Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}1 — 16 septembre 2017

Exercice 1 — (Quantificateurs).

1) a) La négation de "$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant m$" est $\boxed{\forall\, m \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in I,\ f(x) < m}$.

b) La négation de "$\forall\ (x,y) \in\ I^2,\ f(x) \times f(y) \geqslant 0$" est $\boxed{\exists\ (x,y) \in\ I^2,\ f(x) \times f(y) < 0}$.

c) La négation de "$\forall\, x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in\ I,\ [|x - x_0| < \alpha] \Longrightarrow [|f(x) - f\,(x_0)| < \varepsilon]$" est

$$\boxed{\exists\, x_0 \in I,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x \in\ I,\ [|x - x_0| < \alpha] \wedge [|f(x) - f\,(x_0)| \geqslant \varepsilon]}.$$

2) a) L'assertion "la fonction f n'est pas décroissante sur I" peut se traduire à l'aide de quantificateurs par :

$$\boxed{\exists\, (x,y) \in\ I^2,\ \ [x \leqslant y] \wedge [f(x) < f(y)]}.^*$$

b) L'assertion "la fonction f admet un maximum sur I" peut se traduire à l'aide de quantificateurs par :

$$\boxed{\exists x_0 \in\ I,\ \forall x \in\ I,\ f(x) \leqslant f\,(x_0)}.$$

c) L'assertion "tout nombre réel est un nombre complexe" peut se traduire à l'aide de quantificateurs par :

$$\boxed{\forall x \in\ \mathbb{R},\ x \in\ \mathbb{C}}.$$

Exercice 2 — (Récurrences).

1) D'après le cours : $\boxed{\forall n \in\ \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$: "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$" et prouvons $P(n)$ par récurrence sur n.

➤ **Initialisation**. D'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$. D'autre part : $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$. Ainsi $\boxed{P(0) \text{ est vraie.} \quad (\spadesuit)}$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k = \left[\sum_{k=0}^{n} k\right] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2\,(n+1)}{2} \text{ d'où : } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété. $(\clubsuit)$

➤ **Conclusion**. On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, ce qu'il fallait démontrer.

2) a) On a : $\boxed{u_2 = 13}$ et $\boxed{u_3 = 35}$.

b) Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$: "$u_n = 2^n + 3^n$" et prouvons $P(n)$ par récurrence (double) sur n.

➤ **Initialisation**. D'une part : $2^0 + 3^0 = 2$ et d'autre part : $u_0 = 2$ (d'après l'énoncé). Ainsi $\boxed{P(0) \text{ est vraie.} \quad (\spadesuit)}$

Par ailleurs, on a : $2^1 + 3^1 = 5$ et d'autre part : $u_1 = 5$ (d'après l'énoncé). Ainsi $\boxed{P(1) \text{ est vraie.} \quad (\clubsuit)}$

➤ **Hérédité**. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. On a :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \times \left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6 \times (2^n + 3^n) = 10 \times 2^n + 15 \times 3^n - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n$$

$$= 4 \times 2^n + 9 \times 3^n \text{ d'où finalement : } u_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}.$$

Ce qui prouve que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété. $(\heartsuit)$

➤ **Conclusion**. On déduit de $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et de $(\heartsuit)$ que : $\boxed{\forall n \in\ \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n}$.

$*$. Prendre la négation de "f est décroissante sur I", qui se traduit par : $\forall\,(x,y) \in\ I^2,\ [x \leqslant y] \Longrightarrow [f(x) \geqslant f(y)]$.

Exercice 3 — **(Sommes diverses).** Dans cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque, et x un réel quelconque également.

1) Soit n un entier naturel quelconque. On a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{2k+1}}{2^k} = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{9}{2}\right)^k = 3\times\frac{1-(9/2)^{n+1}}{1-(9/2)} = 3\times\frac{1-(9/2)^{n+1}}{(-7/2)} \quad \text{d'où : } \boxed{S_1 = \frac{6}{7}\left((9/2)^{n+1}-1\right)}$$

2) Soit n un entier naturel quelconque. On a : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x^2\right)^k$. On reconnaît une somme de termes d'une suite géométrique de raison x^2, dont le calcul nécessite que l'on distingue le cas où $x^2 = 1$ (càd lorsque $x = \pm 1$) et le cas où $x^2 \neq 1$.

Explicitement : $\boxed{S_2 = \begin{cases} n & \text{si } x = \pm 1 \\ x^2\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \end{cases}}$

3) D'après la formule du binôme de Newton : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R},\; S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{3k} = \left(x^3+1\right)^n}$.

