.
Donc par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$.
Et alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -yx\lambda(y)e^{-\frac{yx^2}{2}} = -yxf(x, y)$$

si bien que f est solution de l'équation de l'énoncé.

Et donc l'ensemble des solutions de $\dfrac{\partial f}{\partial x} + xyf = 0$ est

$$\left\{(x, y) \mapsto \lambda(y)e^{-\frac{yx^2}{2}},\ \lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.18

Le changement de variable indique, qui revient donc à $\begin{cases} x = u \\ y = u - v \end{cases}$ nous incite donc à poser $g(u, v) = f(u, u - v)$.
Alors par la règle de la chaîne, g est $\mathscr{C}^1$ et pour $(u, v) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, u-v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u, u-v) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial y}(u, u-v).$$

Autrement dit

L'application $(x, y) \mapsto (x, x - y)$ réalise une bijection de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, de bijection réciproque $(u, v) \mapsto (u, u - v)$.

En particulier, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u, u-v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$.
Et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u,u-v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u,u-v) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$.

Donc f est solution de l'équation indiquée si et seulement si pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(u,u-v) = g(u,v).$$

Ceci est le cas si et seulement si pour tout v fixé, $u \mapsto g(u,v)$ est solution de l'équation différentielle[7] $y' - y = 0$.
C'est le cas si et seulement si il existe $C(v)$ tel que pour tout $u \in \mathbf{R}$, $g(u,v) = C(v)e^u$.
Notons qu'on a alors $C(v) = g(0,v)$.
Donc C est dérivable puisque $v \mapsto g(0,v)$ l'est $\left(\text{de dérivée } \dfrac{\partial g}{\partial u}(0,v)\right)$.
Et par continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, C' est continue, si bien que C est $\mathscr{C}^1$.
Donc il existe $C \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que pour tout $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $g(u,v) = C(v)e^u$.
Donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = g(x,x-y) = C(x-y)e^x$.

[7] Où y est une fonction de u.

Inversement, soit C une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et soit $f : (x,y) \mapsto C(x-y)e^x$.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations usuelles sur les fonctions $\mathscr{C}^1$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = C(x-y)e^x + C'(x-y)e^x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -C'(x-y)e^x$$

si bien que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = C(x-y)e^x = f(x,y).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.19

1. La fonction $\varphi t :\mapsto t^{\ln(t)} = e^{\ln(t)^2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ possède clairement un minimum global en 1, qui vaut 1.
Notons d'ailleurs que ce minimum n'est atteint qu'en 1.
2. Nul besoin de passer ici par les points critiques de f : pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $f(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y) \geqslant 1 + 1 = 2$.
Puisque par ailleurs, $2 = f(1,1)$, f possède un minimum global en $(1,1)$.
Et si $(x,y) \neq (1,1)$, alors soit $\varphi(x) > \varphi(1) = 1$, soit $\varphi(y) > \varphi(1) = 1$ et donc $f(x,y) > 2 = f(1,1)$.
Donc ce minimum n'est atteint qu'en $(1,1)$.

Remarque
Une recherche de points critique prouverait que (1, 1) est le seul point critique de f, en lien avec le fait que φ' ne s'annule qu'en 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.20

1. Fixons par exemple $y = 0$. Alors $f(x,0) = x^4 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc f peut prendre des valeurs arbitrairement grandes : elle ne possède pas de maximum.

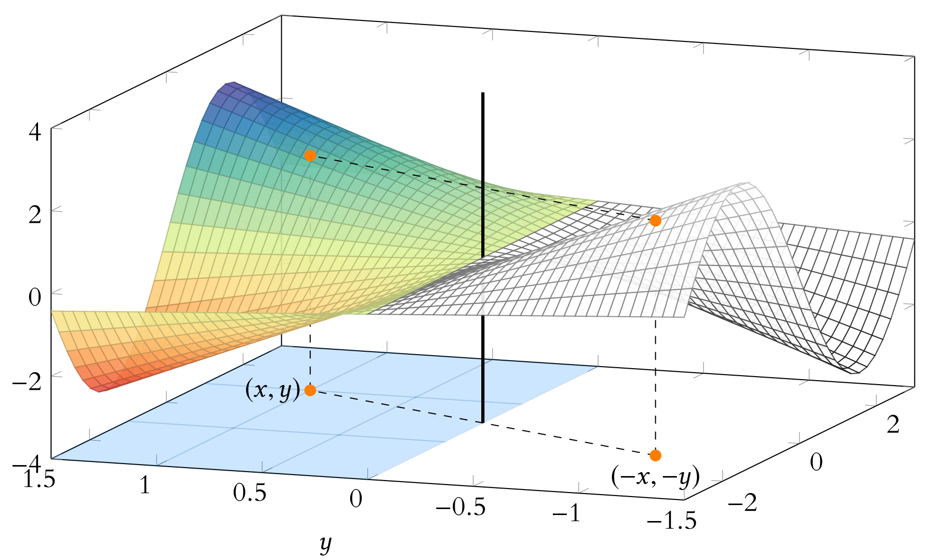
2.a. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$.
Notons alors $\mathscr{H} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geqslant 0\}$ le demi-plan formé des points d'ordonnée positive.
Il est évident que si f possède un minimum sur $\mathbf{R}^2$, alors elle possède un minimum sur $\mathscr{H}$.
Inversement, supposons que f possède un minimum sur $\mathscr{H}$, c'est-à-dire qu'il existe $(x_0,y_0) \in \mathscr{H}$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathscr{H},\ f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

Montrons qu'il s'agit également d'un minimum de f sur $\mathbf{R}^2$. Soit donc $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.
• Si $y \geqslant 0$, alors $(x,y) \in \mathscr{H}$ et donc $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$.
• Si $y < 0$, alors $(-x,-y) \in \mathscr{H}$ et donc $f(x,y) = f(-x,-y) \geqslant f(x_0,y_0)$.
Ainsi, on a prouvé que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$: f possède un minimum en (x_0,y_0).
Dans la suite, on restreint donc la recherche de minimum à $\mathscr{H}$.

2.b. Pour y fixé, soit $g_y : x \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.
Elle est dérivable[8] sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $g_y'(x) = 4(x^3 - y)$. Son tableau de variations est alors le suivant :

[8] Notons que g_y est une fonction d'une seule variable, tout ce qu'il y a de plus classique !



Sur le plan du bas, on a représenté $\mathscr{H}$ en bleu. La restriction de f à $\mathscr{H}$ est donc la partie en couleur de la surface. Il suffit de connaître cette partie pour en déduire le graphe de f sur $\mathbf{R}^2$: l'autre partie est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des z (résultat à mettre en parallèle de la symétrie de la courbe représentative d'une fonction paire d'une seule variable).
En particulier, si la restriction de f à $\mathscr{H}$ possède un minimum, f possède un minimum sur $\mathbf{R}^2$ tout entier.

Figure 32.4 – Un exemple de fonction vérifiant $f(x, y) = f(-x, -y)$ (il ne s'agit pas de la fonction f de l'exercice).

x	$-\infty$		$\sqrt[3]{y}$		$+\infty$
$g_y'(x)$		$-$	0	$+$	
g_y	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt[3]{y}, y)$	$\nearrow$	$+\infty$

et donc g_y admet un minimum en $x = \sqrt[3]{y}$.
Et ce minimum vaut alors

$$g(y) = g_y(\sqrt[3]{y}) = \left(\sqrt[3]{y}\right)^4 + y^4 - 4\sqrt[3]{y}y = y^4 - 3y^{4/3}.$$

2.c. La fonction g est dérivable et $g'(y) = 4(y^3 - y^{1/3})$.
On a alors $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = y^{1/3} \Leftrightarrow y^9 = y \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$.
Le tableau de variation de g est donc

y	0		1		$+\infty$
$g'(y)$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

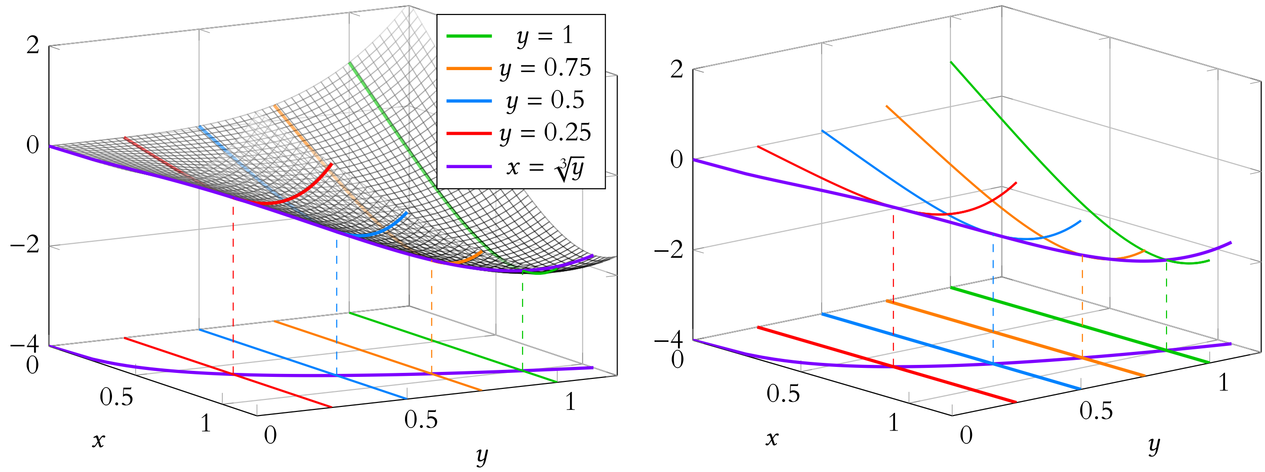
Elle admet donc un minimum en $y = 1$, et ce minimum vaut $g(1) = -2$. On en déduit que

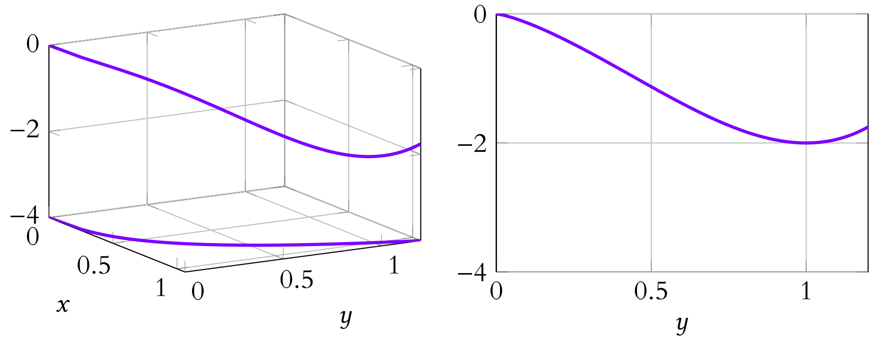
$$\forall (x, y) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty[, \ f(x, y) \geqslant g(y) \geqslant -2.$$

De plus, on a $f(x, y) = -2$ si et seulement si les inégalités ci-dessus sont des égalités.
En particulier, il faut avoir $g(y) = -2 \Leftrightarrow y = 1$.
Et il faut alors également que $f(x, 1) = g_1(x) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$.
Enfin, si $y \leqslant 0$ on a

$$f(x, y) = f(-x, -y) \geqslant -2$$

avec égalité si et seulement si $(-x, -y) = (-1, -1)$.
Donc $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) \geqslant -2$, avec égalité si et seulement si $(x, y) = (1, 1)$ ou $(x, y) = (-1, -1)$.
f possède donc un minimum atteint en deux points qui sont $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.





Pour y fixé, $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum en $x = \sqrt[3]{y}$.
En violet, la courbe reliant ces différents minimums. Il s'agit d'une courbe tracée dans $\mathbf{R}^3$, mais en la regardant «de côté», c'est-à-dire comme le graphe d'une fonction ne dépendant que de la variable y (c'est le dernier dessin), on obtient le graphe de la fonction g. Celle-ci atteint son minimum en $y = 1$. Si on le voit de nouveau dans l'espace, il s'agit du minimum de la fonction f.

Remarque : a priori, cette méthode pourrait fonctionner pour toutes les fonctions de deux variables (et pourrait se généraliser aux fonctions de n variables). Toutefois, il faut pour cela être capable de donner l'expression exacte du (ou des) point(s) en le(s)quel(s) $x \mapsto f(x, y)$ admet un extremum, ce qui est en fait rarement possible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.21

Soit $b \in \mathbf{R}^2$. Alors pour tout $\lambda \in]0, 1]$, on a

$$f(a + \lambda(b - a)) \leqslant f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow f(b) - f(a) \geqslant \frac{f(a + \lambda(b - a)) - f(a)}{\lambda}.$$

Mais lorsque $\lambda \to 0$, $\dfrac{f(a + \lambda(b - a)) - f(a)}{\lambda}$ tend vers la dérivée directionnelle de f en a dans la direction de $b - a$.
Cette dérivée vaut donc $\langle \nabla f(a), b - a\rangle = 0$ car $\nabla f(a) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
Donc par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, $f(b) - f(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
Ceci étant valable pour tout $b \in \mathbf{R}^2$, f possède un minimum en a.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.22

1. Notons que $\mathscr{D}$ n'est autre que la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
Et donc il s'agit d'un fermé borné. Puisque f, qui est polynomiale sur $\mathscr{D}$ est continue, elle y admet donc un maximum et un minimum.
2. Notons que $B_o(0, 1)$ est un ouvert, sur lequel f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3(1 + y^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xy$.
Ainsi, (x, y) est un point critique de f sur $B_o(0, 1)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3x^2 - 3(1 + y^2) = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + y^2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

De la première équation, il vient $x^2 > 0$, et donc $x \neq 0$, de sorte que la seconde équation nous donne nécessairement $y = 0$.
Et donc $x^2 = 1$. Mais alors $x^2 + y^2 = 1$, et donc $(x, y) \notin B_o(0, 1)$.
Ainsi, f n'admet pas de point critique sur l'ouvert $B_o(0, 1)$.
Et par conséquent, le maximum et le minimum de f sur $\mathscr{D}$ ne peuvent être atteints sur $B_o(0, 1)$.

Remarque

Si f possède en $x \in B_o(0, 1)$ un maximum sur $\mathscr{D}$, alors il s'agit évidemment d'un maximum de f sur $B_o(0, 1)$, et donc le résultat usuel reliant extremum sur un ouvert et points critiques s'applique.

Ainsi, f atteint forcément son maximum et son minimum sur des points de $\mathscr{D} \setminus B_o(0,1)$, c'est-à-dire en des points du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (autrement dit, sur le cercle trigonométrique).

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$.
Lorsque t parcourt $\mathbf{R}$, $(\cos t, \sin t)$ parcourt le cercle trigonométrique.
Et par 2π-périodicité des fonctions trigonométriques, on peut se limiter à étudier g sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
Et donc l'ensemble $\{f(x,y),\ x^2+y^2=1\}$ des valeurs prises par f sur le cercle trigonométrique est égal à $\{f(\cos t, \sin t),\ t \in [-\pi,\pi]\}$, c'est-à-dire à l'image de g.
On a alors

$$g(t) = \cos^3 t - 3\cos t(1+\sin^2 t) = \cos t(1-3-3(1-\cos^2 t) = \cos t(-6+4\cos^2 t).$$

En particulier, on remarque que g est paire[9], et donc il suffit de l'étudier sur $[0,\pi]$.
Ainsi, g est dérivable sur $[0,\pi]$ et

$$g'(t) = -\sin t(-6+4\cos^2 t) + \cos t(-8\sin t\cos t) = 6\sin t(1-2\cos^2 t).$$

Pour $t \in [0,\pi]$, on a

$$1-2\cos^2 t \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos^2 t \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}2}{\leqslant}\cos t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

Et donc le tableau de variations de g est donné par

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$\sin t$	0	$+$		$+$		$+$	0
$1-2\cos^2 t$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	-2	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

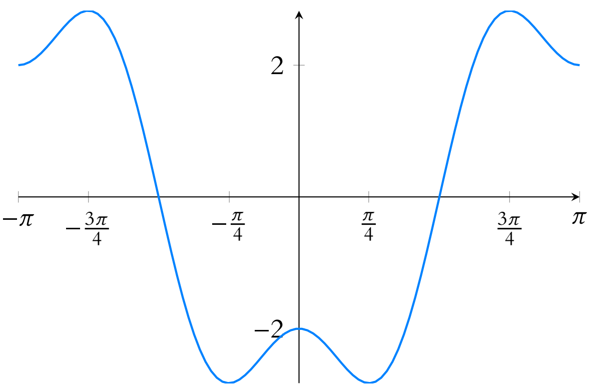


FIGURE 32.5– La fonction g.

Ainsi, g admet pour minimum $-2\sqrt{2}$ et pour maximum $2\sqrt{2}$.
On en déduit donc que $m = -2\sqrt{2}$ et $M = 2\sqrt{2}$.

De plus, le minimum de f est alors atteint en deux points de $\mathscr{D}$ qui sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

De même, le maximum M de f est atteint en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

[9] Rappelons que
$$\cos(-t) = \cos(t).$$

Explications
Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on trouve
$$(\cos t, \sin t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$
On procède de même pour chacune des valeurs de t donnant un extremum local de g.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.23

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

On a $\nabla f(x,y) = \left(\sin(y)e^{x\sin(y)}, x\cos(y)e^{x\sin(y)}\right)$.

Donc $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si $\begin{cases}\sin(y) = 0\\ x\cos(y) = 0\end{cases}$, si bien que $(0,0)$ est le seul point critique de f.
On a alors $f(0,0) = 1$.

Mais pour $x \in]0,1]$, on a $0 < x\sin(x)$, si bien que $f(x,x) = e^{x\sin(x)} > 1$.
Donc dans toute boule $B_o((0,0),r)$ centrée en $(0,0)$, de rayon $r < 1$, se trouve le point $\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$, avec $\quad f\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) > 1 = f(0,0)$, si bien que f ne possède pas de maximum local en

Détails
On a
$$\left\|\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{r^2}{2}} < r.$$

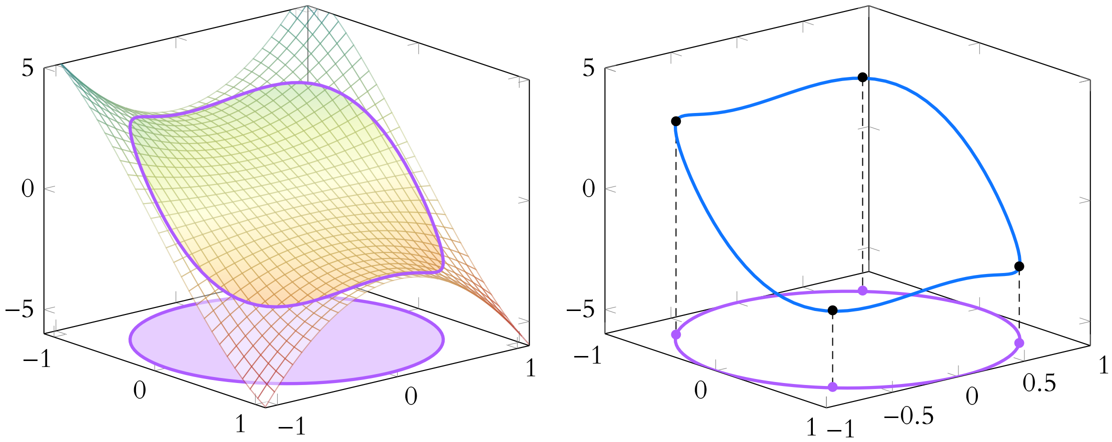
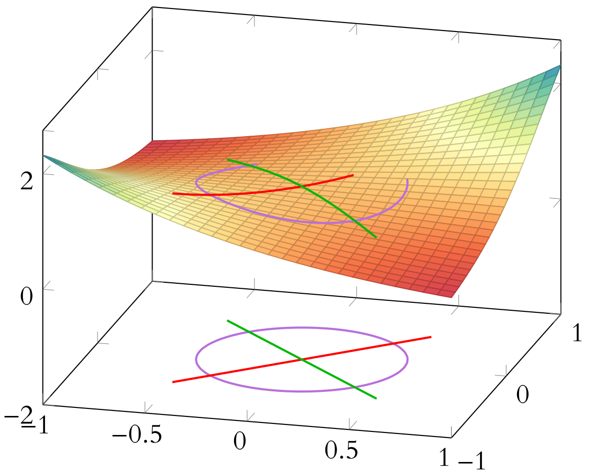


Figure 32.6 – En violet : l'ensemble $\mathscr{D}$. En bleu : les valeurs prises par f sur le bord de cet ensemble, ainsi que les quatre extrema.



$(0,0)$.
De même, pour $x \in]0,1]$, on a $x\sin(-x) < 0$, et donc dans toute boule $B_o((0,0),r)$ centrée en $(0,0)$, on a $f\left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) < 1 = f(0,0)$, et donc f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$.

Solution de l'exercice 32.24

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car elle y est polynomiale.
On a alors, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3.$$

Donc (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,\pm 1).$$

Déterminons la nature du point critique $(0,1)$, et pour y proche de 1, posons $h = y - 1$.
On a donc

$$f(x,y) = f(x,1+h) = x^4+(1+h)^3-3(1+h)-2 = x^4+1+3h+3h^2+h^3-3-3h-2 = x^4+h^3+3h^2-4.$$

Mais pour h proche de 0, $h^3 + 3h^2 \geqslant 0$, puisque $h^3 + 3h^2 \underset{h\to 0}{\sim} 3h^2 \geqslant 0$.
Donc si $r > 0$ est tel que pour tout $h \in]-r,r[$, $h^3 + 3h^2 \geqslant 0$, alors il vient

$$f(x,y) - f(0,1) = h^3 + 3h^2 + x^4 \geqslant 0.$$

Donc f admet un minimum local en $(0,1)$.

Passons à la nature du point critique $(0,-1)$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x,-1) = x^4 \geqslant 0 = f(0,-1)$.
Donc dans toute boule ouverte centrée en $(0,-1)$ se trouvent des points de la forme $(x,-1)$ avec $x \neq 0$, en lesquels f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,-1)$, donc f ne possède pas de maximum local en $(0,-1)$.

Et pour y proche de -1, on a, en posant $y = -1+h$,

$$f(0,y) = (h-1)^3 - 3(h-1) - 2 = h^3 - 3h^2 + 3h - 1 - 3h + 3 - 2 = h^3 - 3h^2.$$

Cette fois, pour h suffisamment petit, on a $f(0,h-1) < 0$.
Et donc dans toute boule ouverte centrée en $(0,-1)$ se trouvent des points de la forme $(0,h-1)$, avec h suffisamment petit pour que $f(0,h-1) < 0$, si bien que f ne possède pas de minimum local en $(0,-1)$.
Donc f ne possède pas d'extremum local en $(0,-1)$.

De plus, notons que $f(0,1)$ n'est pas un minimum global de f puisque

$$f(0,x) = x^3 - 3x - 2 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Et donc f ne possède pas d'extremum global.

Alternative : une étude rapide de la fonction $\varphi : t \mapsto t^3 - 3t - 2$ prouve qu'elle admet un minimum local en 1 et un maximum local en -1.
Et même que pour tout $t \in]-1,3[$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(1) = 4$, et que pour tout $t \in]-5,-1[$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(-1) = 0$.
Donc pour tout $(x,y) \in B_o((0,1),2)$, on a $|y-1| \leqslant \|(x,y)-(0,1)\| < 2$. Donc $y \in]-1,3[$, si bien que

$$f(x,y) = x^4 + \varphi(y) \geqslant 0 + \varphi(1) \geqslant -4 = f(0,1).$$

Donc non seulement on retrouve le fait que f possède un minimum local en $(0,1)$, mais en plus nous avons explicitement construit une boule ouverte sur laquelle elle ne prend que des valeurs supérieures à $-4 = f(0,1)$.

Le même argument fonctionnerait pour prouver que pour y suffisamment proche de -1, $f(0,y) \geqslant f(0,-1)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.25

L'ensemble de définition $\mathscr{F}$ de f, à savoir $[0,1]\times[0,2]$ est un fermé borné.
Puisque f y est continue (car polynomiale), elle y admet un maximum et un minimum.

Considérons alors le rectangle $\mathscr{O} =]0,1[\times]0,2[$, qui est un ouvert.
Graphiquement, $\mathscr{F} \setminus \mathscr{O}$ est le rectangle passant par les points $(0,0),(1,0),(1,2)$ et $(0,2)$.

Autrement dit, $\mathscr{F} \setminus \mathscr{O} = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$ où

$A_1 = \{(x,0), 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A_2 = \{(1,y),\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, $A_3 = \{(x,2),\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ $A_4 = \{(0,y),\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Alors soit les extrema de f sont atteints sur l'ouvert $\mathscr{O}$, et en ce cas sont atteints en des points critiques.

Soit ils sont atteints en des points de $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$.

Or il est facile d'étudier f sur chacun des A_i.
Sur A_1 et A_4, f est constante égale à 0.
Sur A_2, on a $f(x,y) = f(1,y) = y^2 - y + y = y^2$, qui possède donc un minimum égal à 0, et un maximum égal à 4.
Enfin, sur A_3, $f(x,y) = 4x - 2x + 2x^3 = 2(x^3 + x)$, qui possède un minimum égal à 0 et un maximum égal à 2.

Détails
Il suffit d'étudier $t \mapsto f(t,0)$ sur $[0,1]$.

Sur $\mathscr{O}$, f est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, avec $\forall (x,y) \in \mathscr{O}$,

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 - y + 3x^2 y, 2xy - x + x^3\right).$$

Donc $(x, y) \in \mathcal{O}$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} y(y-1+3x^2) = 0 \\ x(2y-1+x^2) = 0 \end{cases}$$

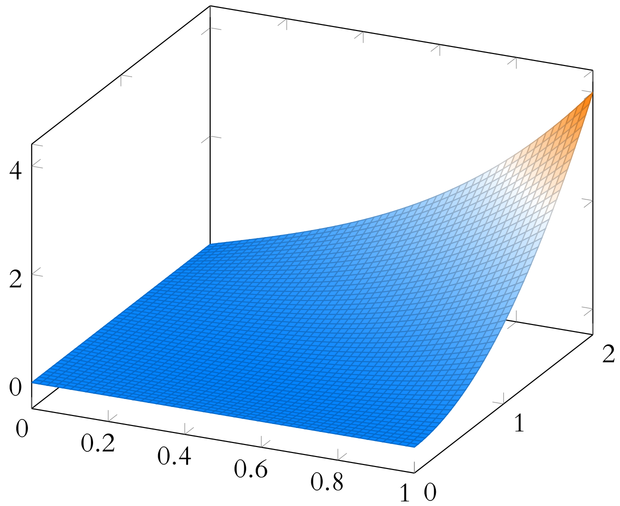
De la première équation, il vient $y = 0$ **ou** $y - 1 + 3x^2 = 0$, et de la seconde vient $x = 0$ **ou** $2y - 1 + x^2 = 0$.
Les cas où x ou y sont nuls sont à exclure puisque les points de $\mathcal{O}$ ont leur deux coordonnées strictement positives.
Donc pour $(x, y) \in \mathcal{O}$, $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} y-1+3x^2 = 0 \\ 2y-1+x^2 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y-1+3x^2 = 0 \\ 0 = -1+5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right).$$

Donc f possède un unique point critique dans $\mathcal{O}$. On a alors

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4}{25} - \frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{25\sqrt{5}} = -\frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

Puisque cette valeur est strictement négative, et donc inférieure à toutes les valeurs prises par f sur le bord de $\mathcal{F}$, c'est donc le minimum de f sur $\mathcal{F}$.



