Nombre d'or et Suite de Fibonacci

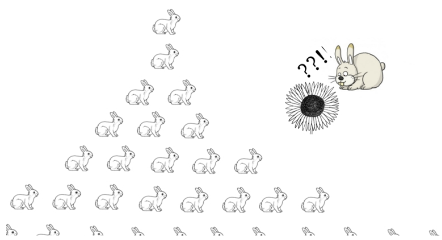
A. Camanes

Niveau : Terminale
Difficulté : ★★ / ★★★
Durée : 1h30
Rubrique(s) : Logique (Récurrence), Suites, Polynômes (Trinôme), Fonctions (Études)

La petite histoire...
Considérons une famille de lapins autoreproduisants, c'est-à-dire que chaque lapin peut engendrer des lapins tout seul. Les lapins sont également supposés immortels...
On suppose qu'à l'aube des temps, un lapin naquit. Le mois suivant, ce lapin fut adolescent et le mois d'après il engendra un autre lapin. Le mois suivant, le premier lapin engendra encore un autre lapin, alors que le deuxième faisait sa crise d'adolescence. Ainsi tous les mois, chaque lapin ayant deux mois ou plus, donna naissance à un lapin de plus.
Combien de lapins étaient en vie après 6 mois ? et après n mois ?
Un moyen de répondre à cette question de manière plus générale est d'étudier la suite donnant le nombre u_n de lapins vivant au bout de n mois. Elle vérifie la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci (du nom du mathématicien qui l'a décrite en 1202 dans son traité intitulé *Liber abaci*, premier ouvrage vulgarisant les chiffres arabes en occident). Nous verrons comment nous pouvons trouver le nombre de lapins à la génération n.
Nous étudierons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, qui donne le taux d'accroissement mensuel de la population lapins, et nous verrons qu'il tend vers le célèbre nombre d'or.
Enfin, nous verrons comment approcher le nombre d'or. Ce dernier a des vertus mystiques et biologiques. Il est relié par exemple à l'angle séparant deux graines contiguës dans une fleur de tournesol...



Exercice 1 (Nombre d'or et Reproduction de lapins).

1. On s'intéresse à l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

a. Montrer que cette équation possède une unique solution positive que nous noterons ϕ. Le nombre ϕ est appelé le nombre d'or.

b. Montrer les égalités

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2 + 1}{2\phi - 1}.$$

On considère la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ puis pour tout entier naturel n, par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cette suite est appelée la suite de Fibonacci.

2.a. Calculer u_2, u_3, u_4.

b. Justifier que cette suite donne bien le nombre de lapins dans le modèle décrit plus haut dans la petite histoire, c'est-à-dire que u_n correspond au nombre de lapins au bout de n mois.

Soient α et β deux réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

3.a. Vérifier que la suite ainsi définie satisfait à la relation de récurrence

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

b. Déterminer α et β de sorte que $v_0 = v_1 = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$ désigne le nombre de lapins au bout de n mois.

c. En déduire que pour tout entier n, $\alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ est un entier naturel.

d. Montrer que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ϕ lorsque n tend vers l'infini.

Nous allons maintenant étudier différentes suites qui convergent vers le nombre d'or et, pour chacune d'entre elles, déterminer sa vitesse de convergence.

Exercice 2 (Approximations du nombre d'or).

On rappelle que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

a. Pour tout entier $n \geq 0$, montrer que a_n existe et $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.

b. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, montrer l'inégalité $|a_{n+1} - \phi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \phi|$.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 0$,

$$|a_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

d. Que dire du comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = \dfrac{c_n^2+1}{2c_n-1}$.
On note f la fonction définie pour tout $x \in]\frac{1}{2};+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

a. Étudier les variations de f sur son intervalle de définition. En particulier, calculer $f(\phi)$ et montrer que, pour tout nombre réel $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, c_n existe et $c_n > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $\phi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

d. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

e. Montrer que pour tout entier naturel n, $c_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{2}(c_n - \phi)^2$.

f. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 0$, l'inégalité

$$c_n - \phi \leq 2^{-\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k}.$$

g. Quelle est la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indications

Indications sur l'Exercice 1

3.a. Se ramener à l'étude du système

$$\begin{cases} 1 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

3.b. On pourra poser $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et se rappeler que ϕ et ψ sont les solutions du trinôme étudié à la question précédente.

