Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : Soit la suite définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
En posant f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x - x^2$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
En fait, la plupart des suites étudiées jusqu'à présent sont de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f bien choisie.

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I.

1 Existence de tous les termes de la suite

1.1 Intervalles stables

Définition
On dit que J est un intervalle stable par f si $f(J) \subset J$.

Rappels : 1. $f(J) \subset J$ signifie que pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$.
2. L'ensemble image $f(J)$ s'obtient par lecture du tableau de variations.

Exemple
L'intervalle $[0;1]$ est stable par la fonction $f(x) = x - x^2$.
En effet, $f'(x) = 1 - 2x$ donc le tableau de variation de f est :
On en déduit que $f([0;1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0;1]$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ 0

1.2 Intérêt des intervalles stables

Pourquoi avons-nous introduit la notion d'intervalles stables ? Pour cela considérons l'exemple suivant :

Exemple : Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :$u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 1}$
A priori, on peut penser que tous les termes de la suite u sont définis. Ce qui est faux.
En effet, $u_1 = \frac{1}{u_0-1} = \frac{1}{2-1} = 1$; et puisque $u_1 = 1$, $u_1 - 1 = 0$.
Donc il est impossible de calculer u_2 : u_2 n'existe pas et les termes suivants non plus.
De ce fait, seuls les deux premiers termes de la suite u existent !

Méthode : Supposons que l'intervalle I soit un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n$ existe et $u_n \in I$

Pour le démontrer, posons l'hypothèse de récurrence suivante : $\mathcal{P}_n$: " u_n existe et $u_n \in I$"
- $\mathcal{P}_0$ est vraie car d'après l'énoncé, $u_0 \in I$.
- Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai. Alors u_n existe et $u_n \in I$. Or f est définie sur I donc $f(u_n)$ existe et par stabilité de I par f, $f(u_n) \in f(I) \subset I$. Donc $f(u_n) \in I$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Conclusion : si I est un intervalle stable de f et que $u_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n$ existe et $u_n \in I$.

Retour exemple introductif : Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Si on suppose de plus que $u_0 \in [0,1]$, alors on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0,1]$, puisque l'intervalle $[0,1]$ est stable pour la fonction associée et contient u_0.

2 Limites éventuelles

2.1 Points fixes

Définition
Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Remarque : Soit f une fonction continue sur I et $[a,b] \subset I$ un intervalle stable par f.
Alors f possède un point fixe appartenant à $[a;b]$.

En effet, posons $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a;b]$ et $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \geqslant 0$, car $f(a)$ et $f(b) \in [a;b]$ puisque $[a,b]$ est stable par f. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

2.2 Limites

Rappel chapitre continuité :

`Théorème`

Soit f une fonction **continue** en un point l (ou sur un intervalle contenant l) et u une suite convergeant vers l. Alors la suite $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(l)$.

Supposons maintenant que la suite u converge vers une limite finie l : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Le théorème précédent montre que $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} f(l)$. Mais d'autre part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et donc par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $l = f(l)$.

`Théorème`

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite converge vers l et si la fonction f est continue en l, alors l est un point fixe de f.
Autrement dit l est solution de l'équation $f(x) = x$.

En général, la fonction f possède non pas un mais plusieurs points fixes. Pour déterminer la limite éventuelle, on utilise le résultat classique sur les suites : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in (a;b)$ et si la suite u converge vers l alors $l \in [a;b]$.

Exemple

Soit la suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Etape 1 : la suite est-t-elle bien définie ?

2 méthodes : la première est de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n > 0$.
La deuxième consiste à étudier la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et à trouver un intervalle stable contenant $u_0 = 1$: l'intervalle $[1, +\infty[$ convient. On obtient que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1, +\infty[$.

Etape 2 : recherche de points fixes (limites éventuelles)

L'équation $x = x + \frac{1}{x}$ n'admet pas de solution dans $[1, +\infty[$ (ni même dans $\mathbb{R}^*$!), donc u n'admet pas de limite.