Et le maximum de f est égal à 4, atteint uniquement en $(1, 2)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 32.26

On a donc $f(x, y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$.
Puisque $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, et que ln est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, par composition, $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
De même, $(x, y) \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ car polynomiale, donc par produit, $(x, y) \mapsto x\ln(x^2 + y^2)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Enfin, la fonction exponentielle étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, par composition, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On a alors, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Donc $(x, y) \neq (0, 0)$ est un point critique de f si et seulement si[10]

[10] $f(x, y) \neq 0$

$$\begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}.$$

De la seconde équation on tire tout de suite $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x = 0$, alors $(0, y)$ est un point critique de f si et seulement si $\ln(y^2) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.
Et si $y = 0$, alors $(x, 0)$ est un point critique de f si et seulement si

$$\ln(x^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \pm e^{-2} \Leftrightarrow x = \pm e^{-1}.$$

Donc les quatre points critiques de f sont $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

► On a $f(x,1)-f(0,1)=e^{x\ln(x^2+1)}-1$, qui est du signe de x, donc f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.
En effet, dans toute boule ouverte centrée en $(0,1)$ se trouvent des points de la forme $(x,1)$ avec $x<0$, donc en lesquels $f(x,1)<f(0,1)$, et des points de la forme $(x,1)$ avec $x>0$, donc en lesquels $f(x,1)>f(0,1)$.

► On prouve de même que f n'admet pas d'extremum local en $(0,-1)$.

► Pour $y\in\mathbf{R}$, $\ln(x^2+y^2)\geqslant\ln(x^2)$.
Donc si $x>0$, $x\ln(x^2+y^2)\geqslant x\ln(x^2)$, et donc $f(x,y)\geqslant f(x,0)$.
Notons alors $g(x)=f(x,0)=e^{x\ln(x^2)}$.
On a $g'(x)=g(x)\left(\ln(x^2)+2\right)$, qui change de signe en e^{-1}, si bien que h admet un minimum local en 1.
On peut même être plus précis : pour tout $x>0$, $g(x)\geqslant g(e^{-1})$.
Donc pour $(x,y)\in B_o\left((e^{-1},0),e^{-1}\right)$, $f(x,y)\geqslant f(e^{-1},0)$.
Et donc f admet un minimum local en $(e^{-1},0)$.
Le même type d'argument prouverait que f admet un minimum local en $(-e^{-1},0)$.
En revanche, ce minimum n'est pas un minimum global puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x,0)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x\ln(x^2)}=0$.

33 Arithmétique des polynômes. Fractions rationnelles

Vous avez sans doute déjà remarqué que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ possèdent certaines similitudes, à commencer par l'existence d'une division euclidienne.
L'existence d'une décomposition en produit de facteurs irréductibles, rencontrée dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$ est pour sa part similaire à la factorisation première d'un entier. Et nous avons déjà mentionné les similarités existant entre valuation p-adique et multiplicité d'une racine.

Pour autant, certaines différences existent, à commencer par le fait que l'anneau $\mathbf{Z}$ ne possède que deux inversibles : $U(\mathbf{Z}) = \{\pm 1\}$, alors que $\mathbf{K}[X]$ en possède bien plus[1] puisque $U(\mathbf{K}[X]) = \mathbf{K}^*$. Ceci a pour conséquence qu'un polynôme possède toujours une infinité de diviseurs, et explique les précautions prises dans la définition des irréductibles de $\mathbf{K}[X]$, plus complexes que celle de la définition de nombre premier : un entier est premier si et seulement si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même, alors qu'un polynôme P est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont soit constants, soit de la forme λP, $\lambda \in \mathbf{K}^*$.

[1] Une infinité si $\mathbf{K}$ est infini.

Dans ce chapitre, nous explorons davantage cette similarité en définissant notamment les notions de PGCD et de PPCM dans $\mathbf{K}[X]$, et allons retrouver un certain nombre de théorèmes d'arithmétique (Bézout et Gauss notamment).
Les preuves sont alors souvent quasiment les mêmes que dans $\mathbf{Z}$ (ce qui nous dispensera éventuellement de certaines preuves).

Dans un second temps, nous définirons le corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles, qui est à l'anneau $\mathbf{K}[X]$ ce que le corps $\mathbf{Q}$ est à $\mathbf{Z}$.
Nous reviendrons alors sur un résultat admis en début d'année, à savoir la décomposition en éléments simples.

Dans toute la suite, sans plus de précisions, $\mathbf{K}$ désigne un corps quelconque[2].

[2] Et comme d'habitude, le programme officiel me demanderait de m'en tenir à $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

33.1 Arithmétique de $\mathbf{K}[X]$

33.1.1 Previously on «Polynômes»

Rappelons la définition d'un polynôme irréductible : un polynôme **non constant** $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants[3] et les polynômes de la forme $\lambda P, \lambda \in \mathbf{K}^*$.
Ou encore si les seuls diviseurs de P sont de degré 0 ou de degré $\deg P$.

[3] Et non nuls puisque 0 ne divise que le polynôme nul.

Alternative

Une autre manière de le dire : un polynôme $P \notin U(\mathbf{K}[X])$ est irréductible si pour tous $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$, si $P = QR$ alors $Q \in U(\mathbf{K}[X])$ **ou** $R \in U(\mathbf{K}[X])$.
Si on remplace $\mathbf{K}[X]$ par $\mathbf{Z}$, alors on retrouve la définition de nombre premier, et la définition a encore du sens pour d'autres anneaux intègres.

Notons que le fait d'imposer P non constant est similaire au fait de demander que 1 ne soit pas premier : on ne veut pas qu'un inversible soit premier, essentiellement pour avoir l'unicité dans la décomposition en produit de facteurs premiers.

Enfin, rappelons qu'il n'est généralement pas inutile de préciser sur quel corps on entend l'irréductibilité, en particulier pour les polynômes à coefficients réels, qui peuvent être irréductibles sur $\mathbf{R}$ et pas sur $\mathbf{C}$ (c'est par exemple le cas de n'importe quel polynôme de degré 2 de discriminant négatif).

Enfin, nous avons prouvé à l'aide d'une récurrence que tout polynôme non constant de $\mathbf{K}[X]$ est produit d'irréductibles. Mais n'avons énoncé (et prouvé) de résultat d'unicité que dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$. Ce qui nous suffit à peu près toujours, mais possède l'inconvénient de nécessiter le théorème de d'Alembert-Gauss, qui est l'un des rares théorèmes que nous n'avons pas prouvé.

La plupart de l'arithmétique de $\mathbf{Z}$ nécessitait de savoir traiter le cas des nombres positifs, quitte à ajouter un signe.
Pour $\mathbf{K}[X]$, nous aimerions nous cantonner aux polynômes unitaires, quitte à ajouter ensuite un coefficient dominant. Nous utiliserons alors le vocabulaire suivant :

Définition 33.1 – Deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbf{K}[X]$ sont dits **associés** s'il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Cette définition permet alors de reformuler celle de polynôme irréductible : un polynôme non constant P est irréductible si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants[4] et les polynômes associés à P.

[4] Qui sont les polynômes associés à 1.

Notons que parmi tous les polynômes associés à un polynôme non nul donné, un et un seul est unitaire.
Remarquons également que deux polynômes associés ont les mêmes diviseurs.

En d'autres termes
La relation «être associé» est une relation d'équivalence sur $\mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$ et toute classe d'équivalence contient un unique polynôme unitaire.

33.1.2 PGCD, PPCM

Si A et B sont deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ avec $A \neq 0$, alors l'ensemble de leurs diviseurs communs est bien évidemment non vide, puisqu'il contient tous les polynômes constants, et tous ces diviseurs ont un degré majoré par $\deg(A)$ (et même par $\min(\deg(A), \deg(B))$ si B est également non nul).
Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément, la définition qui suit a bien du sens :

Définition 33.2 – Soient A et B deux polynômes non simultanément nuls de $\mathbf{K}[X]$.
On appelle **plus grand commun diviseur (PGCD) de A et B** tout polynôme qui divise à la fois A et B et qui est de degré maximal parmi les tels polynômes.
Par convention, si A et B sont nuls, on décrète que seul le polynôme nul est un PGCD de A et B.

Notons tout de suite une différence avec le cas des entiers : on ne parle pas **du** PGCD, mais **d'un** PGCD, un tel polynôme n'étant pas unique : si D est un PGCD de A et B, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}^*$, λD en est un aussi. Une question reste ouverte pour l'instant : deux PGCD de A et B sont-ils nécessairement associés ?

Autrement dit
Tout polynôme associé à un PGCD de A et B est encore un PGCD de A et B.

Il est facile de se convaincre que pour tous scalaires non nuls λ et μ, les PGCD de λA et μB sont exactement ceux de A et B.
Et donc quitte à diviser les polynômes par leur coefficient dominant, on pourra, si nécessaire, supposer A et B unitaires.

Exemple 33.3 Exemple fondamental

Si A est un polynôme non nul, alors les PGCD de A et de $0_{\mathbf{K}[X]}$ sont exactement les polynômes associés à A.
En effet, tout polynôme divisant 0, les diviseurs communs de A et $0_{\mathbf{K}[X]}$ sont exactement les diviseurs de A. Ceux de degré maximum sont alors nécessairement de même degré que A (qui est un diviseur de A).
Et un diviseur de A de même degré que A est nécessairement associé à A, car le degré du quotient est nul.

Si D est un diviseur commun de A et B, alors pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$, D est un diviseur de $AU + BV$. Et donc un diviseur commun de B et $AU + BV$.
En particulier, si $A = BQ + R$ est la division euclidienne de A par B, alors tout diviseur commun de A et B est diviseur commun de B et $R = A - BQ$.
Mieux : il s'agit là d'une équivalence, car si D divise B et $A - BQ$, alors il divise B et $A = (A - BQ) + BQ$.

Rappel
Comme dans $\mathbf{Z}$, si D divise à la fois A et B, alors il divise tous les $AU + BV$.

Donc l'ensemble des diviseurs communs de A et B est aussi l'ensemble des diviseurs communs de B et R.

Remarque
Nous venons donc de prouver le lemme d'Euclide.

Cette observation était, dans le cas des entiers, à la base de l'algorithme d'Euclide.
Celui-ci reste alors valable : partons de deux polynômes A et B, avec $\deg B \leqslant \deg(A)$.
Notons alors $R_0 = A$, $R_1 = B$.
Posons alors R_2 le reste de la division euclidienne de A par B.
S'il est non nul, soit alors R_3 le reste de la division euclidienne de R_1 par R_2.
On définit ainsi une suite de polynôme en posant, tant que R_k est non nul, R_{k+1} le reste de la division euclidienne de R_{k-1} par R_k, etc.
La suite $(\deg R_k)_k$ est alors strictement décroissante, et donc est nécessairement finie : il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $R_n = 0$.
Comme à chaque étape les diviseurs communs à R_{k-1} et R_k sont les diviseurs communs à R_k et R_{k+1}, les diviseurs communs à $A = R_0$ et $B = R_1$ sont aussi les diviseurs communs à R_{n-1} et 0.
Donc en particulier, les PGCD de A et B sont aussi les PGCD de R_{n-1} et $0_{\mathbf{K}[X]}$. Et donc comme expliqué dans l'exemple ci-dessus, ce sont exactement les polynômes associés à R_{n-1}.
Nous venons donc de prouver le fait suivant :

Proposition 33.4 : *Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ non simultanément nuls. Alors tous les PGCD de A et B sont associés entre eux. En particulier, un et un seul d'entre eux est unitaire, et on le note $A \wedge B$ et on l'appelle **PGCD unitaire**[5] de A et B.*
Par convention, $0_{\mathbf{K}[X]} \wedge 0_{\mathbf{K}[X]} = 0_{\mathbf{K}[X]}$.

[5] Et par abus de langage, nous l'appellerons souvent **le** PGCD de A et B.

En réalité, nous avons même prouvé mieux :

Proposition 33.5 : *Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. Alors $P \in \mathbf{K}[X]$ est un diviseur commun de A et B si et seulement si c'est un diviseur de $A \wedge B$.*

Démonstration. ► Si $A = B = 0$, alors $A \wedge B = 0$, et il n'y a rien à prouver.
► Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, alors avec les notations ci-dessus, nous avons prouvé que les diviseurs communs de A et B sont les diviseurs de R_{n-1}. Or $A \wedge B$ est associé[6] à R_{n-1}, donc les diviseurs de R_{n-1} sont ceux de $A \wedge B$. □

[6] Plus précisément, c'est R_{n-1} divisé par son coefficient dominant.

Comme dans le cas de $\mathbf{Z}$, ceci signifie que le PGCD qui est défini comme «le plus grand» au sens du degré est aussi le plus grand pour la relation de divisibilité (qui est une relation d'ordre si on la restreint à l'ensemble des polynômes unitaires).

Enfin, nous disposons d'un algorithme pour calculer $A \wedge B$: c'est l'unique polynôme **unitaire** associé au dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Exemple 33.6

Considérons $A = 2X^3 - 4X - 8$ et $B = 3X^2 - 3X - 6$. Alors

$$A = \frac{2}{3}(X+1)B + (2X-4), \ B = \frac{3}{2}(2X-4)(X+1) + 0$$

et donc $A \wedge B$ est associé à $2X - 4$ et étant unitaire, c'est $X - 2$.

Proposition 33.7 (Identité de Bézout) : *Soient A, B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$, non simultanément nuls. Alors il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tels que $AU + BV = A \wedge B$.*

Démonstration. Le résultat peut se prouver par exemple par récurrence sur le degré de B, et ressemble alors beaucoup à celle que nous avions donnée pour les entiers.
Mais plus simplement, souvenons-nous que, comme dans le cas des polynômes, on peut

«remonter les étapes» de l'algorithme d'Euclide pour obtenir une relation de Bézout (et on appelle alors encore ce procédé l'algorithme d'Euclide *étendu*). □

Exemple 33.8

Dans l'exemple précédent[7],

$$X - 2 = \frac{1}{2}A - \frac{X+1}{3}B.$$

[7] Pas totalement intéressant puisqu'il ne s'agit de «remonter» qu'une seule division.

On retrouve alors les propriétés déjà connues du PGCD d'entiers, dont les preuves s'adaptent sans difficultés.

Proposition 33.9 : *Soit A, B, C trois polynômes de $\mathbf{K}[X]$. Alors :*

1. *$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (associativité du PGCD)*
2. *$(AC) \wedge (BC)$ est associé à $C(A \wedge B)$.*

Remarque

Noter la différence subtile avec l'énoncé correspondant pour les entiers, qui était

$$(ka) \wedge (kb) = |k|(a \wedge b).$$

La valeur absolue (dont le but était d'éliminer un éventuel signe moins) a été remplacée par «est associé» (qui sert à éliminer un éventuel coefficient dominant de C).

Démonstration. Il s'agit d'adapter les preuves données dans $\mathbf{Z}$, et seul le cas où $C \neq 0$ nécessite des explications.
1) Si D $A \wedge (B \wedge C)$, alors D divise à la fois A et $B \wedge C$, alors il divise A, B et C.
En particulier, il divise $A \wedge B$ (puisqu'il divise A et B), et divise C. Donc il divise $(A \wedge B) \wedge C$.
On prouve sur le même principe que si D divise $(A \wedge B)$ et C, alors il divise $A \wedge (B \wedge C)$.
Autrement dit, $(A \wedge B) \wedge C$ et $A \wedge (B \wedge C)$ ont les mêmes diviseurs. Donc ont mêmes diviseurs de plus haut degré, et donc même diviseur unitaire de plus haut degré.

2) Puisque $A \wedge B$ divise A et B, $C(A \wedge B)$ divise AB et AC.
Donc divise $(AC) \wedge (BC)$.

Inversement, puisque C divise AC et BC, il divise $(AC) \wedge (BC)$.
Donc il existe $D \in \mathbf{K}[X]$ tel que $(AC) \wedge (BC) = CD$.
Mais alors $CD \mid AC$, et donc $D \mid A$. De même $D \mid B$, et donc $D \mid (A \wedge B)$.
Après multiplication par C, $(AC) \wedge (BC) = CD \mid C(A \wedge B)$.

Donc $(AC) \wedge (BC)$ et $C(A \wedge B)$ sont associés. □

33.1.3 Polynômes premiers entre eux

Définition 33.10 – Deux polynômes non simultanément nuls A et B sont dits **premiers entre eux** si $A \wedge B = 1$ (ce qui est le cas si et seulement si tous[8] leurs PGCD sont constants).

[8] En fait dès que l'un des PGCD est constant, les autres le sont aussi, puisqu'associés à une constante.

Remarque. Dans $\mathbf{C}[X]$, deux polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune.
En effet, s'ils ont une racine commune α, alors tous deux sont divisibles par $X - \alpha$, et donc $P \wedge Q$ aussi, si bien que $P \wedge Q \neq 1$.
Et inversement, si P et Q ne sont pas premiers entre eux, alors $P \wedge Q$ n'est pas constant, et donc possède une racine α qui est donc une racine commune de P et Q.
Notons que ceci ne vaut plus dans $\mathbf{R}[X]$, par exemple $X^2 + 1$ et $(X^2+1)^2$ n'ont pas de racines réelle, donc n'en ont pas en commun. Mais ne sont clairement pas premiers entre eux, puisque l'un divise l'autre.

Exercice

Prouver que deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ sont premiers entre eux (en tant que polynômes de $\mathbf{R}[X]$) si et seulement si ils n'ont pas de racine complexe en commun.

Proposition 33.11 (Théorème de Bézout) : *Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$. Alors A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$.*

Démonstration. Adaptons la preuve donnée dans le cas de $\mathbf{Z}$. Le sens direct a déjà été fait c'est l'identité de Bézout.
Supposons qu'il existe U et V tels que $AU + BV = 1$. Alors tout diviseur commun de A et B divise $AU + BV$, donc est constant.
En particulier, $A \wedge B$ est donc un polynôme constant unitaire : il vaut 1. □

Toutes les conséquences directes de Bézout dans $\mathbf{Z}$ restent valables, avec les mêmes preuves dans $\mathbf{K}[X]$.

Corollaire 33.12 – *Soient $P, Q_1, \dots, Q_n \in \mathbf{K}[X]$. Alors P est premier avec le produit $Q_1 \cdots Q_n$ si et seulement si il est premier avec chacun des Q_i.*

Démonstration. La preuve est la même que dans $\mathbf{Z}$, il suffit de le prouver pour $n = 2$, puis de raisonner par récurrence.
Pour $n = 2$, supposons que $P \wedge Q_1 = P \wedge Q_2 = 1$.
Alors il existe des polynômes U_1, U_2, V_1, V_2 tels que

$$1 = PU_1 + Q_1V_1,\ 1 = PU_2 + Q_2V_2.$$

En multipliant ces deux relations, on arrive à

$$1 = P(PU_1U_2 + U_1Q_2V_2 + U_2Q_1V_1) + Q_1Q_2V_1V_2$$

ce qui par le théorème de Bézout nous donne $P \wedge Q_1Q_2 = 1$.

Inversement, si $P \wedge Q_1Q_2 = 1$, alors il existe U, V tels que $PU + Q_1Q_2V = 1$, et donc $PU + Q_1(Q_2V) = 1$, donc $P \wedge Q_1 = 1$, et de même pour Q_2. □

Proposition 33.13 (Théorème de Gauss) : *Soient A, B, C trois polynômes de $\mathbf{K}[X]$ tels que A divise BC et A soit premier avec B. Alors A divise C.*
Autrement dit : $(A \mid BC \textbf{ et } A \wedge B = 1) \Rightarrow A \mid C$.

Démonstration. Soient U, V tels que $AU + BV = 1$. Alors $ACU + BCV = C$.
Mais A divise ACU et A divise BC, donc BCV. Donc A divise C. □

On retrouve également le fait que si A et B sont deux polynômes, alors il existe A' et B' premiers entre eux tels que $A = A'(A \wedge B)$ et $B = B'(A \wedge B)$.

Enfin, les polynômes irréductibles étant analogues aux entiers premiers, on retrouve aussi les deux faits suivants[9] :

[9] Analogues aux propositions 15.48 et 15.49, dont les preuves se transposent sans difficultés au cas des polynômes.

Proposition 33.14 : *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ irréductible.*

1. *Si P ne divise pas Q, alors $P \wedge Q = 1$.*
2. *P divise un produit si et seulement si il divise l'un de ses facteurs.*

33.1.4 Factorisation en produit d'irréductibles

Nous avons déjà mentionné[10] le fait que tout polynôme de $\mathbf{K}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes irréductibles.
Si l'énoncé est agréable à retenir sous cette forme, il n'est pas correct en raison de la présence éventuelle de coefficients dominants. Mieux vaudrait dire : « tout polynôme est associé à un produit de polynômes irréductibles».
Où l'on considère que 1 est le produit de zéro irréductibles. Cette décomposition est en fait unique... sous peu qu'on formule bien cette unicité :

[10] Et prouvé dans le chapitre de polynômes.

Théorème 33.15 : *Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ non constant. Alors il existe $\alpha \in \mathbf{K}^*$, et des polynômes irréductibles* ***unitaires*** *$P_1, \dots, P_r$, deux à deux distincts, et des entiers strictement positifs $m_1, \dots, m_r$ tels que*

$$A = \alpha \prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}.$$

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Notons que pour l'unicité, il est important de demander aux polynômes d'être unitaires[11], faute de quoi on pourrait remplacer l'un des P_i par λP_i, avec $\lambda \neq 0$, quitte à changer α en $\dfrac{\alpha}{\lambda^{m_i}}$.
«À l'ordre des facteurs près» est suffisamment explicite, mais on pourrait[12] aussi le formuler de la manière suivante : si $A = \alpha \prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}$ et $A = \beta \prod_{i=1}^{p} Q_i^{n_i}$ sont deux décompositions de la forme annoncée, alors $\{P_1, \dots, P_r\} = \{Q_1, \dots, Q_p\}$, et si $P_i = Q_j$, alors $m_i = n_j$.

[11] Tout comme on demandait aux nombres premiers d'être positifs.

[12] Je ne dis pas que c'est là une bonne idée.

Démonstration. Il serait tout à fait possible de calquer la preuve faite dans $\mathbf{Z}$ pour l'unicité de la décomposition en produit de nombres premiers.
Donnons une autre preuve pour varier les plaisirs.

Supposons par l'absurde qu'une décomposition ne soit pas toujours unique, et soit P un polynôme de degré minimal parmi ceux possédant deux décompositions distinctes.
Considérons alors deux telles décompositions :

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i} = \beta \prod_{i=1}^{p} Q_i^{n_i}$$

avec les P_i et les Q_j irréductibles, unitaires, et deux à deux distincts.
Par identification des coefficients dominants, on a tout de suite $\alpha = \beta$. Alors P_1 divise le produit $\prod_{i=1}^{p} Q_i^{n_i}$.
S'il était premier avec tous les Q_i, il le serait avec le produit, et on aurait alors $P_1 = 1$, contredisant son irréductibilité.
Donc P_1 n'est pas premier avec l'un des Q_i. Quitte à permuter ces derniers, supposons qu'il s'agit de Q_1.
Mais alors $P_1 \wedge Q_1$ est un diviseur non constant de P_1 et de Q_1.
Ces deux polynômes étant irréductibles, on a donc $P_1 = P_1 \wedge Q_1 = Q_1$.
Et donc $P_1^{m_1-1} \prod_{i=2}^{r} P_i^{m_i} = Q_1^{n_1-1} \prod_{i=2}^{p} Q_i^{n_i}$ est un polynôme de degré strictement plus petit que P, possédant deux décompositions distinctes en produits d'irréductibles, c'est absurde. □

Comme la description des irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ (les polynômes de degré 1) et des irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ (les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif) restent valables, ce résultat permet de retrouver, dans un cadre plus général, la décomposition déjà connue.

Notons que les m_i qui apparaissent dans la décomposition sont les analogue polynomiaux de la valuation p-adique. Et pour tout irréductible P, on pourrait noter $v_P(Q)$ la plus grande puissance de P qui divise Q.
Dans le cas de $\mathbf{C}$, où la description des irréductibles unitaires est extrêmement simple[13], la valuation de $X - \alpha$ n'est rien d'autre que la multiplicité de α en tant que racine de P.
Et on retrouverait alors un moyen de calculer le PGCD de deux polynômes à partir de leurs décompositions en produit d'irréductibles :

$$P \wedge Q = \prod_{R \text{ irréductibles unitaires}} R^{\min(v_R(P), v_R(Q))}.$$

[13] Ce sont les $X - \alpha$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

Pour finir, notons une vraie différence avec le cas de nombres premiers : dans $\mathbf{Z}$, on dispose du crible d'Ératosthène qui permet de lister les nombres premiers, et qui tient au fait que les entiers sont ordonnés. Dans $\mathbf{K}[X]$, on n'a rien de tel, donc déterminer si un polynôme est ou non irréductible est déjà potentiellement difficile[14], mais en plus, déterminer quels sont les facteurs irréductibles d'un polynôme donné n'est pas chose aisée.

[14] Sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$ ça ne l'est pas, mais dans $\mathbf{Q}[X]$, ça le devient.

33.1.5 PPCM

Définition 33.16 – Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$ non nuls. On appelle **plus petit commun multiple (PPCM) de A et B** tout polynôme de degré minimal parmi l'ensemble des multiples communs non nuls de A et B (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes divisibles à la fois par A et par B).
Si $A = 0$ ou $B = 0$, par convention, 0 est le seul PPCM de A et B (c'est de toutes façons le seul multiple commun de A et B).

Un tel PPCM existe nécessairement : l'ensemble des multiples communs à A et B est non vide (il contient AB), et l'ensemble des degrés des tels multiples communs est donc une partie non vide et minorée[15] de $\mathbf{N}$, donc contient un plus petit élément d.
Tout multiple commun de A et B de degré d est donc un PPCM de A et B.

[15] Par $\max(\deg(A), \deg(B))$.

Comme pour le PGCD, il n'y a pas d'unicité d'un tel polynôme, puisque si P est un PPCM de A et B, alors tous les polynômes associés à P le sont aussi.

Proposition 33.17 : *Soient A et B deux polynômes non nuls. Alors il existe un unique PPCM unitaire de A et B qu'on note alors $A \vee B$.*

Démonstration. L'existence d'un PPCM unitaire est évidente : il suffit de prendre un PPCM et de le diviser par son coefficient dominant.
Supposons donc que P_1, P_2 soient deux tels PPCM unitaires.
Notons alors $P_1 = P_2Q + R$ la division euclidienne de P_1 par P_2.
Alors $R = P_1 - P_2Q$ est divisible à la fois par A et par B, donc est un multiple commun de A et B. Étant de degré strictement inférieur à P_2, il est donc nul.
Donc $P_2 \mid P_1$ et sur le même principe, $P_1 \mid P_2$.
On en déduit que P_1 et P_2 sont associés, et étant tous deux unitaires, ils sont égaux. □

Corollaire 33.18 – *Les PPCM de A et B sont les polynômes associés à $A \vee B$, c'est-à-dire les $\lambda(A \vee B)$, $\lambda \in \mathbf{K}^*$.*

Démonstration. Si P est un PPCM de A et B, de coefficient dominant $\lambda \in \mathbf{K}^*$, alors $\frac{P}{\lambda}$ est encore un PPCM de A et B, unitaire.
Par la proposition précédente, c'est donc $A \vee B$: $\frac{P}{\lambda} = A \vee B \Leftrightarrow P = \lambda(A \vee B)$. □

Par conséquent, on dispose d'une description de tous les PPCM de A et B : ce sont tous les polynômes associés à $A \vee B$.

On dispose alors d'une caractérisation du PPCM similaire à celle qui existe dans $\mathbf{Z}$:

Proposition 33.19 : *Soient A et B deux polynômes non nuls, et soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors P est un PPCM de A et B si et seulement si*

$$\begin{cases} A \mid P \text{ et } B \mid P \\ \forall Q \in \mathbf{K}[X],\ (A \mid Q \text{ et } B \mid Q) \Rightarrow P \mid Q \end{cases}$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit P un PPCM de A et B (donc de la forme $\lambda(A \vee B)$, avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$) et soit $Q \in \mathbf{K}[X]$ un multiple commun de A et B. Notons alors $Q = PM + R$ la division euclidienne de Q par P, avec $\deg R < \deg P$.
Alors $R = Q - PM$ est divisible à la fois par A et par B, et étant de degré strictement inférieur à celui de P, il est nul.
Donc $P \mid Q$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit P un polynôme possédant les propriétés requises. Alors c'est un multiple commun de A et B, qui divise[16] $A \vee B$.
Mais par le sens direct, on a également $A \vee B \mid P$, et donc P et $A \vee B$ sont associés, de sorte que P est un PPCM de A et B. □

[16] C'est la seconde hypothèse de l'accolade ci-dessus, appliquée à $Q = A \vee B$.

