Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}1 — 16 septembre 2017

➤ *La durée du devoir est de 2 heures, les calculatrices sont interdites.*

➤ *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 7 exercices.*

➤ *N'oubliez pas :*
- *de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;*
- *qu'en cas de besoin, vous avez le droit d'admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante ;*
- *d'accorder du soin à la présentation, et à votre rédaction (faites des phrases, n'oubliez pas les quantificateurs, soyez précis dans votre argumentation).*

➤ *Enfin, ce sujet peut se révéler trop long : traitez en priorité les questions qui vous semblent les plus simples.*

Barème *indicatif* : Ex1 : 3pts — Ex2 : 4pts — Ex3 : 4pts — Ex4 : 6pts — Ex5 : 3pts — Ex6 : 8pts — Ex7 : 4pts

Exercice 1 — (Quantificateurs).

1) Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (où f désigne une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles) :[*]

a) $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant m$ *(f est minorée sur I)*

b) $\forall\ (x, y) \in\ I^2,\ f(x) \times f(y) \geqslant 0$ *(f est de signe constant sur I)*

c) $\forall\, x_0 \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in\ I,\ [|x - x_0| < \alpha] \Longrightarrow [|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$ *(f est continue sur I)*

2) Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes

a) La fonction f n'est pas décroissante sur I.

b) La fonction f admet un maximum sur I.

c) Tout nombre réel est un nombre complexe.

Exercice 2 — (Récurrences).

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$. Rappeler la formule donnant S_n en fonction de n, et la redémontrer.

2) On définit une suite réelle (u_n) en posant $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

a) Calculer u_2 et u_3.

b) A l'aide d'une récurrence double, établir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 3 — (Sommes diverses).

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque, et x un réel quelconque également. Calculer chacune des sommes suivantes[†] :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{2k+1}}{2^k}\,; \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} x^{2k}\,; \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{3k}\,; \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$$

∗. Uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite en parenthèses.

†. En justifiant chacune de vos réponses, cela va de soi.

Exercice 4 — (Porte NAND). Soient P et Q deux assertions logiques. On définit l'opérateur logique NAND par $\overline{P \wedge Q}$ et on le note

$$P \uparrow Q \equiv \overline{P \wedge Q}$$

1) Dresser la table de vérité de $P \uparrow Q$.
2) Si A [respectivement B] est l'ensemble des éléments qui vérifient l'assertion P [respectivement l'assertion Q], quel est l'ensemble des éléments qui vérifient $P \uparrow Q$? *(on pourra s'aider d'un dessin).*
3) Soient P, Q et R trois assertions logiques. Les assertions $(P \uparrow Q) \uparrow R$ et $P \uparrow (Q \uparrow R)$ sont-elles logiquement équivalentes ?
4) Montrer que $\overline{P}$ peut s'exprimer uniquement en fonction de P et du symbole $\uparrow$.
5) En déduire $(P \wedge Q)$ puis $(P \vee Q)$ uniquement en fonction de P, Q et du symbole $\uparrow$.
6) Exprimer $(P \Rightarrow Q)$ uniquement en fonction de P, Q et du symbole $\uparrow$.

Exercice 5 — (Ensembles). Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. On définit la **différence symétrique de** A **et** B (et on note $A\Delta B$) la partie suivante :

$$A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Etablir que : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 6 — (Simplification de sommes).
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \geqslant p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques propriétés des sommes $S_{n,p}$.

1) Dans cette question on étudie le cas $p = 0$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $S_{n,0} = 0$.
   b) Et que vaut $S_{0,0}$?
2) Dans cette question on étudie le cas $p = 1$ (et donc $n \geqslant 1$). On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.
   a) Simplifier $f(x)$.
   b) Donner deux expressions différentes de la dérivée f'.
   c) Déduire de la question précédente la valeur de $S_{1,1}$, et celle de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
3) On revient au cas général où n et p sont deux entiers naturels, avec $n \geqslant p$.
   a) Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
   b) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$
   c) En déduire que : $S_{n,p+1} = n\,(S_{n,p} - S_{n-1,p})$
   d) Etablir que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n > p,\ S_{n,p} = 0$.

Exercice 7 — (Technique). Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.