3.c. Se rappeler l'histoire des lapins...

3.d. Factoriser par ϕ^n puis utiliser que, si $|\rho| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho^n = 0$.

Indications sur l'Exercice 2

1.a. Une petite récurrence !

1.b. Utiliser la question précédente et la question **1.b)** de l'Exercice **1**.

1.c. Se rappeler le théorème dit « des gendarmes »ou théorème d'encadrement.

2. Utiliser les mêmes méthodes qu'à la question précédente. Se rappeler le théorème de convergence des suites monotones.

2.f. On rappelle que $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + ... + 2^n$.

Corrections

Correction de l'Exercice 1

1.a. Le discriminant du trinôme x^2-x-1 vaut 5. Ainsi, les solutions de l'équation $x^2-x-1=0$ sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme $5\geq 4$, alors $\sqrt{5}\geq 2$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq -\frac{1}{2}$. Ainsi, l'unique solution positive de l'équation précédente est

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b. D'après la définition,

$$\phi^2=\phi+1.$$

D"où, puisque $\phi\neq 0$,

$$\phi=1+\frac{1}{\phi}.$$

De plus, $\phi\neq\frac{1}{2}$ d'où :

$$\frac{\phi^2+1}{2\phi-1}=\phi\frac{\phi^2+1}{2\phi^2-\phi}=\phi\frac{\phi+2}{2\phi+2-\phi}=\phi.$$

2.a. En utilisant la formule de récurrence pour $n=0$, il vient

$$u_2=u_1+u_0=1+1=2.$$

En utilisant la formule de récurrence pour $n=1$, on obtient

$$u_3=u_2+u_1=2+1=3.$$

En utilisant la formule de récurrence pour $n=2$, on a

$$u_4=u_3+u_2=3+2=5.$$

b. Notons u_n le nombre de lapins à la génération n, c'est-à-dire au bout de n mois. Le nombre de lapins à la génération $n+2$ est la somme

- du nombre de lapins à la génération précédente $n+1$ car les lapins sont immortels, ce nombre vaut u_{n+1} ;
- du nombre de lapins nés à la génération $n+2$; il est égal au nombre de lapins qui ont déjà au moins un mois à la génération $n+1$, c'est-à-dire le nombre de lapins présents à la génération n, ce qui vaut u_n.

Ceci implique que $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. De plus, d'après la petite histoire $u_0=u_1=1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien la même que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et v_n donne bien le nombre de lapins au bout de n mois.
Pour prouver rigoureusement que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=v_n$, il faut faire une récurrence avec comme hypothèse de récurrence

$$\mathcal{P}(n):\quad u_n=v_n,\quad u_{n+1}=v_{n+1}.$$

- $u_0=u_1=1$ et $v_0=v_1=1$ donc $u_0=v_0$ et $u_1=v_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e. $u_n=v_n$ et $u_{n+1}=v_{n+1}$. Or

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\qquad v_{n+2}=v_{n+1}+v_n,$$

d'où $u_{n+2}=v_{n+2}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. $v_0 = v_1 = 1$ si et seulement si

$$\begin{cases} v_0 = 1 = \alpha + \beta, \\ v_1 = 1 = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

On résout ce système d'inconnues α et β. On remplace la deuxième ligne par $(1-\sqrt{5})/2$ fois la première moins la deuxième, ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ 0\alpha + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1. \end{cases}$$