On dispose également d'une formule liant PPCM et PGCD, si A et B sont deux polynômes **unitaires** de $\mathbf{K}[X]$, alors $AB = (A \vee B)(A \wedge B)$.
En revanche, si A et B ne sont pas unitaires, il faudra multiplier le terme de droite par le produit des coefficients dominants de A et B pour obtenir l'égalité.

33.1.6 Généralisation à un nombre fini de polynômes

Comme dans $\mathbf{Z}$, la notion de PGCD se généralise à un nombre fini de polynômes :

Proposition 33.20 : *Soient $A_1, \dots, A_n$ des polynômes non tous nuls de $\mathbf{K}[X]$. Alors il existe un unique polynôme unitaire D qui divise tous les A_i et tel que tout polynôme P qui divise tous les A_i divise D.*

On dit alors que D est le PGCD de $A_1, \dots, A_n$, et on le note $A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_n$ ou $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.

Démonstration. Par récurrence sur n, l'idée étant qu'un polynôme P est un diviseur commun à A_1, A_2 et A_3 si et seulement si il divise à la fois $A_1 \wedge A_2$ et A_3.
Donc si et seulement si il divise à la fois $(A_1 \wedge A_2) \wedge (A_3)$. □

Remarque
Ce principe montre que
$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} A_i\right) \wedge A_n.$$

Proposition 33.21 : *Si D est le PGCD de $A_1, \dots, A_n$, alors il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbf{K}[X]$ tels que $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i U_i$.*

Définition 33.22 – Des polynômes $A_1, \dots, A_n \in \mathbf{K}[X]$ sont dits **premiers dans leur ensemble** si $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n = 1$.

Comme pour les entiers, on ne confondra pas premiers deux à deux et premiers dans leur ensemble. Le premier implique le second, mais la réciproque est fausse.

Exemple 33.23

Dans $\mathbf{C}[X]$, $A_1, \dots A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il n'existe pas de racine commune à tous les A_i, soit encore si

$$\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \exists i \in [\![1, n]\!],\ A_i(\lambda) \neq 0.$$

En effet, s'ils sont premiers entre eux, aucun polynôme irréductible ne les divise tous à la fois. Or les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
Et inversement, s'ils ont une racine commune λ, alors leur PGCD est divisible par $X - \lambda$, donc les A_i ne sont pas premiers entre eux.

33.2 FRACTIONS RATIONNELLES

33.2.1 Le corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles

Les fractions rationnelles, que nous avons rencontrées de manière informelle en début d'année sont l'analogue pour $\mathbf{K}[X]$ de ce qu'est $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{Z}$.
Qu'est-ce qu'un rationnel ? C'est la donnée d'un numérateur et d'un dénominateur, c'est-à-dire d'un couple $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$.
Mais vous savez que deux fractions peuvent être égales sans avoir le même numérateur ni le même dénominateur.
On identifie les rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ si et seulement si $pq' = p'q$.
Faisons de même sur les couples de polynômes.

Pour cela définissons une relation binaire $\sim$ sur $\mathbf{K}[X] \times (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})$ par

$$(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1.$$

Alors $\sim$ est évidemment réflexive et symétrique.
Et si $(P_1,Q_1) \sim (P_2,Q_2)$ et $(P_2,Q_2) \sim (P_3,Q_3)$, alors on a $P_1Q_2 = P_2Q_1$ et $P_2Q_3 = P_3Q_2$ donc en multipliant ces relations,

$$P_1P_2Q_2Q_3 = Q_1P_2Q_2P_3. \qquad (\star)$$

- si $P_2 = 0$, alors $P_1Q_2 = 0$, et Q_2 étant non nul, $P_1 = 0$. Et de même $P_3 = 0$. Donc $P_1Q_3 = 0 = Q_1P_3$, de sorte que $(P_1,Q_1) \sim (P_3,Q_3)$.
- si $P_2 \neq 0$, alors $P_2Q_2 \neq 0$, et donc par intégrité de $\mathbf{K}[X]$, en simplifiant $(\star)$ par P_2Q_2, il reste $P_1Q_3 = P_3Q_1$, donc $(P_1,Q_1) \sim (P_3,Q_3)$.

Donc $\sim$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence sur $\mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$.

Définition 33.24 – L'ensemble $\mathbf{K}(X)$ des **fractions rationnelles** sur $\mathbf{K}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$.
On note $\frac{P}{Q}$ la classe d'équivalence de (P,Q). On dit alors que (P,Q) est un **représentant** de la fraction $\frac{P}{Q}$.

Autrement dit
Un représentant d'une fraction est donc tout élément dans la classe d'équivalence qu'est cette fraction.

La définition est en fait peu importante, et si vous avez compris ce qu'est un nombre rationnel, vous aurez compris ce qu'est une fraction rationnelle : c'est $\frac{P}{Q}$ avec la convention que $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \Leftrightarrow P_1Q_2 = Q_1P_2$.

Proposition 33.25 : *Tout élément F de $\mathbf{K}(X)$ s'écrit $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$.*
On dit alors que (P,Q) est un représentant irréductible de F.

Unicité ?
Vous aurez noté qu'on a là un résultat d'existence, mais pas d'unicité. Une telle unicité serait par exemple garantie en demandant de plus à ce que Q soit unitaire.

Démonstration. Supposons que $F = \frac{A}{B}$, avec $A \in \mathbf{K}[X]$ et $B = \mathbf{K}[X] \setminus \{0\}$.
Soit alors $D = A \wedge B$, de sorte qu'il existe $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ tels que $A = DP$ et $B = DQ$, $P \wedge Q = 1$.
On a alors $AQ = DPQ = PDQ = PB$, de sorte que $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} = F$. □

Par abus de langage, on dira souvent que $\frac{P}{Q}$ est irréductible, plutôt que de dire que (P,Q) est un représentant irréductible de $\frac{P}{Q}$.

⚠ Attention !
Cette terminologie laisse entendre qu'il existerait des fractions rationnelles irréductibles et d'autres qui ne le sont pas, ce qui n'est pas le cas : il n'y a pas de notion de fraction irréductible.
Mais pour toute fraction, il y a des représentants irréductibles.

Si $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont deux représentants irréductibles de la même fraction, alors $AD = BC$. Puisque $A \wedge B = 1$, par le lemme de Gauss, $A \mid C$. Et de même, $C \mid A$, donc A et C sont associés.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{K}^*$ tel que $C = \lambda A$.
Si $A \neq 0$, on a donc $AD = BC \Leftrightarrow AD = \lambda AB \Leftrightarrow D = \lambda B$.

Ainsi, si $\frac{A}{B} \neq 0$ est irréductible, les autres représentants irréductibles de cette même fraction sont les $\frac{\lambda A}{\lambda B}$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

Soient $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$ deux éléments de $\mathbf{K}(X)$.
On définit alors une fraction rationnelle notée $F+G$ de la manière suivante : $F + G = \frac{AD+BC}{BD}$.
Autrement dit, il s'agit de la classe d'équivalence du couple $(AD+BC, BD)$. Mais il n'est pas totalement évident au premier abord que cette classe d'équivalence soit indépendante des représentants de F_1 et F_2 qu'on a choisi précédemment.
Supposons donc que $F = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ et $G = \frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$. Alors

$$(A_1D_1+B_1C_1)B_2D_2 = (A_1B_2)D_1D_2+(C_1D_2)B_1B_2 = A_2B_1D_1D_2+C_2D_1B_1B_2 = (A_2D_2+B_2C_2)B_1D_1$$

de sorte qu'on a bien $\frac{A_1D_1+B_1C_1}{B_1D_1} = \frac{A_2D_2+B_2C_2}{B_2D_2}$, et donc $F+G$ est uniquement défini.

Nous définissons donc ainsi une loi interne $+$ sur $\mathbf{K}(X)$.
Il n'est pas très difficile, en utilisant les propriétés des opérations de $\mathbf{K}[X]$ de prouver que $+$ est associative et commutative.
Par exemple, pour l'associativité, on a :

$$\left(\frac{A}{B}+\frac{C}{D}\right)+\frac{E}{F} = \frac{AD+BC}{BD}+\frac{E}{F} = \frac{ADF+BCF+EBD}{BDF} \text{ et } \frac{A}{B}+\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B}+\frac{CF+DE}{DF} = \frac{ADF+BCF+BDE}{BDF}$$

de sorte que ces deux fractions sont égales.
La fraction $0 = \frac{0}{1}$ est alors élément neutre de $+$ puisque

$$\forall \frac{A}{B} \in \mathbf{K}(X),\ \frac{A}{B}+\frac{0}{1} = \frac{A+0\cdot B}{B\cdot 1} = \frac{A}{B}.$$

Et de plus, tout élément de $\mathbf{K}(X)$ est inversible, et l'inverse de $\frac{A}{B}$ est $\frac{-A}{B}$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $(\mathbf{K}(X), +)$ est un groupe abélien.

Sur le même principe, on peut définir une seconde loi interne notée $\times$ sur $\mathbf{K}(X)$, définie par $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$.
On vérifie alors qu'il s'agit là d'une loi associative et commutative[17], d'élément neutre $\frac{1}{1}$, et qui est distributive par rapport à $+$.
De plus, toute fraction $\frac{A}{B} \neq \frac{0}{1}$ est inversible, d'inverse $\frac{B}{A}$.

$\boxed{\text{Donc } (\mathbf{K}(X), +, \times) \text{ est un corps.}}$

On note 0 plutôt que $\frac{0}{1}$, et plus généralement, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, on note P plutôt que $\frac{P}{1}$.
On vérifie aisément que les opérations de $\mathbf{K}(X)$ correspondent à celle de $\mathbf{K}[X]$, et donc qu'en identifiant la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$ au polynôme P, $\mathbf{K}(X)$ contient l'anneau $\mathbf{K}[X]$.
Et donc en particulier contient $\mathbf{K}$, qui est lui-même inclus[18] dans $\mathbf{K}[X]$.
La multiplication interne induit alors une opération $\cdot$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K}\times\mathbf{K}(X) & \longrightarrow & \mathbf{K}(X) \\ (\lambda, F) & \longmapsto & \lambda F \end{array}\right.$, qui avec l'addition, fait de $\mathbf{K}(X)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel[19].

Cette construction est inévitable si on souhaite définir proprement les fractions rationnelles, mais en pratique, elle ne changera rien à la manière dont vous allez calculer avec des fractions rationnelles. Notons que les mêmes constructions, partant de $\mathbf{Z}$ *plutôt que de* $\mathbf{K}[X]$ *permettent de donner une définition rigoureuse de* $\mathbf{Q}$. *Et plus généralement, cette construction est valable dans tout anneau commutatif intègre* A, *le corps obtenu s'appelant alors le corps des fractions de* A.

[17] Cela découle de l'associativité et de la commutativité du produit sur $\mathbf{K}[X]$.

Remarque
Les représentants de 0 sont exactement les $(0, P)$, $P \in \mathbf{K}[X]$. On garde donc bien une propriété usuelle, à savoir qu'une fraction (rationnelle) est nulle si et seulement si son numérateur l'est.

[18] Moyennant une identification entre scalaires et polynômes constants.

[19] De dimension infinie puisqu'il possède $\mathbf{K}[X]$ comme sous-espace vectoriel.

33.2.2 Degré, partie entière, zéros et pôles

Définition 33.26 – Soit $F \in \mathbf{K}(X)$. Alors la quantité $\deg(A) - \deg(B)$ ne dépend pas du représentant $\frac{A}{B}$ de F.
On l'appelle alors le **degré de** F. Notons qu'il s'agit soit d'un entier relatif, soit de $-\infty$, ce qui ne peut se produire que si $F = 0$.

Démonstration. Soient $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ deux représentants de F.
On a alors $AD = BC$. Et donc

$$\deg(A) + \deg(D) = \deg(B) + \deg(C) \Leftrightarrow \deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D),$$

donc le degré de F est bien indépendant du représentant choisi. □

Exemple 33.27

$$\deg \frac{X^2+1}{X^3(X^2+2)} = 2 - 5 = -3.$$

Notons que pour un polynôme $P = \frac{P}{1}$, son degré en tant que fraction rationnelle coïncide avec son degré en tant que polynôme.

⚠ Les polynômes sont des fractions rationnelles de degré positif, mais ce n'est pas là une caractérisation de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}(X)$: il existe des fractions rationnelles de degré strictement positif qui ne sont pas des polynômes. Par exemple $\dfrac{X^3}{X^2-1}$ est de degré 1, mais n'est pas un polynôme.

Proposition 33.28 : *Soient F, G deux fractions rationnelles. Alors*

$$\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G) \text{ et } \deg(FG) = \deg(F) + \deg(G).$$

Démonstration. Notons $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$. Alors

$$\begin{aligned}\deg(F+G) = \deg\left(\frac{AD+BC}{BD}\right) &\leqslant \max(\deg(AD), \deg(BC)) - \deg(BD)\\ &\leqslant \max(\deg(A) - \deg(B), \deg(C) - \deg(D)) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G)).\end{aligned}$$

Le degré d'un produit est immédiat. □

Définition 33.29 – Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle sous **forme irréductible**.
On appelle alors **zéro de** F toute racine de A et **pôle de** F toute racine de B.
L'**ordre** d'un zéro (resp. d'un pôle) de F est alors sa multiplicité en tant que racine de A (resp. de B).

Si l'on impose à F d'être irréductible dans cette définition, c'est tout simplement pour que les notions de zéro et de pôle soient indépendantes du choix du représentant de F.
Par exemple, $F = \dfrac{X}{X^2-1}$ possède 0 comme seul zéro et ± 1 comme seuls pôles.
Mais on a aussi $F = \dfrac{X}{X^2-1} = \dfrac{X(X+3)}{(X^2-1)(X+3)}$.
Cette dernière fraction n'est pas irréductible, et donc bien que -3 soit racine de son numérateur, ce n'est pas un zéro de F.

Définition 33.30 (Fonction rationnelle) – Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle sous forme irréductible, et soit E l'ensemble des pôles de F.
On appelle alors **fonction rationnelle associée à** F la fonction $\widetilde{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \setminus E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{A(x)}{B(x)} \end{array} \right.$.

Encore une fois, prendre une fraction irréductible permet de garantir que le domaine de définition de $\widetilde{F}$ est le plus grand possible.

Définition 33.31 – Soit $F \in \mathbf{K}(X)$. Alors il existe un unique couple $(E, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}(X)$, avec $\deg(Q) < 0$ tel que $F = E + Q$.
On dit alors que E est la **partie entière de** F.

Démonstration. L'existence est aisée : si $F = \frac{A}{B}$, notons alors $A = EB + D$ la division euclidienne de A par B, avec $\deg D < \deg B$.
Alors $F = \frac{A}{B} = E + \frac{D}{B}$, avec $\deg \frac{D}{B} = \deg(D) - \deg(B) < 0$.

Pour l'unicité, supposons que $F = E_1 + Q_1 = E_2 + Q_2$, où E_1 et E_2 sont deux polynômes et Q_1, Q_2 deux fractions de degrés strictement négatifs.
Alors $E_1 - E_2 = Q_2 - Q_1$. Mais $\deg(Q_2 - Q_1) \leqslant \max(\deg Q_2, \deg Q_1) < 0$, et $E_1 - E_2$ est un polynôme, donc de degré positif... sauf s'il est nul !
Il ne peut donc y avoir égalité des degrés que si $E_1 - E_2 = 0 \Leftrightarrow E_1 = E_2$, et alors on a évidemment $Q_1 = Q_2$. □

Remarque
Ceci nous donne directement une méthode pour déterminer la partie entière de F : c'est le quotient de la division euclidienne de A par B.

Notons tout de suite que l'unicité nous dit que si $\deg F < 0$, alors $F = 0 + F$, donc la partie entière de F est nulle.
Et inversement, une fraction de partie entière nulle est évidemment de degré négatif.

Enfin, il est aisé de prouver que la partie entière d'une somme est la somme des parties entières, mais qu'il n'existe pas de règle analogue pour le produit.

33.2.3 Décomposition en éléments simples

Théorème 33.32 (Décomposition en éléments simples) : *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{K}(X)$ **de degré strictement négatif**, et soit $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles.*
Alors il existe une unique famille de polynômes $A_{1,1}, \ldots, A_{1,\alpha_1}, \ldots, A_{n,1}, \ldots A_{n,\alpha_n}$ tels que :

$$F = \frac{A_{1,1}}{Q_1} + \frac{A_{1,2}}{Q_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,\alpha_1}}{Q_1^{\alpha_1}} + \frac{A_{2,1}}{Q_2} + \cdots + \frac{A_{2,\alpha_2}}{Q_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{A_{n,1}}{Q_n} + \cdots + \frac{A_{n,\alpha_n}}{Q_n^{\alpha_n}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{Q_i^k}.$$

avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, \alpha_i]\!]$, $\deg A_{i,k} < \deg Q_i$.

Si le résultat est à connaître, sa preuve est hors programme.

Démonstration. Nous allons raisonner par un argument de dimension : soit $d = \deg Q$, qu'on peut supposer supérieur ou égal à 1, car si $\deg Q = 0$, il n'existe pas de fraction rationnelle de degré négatif ayant Q pour dénominateur.
Notons également, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $d_i = \deg Q_i$, de sorte que $d = d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n$.
Soit alors $E_1 = \left\{ \frac{U}{Q}, U \in \mathbf{K}_{d-1}[X] \right\}$ l'ensemble des fractions rationnelles de degré stricte-

ment négatif qui ont Q pour dénominateur.

Notons également E_2 l'ensemble des $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,k}}{Q_i^k}$ où $\forall i\in [\![1,n]\!], \forall k\in [\![1,\alpha_i]\!], \deg A_{i,k} < \deg Q_i$, c'est-à-dire l'ensemble des fractions qui se mettent bien sous la forme annoncée.
Alors E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}(X)$.

Remarque
Il faudrait plutôt dire : dont un représentant possède Q pour dénominateur. Je ne demande pas nécessairement qu'il s'agisse d'un représentant irréductible.

Il est facile de constater que $E_2 \subset E_1$: il suffit de tout mettre au même dénominateur, et de constater que les conditions sur les degrés sont bien remplies. En effet, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant \alpha_i$, on a

$$\frac{A_{i,k}}{Q_i^k} = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{\alpha_j}\,\frac{Q_i^{\alpha_i-k}A_{i,k}}{Q_1^{\alpha_1}\cdots Q_n^{\alpha_n}}$$

et si $\deg A_{i,k} < \deg Q_i$, alors

$$\deg\left(\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} Q_j^{\alpha_j}\right)Q_i^{\alpha_i-k}A_{i,k}\right) < \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j d_j + d_i(\alpha_i-k)+d_i \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j d_j + d_i\alpha_i \leqslant \deg Q.$$

Puisque $(1,X,X^2,\dots,X^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}_{d-1}[X]$, $\left(\dfrac{1}{Q},\dfrac{X}{Q},\dots,\dfrac{X^{d-1}}{Q}\right)$ est une base de E_1, qui est donc de dimension d.

De même, un polynôme $A_{i,k}\in\mathbf{K}_{d_i-1}[X]$ est combinaison linéaire de $1,X,\dots,X^{d_i-1}$, si bien que la famille

$$\frac{1}{Q_1},\dots,\frac{X^{d_1-1}}{Q_1},\frac{1}{Q_1^2},\dots,\frac{X^{d_1-1}}{Q_1^2},\dots,\frac{X^{d_1-1}}{Q_1^{\alpha_1}},\frac{1}{Q_2},\dots,\frac{X^{d_n-1}}{Q_n^{\alpha_n}}$$

est une famille génératrice de E_2.
Pour le dire autrement, il s'agit de la famille $\mathscr{B}$ des $\dfrac{X^j}{Q_i^k}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant\alpha_i$, $0\leqslant j<d_i$.
Sa liberté n'est pas complètement évidente : soient donc des scalaires $\alpha_{i,j,k}$, avec $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant\alpha_i$, $0\leqslant j<d_i$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\sum_{j=0}^{d_i-1}\frac{\alpha_{i,j,k}X^j}{Q_i^k}=0.$$

Notons $A_{i,k}=\displaystyle\sum_{j=0}^{d_i-1}\alpha_{i,j,k}X^j\in\mathbf{K}_{d_i-1}[X]$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,k}}{Q_i^k}=0.$$

Fixons alors $p\in[\![1,n]\!]$, de sorte que par une mise au même dénominateur, on obtient

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\left[\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}Q_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{\alpha_i}Q_i^{\alpha_i-k}A_{i,k}\right)\right]+\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}Q_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{\alpha_p}Q_p^{\alpha_p-k}A_{p,k}\right)=0.$$

Et donc $-\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}\left[\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}Q_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{\alpha_i}Q_i^{\alpha_i-k}A_{i,k}\right)\right]=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}Q_j^{\alpha_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{\alpha_p}Q_p^{\alpha_p-k}A_{p,k}\right).\qquad(\star)$
Comme Q_p divise le membre de gauche, il divise celui de droite.
Mais étant premier avec $\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}Q_j^{\alpha_j}$, il divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_p}Q_p^{\alpha_p-k}A_{p,k}$.

Rappel
Un polynôme est premier avec un produit si et seulement si il est premier avec chacun de ses facteurs.

Et puisque Q_p divise $\sum_{k=1}^{\alpha_p-1} Q_p^{\alpha_p-k}A_{p,k}$, Q_p divise A_{p,α_p}.
Or $\deg A_{p,\alpha_p} < \deg Q_p$, donc $A_{p,\alpha_p} = 0$.
Sur le même principe, si $\alpha_p \geqslant 2$, en divisant les deux membres de ($\star$) par Q_p (ce qui est possible puisque $A_{p,\alpha_p} = 0$), et en tenant le même raisonnement, on prouve que $A_{p,\alpha_p-1} = 0$, et de proche en proche que pour tout $k \in [\![1, \alpha_p]\!]$, $A_{p,k} = 0$.
Donc tous les $A_{i,k}$ sont nuls, si bien que par unicité des coefficients d'un polynôme, tous les $\alpha_{i,j,k}$ sont nuls : la famille $\mathscr{B}$ est libre, et donc est une base de E_2.
Or cette famille est de cardinal $\sum_{i=1}^{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant \alpha_i} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i\alpha_i = d$.
Donc $\dim E_2 = d = \dim E_1$, et puisqu'on a l'inclusion $E_2 \subset E_1$, alors $E_1 = E_2$.
En particulier, F (notre fraction de départ, qui figure dans l'énoncé du théorème), qui est dans E_1 est dans E_2.
Ce qui prouve déjà l'existence de la décomposition annoncée.
Et puisque $\mathscr{B}$ est une base de $E_2 = E_1$, une telle décomposition est nécessairement unique. □

Remarque. Si Q_i est de la forme $X - \lambda_i$, c'est-à-dire lorsque λ_i est un pôle de F, alors les $A_{i,k}$ sont tous de degré négatif, et donc sont des constantes[20], et on dit alors que $\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}$ est la **partie polaire de F associée au pôle λ_i**.

[20] Éventuellement nulles.

Définition 33.33 – Une fraction rationnelle est appelée **élément simple** si elle est de la forme $\frac{P}{Q^k}$, avec Q irréductible, $k \geqslant 1$ et $\deg P < \deg Q$.

Le théorème ci-dessus nous dit donc que toute fraction rationnelle de degré négatif s'écrit de manière unique comme somme d'éléments simples, et précise même quels peuvent être les dénominateurs des éléments simples en question. En prenant en compte la partie entière, toute fraction rationnelle s'écrit donc de manière unique comme un polynôme plus une somme d'éléments simples.

En pratique, seuls les deux énoncés suivants seront à connaître[21], pour la décomposition en éléments simples des fractions à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{C}$. Les deux sont uniquement des conséquences du théorème général, couplés à la description des irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ ou de $\mathbf{R}[X]$.

[21] Ou en fait surtout à savoir utiliser.

Corollaire 33.34 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$) :
Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbf{C}(X)$, avec $B = \alpha \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}$. Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbf{C}[X]$ et une unique famille de complexes $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,m_2}, \dots, \alpha_{n,m_n}$ tels que

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{\alpha_{1,1}}{X-\lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(X-\lambda_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\alpha_{n,1}}{X-\lambda_n} + \dots + \frac{\alpha_{n,m_n}}{(X-\lambda_n)^{m_n}} \\ &= E + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X-\lambda_i)^k}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de se souvenir que les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. □

Exemple 33.35 **Une base de $\mathbf{C}(X)$**

Comme mentionné précédemment, $\mathbf{C}(X)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Le résultat ci-dessus nous donne une base de $\mathbf{C}(X)$, qui est

$$\mathscr{B} = \{X^k,\ k \in \mathbf{N}\} \cup \left\{\frac{1}{(X-\lambda)^k},\ (\lambda, k) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}^*\right\}.$$

En effet, la décomposition en éléments simples affirme que toute fraction rationnelle s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$.

Corollaire 33.36 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$) :
Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbf{R}(X)$, où la décomposition en produit de facteurs irréductibles de B est

$$B = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^{r} (X^2 + b_k X + c_k)^{p_k}.$$

Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbf{R}[X]$ et une unique famille de réels $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,m_n}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,p_1}, \dots, \beta_{r,p_r}, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{r,p_r}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-\lambda_i)^j} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{p_k} \frac{\beta_{k,\ell} X + \gamma_{k,\ell}}{(X^2 + b_k X + c_k)^\ell}.$$

33.2.4 Décomposition en éléments simples ; une autre preuve via l'arithmétique des polynômes

Dans cette partie, on donne, pour la culture, ou pour ceux qui préfèrent l'arithmétique à l'algèbre linéaire, une autre preuve de l'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples.

Lemme 33.37. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbf{K}(X)$ avec $\deg(F) < 0$. On suppose que $B = B_1 B_2$, avec $B_1 \wedge B_2 = 1$.
Alors il existe un unique couple $(A_1, A_2) \in \mathbf{K}[X]$, avec $\deg A_1 < \deg B_1$ et $\deg A_2 < \deg B_2$, vérifiant $F = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$.
Si de plus $\dfrac{A}{B}$ est irréductible, alors $\dfrac{A_1}{B_1}$ et $\dfrac{A_2}{B_2}$ le sont aussi.

Démonstration. **Existence** : par Bézout, il existe U et V deux polynômes tels que $B_1 U + B_2 V = 1$, et alors $AB_1 U + AB_2 V = A$.
Donc $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AB_1 U + AB_2 V}{B_1 B_2} = \dfrac{AU}{B_2} + \dfrac{AV}{B_1}$.
Cette écriture n'est pas encore tout à fait celle que l'on cherche car rien ne garantit que $\deg AV < \deg B_1$ et idem pour $\deg(AU)$.
Notons alors E_1 et E_2 les parties entières respectives de $\dfrac{AV}{B_1}$ et $\dfrac{AU}{B_2}$, de sorte que

$$\frac{AV}{B_1} = E_1 + \frac{A_1}{B_1} \text{ et } \frac{AU}{B_2} = E_2 + \frac{A_2}{B_2}.$$

Et donc $F = \dfrac{A}{B} = E_1 + E_2 + \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$.
Mais puisque $\deg F < 0$, sa partie entière est nulle. Or, cette partie entière est $E_1 + E_2$, donc $E_1 + E_2 = 0$, et donc $F = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$.

Unicité : supposons que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{C_1}{B_1} + \dfrac{C_2}{B_2}$.
Alors $\dfrac{A_1 - C_1}{B_1} = \dfrac{C_2 - A_2}{B_2} \Leftrightarrow B_2(A_1 - C_1) = B_1(C_2 - A_2)$.
Donc B_2 divise $B_1(C_2 - A_2)$, et, étant premier à B_1, par Gauss, divise[22] $C_2 - A_2$.

[22] Dans $\mathbf{K}[X]$.

Mais $\deg C_2 < \deg B_2$ et $\deg A_2 < \deg B_2$, donc $\deg(C_2 - A_2) < \deg B_2$.
Si $B_2 \mid (C_2 - A_2)$, c'est donc que $C_2 - A_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = A_2$.
On en déduit alors aisément que $A_1 = C_1$.