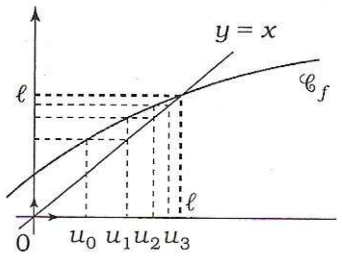
Etape 3 : monotonie de la suite

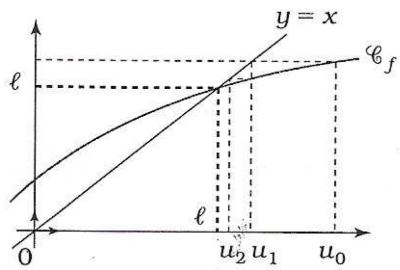
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc u est strictement croissante ; on en déduit que u diverge vers $+\infty$.

3 Représentation graphique

En utilisant la courbe $\mathcal{C}$ associée à f, on peut représenter la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ sur l'axe des abscisses du repère orthonormé dans lequel on a tracé $\mathcal{C}$.
La droite d'équation $y = x$ permet de reporter les points de l'axe des ordonnées à l'axe des abscisses et met en évidence l'éventuelle limite de la suite qui est l'abscisse d'un point d'intersection de cette droite avec $\mathcal{C}$. (En effet un point fixe de f est l'abscisse d'une intersection de la courbe et de la droite $y = f(x)$!).
Représentation graphique sur des exemples (Précis de Mathématiques édition Bréal).

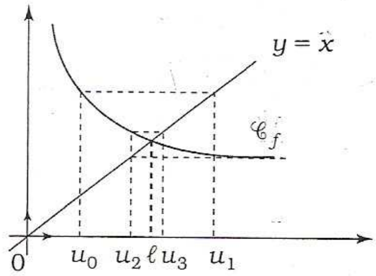
1)



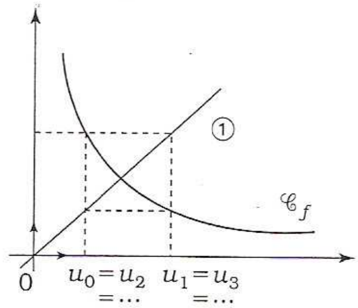


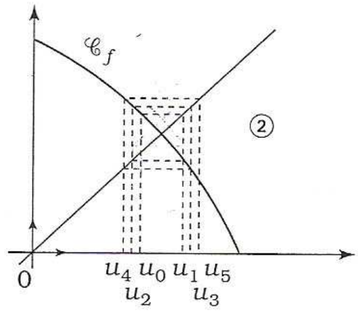
Sur les deux figures, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une même fonction f monotone croissante. Dans les deux cas, (u_n) est monotone (et elle converge vers ℓ), mais selon le choix de u_0 ($u_0 < \ell$ ou $u_0 > \ell$), (u_n) est croissante ou décroissante.

2)



D'après ce graphique, on peut penser que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, donc qu'elles convergent vers la même limite ℓ et donc que (u_n) converge vers ℓ.
Plus généralement, lorsque f est monotone décroissante, $f \circ f$ est monotone croissante.
Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), qui sont définies par la relation de récurrence $u_{k+1} = f \circ f(u_k)$, sont donc monotones. Dans ce cas, pour que la suite (u_n) soit convergente, il faut que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient convergentes et qu'elles aient la même limite.
Illustrons des situations dans lesquelles la suite (u_n) ne converge pas :





– dans le cas ①, (u_n) est périodique ;
– dans le cas ②, même si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, elles n'auront pas la même limite et u_n diverge.

4 Monotonie de la suite

Il ne reste plus qu'à justifier que la suite u converge. Nous allons essayer de déterminer la monotonie de la suite afin d'appliquer les théorèmes de convergence des suites monotones.
Attention : toutes ces méthodes seront à redémontrer à chaque fois. Il n'y a pas de théorème de cours.

Il y a plusieurs cas à distinguer : mais dans tous les cas, nous suppposons que f est continue sur un intervalle I, qui est stable par f et qui contient u_0. Ainsi , $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.