En simplifiant, on arrive à

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\sqrt{5}\beta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Finalement, on obtient $\beta = \frac{\sqrt{5}+5}{10}$ et $\alpha = 1 - \beta = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b. On montre par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$: $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- D'après les définitions, $v_0 = v_1 = 1$ et $v_2 = 2$. Ainsi, la propriété $(\mathcal{PP}_0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel. Supposons la propriété $(\mathcal{PP}_n)$ satisfaite. Notons $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On rappelle que les nombres ϕ et ψ ont été étudiés à la question précédente et qu'ils sont solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Ainsi, $\phi^2 = \phi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$. Soit,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \alpha\psi^{n+2} + \beta\phi^{n+2} \\ &= \alpha\psi^n \cdot \psi^2 + \beta\phi^n\phi^2 \\ &= \alpha\psi^n(\psi+1) + \beta\phi^n(\phi+1) \\ &= \alpha\psi^{n+1} + \alpha\psi^n + \beta\phi^{n+1} + \beta\phi^n \\ &= \alpha\psi^{n+1} + \beta\phi^{n+1} + \alpha\psi^n + \beta\phi^n \\ &= v_{n+1} + v_n. \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

c. On remarque que, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et que $u_0 = u_1 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$ (c'est le nombre de lapins au bout de n mois...).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+5}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ est un entier naturel, ce qui n'est pas évident à première vue !!

d. On calcule le rapport en mettant en valeur la quantité $\rho = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)$. On remarque que ρ^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| = \frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \in [0;1[$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho^n + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\alpha\rho^n + \beta}. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\beta\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\beta}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi.$$

□

Correction de l'Exercice 2

1.a. Pour tout entier naturel n, appelons $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « a_n existe et $\frac{3}{2}\leq a_n\leq 2$ ». Montrons par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Pour $n=0$, a_0 existe et on a bien $\frac{3}{2}\leq a_0=2\leq 2$. La propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
- Soit $n\geq 0$. On suppose que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. On a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $0<\frac{3}{2}\leq a_n$, de sorte que $\frac{1}{a_n}$ existe et donc a_{n+1} aussi. De plus,

$$\begin{array}{ccccl}\frac{3}{2} & \leq & a_n & \leq & 2\\ \frac{1}{2} & \leq & \frac{1}{a_n} & \leq & \frac{2}{3}, \text{ car } x\mapsto\frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.\\ \frac{3}{2} & \leq & 1+\frac{1}{a_n} & \leq & \frac{5}{3}\\ \frac{3}{2} & \leq & a_{n+1} & \leq & 2.\end{array}$$

  Ainsi, la propriété $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n\geq 0$

$$a_n \text{ existe et } \frac{3}{2}\leq a_n\leq 2.$$

b. Soit $n\geq 0$. En utilisant la définition de la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ et le fait que $\phi=1+\frac{1}{\phi}$, on a

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-\phi| &= \left|1+\frac{1}{a_n}-1-\frac{1}{\phi}\right|\\ &= \left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\phi}\right|\\ &= \frac{|a_n-\phi|}{a_n\phi}\\ &\leq \frac{4}{9}|a_n-\phi|\end{aligned}$$

car $a_n\geq\frac{3}{2}$ et $\phi\geq\frac{3}{2}$.

c. On montre la propriété $|a_n-\phi|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$ par récurrence sur n.

- Pour $n=0$, $|a_0-\phi|=\left|2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq\frac{3-1}{2}\leq 1$, car $\sqrt{5}\leq 3$.
- Soit $n\geq 0$. On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n. Alors, en utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-\phi| &\leq \frac{4}{9}|a_n-\phi|\\ &\leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n\\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$|a_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

d. Comme $0 \leq \frac{4}{9} < 1$, alors $(\frac{4}{9})^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, en utilisant le théorème d'encadrement, on obtient que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers ϕ.