Venons en enfin au cas où $\dfrac{A}{B}$ est irréductible. Alors, par Bézout, il existe U_1, V_1 tels que $AU_1 + BV_1 = 1 \Leftrightarrow AU_1 + B_1B_2V_1 = 1$.
Donc, toujours par Bézout, A est premier avec B_1 et avec B_2.
Mais B_1 est aussi premier avec V, donc il est premier avec AV.
Donc $A_1 = AV - B_1E_1$ est aussi premier avec B_1, et donc $\dfrac{A_1}{B_1}$ est irréductible. □

Lemme 33.38. Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbf{K}(X)$ avec $\deg(F) < 0$, et supposons que $B = B_1B_2\cdots B_n$, avec les B_i deux à deux premiers entre eux.
Alors, de manière unique,

$$F = \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_n}{B_n}, \text{ avec } \deg(A_i) < \deg(B_i).$$

De plus, si $\frac{A}{B}$ est irréductible, alors les $\frac{A_i}{B_i}$ le sont aussi.

Démonstration. Par récurrence sur n, la récurrence ayant été initialisée dans le lemme précédent[23].
La seule chose non totalement évidente est l'unicité.
Supposons donc acquise cette unicité lorsque B est un produit de n facteurs premiers deux à deux, et supposons que $B = B_1\cdots B_{n+1}$, et que

$$F = \frac{A_1}{B_1} + \cdots + \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{C_1}{B_1} + \cdots + \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}}.$$

Alors $F = \dfrac{A_1B_2 + A_2B_1}{B_1B_2} + \dfrac{A_3}{B_3} + \cdots + \dfrac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \dfrac{C_1B_2 + C_2B_1}{B_1B_2} + \dfrac{C_3}{B_3} + \cdots + \dfrac{C_{n+1}}{B_{n+1}}$.
Par hypothèse de récurrence, qui s'applique car $\dfrac{A_1B_2 + A_2B_1}{B_1B_2}$ est de degré négatif, on a $\dfrac{A_1B_2 + A_2B_1}{B_1B_2} = \dfrac{C_1B_2 + C_2B_1}{B_1B_2}$ et $A_3 = C_3, \ldots, A_{n+1} = C_{n+1}$.
Soit encore $\dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{C_1}{B_1} + \dfrac{C_2}{B_2}$, et alors le lemme permet de conclure. □

[23] Lemme qui sert aussi pour l'hérédité.

Lemme 33.39. Si $F = \dfrac{A}{B^n}$ $(n \geqslant 1)$ est de partie entière nulle, alors de manière unique $F = \dfrac{A_1}{B} + \dfrac{A_2}{B^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{B^n}$ où A_i est un polynôme de degré inférieur strictement à $\deg B$.
Et si de plus $\dfrac{A}{B^n}$ est irréductible alors $A_n \neq 0$.

Démonstration. L'existence se prouve par récurrence. Pour $n = 1$, c'est trivial.
Supposons le résultat vrai pour n, et soit $F = \dfrac{A}{B^{n+1}}$ de la forme annoncée.
Soit $A = BQ + R$ la division de A par B. Alors $\dfrac{A}{B^{n+1}} = \dfrac{Q}{B^n} + \dfrac{R}{B^{n+1}}$, avec $\deg R < \deg B$.
Puisque F et $\dfrac{R}{B^{n+1}}$ sont de parties entières nulles[24], il en est de même de $\dfrac{Q}{B^n}$. Et donc par hypothèse de récurrence, il existe $A_1, \ldots, A_n$, avec $\deg(A_i) < \deg(B)$ tels que $\dfrac{Q}{B^n} = \dfrac{A_1}{B} + \cdots + \dfrac{A_n}{B^n}$.
Et donc $\dfrac{A}{B^{n+1}} = \dfrac{A_1}{B} + \cdots + \dfrac{A_n}{B^n} + \dfrac{R}{B^{n+1}}$.

Unicité : encore par récurrence, en notant, comme dans la preuve de l'existence, que A_n est le reste de la division euclidienne de A par B^n , et donc est unique.

Enfin, pour le dernier point, si on avait $A_n = 0$, on écrirait alors $\dfrac{A}{B^n} = \dfrac{Q}{B^{n-1}}$, et $AB^{n-1} = B^nQ$, donc $A = BQ$, de sorte que $B \mid A$, et donc $\dfrac{A}{B^n}$ ne serait pas irréductible. □

[24] C'est-à-dire de degré strictement négatif.

Théorème 33.40 (Décomposition en éléments simples) : *Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. Alors F s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme et d'un nombre fini d'éléments simples. Plus précisément si $B = B_1^{\alpha_1} \cdots B_n^{\alpha_n}$ est la décomposition de B en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{K}[X]$. Alors il existe une unique famille de polynômes $E, A_{1,1}, \dots, A_{1,\alpha_1}, \dots, A_{n,1}, \dots A_{n,\alpha_n}$ tels que :*

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{A_{1,1}}{B_1} + \frac{A_{1,2}}{B_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,\alpha_1}}{B_1^{\alpha_1}} + \frac{A_{2,1}}{B_2} + \cdots + \frac{A_{n,\alpha_n}}{B_n^{\alpha_n}} \\ &= E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{B_i^k}. \end{aligned}$$

avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, \alpha_i]\!]$, $\deg A_{i,k} < \deg B_i$.

Démonstration. Il est évident que E doit être la partie entière[25] de F et donc il suffit de prouver le résultat lorsque $\deg F < 0$.

[25] Qu'on sait être unique.

L'existence est alors assez facile, puisque les $B_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, le lemme 33.38 prouve que F s'écrit sous la $\dfrac{A_1}{B_1^{\alpha_1}} + \cdots + \dfrac{A_n}{B_n^{\alpha_n}}$, avec $\deg A_i < \deg B_i^{\alpha_i}$.
Et alors le lemme 33.39 termine le boulot.

Pour l'unicité, il s'agit de remarquer qu'on a unicité dans les deux lemmes en question.
Et donc si F, une fraction de degré négatif possède deux décompositions en éléments simples, quitte à ajouter des termes nuls, on peut supposer que les dénominateurs qui apparaissent dans ces deux décompositions[26] sont les mêmes, notons-les $B_1, \dots, B_n$ avec les mêmes puissances $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

[26] Les B_i^k ci-dessus.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{B_i^k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{i,k}}{B_i^k}$$

où les B_i sont irréductibles.
En «mettant au même dénominateur», on peut alors écrire, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{B_i^k} = \frac{A_i}{B_i^{\alpha_i}}$$

où A_i est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg B_i^{\alpha_i}$.
De même $\displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{i,k}}{B_i^k} = \frac{C_i}{B_i^{\alpha_i}}$.
Donc $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{B_i^{\alpha_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{B_i^{\alpha_i}}$, et alors l'unicité du lemme 33.38 nous donne $A_i = C_i$.
Reste alors à utiliser l'unicité du lemme 33.39 pour montrer que pour tout i et tout k, $A_{i,k} = C_{i,k}$. □

33.2.5 Pratique de la décomposition en éléments simples

Les méthodes rencontrées en début d'année pour le calcul de la décomposition en éléments simples restent valables.

Ajoutons deux choses :
► Si α est un pôle simple de F, c'est-à-dire si $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{(X-\alpha)Q_1}$, avec $Q_1(\alpha) \neq 0$.
Alors la partie polaire de F associée à α est de la forme $\dfrac{\lambda}{X-\alpha}$ et donc $F = \dfrac{\lambda}{X-\alpha} + G$, où $G \in \mathbf{K}(X)$ n'a pas α pour pôle.
En multipliant par $X - \alpha$, il vient $\dfrac{P}{Q_1} = \lambda + (X-\alpha)G$ et donc $\dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \lambda$.

Remarque
Multiplier par $X - \alpha$ est bien la méthode que nous employions en début d'année.

Par ailleurs, on a $Q' = [(X-\alpha)Q_1]' = (X-\alpha)Q_1' + Q_1$ et donc $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$.
Donc la partie polaire associée à α est $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\dfrac{1}{X-\alpha}$.

► Dans le cas où la fraction rationnelle est paire/impaire, et si a est un pôle de F d'ordre n, alors $-a$ est aussi un pôle de F d'ordre n.
Et alors la comparaison des décompositions en éléments simples de $F(X)$ et $F(-X) = \pm F(X)$ fournit des relations entre les coefficients.

Exemple 33.41

Soit $F = \dfrac{4}{(X^2-1)^2} \in \mathbf{R}(X)$. Alors la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X+1)^2}.$$

Mais alors F est paire donc

$$F(X) = F(-X) = \frac{a}{-X-1}+\frac{b}{-X+1}+\frac{c}{(-X-1)^2}+\frac{d}{(-X+1)^2} = \frac{-a}{X+1}+\frac{-b}{X-1}+\frac{c}{(X+1)^2}+\frac{d}{(X-1)^2}.$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples nous donne alors immédiatement $-a = b$ et $c = d$.
En multipliant par $(X-1)^2$, et en évaluant en $X = 1$, on a immédiatement $c = \frac{4}{(1+1)^2} = 1$, et donc $d = 1$.
Puis en évaluant en $X = 0$, il reste

$$4 = -a - a + 1 + 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

Et donc $F(X) = \dfrac{-1}{X-1} + \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

Enfin, terminons par un cas particulier, qui est à connaître : si $P = \alpha\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ est scindé[27], où les λ_i ne sont pas nécessairement distincts.
Alors

$$P' = \alpha\sum_{i=1}^{n}(X-\lambda_1)\cdots\underbrace{(X-\lambda_i)'}_{=1}\cdots(X-\lambda_n) = \alpha\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j).$$

Et donc

$$\frac{P'}{P} = \frac{\alpha\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X-\lambda_j)}{\alpha\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_j)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_i}.$$

En particulier, si P possède des racines multiples, alors certains termes de la somme ci-dessus sont identiques. Si on note $P = \alpha\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}$, où cette fois les λ_i sont distincts, et m_i la multiplicité de λ_i, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{(X-\lambda_i)}.$$

Cette formule n'est pas tellement surprenante dans le cas où P est un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, scindé sur $\mathbf{R}$. En effet, si $P = \alpha\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}$, on reconnaît que $\dfrac{P'}{P}$ est la dérivée (sur $\mathbf{R}\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$) de $\ln|P|$.
Mais pour $x \notin \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, $\ln|P(x)| = \ln(|\alpha|) + \sum_{i=1}^{n} m_i\ln(|x-\lambda_i|)$.

[27] Ce qui est automatique sur $\mathbf{C}$.

Et donc

$$\left(\ln|P|\right)'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{x-\lambda_i}.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 33

▶ Arithmétique des polynômes

EXERCICE 33.1 Dans les deux cas suivants, calculer $A \wedge B$ et déterminer des polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$. F

1) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
2) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 2X + 2$.

EXERCICE 33.2 Montrer que deux polynômes P et Q de $\mathbf{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si PQ et $P + Q$ le sont. PD

EXERCICE 33.3 Soient P, R deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$, premiers entre eux. PD
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = P(n) \wedge R(n)$. Montrer que (u_n) est bornée.

EXERCICE 33.4 Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme scindé. Déterminer $P \wedge P'$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicités. PD

EXERCICE 33.5 AD

1) Soient A et B deux polynômes non constants de $\mathbf{K}[X]$, premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.
2) Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$ non constants, avec $p = \deg A$ et $q = \deg B$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{q-1}[X] \times \mathbf{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{p+q-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto & AU + BV \end{array} \right.$ soit une bijection.

EXERCICE 33.6 Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. PD

1) Montrer, à l'aide de la factorisation en produit d'irréductibles, que P et Q sont premiers entre eux en tant qu'éléments de $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si ils le sont en tant qu'éléments de $\mathbf{C}[X]$.
2) En déduire que le PGCD de P et Q dans $\mathbf{R}[X]$ est égal au PGCD de P et Q dans $\mathbf{C}[X]$.
3) Retrouver ce résultat en utilisant l'algorithme d'Euclide.

EXERCICE 33.7 Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$ tels que $A^2 \mid B^2$. Prouver que $A \mid B$. PD

EXERCICE 33.8 Arithmétique et idéaux AD
Un partie I de $\mathbf{K}[X]$ est appelée un idéal de $\mathbf{K}[X]$ si c'est un sous-groupe de $(\mathbf{K}[X], +)$, et si pour tout $P \in I$, pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$, $PQ \in I$.

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $(P) = \{PQ, Q \in \mathbf{K}[X]\}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$. *(P) est appelé l'idéal engendré par P.*
2) En utilisant la division euclidienne prouver que pour tout idéal I de $\mathbf{K}[X]$, il existe un unique polynôme unitaire P tel que $I = (P)$.
   On dit alors que $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal, ce qui est également le cas de $\mathbf{Z}$.
3) Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que $(A) + (B) = \{P + Q,\ P \in (A), Q \in (B)\}$ et $(A) \cap (B)$ sont deux idéaux de $\mathbf{K}[X]$. Reconnaissez-vous les polynômes unitaires qui engendrent ces idéaux ?

EXERCICE 33.9 Polynômes de Fibonacci AD
Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de polynômes définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X)$.

1) Quel est le degré de P_n ?
2) Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1$.
3) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, P_{n-1} et P_n sont premiers entre eux.
4) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $p \in \mathbf{N}^*$, $P_{n+p} = P_n P_{p+1} - P_{n-1} P_p$, puis en déduire que $P_{n+p} \wedge P_p = P_n \wedge P_p$.
5) Conclure alors que $P_n \wedge P_p = P_{n \wedge p}$.

EXERCICE 33.10 Montrer que pour $n, p \in \mathbf{N}^*$, on a $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1$. AD

EXERCICE 33.11 (Oral X) D
Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbf{C}[X]$ qui ont mêmes racines, et tels que $P - 1$ et $Q - 1$ aient aussi les mêmes racines.

1) Prouver que $\deg(P \wedge P') + \deg((P - 1) \wedge P') \leqslant \deg P - 1$.
2) En déduire alors que $P = Q$.

▶ Fractions rationnelles

Exercice 33.12 Un scalaire peut-il être à la fois un zéro et un pôle d'une fraction rationnelle ? F

Exercice 33.13 Un air de déjà vu... PD
En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, déterminer tous les polynômes P de $\mathbf{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 33.14 Image d'une fraction rationnelle complexe AD
Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ non constante, et soit A l'ensemble des pôles de F.
Déterminer l'image $\mathbf{C} \setminus A$ par $\widetilde{F}$, la fonction rationnelle associée à F.

Exercice 33.15 Montrer que $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_7} \frac{1}{2-\omega} = \frac{448}{127}$. PD

Exercice 33.16 Soit $n \geqslant 2$. Donner la forme irréductible de la fraction $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \frac{\omega^2}{X-\omega}$. AD

Exercice 33.17 Polynômes de Tchebychev AD

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
2) Déterminer les racines de P_n.
3) Quelle est la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$?

Exercice 33.18 Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, scindé sur $\mathbf{R}$. AD

1) Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P'(x)^2 - P(x)P''(x) \geqslant 0$.
2) En déduire que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 33.19 Zéros des polynômes trigonométriques AD
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ des réel et soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.
En utilisant une formule d'Euler, montrer que soit f est la fonction nulle, soit f s'annule au plus $2n$ fois dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 33.20 Le logarithme n'est pas une fonction rationnelle D
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbf{C}(X)$, irréductible et telle que $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \dfrac{1}{X}$.

1) Justifier que $X \mid Q$.
2) Soit $n \geqslant 1$ tel que $X^n \mid Q$. Prouver que $X^n \mid Q'$.
3) Qu'en déduit-on ?

Exercice 33.21 Théorème de Mason et grand théorème de Fermat pour les polynômes (Oral ENS Cachan) TD

1) Soient A, B, C trois polynômes de $\mathbf{C}[X]$, non constants, premiers entre eux dans leur ensemble, et tels que $A + B = C$.
   On note m le nombre de racines **distinctes** de ABC. Montrer que $A\left(\dfrac{A'}{A} - \dfrac{C'}{C}\right) = B\left(\dfrac{C'}{C} - \dfrac{B'}{B}\right)$.
   En déduire que $\max(\deg A, \deg B, \deg C) < m$.
2) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que s'il existe trois polynômes P, Q, R de $\mathbf{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n = R^n$, alors P, Q et R sont associés.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 33

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.1

1. Il s'agit de faire des divisions euclidiennes successives :

$$A = (X+1)B + \underbrace{(-2X^3 - 10X^2 - 16X - 8)}_{=R_1},\ B = \frac{1}{2}(-X+3)R_1 + \underbrace{9X^2 + 27X + 18}_{=R_2},\ R_1 = R_2\left(-\frac{2}{9}X - \frac{4}{9}\right) + 0.$$

Donc les PGCD de A et B sont les associés à R_2, et donc $A \wedge B$, qui doit être unitaire est $\frac{R_2}{9} = X^2 + 3X + 2$.
Et alors en remontant les calculs,

$$X^2+3X+2 = \frac{1}{9}B + \frac{1}{18}(X-3)R_1 = \frac{1}{9}B + \frac{1}{18}(X-3)\left(A - (X+1)B\right) = \left(\frac{1}{18}X - \frac{1}{6}\right)A + \left(-\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{\ }X + \frac{5}{18}\right)B.$$

2. Sur le même principe, on trouve $A \wedge B = 1$ et

$$1 = A(-X^3) + B(X^5 + X^3 + X + 1).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.2

Si PQ et $P+Q$ sont premiers entre eux, alors par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbf{K}[X]$ tels que $PQU + (P+Q)V = 1$, et alors $P(QU+V) + QV = 1$, donc P et Q sont premiers entre eux.

Inversement, si P et Q sont premiers entre eux, soit $D = (PQ) \wedge (P+Q)$, et soit R un diviseur irréductible de D. Alors R divise PQ, donc divise P ou divise Q.
Mais puisqu'il divise $P+Q$, s'il divise P, alors il divise Q et inversement.
Donc il divise P et Q et donc divise $P \wedge Q = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.3

Plaçons-nous dans l'anneau $\mathbf{Q}[X]$.
Par le théorème de Bézout, il existe deux polynômes U, V à coefficients dans $\mathbf{Q}$ tels que $PU + RV = 1$.
Notons alors m le PGCD[1] des dénominateurs des coefficients de U et V, de sorte que mU et mV sont à coefficients dans $\mathbf{Z}$.
On a alors $PmU + RmV = m$. Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n)mU(n) + R(n)mV(n) = m$, de sorte que $u_n = P(n) \wedge R(n)$ divise m.
Mais m ne possède qu'un nombre fini de diviseurs, et donc (u_n) ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

[1] Mais on aurait tout aussi bien pu prendre le produit.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.4

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ les racines de P, de multiplicité respectives $m_1, \dots, m_n$, de sorte que $P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{m_i}$.
Nous savons qu'il s'agit là de la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.
Et puisque tout facteur irréductible de $P \wedge P'$ est facteur irréductible de P, les seuls facteurs irréductibles de $P \wedge P'$ sont parmi les $X - \alpha_i$.
Nous savons déjà que si $m_i \geqslant 2$, alors α_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$. Donc $(X - \alpha_i)^{m_i - 1}$ divise P', et divise évidemment P.
Inversement, si $(X - \alpha_i)^k$ divise $P \wedge P'$, avec $k \geqslant 1$, alors α_i est racine de P, et est racine de P' de multiplicité supérieur ou égale à k. Donc est racine de P de multiplicité supérieure ou égale à $k+1$.
Et donc $k + 1 \leqslant m_i \Leftrightarrow k \leqslant m_i - 1$. Notons qu'en particulier, $m_i \geqslant 2$.
On en déduit donc que $P \wedge P' = \prod_{i=1 \mid m_i \geqslant 2}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i - 1}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.5

1. Commençons par l'existence d'un tel couple. Partons pour cela d'une relation de Bézout : $AU + BV = 1$.
Soit alors $U = BQ + U_1$ la division euclidienne de U par B, et soit $V_1 = V + AQ$, de sorte que

$$AU_1 + BV_1 = A(U - BQ) + BV + ABQ = AU + BV = 1.$$

Puisqu'on n'a pas $\deg(AU_1 + BV_1) = \max(\deg AU_1, \deg BV_1)$, c'est donc que ces deux polynômes sont de même degré. .
Donc $\deg(V_1) = \deg(AU_1) - \deg(B) = \deg(A) + \underbrace{\deg(U_1) - \deg(B)}_{<0} < \deg(A)$.

Rappel
Si $\deg P \neq \deg Q$, alors
$\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Pour l'unicité, supposons que deux tels couples (U_1, V_1) et (U_2, V_2) existent. Alors

$$AU_1 + BV_1 = 1 = AU_2 + BV_2 \Rightarrow A(U_1 - U_2) = B(V_2 - V_1).$$

Donc A divise $B(V_2 - V_1)$, et étant premier avec B, $A \mid V_2 - V_1$.
Mais $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$, donc $V_2 - V_1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = V_2$.
Et par conséquent, $U_1 - U_2 = 0$, donc $U_1 = U_2$.

2. Commençons par noter que Φ est linéaire : pour $(U_1, V_1), (U_2, V_2)$ dans $\mathbf{K}_{q-1}[X] \times \mathbf{K}_{p-1}[X]$, et pour $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda(U_1, V_1) + (U_2, V_2)) &= \Phi((\lambda U_1 + U_2, \lambda V_1 + V_2)) \\ &= A(\lambda U_1 + U_2) + B(\lambda V_1 + V_2) \\ &= \lambda(AU_1 + BV_1) + (AU_2 + BV_2) \\ &= \lambda\Phi(U_1, V_1) + \Phi(U_2, V_2).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dim \mathbf{K}_{q-1}[X] \times \mathbf{K}_{p-1}[X] = \dim \mathbf{K}_{q-1}[X] + \dim \mathbf{K}_{p-1}[X] = q + p = \dim \mathbf{K}_{p+q-1}[X]$.
Donc Φ est bijective si et seulement si elle est injective.

Si c'est une bijection, alors en particulier, 1 possède un (unique) antécédent (U, V), et donc par Bézout, A et B sont premiers entre eux.
Inversement, si A et B sont premiers entre eux, alors la question précédente prouve que 1 possède un unique antécédent (U_0, V_0) par Φ.
Mais alors , pour $(U, V) \in \mathbf{K}_{q-1}[X] \times \mathbf{K}_{p-1}[X]$, (U, V) est un antécédent de Φ si et seulement si

$$\Phi(U, V) = 1 = \Phi(U_0, V_0) \Leftrightarrow \Phi((U_0 - U, V_0 - V)) = 0 \Leftrightarrow (U_0 - U, V_0 - V) \in \operatorname{Ker} \Phi.$$

Plus généralement
Pour une application linéaire, soit tous les éléments de l'image ont un unique antécédent (et alors on a l'injectivité), soit tous ont une infinité d'antécédents.

Donc l'unicité de l'antécédent de 1 fournie par la première question garantit que $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$.

Et donc Φ est une bijection.
Alternative, ne nécessitant pas la question 1 : supposons P et Q premiers entre eux, et soit $(U, V) \in \operatorname{Ker} \Phi$.
Alors $AU + BV = 0 \Leftrightarrow AU = -BV$. Mais alors, par Gauss, $A \mid V$, et en utilisant de plus les conditions de degré, il vient $V = 0$, puis $A = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} \Phi = \{(0, 0)\}$, si bien que Φ est injective, donc bijective.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.6

1. Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$. Alors ils n'ont aucun diviseur commun non constant à coefficients complexe.
Donc a fortiori, n'ont aucun diviseur commun non constant à coefficients réels, et donc sont premiers entre eux dans $\mathbf{R}[X]$.

Inversement, supposons que P et Q soient premiers entre eux dans $\mathbf{R}[X]$, et raisonnons par l'absurde en supposant que leur PGCD, en tant que polynômes à coefficients complexes ne soit pas égal à 1.
Alors il existe un facteur $D \in \mathbf{C}[X]$, irréductible (dans $\mathbf{C}[X]$) commun à P et Q.
Mais les irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les $X - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $X - \lambda \mid P$ et $X - \lambda \mid Q$, c'est-à-dire tel que λ soit à la fois racine de P et de Q.
Un tel λ ne peut pas être réel, faute de quoi P et Q seraient tous les deux divisibles (dans $\mathbf{R}[X]$) par $X - \lambda$, et donc non premiers entre eux dans $\mathbf{R}[X]$.

Plus généralement
Le même raisonnement prouve que deux polynômes sont premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$ si et seulement si ils n'ont aucune racine complexe commune.

Donc $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, de sorte que $\overline{\lambda}$ est également une racine de P, et de Q.
Donc $X - \lambda \mid P$ et $X - \overline{\lambda} \mid P$. Mais ces deux polynômes sont premiers entre eux, car irréductibles[2] et non associés. Donc $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) \mid P$.
Et de même $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) \mid Q$.
Donc P et Q sont tous deux divisibles par $(X - \lambda)(X - \overline{\lambda}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2 \in \mathbf{R}[X]$.
Et donc P et Q ne sont pas premiers dans $\mathbf{R}[X]$.
Remarque *: il se cache ici une petite subtilité quand on parle de divisibilité, entend-on divisibilité dans $\mathbf{R}[X]$ ou dans $\mathbf{C}[X]$?*
En réalité, peu importe, car si A et B sont deux polynômes à coefficients réels, alors $A \mid B$ dans $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si $A \mid B$ dans $\mathbf{C}[X]$.
L'implication de gauche à droite est évidente. Et réciproquement, si $A = BQ$, avec $Q \in \mathbf{C}[X]$, alors $\overline{A} = \overline{BQ} \Leftrightarrow A = B\overline{Q}$.
Et donc si $B \neq 0$, $\overline{Q} = Q$, donc $Q \in \mathbf{R}[X]$. Et si $Q = 0$, alors $A = 0$, et alors le résultat est trivial.

> **Rappel**
> Si P est un polynôme **à coefficients réels**, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{\lambda}) = 0$.

[2] Comme tous les polynômes de degré 1, et ce quel que soit le corps de base.

2. Notons $D_{\mathbf{R}}$ le PGCD de P et Q dans $\mathbf{R}[X]$ et $D_{\mathbf{C}}$ leur PGCD dans $\mathbf{C}[X]$.
Alors il existe deux polynômes à coefficients réels P_1 et Q_1, premiers entre eux tels que $P = D_{\mathbf{R}}P_1$ et $Q = D_{\mathbf{R}}Q_1$.
Par la question 1, P_1 et Q_1 sont également premiers entre eux dans $\mathbf{C}[X]$, et donc $D_{\mathbf{R}}$ est un PGCD de P et Q dans $\mathbf{C}[X]$. Étant unitaire, c'est **le** PGCD unitaire.
3. Notons que la division euclidienne ne dépend pas du corps choisi. Plus précisément, si $A, B \in \mathbf{R}[X]$, alors leur division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$ est $A = BQ + R$, avec $Q, R \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg R < \deg B$.
Mais alors $A = BQ + R$, avec $Q, R \in \mathbf{C}[X]$ et $\deg R < \deg B$, donc par unicité de la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$, il s'agit là de la division euclidienne, dans $\mathbf{C}[X]$, de A par B.

Ainsi, lorsque P et Q sont à coefficients dans $\mathbf{R}$, notons $R_0 = P$, $R_1 = Q$ et $R_2, \dots, R_n$ les reste successifs des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide appliqué dans $\mathbf{R}[X]$, avec R_n associé à $P \wedge Q$ le dernier reste non nul.
Alors nous avons là aussi des restes de divisions euclidiennes dans $\mathbf{C}[X]$, et l'algorithme d'Euclide étant valable lui aussi dans $\mathbf{C}[X]$, R_n est également associé au PGCD de P et Q en tant que polynômes complexes.
Et donc le PGCD de P et Q est le même qu'on considère P et Q comme polynômes réels ou complexes.