4.1 critère $u_{n+1} - u_n$

Quand est-ce-que ce critère permet de conclure ? Quand le signe de $f(x) - x$ est **constant** sur I.
Méthode
Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$.
Supposons en outre que $\forall x \in I$, $f(x) - x \geqslant 0$ (*) (resp. $\leqslant 0$).
Alors la suite u est croissante (resp. décroissante).
En effet, en appliquant l'inégalité (*) au point $x = u_n \in I$: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$)
Vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2 f est croissante

Méthode
Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$. Supposons en outre que f est croissante sur l'intervalle I.
Alors la suite u est monotone .
On calcule explicitement $u_1 (= f(u_0))$ et on distingue les deux cas suivants :

- $\underline{u_0 \leqslant u_1}$
  On va montrer par récurrence que la suite u est croissante. Posons, $\mathcal{P}_n$: " $u_n \leqslant u_{n+1}$"
  - $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
  - Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ ce qui montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie et la suite u est croissante.
- $\underline{u_0 \geqslant u_1}$
  On va montrer par récurrence que la suite u est décroissante. Posons, $\mathcal{P}_n$: " $u_n \geqslant u_{n+1}$"
  - $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
  - Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai donc $u_n \geqslant u_{n+1}$. Or la fonction f est croissante sur I et u_n ainsi que u_{n+1} appartiennent à I donc $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ ce qui montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

  Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie et la suite u est décroissante

4.3 f est décroissante

Méthode
Supposons que f est continue sur un intervalle I stable par f et contenant u_0. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n \in I$. Supposons en outre que f est décroissante sur l'intervalle I.
Nous introduisons alors deux suites auxiliaires a et b définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
Calculons a_{n+1} : $a_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(a_n)$
Donc la suite a vérifie une relation de récurrence donnée par $a_{n+1} = (f \circ f)(a_n)$.
Par définition $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n (= u_{2n}) \in I$ et la fonction $f \circ f$ est croissante sur I !
On peut donc étudier la monotonie de la suite a à l'aide du paragraphe précédent.
De même, la suite b est définie par la relation $b_{n+1} = (f \circ f)(b_n)$ donc peut être étudiée comme a.

Remarque : Les deux suites a et b seront de monotonies contraires.
Idée de la preuve : si $a_0 \leq a_1 \Leftrightarrow u_0 \leq u_2$ alors par décroissance de f, $f(u_0) \geq f(u_1) \Leftrightarrow u_1 \geq u_3 \Leftrightarrow b_0 \geq b_1$.
De même si $a_0 \geq a_1$ alors $b_0 \leq b_1$.

5 Convergence

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in (a, b)$ (intervalle de bornes a et b, mais peu importe qu'il soit ouvert ou fermé, avec a et b pouvant être l'infini) et que f est continue sur (a, b).

5.1 u est monotone

Cas croissant

1. Si u est majorée (exemple, si $b \neq +\infty$) alors elle converge vers un point fixe de f appartenant à $[a; b]$
2. Si u ne <u>semble</u> pas majorée (par exemple $b = +\infty$). On <u>essaie</u> de minorer u par un nombre m tel qu'il n'existe pas de point fixe pour f sur l'intervalle $[m; b]$ et on utilise le raisonnement suivant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$. Supposons que la suite u converge vers une limite finie l. Par suite $l \geqslant m$ et l est un point fixe de f. Or f ne possède pas de point fixe sur $[m; b]$: contradiction. Donc la suite ne converge pas et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$

A adapter dans le cas décroissant.

5.2 u n'est ni croissante ni décroissante

Il s'agit du cas étudié dans la section 'f décroissante '. Les suites a et b sont monotones donc on peut leur appliquer le raisonnement de la section précédente pour déterminer leurs convergences respectives. Puis on applique le théorème :
`Théorème`
La suite u converge vers l ssi $\big($les suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l\big)$.

5.3 Méthode fondée sur l'inégalité des accroissements finis

Une autre méthode, dans le cas de convergence vers le point fixe l, consiste à utiliser l'inégalité des accroissements finis.
Dans une première étape, on majore $|f'(x)|$ sur l'intervalle stable, par un réel $q < 1$.
Puis après vérification de **toutes** les hypothèses, on applique l'IAF aux points u_n et l, qui appartiennent à l'intervalle stable :
$|f(u_n) - f(l)| \leq q|u_n - l| \Leftrightarrow |u_{n+1} - l| \leq q|u_n - l|$.
On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq q^n|u_0 - l|$ (*).
On conclut avec le théorème d'encadrement que $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ car $0 \leq q < 1$.
L'inégalité (*) permet de connaître en plus la vitesse de convergence ! (car u_n s'approche aussi vite de l que q^n de 0, c'est-à-dire très vite !)