2.a. La fonction f est le quotient de fonctions dérivables sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ et le dénominateur de s'annule pas sur $]\frac{1}{2},+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]\frac{1}{2},+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]\frac{1}{2};+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-1)-2(x^2+1)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2} \\ &= 2\frac{x^2-x-1}{(2x-1)^2} \\ &= 2\frac{(x-\phi)(x-\psi)}{(2x-1)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est toujours positif donc $f'(x)$ a le même signe que son numérateur. De plus, $\psi < 0$ donc $x - \psi > 0$ pour $x > \frac{1}{2}$. Enfin $\phi > \frac{1}{2}$ donc f' est négative sur $]\frac{1}{2};\phi]$ et positive sur $[\phi;+\infty[$. Ainsi, f est décroissante sur $]\frac{1}{2};\phi]$ puis croissante sur $[\phi;+\infty[$.
En particulier, la fonction f atteint sa valeur minimale au point $x = \phi$, de sorte que, pour tout nombre réel $x > \frac{1}{2}$, $f(x) \geq f(\phi) = \frac{\phi^2+1}{2\phi-1} = \phi > \frac{1}{2}$, d'après la question **1.c)** de l'Exercice **1**.

b. On montre par récurrence la propriété : c_n existe et $c_n > \frac{1}{2}$.

- Pour $n = 0$, d'après la définition, $c_0 = 2$ soit $c_0 > \frac{1}{2}$.
- Soit $n \geq 0$. On suppose que c_n existe et $c_n > \frac{1}{2}$. Comme $c_n > \frac{1}{2}$, c_{n+1} est bien défini et $c_{n+1} = f(c_n)$. Or, $c_n > \frac{1}{2}$, donc, d'après la question précédente, $f(c_n) > \frac{1}{2}$. Ainsi, $c_{n+1} > \frac{1}{2}$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$, c_n existe et $c_n > \frac{1}{2}$.

c. On montre par récurrence la propriété : $\phi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$.

- Pour $n = 0$, on a bien $\phi \leq c_1 = \frac{5}{3} \leq c_0 = 2 \leq 2$.
- Soit $n \geq 0$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[\phi;+\infty[$ et $f(\phi) = \phi$, on a en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{ccccccc} \phi & \leq & c_{n+1} & \leq & c_n & \leq & 2 \\ f(\phi) & \leq & f(c_{n+1}) & \leq & f(c_n) & \leq & f(2) \\ \phi & \leq & c_{n+2} & \leq & c_{n+1} & \leq & \frac{5}{3} \\ \phi & \leq & c_{n+2} & \leq & c_{n+1} & \leq & 2, \end{array}$$

  où nous avons utilisé la question **1.c)** de l'Exercice **1** sur les propriétés de ϕ. La propriété est ainsi vraie à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$\phi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2.$$

d. D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée, donc elle converge.

e. Soit $n \geq 0$. En utilisant la définition de la suite $(c_n)_{n\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \phi &= \frac{c_n^2+1}{2c_n-1} - \phi \\ &= \frac{c_n^2 - 2c_n\phi + \phi + 1}{2c_n-1} \\ &= \frac{c_n^2 - 2c_n\phi + \phi^2}{2c_n-1} \\ &= \frac{(c_n-\phi)^2}{2c_n-1} \\ &\leq \frac{1}{2}(c_n-\phi)^2, \end{aligned}$$

car $\phi \leq c_n$, soit encore $2 \leq 2\phi - 1 = \sqrt{5} \leq 2c_n - 1$.

f. On montre par récurrence la propriété $c_n - \phi \leq 2^{-\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k}$.

- Pour $n = 0$, on a bien $c_0 - \phi = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq \frac{1}{2}$.
- Soit $n \geq 0$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \phi &\leq 2^{-1}(c_n-\phi)^2 \\ &\leq 2^{-1}2^{-2\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k} \\ &\leq 2^{-1}2^{-\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{k+1}} \\ &\leq 2^{-1-\sum\limits_{k=1}^{n+1} 2^k} \\ &\leq 2^{-\sum\limits_{k=0}^{n+1} 2^k}. \end{aligned}$$

  Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 0$,

$$c_n - \phi \leq 2^{-\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k}.$$

g. Comme $c_n - \phi \geq 0$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, la suite $(c_n - \phi)_{n\geq 0}$ est donc encadrée par deux suites qui tendent vers 0 : le théorème d'encadrement nous permet d'affirmer alors que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ converge vers ϕ. □