> **Remarque**
> Le même raisonnement est valable dans n'importe quels corps tels que $\mathbf{k} \subset \mathbf{K}$: le PGCD de deux polynômes à coefficients dans $\mathbf{k}$ est le même que l'on considère ces polynômes comme éléments de $\mathbf{k}[X]$ ou de $\mathbf{K}[X]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.7

Notons $D = A \wedge B$. Alors $D^2 = A^2 \wedge B^2$.
En effet, on a $A = DA_1$ et $B = DB_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$.
Donc $A^2 = D^2A_1^2$ et $B^2 = D^2B_1^2$, et A_1^2 et B_1^2 sont premiers entre eux.
Mais comme A^2 est un diviseur commun de A^2 et B^2, donc divise D^2.
Puisque nous avons prouvé ci-dessus que $D^2 \mid A^2$, A^2 et D^2 sont associés, et donc ont même degré.
Donc A et D ont également même degré, et $D \mid A$. Donc A et D sont associés. Puisque $D \mid B$, alors $A \mid B$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.8

1. Il est évident que (P) contient $0 = P \times 0$.
Soient $A, B \in (P)$. Alors il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbf{K}[X]$ tels que $A = PQ_1$ et $B = PQ_2$. Et donc $A - B = P(Q_1 - Q_2) \in (P)$.
Ainsi, (P) est un sous-groupe de $(\mathbf{K}[X], +)$.
Par ailleurs, si $A \in (P)$ et $R \in \mathbf{K}[X]$, alors soit $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = PQ$. Alors $AR = PQR = P(QR) \in (P)$.
Donc (P) est bien un idéal de $\mathbf{K}[X]$.
2. Soit I un idéal de $\mathbf{K}[X]$. Si $I = \{0\}$, alors $I = \{0\}$.
Et si $I \neq \{0\}$, soit P un polynôme de degré minimal parmi les éléments de $I \setminus \{0\}$.
Alors pour $A \in I$, la division euclidienne de A par P est de la forme $A = PQ + R$, avec $\deg R < \deg P$.
Mais $R = A - PQ$, avec $A \in I$, et $P \in I$, donc $PQ \in I$, et donc $R \in I$.
Puisque R est de degré strictement inférieur à P, on a donc $R = 0$, de sorte que $A = PQ \in (P)$.
Et donc $I \subset (P)$. L'inclusion réciproque découle directement du second point de la définition d'idéal, donc $I = (P)$.

Notons que quitte à diviser P par son coefficient dominant (ce qui fournit encore un polynôme dans I, de degré minimal parmi les polynômes non nuls), on peut supposer P unitaire.
Ne reste alors qu'à prouver l'unicité d'un tel P. Mais si P, Q sont deux polynômes unitaires tels que $I = (P) = (Q)$, alors $Q \in (P)$, et donc $P \mid Q$, et de même $Q \mid P$, donc P et Q sont associés. Étant tous deux unitaires, ils sont égaux.

3. La vérification du fait que $(A) + (B)$ et $(A) \cap (B)$ soient des idéaux ne pose pas de problème.
Soit donc P unitaire tel que $(A) + (B) = (P)$. Puisque $A = A + 0 \in (A) + (B) = (P)$, P divise A. Et de même, $P \mid B$. Donc P divise $A \wedge B$.
Et inversement, puisque $A \wedge B$ divise tous les polynômes de la forme $AU + BV$, en particulier il divise P.
Et donc $P = A \wedge B$.

Détails
P est bien de la forme $AU + BV$, puisque par définition, tous les éléments de $(A) + (B)$ sont de cette forme.

De plus (A) étant l'ensemble des multiples de A, $(A) \cap (B)$ est l'ensemble des multiples communs de A et de (B).
Nous savons déjà que $A \vee B$ est un tel multiple, et donc que $(A \vee B) \subset (A) \cap (B)$.
Par ailleurs, un multiple commun de A et de B est un multiple de $A \vee B$, donc $(A) \cap (B) \subset (A \vee B)$, de sorte que $(A) \cap (B) = (A \vee B)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.9

1. Une récurrence rapide[3] prouve que $\deg P_n = n - 1$.
2. Par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on a

$$P_2^2 - P_3 P_1 = X^2 - (X^2 - 1) = 1.$$

Et alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} &= (XP_n - P_{n-1})^2 - P_n(XP_{n+1} - P_n) \\ &= X^2P_n^2 - 2XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 - P_n(X^2P_n - XP_{n-1} - P_n) \\ &= X^2P_n^2 - 2XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 - X^2P_n^2 + XP_nP_{n-1} + P_n^2 \\ &= P_n^2 - XP_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 = P_n^2 - P_{n-1}(XP_n - P_{n-1}) \\ &= P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1}. \end{aligned}$$

3. C'est tout simplement Bézout.
4. Par récurrence sur p. Pour $p = 1$, c'est la définition de F_{n+1}.
Et on a ensuite $Pn + 1 + p = P_{(n+1)+p} = P_{n+1}P_{p+1} - P_nP_p = (XP_n - P_{n-1})P_{p+1} - P_nP_p$.
Et d'autre part,

$$P_nP_{p+2} - P_{n-1}P_{p+1} = P_n(Xp_{p+1} - P_p) - P_{n-1}P_{p+1} = P_{n+p+1}.$$

Un diviseur commun D à P_{n+p} et P_p divise alors P_nP_{p+1}.
Mais $P_{p+1} \wedge P_p = 1$, donc $P_{p+1} \wedge D = 1$, donc par Gauss, $D \mid P_n$. Et donc D divise à la fois P_n et P_p, donc divise leur PGCD.

Réciproquement, un diviseur commun à P_p et P_n divise $P_nP_{p+1} = -P_{n-1}P_p = P_{n+p}$, donc divise $P_p \wedge P_{n+p}$.

5. Supposons $p < n$ et soit $n = pq + r$ la division euclidienne de n par p.
Alors $P_n \wedge P_p = P_{n-p} \wedge P_p = P_{n-2p} \wedge P_p = \cdots = P_{n-qp} \wedge P_p = P_r \wedge P_p$.
Et alors si on note $a_0 = n$, $a_1 = p$ et $a2, \ldots, a_k, 0$ les restes successifs obtenus dans l'algorithme d'Euclide pour le calcul de $n \wedge p = a_k$, on obtient

$$P_n \wedge P_p = P_p \wedge P_{a_1} = \cdots = P_{a_k} \wedge P_0 = P_{a_k} \ = P_{n\wedge p}.$$

[3] Qui nécessite tout de même de se souvenir à quelle condition le degré d'une somme est le degré maximal des deux termes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.10

Rappelons que $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} (X - \omega)$ et de même $X^p - 1 = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_p} (X - \omega)$.
Puisque les racines de $X^n - 1$ sont simples, celles de $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1)$ le sont aussi, et donc$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_p \cap \mathbf{U}_q} (X - \omega)$.

Mais nous avons déjà prouvé dans un exercice du TD d'arithmétique que $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \mathbf{U}_{n\wedge p}$.
Et donc
$$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = \prod_{\omega \in \mathbf{U}_{n\wedge p}} (X - \omega) = X^{n\wedge p} - 1.$$

Alternative : supposons, quitte à inverser n et p, que $n \geqslant p$, et soit $n = pq + r$ la division euclidienne de n par p.
Alors,
$$X^n - 1 = X^{pq+r} - X^r + X^r - 1 = X^r(X^{pq} - 1) + (X^r - 1).$$

Et par la troisième identité remarquable généralisée,
$$X^{pq} - 1 = (X^p - 1)(1 + X^p + \cdots + X^{p(q-1)}).$$

Puisque $\deg(X^r - 1) = r < p = \deg(X^p - 1)$, la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^q - 1$ est donc
$$X^n - 1 = (X^p - 1)X^r(1 + X^p + \cdots + X^{p(q-1)}) + (X^r - 1).$$

Et donc le reste est $X^r - 1$.
Donc par le lemme d'Euclide[4], $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^p - 1) \wedge (X^r - 1)$.
Notons alors $r_1 = r, r_2, \dots, r_k$ les restes successifs obtenus lors du calcul du PGCD de n et p par l'algorithme d'Euclide[5], avec $r_k = n \wedge p$ le dernier reste non nul.
Alors $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = (X^p - 1) \wedge (X^r - 1) = \cdots = (X^{r_{k-1}} - 1) \wedge (X^{r_k} - 1)$.
Et alors on prouve que le reste de la division euclidienne de $X^{r_{k-1}} - 1$ par $X^{r_k} - 1$) est nul (car r_k divise r_{k-1}), et donc par l'algorithme d'Euclide[6], $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{r_k} - 1 = X^{n\wedge p} - 1$.
Si vous avez l'impression d'avoir déjà rencontré ces calculs, allez voir l'exercice 15.12, le raisonnement y est quasiment identique.

[4] Celui qui justifie la validité de l'algorithme d'Euclide.

[5] Dans $\mathbf{Z}$ donc.

[6] Cette fois dans $\mathbf{R}[X]$.

Solution de l'exercice 33.11

Dans la suite, nous noterons $R = P - Q$, le but de l'exercice étant donc de prouver que $R = 0$.

1. Les deux polynômes $P \wedge P'$ et $(P - 1) \wedge P'$ sont des diviseurs de P'.
Mais P et $P - 1$ sont évidemment premiers entre eux[7], et donc $P \wedge P'$ et $(P - 1) \wedge P'$ le sont aussi.
Puisque les deux divisent P', leur produit aussi.
Or, $\deg(P') = \deg(P) - 1$, et donc $\deg(P \wedge P') + \deg((P - 1) \wedge P') \leqslant \deg(P') \leqslant \deg(P) - 1$.
2. Quitte à échanger P et Q, supposons $\deg P \geqslant \deg Q$, de sorte que $\deg R \leqslant \deg P$.
Les racines de P sont donc racines de R. De même, les racines de $P - 1$ sont des racines de R, et ces racines ne peuvent être racines de P.
La clé est alors de reconnaître que P étant scindé, $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$ est le nombre de racines distinctes[8] de P. C'est en fait le résultat de l'exercice 33.4.

Et sur le même principe, puisque P' est aussi le polynôme dérivé de $P - 1$, $\deg(P - 1) - \deg((P - 1) \wedge P')$ est le nombre de racines distinctes de $P - 1$.
Donc nous avons déjà un certain nombre de racines, au moins égal à
$$\deg(P) - \deg(P' \wedge P) + \underbrace{\deg(P - 1)}_{=\deg P} - \deg((P-1)\wedge P') \geqslant 2\deg(P) - (\deg(P) - 1) \geqslant \deg(P) + 1 > \deg(R).$$

Et donc R possède strictement plus de racines que son degré, il est donc nul, de sorte que $P = Q$.

[7] Par Bézout.

[8] Donc comptées sans multiplicités.

Solution de l'exercice 33.12

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbf{K}[X]$ une fraction rationnelle, sous forme irréductible, qui possède $\lambda \in \mathbf{K}$ à la fois comme pôle et comme zéro.
Alors λ est racine de P et de Q en même temps. Et donc P et Q sont tous deux divisibles par $X - \lambda$, ce qui contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux.

Solution de l'exercice 33.13

Nous savons déjà que si $P \in \mathbf{C}[X]$ possède pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$, alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - \lambda_i}$.

Mais par ailleurs, si $P' \mid P$, alors il existe $\lambda, m \in \mathbf{C}$ tel que $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{m}{X-\lambda}$.
Donc par unicité de la décomposition en éléments simples, λ est l'unique racine complexe de P, et m est en fait un entier, égal à la multiplicité de λ.
Et donc $P = \alpha(X-\lambda)^n$, avec α le coefficient dominant de P.

Inversement, tout polynôme de cette forme est tel que $P' \mid P$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.14

Notons $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F, de sorte que A soit l'ensemble des racines de Q.
Il s'agit alors de trouver les $a \in \mathbf{C}$ pour lesquels il existe $x \in \mathbf{C} \setminus A$ tel que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = a \Leftrightarrow P(x) - aQ(x) = 0$, c'est-à-dire tels que $P - aQ$ possède une racine dans $\mathbf{C} \setminus A$.
Notons tout de suite que si $P - aQ$ possède une racine dans $\mathbf{C}$, celle-ci ne peut pas être dans A.
En effet, un élément $z \in A$ est par définition[9] une racine de Q, et s'il est également racine de $P - aQ$, alors il est racine de P. Et donc P et Q sont tous deux divisibles par $X - z$, contredisant l'irréductibilité de F.

[9] D'un pôle.

Donc il s'agit de déterminer pour quels $a \in \mathbf{C}$, $P - aQ$ possède une racine.
Mais par le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme non constant possède au moins une racine.
Or, $P - aQ$ n'est constant que si il existe $b \in \mathbf{C}$ tel que $P - aQ = b \Leftrightarrow = aQ + b$.
Dans ce cas, $P - aQ$ n'a pas de racine, donc a n'a pas d'antécédent.
En revanche, pour $a' \neq a$, $P - a'Q$ n'est pas constant, et donc a' possède un antécédent par F.
Donc si $P = aQ + b$, alors $\operatorname{Im} F = \mathbf{C} \setminus \{a\}$.
Et si P n'est pas de la forme $aQ + b$, alors F est surjective.

Remarque
b ne peut pas être nul, faute de quoi $F = \dfrac{aQ}{Q} = a$ serait constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.15

Notons $R(X)$ la fraction rationnelle définie par $R(X) = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_7} \frac{1}{X-\omega}$.
Il est alors classique que si $P(X) = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbf{U}_7} (X-\omega)$, alors $R(X) = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$.
Et donc $R(3) = \dfrac{P'(2)}{P(2)}$.
Or, toutes les racines 7èmes de l'unité vérifient $\omega^7 = 1$, et sont donc racines de $X^7 - 1$.
Ainsi, $X^7 - 1$ est divisible par P. Mais puisqu'il possède même degré que P, et même coefficient dominant, $X^7 - 1 = P$.
Et donc $P'(X) = 7X^6$, de sorte que

$$\sum_{\omega \in \mathbf{U}_7} \frac{1}{2-\omega} = R(2) = \frac{P'(2)}{P(2)} = \frac{7 \times 2^6}{2^7 - 1} = \frac{448}{127}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.16

Notons $F = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \frac{\omega^2}{X-\omega}$, et cherchons à exprimer F sous la forme $\dfrac{P}{Q}$. Puisque F ne possède que les éléments de $\mathbf{U}_n$ comme pôles, tous simples, Q peut être pris sous la forme $Q = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbf{U}_n} (X-\omega) = X^n - 1$.
Les pôles étant simples, leur partie polaire est alors $\dfrac{P(\omega)}{Q'(\omega)(X-\omega)}$.
Par unicité de la partie polaire, on a donc $\dfrac{P(\omega)}{Q'(\omega)} = \omega^2 \Leftrightarrow P(\omega) = n\omega^{n-1}\omega^2 = n\omega^{n+1} = n\omega$.
Mais puisque $\deg F \leqslant -1$, et que $\deg Q = n$, $\deg P \leqslant n-1$.
Donc $P(X) - nX$ possède n racines, et est de degré au plus $n-1$: il est nul, et donc $P = nX$, de sorte que la fraction cherchée est $\dfrac{nX}{X^n - 1}$.
Et notons alors que cette fraction est bien irréductible.

Remarque
Si on veut vraiment la forme irréductible, peut être que le dénominateur ne sera qu'un diviseur de ce polynôme. Mais nous verrons cela en temps voulu.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.17

1. Nous savons[10] que $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right)$.
Mais en utilisant la formule du binôme, il vient

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\sin x)^k(\cos x)^{n-k}\right).$$

Les termes réels sont ceux pour k pair, c'est-à-dire les $k = 2p$, avec $0 \leqslant p \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Donc

$$\cos(nx) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p\sin^{2p}(x)(\cos x)^{n-2p} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-\cos^2(x))^p(\cos x)^{n-2p}.$$

Donc le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p(1-X^2)^pX^{n-2p}$ convient .

Prouvons que c'est le seul : si P et Q sont deux tels polynômes, la fonction cos ayant pour image $[-1,1]$, alors pour tout $x \in [-1,1]$, $P(x) = Q(x)$.
Donc $P - Q$ possède une infinité de racines, et donc est nul.

2. Les $x_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont des racines de P_n, deux à deux distinctes car cos est injective sur $[0,\pi]$.

3. Puisque $\dfrac{1}{P_n}$ n'a que des pôles simples, on peut utiliser une formule vue en cours[11] :

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{P'(x_k)(X-x_k)}.$$

Mais en dérivant par rapport à θ la relation $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, on obtient

$$-\sin(\theta)P_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta).$$

En particulier, pour $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$, on a $\sin(n\theta) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$.
Et donc $P_n'(x_k) = \dfrac{(-1)^k n}{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$.
On en déduit que

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}{n(X-x_k)}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.18

1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines éventuellement confondues[12] de P.
Alors pour $x \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$.
Et donc par dérivation de cette relation, pour $x \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,
$\dfrac{P'(x)^2 - P(x)P''(x)}{P(x)^2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2} \geqslant 0$, si bien que $P'(x)^2 - P(x)P''(x) \geqslant 0$.
Par continuité, cette relation reste évidemment valable en les λ_i.

2. Il est classique[13] que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé sur $\mathbf{R}$, alors P' l'est aussi, et donc pour tout $k \leqslant \deg P$, $P^{(k)}$ est scindé.

Soit donc $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors en appliquant le résultat de la question précédente à $P^{(k-1)}$, et en évaluant en 0, il vient

$$(k!a_k)^2 - (k+1)!(k-1)!a_{k+1}a_{k-1} \geqslant 0.$$

Soit encore $ka_k^2 - (k+1)a_{k+1}a_{k-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow k(a_k^2 - a_{k+1}a_{k-1}) \geqslant a_{k+1}a_{k-1}$.

Si $a_{k+1}a_{k-1} \leqslant 0$, l'inégalité demandée est triviale. Et sinon, il suffit de repartir de celle que nous venons de prouver en notant que $a_{k+1}a_{k-1} \geqslant 0$.

[10] C'est la formule de Moivre.

[11] Celle qui donne la partie polaire d'un pôle simple.

[12] En cas de racine multiple.

[13] Cela découle de Rolle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.19

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\left(e^{ik\theta}+\frac{1}{e^{ik\theta}}\right)+\frac{b_k}{i}\left(e^{ik\theta}-\frac{1}{e^{ik\theta}}\right)\right)$.

Soit donc $F(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\left(X^k+\frac{1}{X^k}\right)+\frac{b_k}{i}\left(X^k-\frac{1}{X^k}\right)\right)$, de sorte que pour $\theta \in \mathbf{R}$, $f(\theta) = R(e^{i\theta})$.

On a alors $X^nF = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[(a_k-ib_k)X^{n+k}+(a_k+ib_k)X^{n-k}\right] \in \mathbf{C}_{2n}[X]$.
Notons donc P ce polynôme.

► Si P n'est pas le polynôme nul, supposons par l'absurde que f s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$, en $\theta_1, \dots, \theta_{2n+1}$.
Alors, la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ étant injective sur $[0, 2\pi[$, F s'annule également $2n+1$ fois, en $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{2n+1}}$.
Donc P possède $2n+1$ racines distinctes, ce qui est absurde puisque $\deg P \leqslant 2n$.

> **⚠ Attention !**
> Si on ne mentionne pas l'injectivité, rien ne justifie que les racines de F soient distinctes.
> Donc il n'y a pas de contradiction.

► Si P est le polynôme nul, alors $F = 0$, et donc pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $f(\theta) = F(e^{i\theta}) = 0$, et donc f est la fonction nulle.

Remarque : il n'est pas beaucoup plus difficile de constater que P est nul si et seulement si $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0$.
En revanche, le b_0 ne sert à rien, puisqu'il apparaît dans la somme multiplié par $\sin(0x) = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.20

1. Si $F' = \dfrac{1}{X}$, alors $X(P'Q - PQ') = Q^2$, si bien que $X \mid Q^2$.
   Mais alors $X \mid Q$.

> **Détails**
> Plusieurs arguments peuvent être invoqués ici, par exemple l'irréductibilité de X dans $\mathbf{C}[X]$, qui divise donc un produit si et seulement si il divise l'un des termes.
> Ou encore le fait qu'un polynôme est divisible par X si et seulement si il s'annule en 0.

2. Si $X^n \mid Q$, alors $X^{2n} \mid Q^2 = X(P'Q - PQ')$.
   Donc $X^{2n-1} \mid P'Q - PQ'$. Et donc, puisque $2n-1 \geqslant n$, $X^n \mid P'Q - PQ'$.
   Puisque par ailleurs, il est clair que $X^n \mid P'Q$, nécessairement $X^n \mid PQ'$.

   Puisque nous avons supposé $n \geqslant 1$, $X \mid Q$, et P et Q étant premiers entre eux, $X \wedge P = 1$, si bien que $X^n \wedge P = 1$.
   Et donc par le lemme de Gauss, $X^n \mid Q'$.
3. Il s'agit de prouver qu'une telle fraction F n'existe tout simplement pas. En effet, si $F = \frac{P}{Q}$ convient, nous avons prouvé dans la question 1) que nécessairement $X \mid Q$.
   Notons alors $n \geqslant 1$ la multiplicité de 0 en tant que racine de Q. Alors la multiplicité de 0 en tant que racine de Q' est aussi supérieure ou égale à n. Donc la multiplicité de 0 en tant que racine de Q est supérieure ou égale à $n+1$, ce qui est absurde.
   Donc une telle fraction rationnelle F n'existe pas.

SOLUTION DE L'EXERCICE 33.21

1. Puisque $A + B = C$, on a par dérivation $A' + B' = C'$, et donc $\dfrac{A'+B'}{A+B} = \dfrac{C'}{C}$. Soit encore

$$(A+B)\frac{C'}{C} = A' + B' = A\frac{A'}{A} + B\frac{B'}{B} \Leftrightarrow A\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right) = B\left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B}\right).$$

   Les polynômes A, B, C sont uniquement supposés premiers entre eux dans leur ensemble, mais ils sont alors nécessairement premiers entre eux deux à deux.
   En effet, si deux d'entre eux avaient un facteur irréductible commun[14], alors la relation $A + B = C$ montre que le facteur en question divise à la fois A, B et C.
   Notons

$$A = \alpha\prod_{i=1}^{n_A}(X-a_i)^{\alpha_i},\ B = \beta\prod_{i=1}^{n_B}(X-b_i)^{\beta_i},\ C = \gamma\prod_{i=1}^{n_C}(X-c_i)^{\gamma_i}$$

   les décompositions de A, B et C en produits de facteurs irréductibles, où les a_i (resp. b_i et c_i sont supposés deux à deux distincts).

[14] Qui rappelons-le, dans $\mathbf{C}[X]$ signifie une racine commune.

Alors nous savons que les décompositions en éléments simples de $\frac{A'}{A}$, $\frac{B'}{B}$ et $\frac{C'}{C}$ sont les suivantes :

$$\frac{A'}{A} = \sum_{i=1}^{n_A} \frac{\alpha_i}{X-a_i},\ \frac{B'}{B} = \sum_{i=1}^{n_B} \frac{\beta_i}{X-b_i} \text{ et } \frac{C'}{C} = \sum_{i=1}^{n_C} \frac{\gamma_i}{X-c_i}.$$

Un dénominateur commun à ces trois fractions est $D = \prod_{i=1}^{n_A}(X-a_i)\prod_{i=1}^{n_B}(X-b_i)\prod_{i=1}^{n_C}(X-c_i)$, qui est de degré $n_A + n_B + n_C$.

Il existe donc P et Q deux polynômes tels que $\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} = \frac{P}{D}$ et $\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} = \frac{Q}{D}$.

Puisque $\deg\left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C}\right)$ est égal à -1, on a donc $\deg P = \deg D - 1$. Et de même pour $\deg Q$.

Mais alors l'égalité précédemment prouvée nous donne $AP = BQ$, et par le lemme de Gauss, A qui est premier avec B doit diviser Q, et de même, $B \mid P$.

Donc $\deg A \leqslant \deg D - 1$ et $\deg B \leqslant \deg D - 1$. Donc de même, $C \leqslant \deg D - 1$.

Donc $\max(\deg A, \deg B, \deg C) \leqslant \deg(D) - 1 < \deg D$.

Puisque $\deg D$ n'est rien d'autre que le m de l'énoncé, on a donc bien l'inégalité voulue.

2. Soient(P,Q,R) trois polynômes non nuls tels que $P^n + Q^n = R^n$, et soit D leur PGCD.
Il existe donc trois polynômes P_1, Q_1, R_1, premiers dans leur ensemble tels que $P = DP_1$, $Q = DQ_1$ et $R = DR_1$.

En divisant par D^n, on a donc $P_1^n + Q_1^n = R_1^n$.

Supposons R_1 constant, et notons $\zeta = e^{i\frac{\pi}{n}}$, qui est une racine $n^{\text{ème}}$ de -1.

. Alors $P_1^n + Q_1^n = P_1^n - ((\zeta Q)^n = \prod_{k=1}^{n}(P_1 - \zeta^k Q_1)$.

Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P_1 - \zeta^k Q_1$ est constant, ce qui signifie[15] que P_1 et Q_1 sont constants.

[15] Regarder les coefficients dominants.

De même, si P_1 est constant, $P_1^n = R_1^n - Q_1^n = R_1^n + (\zeta Q_1)^n$, et alors le même argument prouve que Q_1 et R_1 sont constants.

Donc si l'un des trois polynômes P_1, Q_1, R_1 est constant, les trois le sont, et donc P, Q et R sont associés.

Supposons P_1, Q_1, R_1 non constants, et appliquons alors le résultat de la question précédente :

$$\max(\deg P_1^n, \deg Q_1^n, \deg R_1^n) < m$$

où m est le nombre de racines distinctes de $(P_1Q_1R_1)^n$.

Or $(P_1Q_1R_1)^n$ a mêmes racines que $P_1Q_1R_1$.

Et les polynômes étant premiers entre eux, ils n"existe pas de racine commune à P_1, Q_1 et R_1.

De plus, il n'existe pas non plus de racine commune à deux d'entre eux, puisque si par exemple $\alpha \in \mathbf{C}$ est une racine de P_1 et R_1, alors $Q_1^n(\alpha) = R_1^n(\alpha) - P_1^n(\alpha) = 0$, ce qui est absurde.

Donc m est égal au nombre de racines de P_1, plus le nombre de racines de Q_1, plus le nombre de racines de Q_1.

En notant $r(P_1)$ le nombre de racines de P_1, on a donc prouvé que

$$r(P_1)+r(Q_1)+r(R_1) > \max(\deg P_1^n, \deg Q_1^n, \deg R_1^n) = n\max(\deg P_1, \deg Q_1, \deg R_1) \geqslant 3\max(\deg(P_1), \deg(Q_1), \deg(R_1)).$$

Puisqu'on a évidemment $\deg(P_1) \geqslant r(P_1)$, et de même pour Q_1 et R_1, il vient donc $\deg(P_1) + \deg(Q_1) + \deg(Q_1) > 3\max(\deg P_1, \deg Q_1, \deg R_1)$, ce qui est absurde.

Ainsi, si $P^n + Q^n = R^n$, alors P, Q et R sont associés.

Remarque *: il s'agit là d'une version polynomiale du théorème de Fermat qui affirme que pour $n \geqslant 3$, les seules solutions entières » de $a^n + b^n = c^n$ sont les solutions triviales*[16]
Ici, il y a davantage de solutions triviales, à savoir tous les triplets de la forme $(\alpha D, \beta D, \gamma D)$, avec $D \in \mathbf{C}[X]$ et α, β, γ des complexes tels que $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$.

[16] Avec $abc = 0$.

34

Familles sommables

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de somme infinie à un cadre un peu plus général que celui des séries, par exemple considérer des sommes infinies de suites indexées par $\mathbf{Z}$, comme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n^2+1}$, voire de sommes doubles infinies comme $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \frac{1}{n!p!}$.
Une raison parmi d'autres de vouloir définir de telles sommes vient des probabilités : cette année nous n'avons travaillé que sur des espaces finis, mais on peut aussi vouloir considérer des variables aléatoires qui prennent une infinité de valeurs. Par exemple : on lance un dé jusqu'à obtenir un «1» et on note X le nombre d'essais nécessaires. Alors $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
Dès lors, pour définir l'espérance, il va nous falloir être capable de donner un sens à $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$, qui est une somme infinie.

Dans l'exemple ci-dessus, vous me direz[1] que cela a déjà été fait, et qu'il s'agit de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n)$, sous réserve que cette série converge.

[1] À juste titre.

D'accord, mais si on considère X et Y deux variables suivant la loi ci-dessus, et qu'on pose $Z = X - Y$. Alors Z est à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Pour parler de son espérance, il va falloir être capable de donner un sens à $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} n\mathbf{P}(Z = n)$.
Bien entendu, on doit pouvoir se dire qu'il suffit de couper en deux séries, par exemple $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(Z = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-n)\mathbf{P}(Z = -n)$.

Allons plus loin, toujours avec X et Y comme ci-dessus, posons $R = \dfrac{X}{Y}$. Cette fois R prend ses valeurs dans $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+^*$, et la somme infinie qui définirait l'espérance semble bien plus dure à définir...

Enfin, une autre bonne raison de vouloir étudier de telles sommes est qu'on aimerait se détacher de l'ordre dans lequel sont sommés les termes dans une série : on considère $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$. Que se passe-t-il si on réordonne les nombres ?
On souhaiterait que cela ne change rien, puisqu'au final, on somme toujours les mêmes nombres, bien que dans un autre ordre, et la commutativité du produit nous dit que cela devrait ne rien changer[2].
Un exemple dérangeant était d'ailleurs contenu dans un exercice du TD de séries : en posant $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2)$, mais il existe $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ bijective telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{\ln(2)}{2}$.
Dès lors, quel sens donner à $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$? La réponse sera simple : nous ne définirons pas cette somme...

[2] En tous cas c'est ce qu'elle nous dit pour les sommes **finies**.
Mais notre bon sens souhaiterait que cela reste vrai pour des sommes infinies.

Définition 34.1 – Si I est un ensemble, on note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **finies** de I.

34.1 FAMILLES SOMMABLES DE RÉELS POSITIFS

34.1.1 L'ensemble $[0,+\infty]$

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$, partie de $\overline{\mathbf{R}}$.
Alors nous savons qu'il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, avec pour tout $x \in [0,+\infty]$, $x \leqslant +\infty$.

Si A est une partie de $[0,+\infty]$, deux cas de figure se présentent :

- soit $+\infty \in A$, auquel cas c'est le plus grand élément de A.
- soit A est une partie de $\mathbf{R}$. Et alors :
  1. soit A est majorée (en tant que partie de $\mathbf{R}$), et donc possède une borne supérieure $m \in \mathbf{R}$, qui est donc aussi la borne supérieure[3] de A en tant que partie de $[0,+\infty]$.
  2. soit A n'est pas majorée. Et alors $+\infty$ est bien un majorant de A dans $[0,+\infty]$, et c'est le seul, donc le plus petit des majorants.

Dans tous les cas, A possède une borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

[3] Donc le plus petit des majorants.

Nous utiliserons dans la suite les opérations usuelles sur les réels strictement positifs : $x+(+\infty) = +\infty$, $x\times(+\infty) = +\infty$ si $x \neq 0$, et nous ajouterons le un peu moins classique[4] : $0\times(+\infty) = 0$.

[4] Car il ne nous plaît pas en termes de limites : $0\times(+\infty)$ est une forme indéterminée.

34.1.2 Somme d'une famille de réels positifs

La notion de convergence d'une série reposait essentiellement sur le fait que les sommes partielles étaient bien définies.
Sur le même principe, pour tout famille de réels, et donc en particulier pour toute famille de réels positifs, la somme d'un nombre fini de termes est toujours bien définie.
Utilisons ces sommes finies pour définir des sommes infinies :

Définition 34.2 – Soit I un ensemble, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I.

On note alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\} \in [0,+\infty]$.

► Si I est un ensemble fini, alors pour tout $J\subset I$, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_j + \underbrace{\sum_{k\in I\setminus J} u_k}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{j\in J} u_j.$$

Et puisque par ailleurs, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est un élément de $\displaystyle\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$, c'en est donc le plus grand élément.
Donc la notation $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ correspond bien à celle que l'on connaissait déjà.

► Lorsque $I=\mathbf{N}$, on a donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs.
En particulier, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $J_n = [\![0,n]\!]$ est une partie finie de I, et donc

$$S_n = \sum_{j\in J_n} u_i = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Puisque par ailleurs, pour toute partie finie $J\subset\mathbf{N}$, il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $J\subset J_n$, on a donc[5] $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j \leqslant \sum_{j\in J_n} u_j$.

[5] Par positivité des termes de la suite.

Et donc $\displaystyle\sup\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J\in\mathscr{P}_f(\mathbf{N})\right\} = \sup\{S_n,\ n\in\mathbf{N}\}$.

Or, il est bien connu que la suite (S_n) est majorée si et seulement si la série de terme général u_n converge, et que lorsque c'est le cas, par le théorème de la limite monotone, $\sup\{S_n,\ n \in \mathbf{N}\} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On a donc $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ si cette série converge, et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n = +\infty$ sinon.

Définition 34.3 – Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite **sommable** si $\sum\limits_{i\in I} u_i \in \mathbf{R}_+$, soit encore si $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$.

Remarque. Puisque $\left\{\sum\limits_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$, elle possède une borne supérieure dans $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est majorée.
Donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum\limits_{j\in J} u_i \leqslant M$.

► Par ce qui a été dit précédemment, dans le cas où $I = \mathbf{N}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si la série de terme général u_n converge, et dans ce cas, $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

► Si $\sigma : I_1 \to I_2$ est une bijection, alors $\widetilde{\sigma} : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}_f(I_1) & \longrightarrow & \mathscr{P}_f(I_2) \\ J & \longmapsto & \sigma(J) \end{array}\right.$ est une bijection, si bien que pour toute famille $(u_i)_{i\in I_2}$ de réels positifs,

$$\left\{\sum_{j\in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I_2)\right\} = \left\{\sum_{j\in\sigma^{-1}(J)} u_{\sigma(j)},\ J \in \mathscr{P}_f(I_2)\right\} = \left\{\sum_{j\in J} u_{\sigma(j)},\ J \in \mathscr{P}_f(I_1)\right\}.$$

Et donc ces ensembles ont la même borne supérieure[6].
Par conséquent, la famille $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et lorsque c'est le cas $\sum\limits_{i\in I_2} u_i = \sum\limits_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}$.

Cela signifie notamment que pour une série **à termes positifs**, modifier l'ordre des termes[7] ne change pas la nature de la série, et en cas de convergence, ne change pas la somme de la série.
Ce n'est pas toujours le cas[8] pour des séries à termes de signe quelconque.
Une autre conséquence est que lorsque I est en bijection avec $\mathbf{N}$, pour étudier la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$, il suffit de considérer une bijection $\sigma : \mathbf{N} \to I$, et d'étudier la nature de la série $\sum u_{\sigma(n)}$. Et donc il est possible d'utiliser tous les outils propres aux séries.

[6] Dans $[0, +\infty]$.

[7] Cela revient à prendre σ une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$.

[8] Voir les exercices difficiles de la fin du TD de séries numériques pour les détails.

34.1.3 Propriétés de la somme

Proposition 34.4 : *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par un même ensemble I.*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$, $\sum\limits_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum\limits_{i\in I} u_i$.*
2. *$\sum\limits_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum\limits_{i\in I} u_i + \sum\limits_{i\in I} v_i$.*

Démonstration. 1. pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum\limits_{i\in J} \lambda u_i = \lambda \sum\limits_{i\in J} u_i$, si bien que par passage à la borne supérieure, $\sum\limits_{i\in I} \lambda u_i \leqslant \lambda \sum\limits_{i\in I} u_i$.
Si $\lambda = 0$, il y a évidemment égalité.

Et si $\lambda \neq 0$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} \frac{1}{\lambda}\lambda u_i \leqslant \frac{1}{\lambda}\sum_{i\in I}\lambda u_i$, si bien que

$$\lambda \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} \lambda u_i.$$

Donc par double inégalité, on a bien l'égalité annoncée.

2. Sur le même principe : pour $J \in \mathcal{P}_f(I)$, $\displaystyle\sum_{i\in J}(u_i+v_i) = \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in J} v_i$, et donc en particulier, $\displaystyle\sum_{i\in}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

   Autrement dit, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$ est un majorant de $\left\{\displaystyle\sum_{i\in J}(u_i+v_i),\ J\in\mathcal{P}_f(I)\right\}$, et donc par définition d'une bornée supérieure[9], $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

   Inversement, si $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = +\infty$, il n'y a rien à prouver.

   Sinon, puisque pour tout $i \in I$, $0 \leqslant u_i \leqslant u_i + v_i$ et $0 \leqslant v_i \leqslant u_i + v_i$, alors les deux autres sommes sont également finies.

   Fixons alors $\varepsilon > 0$, et soit $J_u \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que $\displaystyle\sum_{i\in J_u} u_i \geqslant \sum_{i\in I} u_i - \varepsilon$.

   Et de même, il existe $J_v \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que $\displaystyle\sum_{i\in J_v} v_i \geqslant \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon$.

   Soit alors $J = J_u \cup J_v$. Puisque $J_u \subset J$, on a

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_u} u_i \leqslant \sum_{i\in J} u_i.$$

   Et de même $\displaystyle\sum_{i\in I} v_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} v_i$.

   Et donc

$$\sum_{i\in I}(u_i+v_i) - 2\varepsilon \leqslant \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in J} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

□

> **Détails**
> Les sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i$ pour $J \in \mathcal{P}_f(I)$ sont majorées par $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) < +\infty$.

> **Détails**
> L'existence d'un tel J_u est garantie par la caractérisation des bornes supérieures (dans $\mathbf{R}$).

Corollaire 34.5 – *Avec les hypothèses précédentes :*
1. *si $\lambda > 0$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable.*
2. *$(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le sont.*

Démonstration. Pour le second point, il suffit de noter qu'une somme de deux éléments de $[0,+\infty]$ est un réel si et seulement si les deux termes de la somme sont des réels. □

Remarque. Ce dernier point est déjà une différence avec les séries, car nous savons que la somme de deux séries divergentes peut être convergente.
Ce que dit la proposition précédente, lorsque $I = \mathbf{N}$, c'est qu'un tel cas de figure n'est pas possible s'il s'agit de deux séries à termes positifs.

34.1.4 Sommation par paquets

Proposition 34.6 : *Soit J une partie de I, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. Alors $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.*
En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ l'est.

Démonstration. Une partie finie de J est une partie finie de I. □

Proposition 34.7 : *Soit I un ensemble, et soient I_1, I_2 deux ensembles non vides disjoints tels que $I = I_1 \cup I_2$.*
Soit alors $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par I. Alors $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i$.
En particulier, $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I_1}$ et $(u_i)_{i\in I_2}$ le sont.

Autrement dit
On se donne une partition de I.

Démonstration. Notons, pour tout $i \in I$,

$$v_i = \mathbb{1}_{I_1}(i)u_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \in I_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } w_i = \mathbb{1}_{I_2}(i)u_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \in I_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors $u_i = v_i + w_i$.
On a alors

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I_1)\right\} = \left\{\sum_{i\in J} v_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$$

Détails
Pour toute partie finie J de I, $\sum_{i\in J} v_i$ est égale à

$$\sum_{i\in J\cap I_1} u_i.$$

si bien que par passage à la borne supérieure $\sum_{i\in I_1} u_i = \sum_{i\in I} v_i$.
Et de même, $\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I} w_i$.
Par la proposition précédente, on a donc

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} v_i + \sum_{i\in I} w_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i.$$

□

Remarque. Le résultat s'étend sans difficulté par récurrence à une partition **finie** de I sous la forme $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, les ensembles étant deux à deux disjoints.

Exemple 34.8

Admettons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

En d'autres termes, cela signifie que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Mais $\mathbf{N}^* = A_1 \cup A_2$, avec $A_1 = \{2k,\ k \in \mathbf{N}^*\}$ et $A_2 = \{2k+1,\ k \in \mathbf{N}\}$.

Donc $\displaystyle\sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} + \sum_{p\in A_2} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Mais $k \mapsto 2k$ est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur A_1, si bien que

$$\sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{1}{16}\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^4}.$$

Et donc $\displaystyle\sum_{p\in A_2} \frac{1}{p^4} = \sum_{p\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{p^4} - \sum_{p\in A_1} \frac{1}{p^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}$.

Ce qui s'écrit encore $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Remarque
Ce résultat a été prouvé dans le dernier DS.

Dans la suite, on étend un peu le cadre utilisé précédemment, en s'autorisant à considérer des sommes d'éléments de $[0, +\infty]$, éventuellement égaux à $+\infty$.
Dans ce cas, si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par I, et si il existe $i \in I$ tel que $u_i = +\infty$, alors on pose $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Théorème 34.9 (Théorème de sommation par paquets) : *Soit I un ensemble, et soit $\{I_k,\ k \in K\}$ une partition de I.*
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right).$$

Remarque. L'intuition est assez simple : on a partitionné I en «petits paquets», qui sont les I_k.
Pour calculer la somme sur I, il suffit de le faire pour chaque paquet, puis de sommer les «petites» sommes[10] ainsi obtenues.

[10] Les sommes sur chaque paquet.

Démonstration. Soit $L \in \mathscr{P}_f(K)$. Alors par la proposition précédente[11],

[11] Et surtout la remarque qui la suit.

$$\sum_{k\in L}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right) = \sum_{i\in\bigcup_{k\in L} I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Et donc déjà, $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Inversement, pour $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $K_J = \{k \in K \mid J \cap I_k \neq \emptyset\}$ est fini.
Et par conséquent,

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{k\in K_J}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right) \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i.$$

Et donc $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$. □

Corollaire 34.10 : *Avec les hypothèses précédentes, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :*

1. *pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable*
2. *la famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, nous avons déjà dit que pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ l'est, et puisque

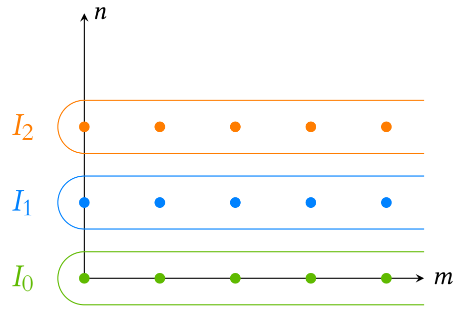
$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i = \sum_{i\in I} u_i < +\infty$$

la famille des $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable.

$\boxed{\Leftarrow}$ Inversement, on suppose donc que $\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i < +\infty$, et donc par le théorème de sommation par paquets, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, si bien que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. □

Exemple 34.11

- Prenons $I = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, et pour $(m,n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $u_{m,n} = \dfrac{2^m}{m!n!}$.



Alors si on pose

$$I_n = \{(m, n), m \in \mathbf{N}\}$$

on a bien $I = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$, avec les I_n deux à deux disjoints.

Pour $n \in \mathbf{N}$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable car $\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n} = \sum_{m\in\mathbf{N}} \frac{2^m}{m!n!} = \frac{1}{n!}\sum_m \frac{2^m}{m!}$ est sommable puisque $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!} = e^2$.

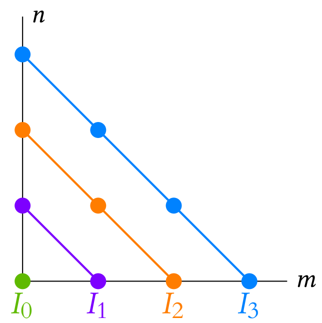
On a donc $\sum_{(m,n)\in I_n} u_{m,n} = \frac{e^2}{n!}$.

Mais alors $\sum_n \frac{e^2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^2}{n!} = e^2 e = e^3$.

Donc $\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} u_{m,n} = e^3$, et en particulier, $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est sommable.

• Toujours avec $I = \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, posons $u_{m,n} = \frac{1}{(m+n)!}$.

Les «paquets» employés à la question précédente ne sont probablement pas pertinents ici, puisqu'on ne saura pas calculer, à n fixé, $\sum_{m\in\mathbf{N}} \frac{1}{(m+n)!}$.



Posons cette fois, pour $k \in \mathbf{N}$

$$I_k = \{(m, n) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} : m+n = k\}$$

On a bien $I = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} I_k$, avec les I_k deux à deux disjoints. Notons que cette fois, les I_k sont finis.

Pour $k \in \mathbf{N}$, la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in I_k}$ est sommable car elle est finie. De plus,

On a $\mathrm{Card}(I_k) = k+1$, ce dont on se convainc facilement sur le dessin.

$$\sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n)!} = \sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{k!} = \frac{\mathrm{Card}(I_k)}{k!} = \frac{k+1}{k!}.$$

Ensuite, la série $\sum_k \frac{k+1}{k!} = \sum_k \left(\frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!}\right)$ est convergente, donc la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ est sommable, et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \frac{1}{(m+n)!} = \sum_{k\in\mathbf{N}}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!}\right) = 2e.$$

Même sans pouvoir calculer la somme, un des intérêts de ce résultat est de pouvoir étudier la sommabilité d'une famille.

Exemple 34.12

Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, posons $u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q)^3}$.
Pour $k \geqslant 2$, notons $I_k = \{(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid p+q=k\}$.
Alors pour tout k, I_k est fini de cardinal $k-1$, les I_k sont deux à deux disjoints, et $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty} I_k = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.
Les I_k étant finis, la sommabilité de $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_k}$ est triviale, mais de plus, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\sum_{(p,q)\in I_k} u_{p,q} = \sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{(p+q)^3} = \sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{k^3} = \frac{k-1}{k^3}.$$

Et puisque la série de terme général $\dfrac{k-1}{k^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2}$ converge, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.

34.2 FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES

Définition 34.13 – Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par I.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Notons que dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} |u_n| < +\infty$, soit si et seulement si la série de terme général u_n est **absolument convergente**.

Définition 34.14 – Soit $\mathbf{K}$ l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On note $\ell^1(I,\mathbf{K})$ l'ensemble des familles sommables indicées par I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

34.2.1 Somme d'une famille sommable

Si x est un réel, on note $x^+ = \max(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x^- = \max(-x,0) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Ainsi, x^+ et x^- sont deux réels positifs, et on a toujours $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Proposition 34.15 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de **réels**.*
Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles (positives) $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. On a, pour tout $i \in I$, et tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$,

$$\sum_{i\in J} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in J} |u_i| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$$

et de même pour $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i^-$.

$\boxed{\Leftarrow}$. Si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(|u_i|)_{i\in I} = \left(u_i^+ + u_i^-\right)_{i\in I}$ est sommable. □

Définition 34.16 – Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de **réels**.
On pose alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.

Dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, les deux séries[12] de termes généraux u_n^+ et u_n^- sont convergentes.
Et on a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n^+ - \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n^+ - u_n^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Notons que dans le cas où la série de terme général $|u_n|$ diverge, on ne donne pas de sens à la notation $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$, alors que la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ peut éventuellement en avoir un, si la série de terme général u_n converge.

Donc par exemple, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas défini, alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ existe[13], par le critère des séries alternées.

En revanche, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n!}$ existe puisque la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente, et on a

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

[12] À termes positifs.

[13] Et vaut $\ln(2)$.

Proposition 34.17 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.*
Alors les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables.

Démonstration. Adapter la preuve donnée pour u_i^+ et u_i^- en notant que pour tout $i \in I$, $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_i)| \leqslant |u_i|$ et $|\mathrm{Im}(u_i)| \leqslant |u_i| \leqslant |\mathrm{Re}(u_i)| + |\mathrm{Im}(u_i)|$. □

Définition 34.18 – Soit $(u_j)_{j\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.
On pose alors $\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$.

Notations
Nous avons du (à regret) abandonner i pour nos indices, afin de le réserver à la racine carrée de -1 dont nous avons l'habitude.

Encore une fois, dans le cas où $I = \mathbf{N}$, et où la série de terme général u_n est absolument convergente, on retrouve $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

34.2.2 Propriétés de la somme

Proposition 34.19 : *Soit $\sigma : I_1 \to I_2$ une bijection entre deux ensembles, et $(u_i)_{i\in I_2}$ une famille de complexes.*
Alors $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et si c'est le cas,

$$\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}.$$

Démonstration. Commençons par le cas d'une famille réelle.
Alors $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i\in I_2}$ et $(u_i^-)_{i\in I_2}$ le sont.
Mais nous savons[14] que c'est le cas si et seulement si $(u_{\sigma(i)}^+)_{i\in I_1}$ et $(u_{\sigma(i)}^-)_{i\in I_1}$ sont sommables.
Soit si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I_1}$ est sommable, et dans ce cas,

$$\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_2} u_i^+ - \sum_{i\in I_2} u_i^- = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}^+ - \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}^- = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}.$$

La preuve est alors la même pour les familles de complexes en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

[14] Il s'agit de familles de réels positifs.

Corollaire 34.20 – *Si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est tel que la série de terme général u_n converge absolument, alors pour toute permutation $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est encore absolument convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration. C'est le cas particulier où $I_1 = I_2 = \mathbf{N}$. □

Proposition 34.21 : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une partie finie J_ε de I telle que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$,*

$$J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in J} u_i\right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Dans le cas d'une famille de réels positifs, cela a déjà été mentionné, et c'est essentiellement la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure.

Supposons à présent que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels.
Alors il existe une partie finie J_ε^+ de I telle que

$$\forall J \in \mathscr{P}_f(I),\ J_\varepsilon^+ \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et de même, il existe $J_\varepsilon^- \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que

$$\forall J \in \mathscr{P}_f(I),\ J_\varepsilon^- \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit donc $J_\varepsilon = J_\varepsilon^+ \cup J_\varepsilon^-$, et soit $J \in \mathscr{P}_f(I)$ tel que $J_\varepsilon \subset J$.
Alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| &= \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i\in J} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^+\right| + \left|\sum_{i\in J} u_i^- - \sum_{i\in I} u_i^-\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Dans le cas d'une famille de complexes, la preuve est la même en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

Remarque. Ce résultat est en réalité une caractérisation assez intuitive de la somme : elle nous dit que pour une partie finie «suffisamment grande» de I, la somme finie est suffisamment proche de la somme de la famille.

On pourrait en fait prouver que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si il existe un réel/un complexe S tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in \mathscr{P}_f(I)$ tel pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$ tel que $J_\varepsilon \subset J$, alors $\left|\sum_{i\in J} u_i - S\right| \leqslant \varepsilon$.
On montrerait alors qu'un tel réel/complexe S, lorsqu'il existe est unique, et donc est bien $\sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 34.22 (Inégalité triangulaire) : *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Alors il existe $J_n \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $J_n \subset J \Rightarrow \left|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \varepsilon_n$.

De même, il existe $J'_n \in \mathscr{P}_f(I)$ tel que pour $J \subset J'_n$, $\sum_{i\in J} |u_i| \geqslant \sum_{i\in I} |u_i| - \varepsilon_n$.

Notons alors $K_n = J_n \cup J'_n$, qui contient donc à la fois J_n et J'_n.

Donc $\left|\sum_{i\in K_n} u_i - \sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$, si bien que, par le théorème des gendarmes, $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} u_i$.

Et de même $\sum_{i\in I} |u_i| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} |u_i|$.

Et donc

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} u_i\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{i\in K_n} u_i\right|.$$

Or, par inégalité triangulaire pour les sommes finies de réels/complexes, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\sum_{i\in K_n} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in K_n} |u_i|$, si bien que par passage à la limite,

$$\left|\lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} u_i\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} |u_i| = \sum_{i\in I} |u_i|.$$

□

Remarque

Puisqu'il s'agit cette fois d'une famille à termes positifs, on n'a pas besoin de la proposition précédente, mais seulement des propriétés de la borne sup dans **R**.

Enfin, on peut obtenir une propriété qui a l'air évidente, mais qui finalement nécessite un peu de travail :

Proposition 34.23 : *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables à valeurs dans* **K**, *avec* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. *Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable, avec*

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration. La sommabilité de $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ découle du fait que pour $i \in I$,

$$|\lambda u_i + v_i| \leqslant |\lambda||u_i| + |v_i|.$$

Comme dans la preuve précédente[15], on peut construire une suite $(K_n)_n$ de parties finies de I telles que $\sum_{i\in I} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} u_i$, $\sum_{i\in I} v_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} v_i$ et aussi

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} (\lambda u_i + v_i).$$

Et alors par linéarité des sommes finies,

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in K_n} (\lambda u_i + v_i) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \sum_{i\in K_n} u_i + \sum_{i\in K_n} v_i\right) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

□

[15] Mais avec trois familles au lieu de deux.

Corollaire 34.24 – *L'ensemble $\ell^1(I, \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbf{K})$, et l'application*

$$s : \left| \begin{array}{ccc} \ell^1(I, \mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (u_i)_{i \in I} & \longmapsto & \sum_{i \in I} u_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\ell^1(I, \mathbf{K})$.

34.2.3 Sommation par paquets

Le théorème de sommation par paquets reste valable pour calculer la somme d'une famille que l'on sait sommable.

Théorème 34.25 : *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille* ***sommable*** *de nombres complexes, et soit $\{I_k,\ k \in K\}$ une partition de I. Alors :*

1. *pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i \in I_k}$ est sommable*
2. $\left(\sum_{i \in I_k} u_i\right)_{k \in K}$ *est sommable*
3. $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i\right)$.

⚠ Ce théorème nécessite de déjà savoir que la famille est sommable, et ne peut en aucun cas le prouver.
Pour prouver la sommabilité de cette famille, il est possible d'utiliser le théorème par paquets, version positive, appliqué à la famille $(|u_i|)_{i \in I}$.

Démonstration. Commençons par le cas d'une famille à valeurs réelles.
On a donc $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$.
Mais les deux familles positives $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables, et le théorème de sommation par paquets nous donne

$$\sum_{i \in I} u_i^+ = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i^+ \text{ et } \sum_{i \in I} u_i^- = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i^-.$$

Donc par linéarité de la somme,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} u_i^+ - \sum_{i \in I_k} u_i^- \right) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} u_i.$$

On raisonne de même pour une famille à valeurs complexes en séparant partie réelle et partie imaginaire. □

Exemple 34.26

Considérons la famille $\left(\dfrac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{n,k \in \mathbf{N}^* \\ n > k}}$.
On a donc ici $I = \{(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid k < n\}$.
Alors pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $I_n = \{(n,k),\ k \in [\![1, n-1]\!]\}$, de sorte que $I = \bigcup_{n=2}^{+\infty} I_n$.
Puisque I_n est fini la convergence de $\displaystyle\sum_{(n,k) \in I_n} \left|\frac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{2^n}\right| = \sum_{(n,k) \in I_n} \frac{1}{2^n}$ est évidente.

Notons que cette somme vaut $\dfrac{n-1}{2^n}$.
Et alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n-1}{2^n}$ converge par application du critère de d'Alembert :
$\dfrac{n}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{n-1} = \dfrac{n-1}{n}\dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} < 1$.
Donc par le théorème de sommation par paquets positif[16] la famille $\left(\dfrac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{n,k\in\mathbf{N}^*\\ n>k}}$ est sommable.

[16] Il prouve la sommabilité des $\left|\dfrac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{2^n}\right|$.

On peut donc appliquer le théorème de sommation général, et ce avec les mêmes paquets :

$$\sum_{(n,k)\in I_n}\frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{\omega\in\mathbf{U}_n\setminus\{1\}}\omega = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\omega\in\mathbf{U}_n}\omega - 1\right) = -\frac{1}{2^n}.$$

Et donc il vient,

$$\sum_{\substack{n,k\in\mathbf{N}^*\\ n\geqslant k}}\frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{2}.$$

34.3 Interversion de sommes

Les résultats de cette partie viennent généraliser ceux des sommes finies, pour lesquelles nous avons l'habitude de permuter, lorsque ça nous arrange, deux symboles $\sum$.

34.3.1 Théorèmes de Fubini et séries doubles

Théorème 34.27 (Théorème de Fubini positif) : *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs indexée par un produit cartésien $I\times J$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}u_{i,j}\right).$$

En particulier, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si :

1. *pour tout $i\in I$, $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable*
2. $\left(\displaystyle\sum_{j\in J}u_{i,j}\right)_{i\in I}$ *est sommable.*

Démonstration. C'est le théorème de sommation par paquets avec

$$I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J}I\times\{j\}.$$

□

⚠ Attention !
On suppose donc la famille sommable. Ce qui peut se prouver à l'aide du théorème de Fubini positif appliqué aux $|u_{i,j}|$.

Théorème 34.28 (Théorème de Fubini) : *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}\in\ell^1(I\times J,\mathbf{C})$. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}u_{i,j}\right).$$

Démonstration. Là encore, c'est le théorème de sommation par paquets, qui s'applique puisque la famille est sommable. □

Exemple 34.29

Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Posons donc $u_{n,k}=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{k!} & \text{si } k\geqslant n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Alors à $k\in\mathbf{N}$ fixé, $\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,k}|=\sum_{n=0}^{k}|u_{n,k}|=\frac{k+1}{k!}$.

Puisque $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k+1}{k!}$ converge, la famille $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbf{N}}$ est sommable, par Fubini positif.

Donc on peut appliquer Fubini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k!}.$$

Mais $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(k-1)!}=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=-e^{-1}$.

Et donc en conclusion, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=0$.

Proposition 34.30 : *Soient $(u_i)_{i\in J}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de complexes. Alors $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j=\left(\sum_{i\in I}u_i\right)\left(\sum_{j\in J}v_j\right).$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini positif, on a, pour tout $i\in I$,
$(|u_iv_j|)_{j\in J}=\left(|u_i||v_j|\right)_{j\in J}$ qui est sommable puisque $(|v_j|)_{j\in J}$ l'est et que $|u_i|$ est une constante.
Et alors $\sum_{j\in J}|u_iv_j|=|u_i|\sum_{j\in J}|v_j|$.

Et donc $\left(\sum_{j\in J}|u_iv_j|\right)_{i\in I}=\left(\left(\sum_{j\in J}|v_j|\right)|u_i|\right)_{i\in I}$ est sommable puisque $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.
Donc par le théorème de Fubini positif, $(|u_iv_j|)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Donc le théorème de Fubini s'applique[17] :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}u_iv_j=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_iv_j\right)=\sum_{i\in I}\left(u_i\left(\sum_{j\in J}v_j\right)\right)=\left(\sum_{j\in J}v_j\right)\left(\sum_{i\in I}u_i\right).$$

□

[17] Ce qui conduit aux mêmes arguments, sans les valeurs absolues/modules.

34.3.2 Produit de Cauchy

Proposition 34.31 : *Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ une famille sommable de complexes. Alors*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}u_{m,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}u_{k,n-k}\right).$$

Démonstration. Il s'agit encore une fois d'appliquer le théorème de sommation par paquets, cette fois en notant que $\mathbf{N}^2=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{(p,q)\in\mathbf{N}^2\mid p+q=n\}$.

Notons que les «paquets» sont finis, et donc la sommabilité de la famille $(u_{k,n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est alors automatique.

Mais le théorème de sommation par paquets nous garantit alors que la famille $\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable. □

Corollaire 34.32 (Produit de Cauchy de séries absolument convergentes) :
Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} w_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Démonstration. Puisque les séries $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont absolument convergentes, les familles $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(v_q)_{q\in\mathbf{N}}$ sont sommables.
Comme expliqué à la proposition 34.30, la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Et donc la proposition précédente s'applique, nous garantissant la convergence absolue de la série de terme général w_n, et nous donne directement

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} w_n = \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}^2} u_{p,q} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} w_q\right).$$

□

Dans le cas particulier où $u_n = a_n x^n$ et $v_n = b_n x^n$, on a alors, sous les hypothèses d'absolue convergence évoquées ci-dessus[18] :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)x^n.$$

Il faut y voir là une généralisation du produit de deux polynômes.

⚠ Pour des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ qui sont convergentes mais pas absolument convergentes, il se peut que leur produit de Cauchy diverge.
Par exemple, si $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, alors $\sum a_n$ converge[19] mais ne converge pas absolument.
Et donc a alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\dfrac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.
Or $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$, si bien que $\sum c_n$ diverge grossièrement.

Exemple 34.33 **Exponentielle complexe**

Oublions tout ce que nous savons au sujet de l'exponentielle, et redéfinissons nos objets.

Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, série qui est absolument convergente par exemple par le critère de d'Alembert[20].

[18] Et vous rencontrerez de nombreux tels exemples l'an prochain lors de l'étude de ce qu'on appelle les séries entières.

[19] Par application du critère des séries alternées.

[20] Ou par comparaison à une série de Riemann.

Alors, pour $z, z' \in \mathbf{C}$, on a

$$e^z e^{z'} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = e^{z+z'}.$$

En particulier, ceci est valable pour z, z' réels, et si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, alors $e^z = e^a e^{ib}$.
Puisque par ailleurs $e^0 = 1$, il vient donc $e^{-z}e^z = e^0 = 1$, et donc $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Enfin, pour $\theta \in \mathbf{R}$, posons $\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = \operatorname{Im}(e^{i\theta})$, de sorte que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Alors il vient

$$\cos(\theta+\theta') = \operatorname{Re}(e^{i(\theta+\theta')}) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin(\theta')) = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta').$$

On retrouve sur le même principe toutes les formules d'addition.

Par ailleurs, pour $z = i\theta$, on a

$$\operatorname{Re}((i\theta)^n) = \theta^n \operatorname{Re}(i^n) = \theta^n = \begin{cases} (-1)^p\theta^{2p} & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et de même $\operatorname{Im}((i\theta)^n) = \theta^n \operatorname{Im}(i^n) = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ si bien que

$$\cos(\theta) = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{(i\theta)^n}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}$$

et de même $\sin(\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}$.
La théorie des séries entières qui sera étudiée l'an prochain permettra alors de justifier le fait qu'on puisse dériver terme à terme ces sommes infinies, et de retrouver $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

Exercices du chapitre 34

Dans tout le TD, si $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On pourra admettre si besoin que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

▶ Étude de sommabilité et calcul de sommes

Exercice 34.1 Soit $q \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose $u_n = q^{|n|}$. F
Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable, avec $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}$.

Exercice 34.2 Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer la sommabilité et calculer la somme de $\left(r^{|n|}e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$. F

Exercice 34.3 La famille $(x))_{x\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ est-elle sommable ? Même question pour $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,+\infty[}$. PD

Exercice 34.4 Si $q \in \mathbf{Q}$, on note d_q le dénominateur de la forme irréductible de q. AD
Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{d_q^3}\right)_{q\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$.

Exercice 34.5 Soit $I = (\mathbf{N}^*)^2$. Pour $(i,j) \in I$, on pose $u_{i,j} = \frac{1}{\max(i,j)^3}$. AD
À l'aide du théorème de sommation par paquets, prouver que $\sum_{(i,j)\in I} u_{i,j} = 2\zeta(2) - \zeta(3)$.

Exercice 34.6 Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\zeta(n)-1\right)$ et $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2p)}{2^{2p}}$. AD

Exercice 34.7 Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ pour lesquelles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable. PD

Exercice 34.8 Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{ab(a+b)}\right)_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$. AD

▶ Interversion de sommes

Exercice 34.9 Après avoir justifié son existence, calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$. AD

Exercice 34.10 Pour $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = p \\ \frac{1}{n^2-p^2} & \text{sinon} \end{cases}$ AD

1) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.

2) Après avoir justifié leur existence, vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \neq \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$.

3) Quelle conclusion en tirez-vous ?

▶ Divers

Exercice 34.11 Soit $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ une permutation de $\mathbf{N}^*$. AD

1) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{\sigma(n)^2}$, et le cas échéant, calculer sa somme.

2) Même question pour la série de terme général $\dfrac{1}{\sigma(n)}$.

EXERCICE 34.12 Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n. AD

De même, écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nz^n}{1-z^n}$ sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} s(n) z^n$, où $s(n)$ est une suite à préciser dont on donnera une interprétation arithmétique.

EXERCICE 34.13 (Oral X) D

Montrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| < 1$, les identités

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

On veillera à bien justifier les convergences de toutes les séries en jeu.

EXERCICE 34.14 Étudier l'existence et le cas échéant, calculer la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p,q \geqslant 1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

▸ Produit de Cauchy

EXERCICE 34.15 Soit $x \in]-1, 1[$. Déterminer une suite $(a_n)_n$ telle que $\dfrac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. PD

EXERCICE 34.16 Formule du binôme négatif. AD

Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, et soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n}{p} z^n.$$

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 34

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.1

On a $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \underbrace{\{-n,\ n \in \mathbf{N}^*\}}_{=A}$, et cette union est disjointe.

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \frac{1}{1-q}$.

Puisque $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & -n \end{array}\right.$ est une bijection, la famille $(u_n)_{n\in A}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'est.

Soit encore si et seulement si la série[1] $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_{\varphi(n)} = \sum_{n\geqslant 1} q^n$ converge.

[1] À termes positifs.

C'est bien le cas, et sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n = \frac{q}{1-q}$.

On en déduit donc que $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n + \sum_{n\in A} u_n = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.2

On a $\left|r^{|n|}e^{in\theta}\right| = r^{|n|}$.

Puisque $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \uplus (-\mathbf{N}^*)$, il s'agit donc d'étudier les sommabilités de $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r^{-n})_{n\in-\mathbf{N}^*}$.

Mais $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} r^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r^n$ sont convergentes, donc ces deux familles sont sommables.

Et ainsi, la famille $\left(r^{|n|e^{in\theta}}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}} + re^{-i\theta}\frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-re^{-i\theta}+re^{-i\theta}-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.3

Si on note $I = \left\{1 - \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}^*\right\} \subset \mathbf{Q} \cap [0,1]$, alors la famille $(x)_{x\in I}$ n'est pas sommable, puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Donc la «grosse» famille $(x)_{x\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas sommable.

Rappel

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout $J \subset I$, $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

De même, si $I = \left\{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\} \subset \mathbf{Q} \cap [1, +\infty[$ est tel que $\displaystyle\sum_{x\in I} \frac{1}{x^2} = +\infty$ car la série de terme général $\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$ diverge, et donc $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,+\infty[}$ n'est pas sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.4

Notons qu'à $n \in \mathbf{N}^*$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $q \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$ tels que $u_q = n$.

En effet, il s'agit des $\dfrac{k}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$ et $k \wedge n = 1$.

En particulier, $I_n = \{q \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \mid u_q = n\}$ a un cardinal majoré par $n+1$.

Et donc en notant que $\mathbf{Q} \cap [0,1] = \displaystyle\biguplus_{n\in\mathbf{N}^*} \{q \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \mid u_q = n\}$, alors on a :

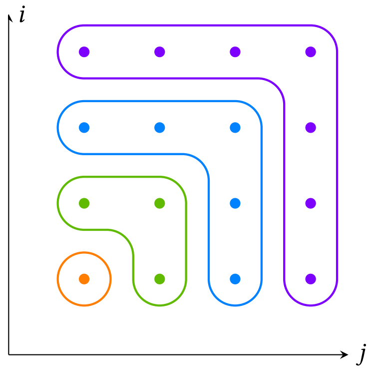
- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{q\in I_n} \frac{1}{u_q^3} \leqslant \frac{n+1}{n^3}$.

- la série de terme général $\dfrac{n+1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ converge, si bien que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sum_{q\in I_q} \frac{1}{u_q^3}$ converge.

Par le théorème de sommation par paquets, $\left(\dfrac{1}{u_q^3}\right)_{q\in\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ est sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.5

Pour $n \in \mathbf{N}*$, posons $I_n = \{(i,j) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid \max(i,j) = n\}$.
Autrement dit, on utilise les «paquets» ci-dessous.



On a alors $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = \displaystyle\biguplus_{n=1}^{+\infty} I_n$, et il est facile de constater[2] que $\mathrm{Card}(I_n) = 2n-1$.

On a donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{n^3} = \frac{\mathrm{Card}(I_n)}{n^3} = \frac{2n-1}{n^3} = 2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$.
Il s'agit là du terme général d'une série convergente, donc la famille est bien sommable et

$$\sum_{i,j\geqslant 1} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{\max(i,j)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 2\zeta(2) - \zeta(3).$$

[2] Un dessin aide bien, mais on peut formaliser sans grande difficulté en dressant la liste des éléments de I_n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.6

Pour la première, notons que pour $n \geqslant 2$, $\zeta(n) - 1 = \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} > 0$.

Commençons par étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{p^n}\right)_{n,p\geqslant 2}$.

Il s'agit donc d'étudier celle de la famille $\left(\dfrac{1}{p^n}\right)_{n,p\geqslant 2}$.

Or on a, à $p \geqslant 2$ fixé, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2}\frac{p}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}$, qui est le terme général d'une série convergente, puisqu'équivalent à $\dfrac{1}{p^2}$.
Donc le théorème de Fubini positif prouve la sommabilité de la famille, et donc Fubini s'applique :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n(\zeta(n)-1) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{p^n} \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} (-p^{-1}))^n \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\frac{1}{1+\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}
\end{aligned}$$

Série géométrique de raison $-p^{-1}$.

$$= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Série télescopique.

Sur le même principe, on a clairement, pour $p \geqslant 1$, $\zeta(2p) \leqslant \zeta(2)$, si bien que $\frac{\zeta(2p)}{2^{2p}} \leqslant \frac{\zeta(2)}{2^{2p}}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Puisque par ailleurs, $\frac{\zeta(2p)}{2^{2p}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}2^{2p}}$, le théorème Fubini positif nous garantit la sommabilité de $\left(\frac{1}{n^{2p}2^{2p}} \right)_{n,p\geqslant 1}$.
Et alors on peut intervertir les sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{2p}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2)^p} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Décomposition en élment simples.

Série télescopique.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.7

Notons, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \{(p,q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid p + q = n\}$.

Alors I_n est un ensemble fini, de cardinal $n-1$, et $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = \biguplus_{n=2}^{+\infty} I_n$.

On a alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n-1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Par critère des équivalents pour les séries à termes positifs, on a donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

Et donc par le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha} \right)_{p,q\geqslant 1}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.8

Par sommation par paquets, et puisqu'il s'agit d'une famille de réels positifs, on a

$$\sum_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} \frac{1}{ab(a+b)} = \sum_{n\geqslant 2} \sum_{a=1}^{n-1} \frac{1}{a(n-a)n} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a(n-a)}.$$

Une décomposition en éléments simples nous donne

$$\frac{1}{a(n-a)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n-a} \right).$$

Et donc $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{a(n-a)}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

Il est classique que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$, si bien que $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{an(n-a)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\ln(n-1)}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\ln n}{n^2}$.

Puisque $\displaystyle\frac{\ln n}{n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(n^{3/2}\right)$, la série de terme général $\displaystyle\sum_{a=1}^{n-1}\frac{1}{a(n-a)}$ converge, si bien que

$$\sum_{(a,b)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}*}\frac{1}{ab(a+b)}<+\infty.$$

Autrement dit, la famille étudiée est sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.9

Commençons par noter que la famille des $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^3}\right)_{\substack{p,q\in\mathbf{N}^*\\p\leqslant q}}$ est bien sommable.

En effet, par comparaison série intégrale, pour tout $p\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=p}^{N}\frac{1}{k^3}\leqslant\int_p^{N+1}\frac{dt}{t^3}\Leftrightarrow\sum_{k=p}^{N}\frac{1}{k^3}\leqslant\left[-\frac{2}{t^2}\right]_p^{N+1}\leqslant\frac{2}{p^2}-\frac{2}{(N+1)^2}.$$

Et donc $\displaystyle 0\leqslant\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^3}\leqslant\frac{2}{p^2}$, si bien que par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{p\geqslant1}\left(\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{1}{q^3}\right)$ converge.

Ainsi, la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^3}\right)_{\substack{p,q\in\mathbf{N}^*\\p\leqslant q}}$ est sommable.

Par Fubini, on a alors

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{q}\frac{(-1)^p}{q^3}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^3}\sum_{p=1}^{q}(-1)^p.$$

Mais $\displaystyle\sum_{p=1}^{q}(-1)^q=\frac{(-1)^q-1}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}=\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3}-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^3}$.

Reste à calculer cette dernière somme. Notons que $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q)^3}-\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}=\frac{1}{8}\zeta(3)+\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}$.

Et par ailleurs, pour les mêmes raisons,

$$\zeta(3)=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q)^3}+\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}=\frac{1}{8}\zeta(3)+\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}=\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Et donc

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q^3}=\frac{1}{8}\zeta(3)-\frac{7}{8}\zeta(3)=-\frac{3}{4}\zeta(3).$$

Détails
Si on veut vraiment se ramener à une famille définie sur $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$, on peut prendre la famille définie par

$$u_{p,q}=\begin{cases}0 & \text{si } q<p\\ \frac{(-1)^p}{q^3} & \text{si } p\geqslant q\end{cases}$$

Détails
C'est la somme d'une suite géométrique de raison -1, mais on peut aussi le retrouver facilement : ça vaut -1 si q impair, 0 si q pair.

Remarque
Ces deux séries sont clairement convergentes.

Il vient donc enfin,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}=-\frac{3}{8}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(3)=-\frac{7}{8}\zeta(3).$$

Alternative : plus simplement, si on note $a_q=\begin{cases}-1 & \text{si } q \text{ impair}\\ 0 & \text{si } q \text{ pair}\end{cases}$, on a prouvé plus tôt que

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{q^3}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{a_q}{q^3}=-\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(2q-1)^3}=-\frac{7}{8}\zeta(3).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.10

1. Pour $n\neq p$, une décomposition en éléments simples nous donne $\dfrac{1}{n^2-p^2}=\dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{1}{n-p}-\dfrac{1}{n+p}\right)$.
   Donc il vient, pour p fixé, et $N>2p$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}u_{n,p}&=\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{n-p}-\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{2p}\left(\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n-p}-\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+p}+\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n-p}-\sum_{n=p+1}^{N}\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{2p}\left(\sum_{k=1-p}^{-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&=\frac{1}{2p}\left(-\cancel{\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}}-\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}+\cancel{\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}}+\sum_{k=p}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&=\frac{1}{2p}\left(-\cancel{\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}}+\frac{1}{p}+\cancel{\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{1}{k}}+\sum_{k=2p}^{N-p}\frac{1}{k}-\sum_{k=2p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}-\sum_{k=N-p+1}^{N+p}\frac{1}{k}\right)\\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}\right)=\frac{3}{4p^2}.
\end{aligned}$$

Détails
La somme restant est formée d'un nombre **fixé** de termes qui tendent tous vers 0.

   Donc on a bien, comme annoncé, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}=\frac{3}{4p^2}$.

2. L'existence de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}$ découle directement de la question précédente : il s'agit d'une somme de Riemann.
   On a donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}=\frac{3}{4}\zeta(2)>0$.
   Et puisque $u_{n,p}=-u_{p,n}$, on a de même, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}=-\frac{3}{4n^2}$, et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{n,p}=-\frac{3}{4}\zeta(2)\neq\frac{3}{4}\zeta(2)$.
3. Si la famille $(u_{n,p})_{n,p\geqslant 1}$ était sommable, le théorème de Fubini nous garantirait que les sommes précédentes sont égales.
   Puisque ce n'est pas le cas, il ne s'agit pas d'une famille sommable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.11

1. Nous savons que la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, et donc est absolument convergente.
   Par conséquent, la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable.

Absolument ?
Pour les séries à termes positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence.

Et donc $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'est également, avec $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} u_n$.

On en déduit donc que la série de terme général $u_{\sigma(n)} = \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. En revanche, on sait que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge. Donc que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$.

Et donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{\sigma(n)} = +\infty$, si bien que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.12

On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{1-z^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^{nk}$, si bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \sum_{k=0}^{+\infty} z^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{n(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} z^{nk}.$$

On souhaite appliquer un théorème de sommation par paquets, mais pour cela, il faut s'assurer de la sommabilité de la famille $(z^{nk})_{n,k\geqslant 1}$.
Mais notons qu'en «remontant» les calculs ci-dessus, en remplaçant z par $|z|$, on arrive à

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |z|^{nk}$$

qui par les mêmes arguments vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1-|z|^n}$, qui est bien une série convergente, puisque $\dfrac{|z|^n}{1-|z|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^n$.
Donc par Fubini positif, la famille $(z^{nk})_{n,k\geqslant 1}$ est sommable.

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, notons alors $I_d = \{(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid nk = d\}$, qui est un ensemble fini, en bijection avec l'ensemble des diviseurs positifs de d.
On a alors $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* = \displaystyle\biguplus_{d\in\mathbf{N}^*} I_d$, si bien que par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{(n,k)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*} z^{nk} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in I_d} z^d = \sum_{d=1}^{+\infty} \mathrm{Card}(I_d) z^d.$$

Donc $d_n = \mathrm{Card}(I_n)$, qui est le nombre de diviseurs positifs de n convient.

Pour la seconde somme, notons que $\dfrac{nz^n}{1-z^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} nz^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, si bien que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{nz^n}{1-z^n}$ converge absolument.

À n fixé, $\dfrac{nz^n}{1-z^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} nz^n z^{nk} = \sum_{k=1}^{+\infty} nz^{nk}$.
Comme précédemment, il faut donc s'assurer de la sommabilité de la famille $(nz^{nk})_{n,k\geqslant 1}$.
Une fois de plus, en remplaçant z par son module, on arrive à la conclusion que cette famille est sommable.

Et donc avec les mêmes «paquets»

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n,k\geqslant 1} nz^{nk} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(n,k)\in I_d} nz^d = \sum_{d=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in I_d} n\right) z^d.$$

Donc $s(n) = \displaystyle\sum_{(n,k)\in I_d} n$, qui est la somme des diviseurs positifs de n convient.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.13

Puisque $\left|\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^{2n-1} = |x||x^2|^n$, la série de terme général $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}$ est bien convergente.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\dfrac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = x^{2n-1}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} x^{p(2n-1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}$, et cette série est absolument convergente.
Donc la famille des $(x^{p(2n-1)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable.
Par conséquent, le théorème de Fubini s'applique :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{p(2n-1)}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} x^{-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^{2p}\right)^n\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} x^{-p}\frac{x^{2p}}{1-x^{2p}}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^p}{1-x^{2p}}.\end{aligned}$$

Pour la seconde identité, notons que $\left|\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^{2^n} \leqslant |x|^n$.

Donc par comparaison à une série géométrique, la série de terme général $\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ converge absolument.
Par ailleurs, à $n \in \mathbf{N}$ fixé, on a

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = x^{2^n}\sum_{p=0}^{+\infty} x^{p2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n(2p+1)}.$$

Puisque cette série est absolument convergente[3], la famille $(x^{2^n(2p+1)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Mais tout entier non nul s'écrit de manière unique $2^n(2p+1)$, avec $(p,n) \in \mathbf{N}^2$, si bien que $\varphi : \left|\begin{array}{ccc}\mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N}^*\\ (n,p) & \longmapsto & 2^n(2p+1)\end{array}\right.$ est une bijection.
Donc la famille des $(x^{\varphi(n,p)})_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
Autrement dit, la famille des $(x^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable[4], et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} x^{2^n(2p+1)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Et donc, comme annoncé,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} x^{2^n(2p+1)} = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

[3] Pour les mêmes raisons que précédemment, avec x^{2p+1} à la place de x.

[4] Ce qu'on savait déjà puisqu'il s'agit d'une série géométrique convergente.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.14

Pour l'existence, notons que $\displaystyle\sum_{p,q\geqslant 1}\frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{p\in\mathbf{N}^*}\frac{1}{p^2}\right)^2$ existe.

Donc la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbf{N}^*}$ est sommable, donc la sous-famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}}$ est sommable.

Notons par ailleurs que $(\mathbf{N}^*)^2 = \biguplus_{d\in\mathbf{N}^*} I_d$ où $I_d = \{(p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \mid p\wedge q = d\}$.
Et donc par le théorème de sommation par paquets,

$$\zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{36} = \sum_{p,q\in\mathbf{N}^*}\frac{1}{p^2q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_d}\frac{1}{p^2q^2}.$$

Mais si $(p,q)\in I_d$, alors $(p,q) = (dp',dq')$ avec $(p',q')\in I_1$.
Autrement dit,

$$\sum_{(p,q)\in I_d} = \sum_{(p',q')\in I_1}\frac{1}{d^4}\frac{1}{p'^2q'^2} = \frac{1}{d^4}\sum_{(p',q')\in I_1}\frac{1}{p'^2q'^2}.$$

Et donc

$$\frac{\pi^4}{36} = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{1}{d^4}\sum_{(p,q)\in I_1}\frac{1}{p^2q^2} = \left(\sum_{(p,q)\in I_1}\right)\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{1}{d^4} = \zeta(4)\sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}.$$

Et donc, en notant que $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, il vient

$$\sum_{\substack{p,q\geqslant 1\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.15

Nous savons que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ et $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.
De plus, ces deux séries sont absolument convergentes. Donc par produit de Cauchy,

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n.$$

Donc $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ convient.

SOLUTION DE L'EXERCICE 34.16

Notons tout de suite que pour p fixé, on a

$$\binom{p+n}{p}|z^n| = \frac{(n+p)!}{p!n!}|z|^n = \frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)\cdots(n+2)(n+1)}{p!}z^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}|z|^n.$$

Prenons alors $r\in\,]|z|,1[$, de sorte que par croissances comparées, $\dfrac{n^p|z|^n}{r^n} = n^p\left|\dfrac{|z|}{r}\right|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\dfrac{n^p}{p!} \underset{n\to+\infty}{=} r^n$.
Puisque la série de terme général r^n est absolument convergente, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{n^p}{p!}z^n$ et donc[5] de la série de terme général $\dbinom{n+p}{p}z^n$.

[5] Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Procédons par récurrence sur p.
Pour $p=0$, c'est du cours, il s'agit de la somme d'une série géométrique absolument convergente.

Rappel
Une série géométrique, quand elle converge, converge absolument.

Supposons donc que $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n}{n}z^n$.
Alors par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$\frac{1}{(1-z)^{p+2}} = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p}z^kz^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p}\right)z^n.$$

Mais on a alors, à n fixé, par l'identité de Pascal,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{p} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{k+p+1}{p+1}-\binom{k+p}{p+1}\right) = \binom{n+p+1}{p+1}-\binom{p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

Et donc il vient bien $\dfrac{1}{(1-z)^{p+2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1} z^n$.

Remarque : un moyen d'éviter de prouver l'absolue convergence est de prouver par récurrence sur p que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Donc en particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \binom{n+p}{p} z^n \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} |z|^n = \frac{1}{(1-|z|)^{p+1}}$, et donc $\displaystyle\sum_n \binom{n+p}{p} z^n$ converge absolument.

Et une autre option que celle utilisée ci-dessus pour prouver l'absolue convergence serait de faire appel au critère de d'Alembert.

35 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Dans ce chapitre, nous sortons (enfin) du cadre vectoriel, où toutes les droites et tous les plans passent par l'origine pour parler enfin de points et plus uniquement de vecteurs, et donc retrouver le cadre de la géométrie «classique».
Nous montrerons notamment comment utiliser certaines des notions d'algèbre linéaire en géométrie.
Vous ne rencontrerez probablement jamais la moindre question à propos des sous-espaces affines en seconde année, mais ce chapitre est tout de même l'occasion de clarifier enfin la distinction point/vecteur qu'on a passée sous silence en algèbre linéaire, mais aussi de manipuler quelques concepts d'algèbre linéaire dans un cadre où l'intuition géométrique peut nous aider à prendre du recul.

Sans plus de précisions, $\mathbf{K}$ désigne un corps quelconque et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

35.1 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Il existe une notion générale d'espace affine que vous ne rencontrerez pas en prépa, et nous nous limiterons au cas des sous-espaces affines d'un espace vectoriel (qui est naturellement muni lui-même d'une structure d'espace affine).

Pour se faire une intuition, imaginons le cas de $\mathbf{R}^2$. Dans toute l'algèbre linéaire, nous avons toujours vu un élément de $\mathbf{R}^2$ comme un **vecteur**.
Pourtant un couple de réels peut également être vu comme un **point** du plan, c'est ce que vous avez fait au lycée. Et alors, à tout couple (A, B) de points du plan correspond un unique vecteur, le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Et inversement, si on se fixe A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan, alors il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ (c'est le translaté de A par $\vec{u}$).
La structure affine de $\mathbf{R}^2$ (qui peut aisément être généralisée à n'importe quel espace vectoriel) consiste à voir les éléments de $\mathbf{R}^2$ non plus comme des vecteurs mais comme des points, tout en gardant à l'esprit qu'à un couple de points de $\mathbf{R}^2$ correspond un vecteur (dans $\mathbf{R}^2$ lui aussi).

35.1.1 Translations, sous-espaces affines

Définition 35.1 – Si a est un élément d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, on appelle **translation de vecteur** a l'application $\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \right.$.

> **⚠ Attention !**
> Les translations de vecteur non nul ne sont pas linéaires puisqu'elles n'envoient pas 0_E sur 0_E.

Proposition 35.2 : *On a $\tau_{0_E} = \mathrm{id}_E$ et pour $(a, b) \in E^2$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a = \tau_{a+b}$.*
En particulier, τ_a est bijective et $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$.

> **Intuition**
> Translater de a puis de b, c'est translater directement de $a + b$.

Démonstration. Immédiat : par associativité et commutativité de la somme dans un espace vectoriel : $(x + b) + a = (x + a) + b = x + (a + b)$. □

Définition 35.3 – On appelle **sous-espace affine d'un espace vectoriel** E toute partie $\mathscr{F}$ de E de la forme $\tau_a(F) = \{a+u,\ u \in F\}$ où $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E.
Un tel ensemble $\mathscr{F} = \tau_a(F)$, également noté $a+F$ est appelé **sous-espace affine de E passant par a et de direction F.**

En abrégé
A l'instar de sous-espace vectoriel qui est abrégé en sev, on abrégera sous-espace affine en sea.

Ainsi, se donner un sous-espace affine revient à se donner un point et un sous-espace vectoriel.
Dans $E = \mathbf{R}^2$ ou dans $E = \mathbf{R}^3$, il faut imaginer que si F est un ensemble de vecteurs (car un sous-espace vectoriel), et A est un point, alors le sous-espace affine de E passant par A et de direction F est l'ensemble des translatés[1] de A par un vecteur de F.
Ou encore qu'il s'agit de l'ensemble de tous les points M pour lesquels il existe $\vec{v} \in F$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$.

[1] Nous parlons donc de points.

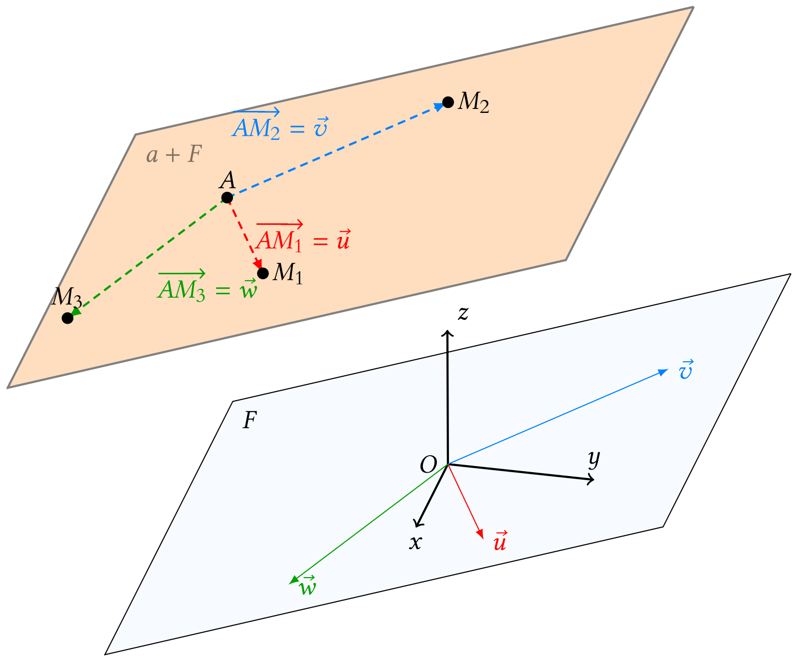


FIGURE 35.1 – Un sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$: c'est un plan qui passe par A, et ce n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas $O = (0,0,0)$.

Ainsi, à la donnée d'un sous-espace vectoriel F et d'un point a correspond un unique sous-espace affine, qui est $a+F$.
En revanche, il n'est pas clair du tout qu'à un sous-espace affine, on puisse associer un unique couple (a, F) formé d'un point et d'un sous-espace vectoriel.
Il est même très facile de se convaincre sur la figure ci-dessus que le sous-espace affine passant par M_1 et de direction F est le même que le sous-espace affine passant par A et de direction F.
Le lemme suivant vient préciser ceci :

Point ?
On appelle ici point un élément de E, c'est donc aussi un vecteur de E, mais on a plutôt envie de le voir ici comme un point.

Lemme 35.4. Soient $a, a' \in E$, et soient F, F' deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors $a+F = a'+F'$ si et seulement si $F = F'$ et $a'-a \in F$.

Démonstration. ► Supposons que $a+F = a'+F'$, avec a, a' deux points de E et F, F' deux sous-espaces vectoriels de E.
Puisque $a' \in a'+F' = a+F$, il existe $u \in F$ tel que $a' = a+u$.
Et donc $a'-a = u \in F$.

Prouvons à présent que $F' \subset F$. Soit $u' \in F'$. On a alors $a'+u' \in a'+F' = a+F$, et donc il existe $u \in F$ tel que $a'+u' = a+u$.
Donc $u' = a+u-a' = \underbrace{a-a'}_{\in F} + u \in F$.
Donc $F' \subset F$, et sur le même principe, on prouve que $F \subset F'$, d'où l'égalité.

▶ Supposons à présent que $a' - a \in F$, et prouvons que les sous-espaces affines $a + F$ et $a' + F$ sont égaux.
Soit $b \in a + F$. Alors il existe $u \in F$ tel que $b = a + u$.
Et donc $b = a' + \underbrace{a - a' + u}_{\in F} \in a' + F$.
Donc $a + F \subset a' + F$, et de même, $a' + F \subset a + F$.
Donc $a + F = a' + F$. □

Corollaire 35.5 – *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E, c'est-à-dire une partie de E pour laquelle il existe $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathcal{F} = a + F$.*
Alors le sous-espace vectoriel F est indépendant du couple (a, F). On l'appelle ***la direction de*** $\mathcal{F}$.

Notons également que dans le lemme précédent, la condition $a' - a \in F$ s'écrit encore $a' \in a + F = \mathcal{F}$.
Donc **un sous-espace affine est entièrement caractérisé par la donnée de sa direction et de n'importe lequel de ses points.** Donc se donner un sous-espace affine de E, c'est se donner sa direction, et n'importe quel point de $\mathcal{F}$.

Pensez par exemple à une droite[2] du plan ou de l'espace. Elle est entièrement caractérisée par la donnée d'un de ses points A et d'un vecteur directeur u. En tant que sous-espace vectoriel, c'est le sous-espace affine passant par A et de direction $\mathrm{Vect}(u)$.

[2] Au sens usuel du terme, pas au sens de droite vectorielle *i.e.* sous-espace vectoriel de dimension 1.

Définition 35.6 – Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace vectoriel E, de direction F. Si F est de dimension finie, alors on dit que $\mathcal{F}$ est de dimension finie, et on pose $\dim \mathcal{F} = \dim F$.
Si $\dim \mathcal{F} = 1$, on dit que $\mathcal{F}$ est une **droite affine**, si $\dim \mathcal{F} = 2$, on dit que $\mathcal{F}$ est un **plan affine.**
Enfin, si F est un hyperplan de E, on dit que $\mathcal{F}$ est un hyperplan affine. Si E est de dimension finie, cela revient à $\dim \mathcal{F} = \dim E - 1$.

Notons que si E est de dimension finie, alors tout sous-espace affine est aussi de dimension finie, mais on peut aussi avoir des sous-espaces affines de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension infinie (et nous allons en rencontrer tout de suite).
Enfin, un sous-espace affine de dimension nulle est de la forme $a + \{0_E\} = \{a\}$: c'est un point.

Dans toute la suite du chapitre, lorsqu'on voudra faire la distinction entre points et vecteurs[3], on notera les vecteurs avec des flèches.
Et alors si A et B sont deux points, on désignera par $\overrightarrow{AB}$ l'unique vecteur $\vec{u}$ de E tel que $B = A + \vec{u}$, c'est-à-dire $\vec{u} = B - A$, le signe moins correspondant bien ici à celui qu'on a l'habitude d'utiliser dans un espace vectoriel.
Il est alors trivial de vérifier la relation de Chasles : soient A, B, C trois points de E. Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

[3] D'un point de vue formel, ce sont les **mêmes** objets, à savoir des éléments de E.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E, de direction F et que A est un point de $\mathcal{F}$, alors un point $M \in E$ est dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \in F$.
En effet, cette dernière condition est équivalente à

$$\exists u \in F,\ M = A + u \Leftrightarrow M \in A + F = \mathcal{F}.$$

35.1.2 Exemples de sous-espaces affines

Maintenant que nous avons une définition rigoureuse, une question se pose naturellement : connaissons-nous déjà des sous-espaces affines ? Oui, c'est une structure que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises !

Considérons le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants : $(E)\ :\ y'(t) + ay(t) = b(t)$, et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Nous avons prouvé que si y_0 est une solution de (E) (c'est-à-dire n'importe quel élément de $\mathscr{S}$) alors $\mathscr{S} = \{y_0 + y,\ y \in \mathscr{S}_0\}$, où $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.
Or nous avons également prouvé que si A est une primitive de a,

$$\mathscr{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbf{K}\} = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{-A(t)}\right)$$

qui est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$.
Et donc $\mathscr{S} = y_0 + \mathscr{S}_0$ est le sous-espace affine passant par y_0, de direction $\mathscr{S}_0$. Puisque $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, $\mathscr{S}$ est une droite affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathbf{K})$.
Notons qu'on a là un sous-espace affine de dimension finie d'un espace vectoriel qui lui est de dimension infinie.

Remarque
Ceci explique que n'importe quelle solution particulière y_0 convienne : un sous-espace affine est caractérisé par la donnée de n'importe lequel de ses points.

De la même manière, dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t)$, nous avons prouvé que les solutions sont de la forme «une solution particulière[4] plus une solution de l'équation homogène».
Or l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$.
Il a alors été prouvé qu'une partie génératrice de $\mathscr{S}_0$ est :

- $(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2 ;
- $(t \mapsto e^{rt}\cos(\omega t), t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t))$ si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$;
- $(t \mapsto te^{rt}, t \mapsto e^{rt})$ si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et que le polynôme caractéristique possède une racine double r ;
- etc

[4] Sous réserve qu'il en existe une, ce que nous n'avons prouvé que dans quelques cas particuliers.

Dans tous les cas, on vérifie aisément[5] que cette famille génératrice est libre, et donc est une base de $\mathscr{S}_0$, qui est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$. Et donc $\mathscr{S}$ est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbf{K})$.

[5] Faites-le !

Enfin, dans le même état d'esprit «solution particulière plus solution de l'équation homogène», citons bien entendu l'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = B$.
En effet, nous avons déjà dit que si X_0 est une solution particulière du système, alors toutes les solutions sont de la forme $X_0 + X$, avec $X \in \operatorname{Ker}(A)$ une solution du système homogène $AX = 0$.

Ces trois exemples s'inscrivent dans un cadre plus général :

Proposition 35.7 : *Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $b \in F$. Alors si l'équation $f(x) = b$, d'inconnue $x \in E$ possède au moins une solution, l'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de E, de direction* $\operatorname{Ker} f$.

Si nous avons besoin de l'existence d'au moins une solution, c'est uniquement pour éviter que l'ensemble des solutions soit vide, l'ensemble vide n'étant pas un sous-espace affine de E.

Démonstration. Notons $\mathscr{S} = \{x \in E \mid f(x) = b\}$. Puisque nous le supposons non vide, il existe donc $a \in \mathscr{S}$, c'est-à-dire tel que $f(a) = b$.
Alors, pour $x \in E$, on a

$$f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = f(a) \Leftrightarrow f(x - a) = 0_F \Leftrightarrow x - a \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x \in a + \operatorname{Ker} f.$$

Donc $\mathscr{S}$ est bien un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$. □

Ce résultat vient donc généraliser le résultat classique qui affirme que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Exemple 35.8

La proposition précédente recouvre en fait les trois cas évoqués ci-dessus :

- l'application $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(I,\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K}) \\ y & \longmapsto & y'+ay \end{array}\right.$ est linéaire, et résoudre $y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$, c'est résoudre $\varphi(y)=b$.
- de même pour les équations différentielles linéaires du second ordre
- si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors l'application $f_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$ est linéaire, et résoudre $AX=B$, c'est résoudre $f_A(X)=B$.

Nous montrerons d'ailleurs en TD qu'en dimension finie, tous les sous-espaces affines sont de ce type.

35.1.3 Intersection de sous-espaces affines, parallélisme

Proposition 35.9 : *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel E, de directions respectives F et G.*
Alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $F\cap G$.

Démonstration. Supposons donc $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\emptyset$, et soit $a\in\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$.
Alors $\mathscr{F}=a+F$ et $\mathscr{G}=a+G$.
Soit alors $x\in\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$. Alors il existe $u\in F$ tel que $x=a+u$, et il existe $v\in G$ tel que $x=a+v$.
Mais nécessairement, $u=x-a=v$, et donc $x-a\in F\cap G$, de sorte que $x=a+(x-a)\in a+(F\cap G)$. Et donc $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\subset a+(F\cap G)$.
Inversement, soit $M\in a+(F\cap G)$, et soit $u=M-a\in F\cap G$.
Alors $M=a+u\in a+F=\mathscr{F}$ et de même, $M\in a+G=\mathscr{G}$.Et donc $M\in\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ et donc $a+(F\cap G)\subset\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$. □

En particulier, si l'un des deux sous-espaces $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{G}$ est de dimension finie, alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$, s'il est non vide, est aussi de dimension finie, inférieure à $\min(\dim\mathscr{F},\dim\mathscr{G})$.

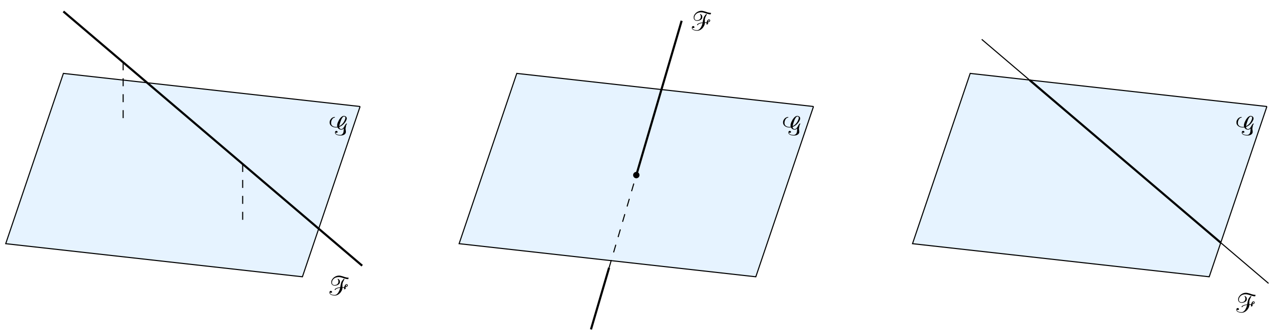


Figure 35.2 – L'intersection d'une droite et d'un plan (affines) est soit vide, soit réduite à un point (= de dimension 0), soit une droite (= de dimension 1).

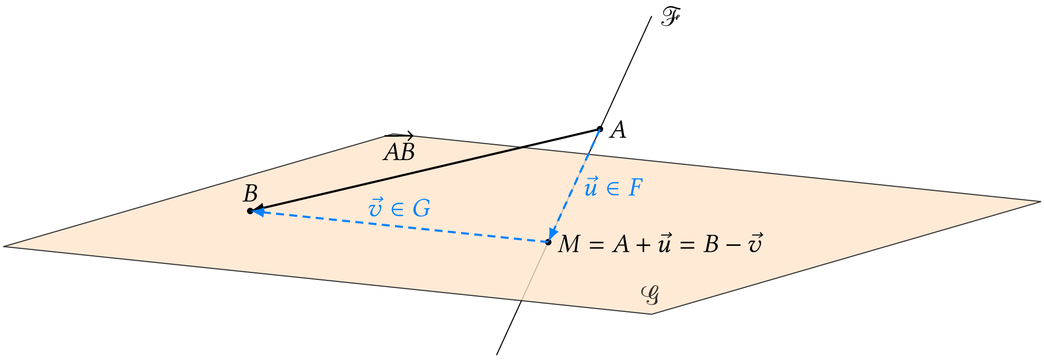
Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'intersection de deux sous espaces affines soit non vide .

Proposition 35.10 : *Soit $\mathscr{F}=A+F$ et $\mathscr{G}=B+G$ deux sous-espaces affines de E. Alors $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ est non vide si et seulement si $\overrightarrow{AB}\in F+G$.*

Démonstration. Supposons $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\neq\emptyset$, et soit $M\in\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$.
Alors $\overrightarrow{AM}\in F$ et $\overrightarrow{BM}\in G$.

Mais $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \in F + G$.

Inversement, si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$, avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$. Soit $M = A + \vec{u} \in \mathscr{F}$.
Alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{u} - \vec{v} + \vec{u} = -\vec{v} \in G$, et donc $M \in \mathscr{G}$.
Donc $M \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. □



Définition 35.11 – Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G.

1. Si $F \subset G$, on dit que $\mathscr{F}$ **est parallèle à** $\mathscr{G}$.
2. $F = G$, on dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ **sont parallèles**[6].

Danger ! La notion de parallélisme est définie à partir d'inclusions sur les directions, pas sur les sous-espaces affines eux-mêmes !

[6] Ce qui revient à dire que $\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}$ est parallèle à $\mathscr{F}$.

La terminologie est un peu surprenante au premier abord, car la relation binaire «être parallèle à» n'est pas symétrique.
Par exemple, dans le premier et le dernier cas de la figure 2, $\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$, sans que $\mathscr{G}$ soit parallèle à $\mathscr{F}$.

Remarque Pour des raisons de dimension, un plan ne peut jamais être parallèle à une droite.

Notons en revanche que la relation «être parallèle à» est symétrique si on la restreint à l'ensemble des sous-espaces affines de E de dimension fixée k (par exemple l'ensemble des droites, l'ensemble des plans, etc).
En effet, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont même dimension, et que l'un (disons $\mathscr{F}$) est parallèle à l'autre ($\mathscr{G}$), alors on a l'inclusion $F \subset G$. Mais ces directions sont de mêmes dimensions, donc $F = G$, et donc $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles.

Le parallélisme est une notion affine (= concernant les points), et non une notion linéaire (=concernant les vecteurs). On ne peut pas parler de parallélisme de deux vecteurs. En revanche, on peut parler de leur éventuelle colinéarité.
Deux vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $\operatorname{Vect}(u)$ et $\operatorname{Vect}(v)$ sont parallèles.
Mieux : u et v sont colinéaires si et seulement si il existe un sous-espace affine de direction $\operatorname{Vect}(u)$ parallèle à un sous-espace affine de direction $\operatorname{Vect}(v)$.

Proposition 35.12 : *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace vectoriel E. Si $\mathscr{F}$ est parallèle à $\mathscr{G}$, alors soit $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$, soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ (auquel cas $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \mathscr{F}$).*

Démonstration. Supposons donc $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ non disjoints, avec $\mathscr{F}$ parallèle à $\mathscr{G}$.
Alors nous savons que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ a pour direction $F \cap G = F$.
Et donc pour $a \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$, on a

$$\mathscr{F} = a + F = \underbrace{a}_{\in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}} + (F \cap G) = \mathscr{F} \cap \mathscr{G}.$$

□

Détails On utilise ici (deux fois) le fait qu'on connait intégralement un sea à partir du moment où l'on en connait un point et la direction.

Exemple 35.13

Une droite ne peut être parallèle à un plan que si elle est incluse dans ce plan, ou si elle ne le rencontre pas.

Corollaire 35.14 – *Deux sous-espaces affines parallèles sont soit disjoints soit confondus.*

Démonstration. Par la proposition précédente, s'ils ne sont pas disjoints, alors ils sont inclus l'un dans l'autre, et donc égaux. □

Exercices du chapitre 35

Exercice 35.1 Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E, donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que $\mathscr{F}$ soit un sous-espace vectoriel de E. F

Exercice 35.2 **Avec des suites** PD

1) Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. On note $E_{a,b} = \{(u_n)_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n + b\}$.
   a) Montrer que si $a \neq 1$, alors $E_{a,b}$ contient une suite constante.
   b) Montrer que $E_{a,b}$ est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont on précisera la direction. Retrouver alors l'expression d'une suite arithmético-géométrique rencontrée en cours.
2) Montrer que l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 4u_n - 3u_{n+1} + 2^n$ est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont on précisera la dimension.

Exercice 35.3 Soient $m, n \in \mathbf{N}^*$, avec $m \geqslant n$ soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts, et soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. AD
Montrer que l'ensemble des polynômes de degré au plus m qui coïncident avec f en les x_i, c'est à dire les $P \in \mathbf{R}_m[X]$ tels que $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ P(x_i) = f(x_i)$ est un sous-espace affine de $\mathbf{R}_m[X]$. En préciser la direction et la dimension.

Exercice 35.4 Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux hyperplans affines de E. AD
Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si et seulement si ils sont disjoints ou confondus.
Ce résultat reste-t-il valable si on suppose juste que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces affines de même dimension ?

Exercice 35.5 Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathscr{F} = a + F$ et $\mathscr{G} = b + G$ deux sous-espaces affines de E. Montrer que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ si et seulement $\begin{cases} F \subset G \\ b - a \in G \end{cases}$ PD

Exercice 35.6 Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines disjoints d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe deux sous-espaces affines $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$, parallèles et disjoints, contenant respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. AD

Exercice 35.7 Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un espace vectoriel G, une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,G)$ et $b \in G$ tel que $\mathscr{F} = \{x \in E \mid f(x) = b\}$. AD

Exercice 35.8 Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G. Montrer que si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est réduit à un point. AD
En déduire que, dans un espace de dimension 3, l'intersection d'un plan avec une droite non parallèle à ce plan est réduite à un point.

CORRECTION DES EXERCICES DU CHAPITRE 35

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.1

Notons F la direction de $\mathcal{F}$.
Si $\mathcal{F}$ contient 0_E alors $\mathcal{F} = 0_E + F = F$ est un sous-espace vectoriel.

Inversement, un sous-espace vectoriel contient 0_E, donc nous tenons notre condition nécessaire et suffisante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.2

1.a. Une suite constante égale à λ est dans $E_{a,b}$ si et seulement si $\lambda = a\lambda + b \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{b}{1-a}$.
Et donc $E_{a,b}$ contient une suite constante.

1.b. L'application $\varphi \mathbf{R}^{\mathbf{N}}\mathbf{R}^{N}(u_n)_n(u_{n+1})_n$ est linéaire.
Et alors $E_{a,b}$ est l'ensemble des antécédents par $\varphi - a\mathrm{id}$ de la suite constante égale à b.
Puisque nous avons garanti à la question précédente qu'il existe de tels antécédents, $E_{a,b}$ est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^N$, de direction

$$\operatorname{Ker}(\varphi - a\mathrm{id}) = \{(u_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \ = au_n\}$$

l'ensemble des suites géométriques de raison a (qui est de dimension 1).

On retrouve en particulier qu'une suite de $E_{a,b}$ est de la forme «une suite géométrique de raison a plus la $\frac{b}{1-a}$», qui est donc une solution particulière.

2. Notons $\mathcal{F} = \{(u_n)_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 4u_n - 3u_{n+1} + 2^n\}$.
Alors on a

$$u_{n+2} = 4u_n - 3u_{n+1} + 2^n \Leftrightarrow u_{n+2} + 3u_{n+1} - 4u_n = 2^n.$$

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (v_n) \end{array} \right.$ où $v_n = u_{n+2} + 3u_{n+1} - 4u_n$.
Il est facile de vérifier que f est linéaire.

Et donc si on note (w_n) la suite définie par $w_n = 2^n$, alors $\mathcal{F} = \{(u_n) \mid f((u_n)_n) = (w_n)_n\}$.
Une proposition du cours nous dit que si $\mathcal{F}$ est non vide, c'est un sous-espace de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, de direction $\operatorname{Ker} f$.

Commençons par déterminer $\dim \operatorname{Ker} f = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} + 3u_{n+1} - 4u_n = 0\}$.
Le polynôme caractéristique a pour racines 1 et -4, donc sait que

$$\operatorname{Ker} f = \{(\lambda + \mu(-4)^n)_n,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\} = \operatorname{Vect}((1)_n, ((-4)^n)_n).$$

La suite constante égale à 1 et la suite géométrique de raison -4 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre. Et donc $\ker f$ est de dimension 2.

Donc si $\mathcal{F}$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ de dimension 2.
Il existe bien une suite dans $\mathcal{F}$: il suffit de poser $u_0 = u_1 = 0$, puis, pour tout $n \geq 2$, $u_n = 4u_{n-2} - 3u_{n-1} + 2^{n-2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.3

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$. Alors φ est clairement linéaire.
De plus, $P \in \operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si $x_1, \dots, x_n$ sont racines de P.

Soit encore si et seulement si il existe $Q \in \mathbf{R}_{m-n}[X]$ tel que $P = Q \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.4

Notons F et G les directions respectives de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.
Nous savons déjà que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors ils sont disjoints ou confondus.
Il est évident que s'ils sont confondus, alors ils ont même direction, et par conséquent sont parallèles.

Il ne reste donc qu'à prouver que deux hyperplans disjoints sont parallèles.
Prouvons plutôt la contraposée, à savoir que si $F \neq G$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ s'intersectent.
Si $F \neq G$, quitte à échanger F et G, on peut supposer que $F \not\subset G$, et donc qu'il existe $x \in F \setminus G$.
Mais alors $G + \text{Vect}(x) = E$. C'est un résultat du cours[1].
Soient alors $a \in \mathscr{F}$ et $b \in \mathscr{G}$. Alors $a - b \in E = G + \text{Vect}(x)$, donc il existe $u \in G$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que

$$a - b = u + \lambda x \Leftrightarrow \underbrace{a - \lambda x}_{\in \mathscr{F}} = \underbrace{b + u}_{\in \mathscr{G}}$$

et donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.

En revanche, le résultat ne vaut plus si on considère des espaces plus petits que des hyperplans.
Par exemple, deux droites de $\mathbf{R}^3$ peuvent être disjointes sans pour autant être parallèles.

[1] Plus exactement : nous avons prouvé en cours qu'un hyperplan possède un supplémentaire de dimension 1. Mais la preuve montrait que tout vecteur qui n'est pas dans l'hyperplan engendre un supplémentaire. Cette preuve ne nécessite pas d'hypothèse de dimension finie, et d'ailleurs la **définition** d'hyperplan ne fait pas appel à la dimension finie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.5

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $a \in \mathscr{G}$, et donc il existe $u \in G$ tel que $a = b + u$ et donc $b - a \in G$.
De plus, on a alors $\mathscr{G} = a + G$, et donc pour $u \in F$, on a $x = a + u \in \mathscr{G}$, et donc $u = x - a \in G$.
Donc $F \subset G$.
Inversement, supposons que $F \subset G$ et que $b - a \in G$.
Soit alors $x \in \mathscr{F}$. Il existe $u \in F$ tel que $x = a + u$.
Et donc $x = b + \underbrace{(a - b)}_{\in G} + \underbrace{u}_{\in F \subset G} \in b + G = \mathscr{G}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.6

Notons F et G les directions respectives de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.
Soient alors deux points $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{G}$, de sorte que $\mathscr{F} = A + F$ et $\mathscr{G} = B + G$.
Considérons alors $\mathscr{F}' = A + (F + G)$ et $\mathscr{G}' = B + (F + G)$.
Il est alors évident que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ et $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}'$.
Reste donc à prouver que $\mathscr{F}' \cap \mathscr{G}' = \emptyset$.

Mais nous savons[2] que

$$\begin{aligned} \mathscr{F}' \cap \mathscr{G}' \neq \emptyset &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in (F + G) + (F + G) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F + G \Leftrightarrow \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Donc puisque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont supposés disjoints, il en est de même de $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}'$.

[2] C'est la caractérisation des sous-espaces affines d'intersection non vide vue en cours.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.7

Notons F la direction de $\mathscr{F}$ et G un supplémentaire de F dans E.
Soit alors f la projection sur G parallèlement à F, qui a donc F pour noyau.
Considérons A un point de $\mathscr{F}$, et notons $b = f(A)$.
Alors nous savons que $\{x \in E \mid f(x) = b\}$ est le sous-espace affine de E passant par A et de direction $\operatorname{Ker} f = F$: c'est donc $\mathscr{F}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 35.8

Si F et G sont supplémentaires, alors en particulier, pour tout $A \in \mathscr{F}$ et tout $B \in \mathscr{G}$, $\overrightarrow{AB} \in E = F + G$.
Donc déjà $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$.
De plus, la direction de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est alors $F \cap G = \{0_E\}$, et donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

Index