4) Pour tout entier naturel k, on a : $\ln\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right) = \ln\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1)$.

Par suite, pour tout entier naturel n on a : $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[\ln(k+2)-\ln(k+1)\right]$.

On reconnaît alors dans l'allégresse une somme télescopique, ce qui permet de conclure : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, S_4 = \ln(n+2)}$. †

Exercice 4 — Pour commencer, on peut observer que $P \uparrow Q$, définie comme la proposition $\overline{P \wedge Q}$, est logiquement équivalente à $\overline{P} \vee \overline{Q}$ (c'est une des deux lois de De Morgan).

1) Ci-contre, la table de vérité de $P \uparrow Q$.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\uparrow Q \equiv \overline{P}\vee\overline{Q}$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

2) Si A [respectivement B] est l'ensemble des éléments qui vérifient l'assertion P [respectivement l'assertion Q], alors l'ensemble des éléments qui vérifient $P \uparrow Q$ est $\boxed{\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}}$.

3) Soient P, Q et R trois assertions logiques.

On a d'une part : $P\uparrow(Q\uparrow R) \equiv \overline{P}\vee\left(\overline{Q\uparrow R}\right)$ d'où : $\boxed{P\uparrow(Q\uparrow R)\equiv\overline{P}\vee(Q\wedge R)}$.

D'autre part : $(P\uparrow Q)\uparrow R \equiv \left(\overline{P\uparrow Q}\right)\vee\overline{R}$ d'où : $\boxed{(P\uparrow Q)\uparrow R\equiv(P\wedge Q)\vee\overline{R}}$.

Plaçons-nous dans le cas où P est fausse, et où Q et R sont vraies. Alors : $(P\wedge Q)\vee\overline{R}$ est fausse, tandis que $\overline{P}\vee(Q\wedge R)$ est vraie.

$\boxed{\text{Il s'ensuit que les assertions } (P\uparrow Q)\uparrow R \text{ et } P\uparrow(Q\uparrow R) \text{ ne sont pas logiquement équivalentes.}}$

4) Par définition de l'opérateur NAND, on a : $(P\uparrow P)\equiv\left(\overline{P}\vee\overline{P}\right)$. D'où : $\boxed{(P\uparrow P)\equiv\overline{P}}$.

5) Soient P et Q deux assertions mathématiques. On a :

- d'une part : $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\equiv\overline{(P\uparrow Q)}\vee\overline{(P\uparrow Q)}\equiv\overline{(P\uparrow Q)}\equiv\overline{\overline{P}\vee\overline{Q}}\equiv\overline{\overline{P}}\wedge\overline{\overline{Q}}\equiv P\wedge Q$;
- et d'autre part : $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\equiv\overline{(P\uparrow P)}\vee\overline{(Q\uparrow Q)}\equiv\overline{\left(\overline{P}\vee\overline{P}\right)}\vee\overline{\left(\overline{Q}\vee\overline{Q}\right)}\equiv P\vee Q$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : P\vee Q\equiv(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q) \text{ et } P\wedge Q\equiv(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)}$.

†. De fait, on a : $S_4 = \ln(n+2) - \ln(1)$, mais $\ln(1) = 0$.

6) Puisque : $[P \Longrightarrow Q] \equiv \overline{P} \vee Q$, on déduit des questions 4 et 5 que :

$$\boxed{[P \Longrightarrow Q] \equiv [(P \uparrow P) \uparrow (P \uparrow P)] \uparrow [Q \uparrow Q]}$$

Exercice 5 — **(Ensembles).** Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. On définit la **différence symétrique de** A **et** B (et on note $A\Delta B$) la partie : $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Le but de l'exercice est d'établir que : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On propose ci-dessous deux méthodes pour y pervenir.

➤ **Méthode 1 (par double inclusion)** — Commençons par prouver que $A\Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$: soit donc x un élément de $A\Delta B$. Alors, par définition, deux cas sont possibles : soit $x \in A$ (et alors $x \notin B$), d'où $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. L'autre cas est $x \in B$, qui se traite de façon analogue. On en déduit déjà que $\boxed{A\Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A$ (et alors $x \notin B$ sinon x serait dans $A \cap B$), d'où $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire : $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Soit $x \in B$ et un raisonnement analogue permet encore une fois de conclure. On en déduit l'inclusion réciproque, et donc finalement l'égalité : $\boxed{A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)}$.

➤ **Méthode 2 (ensemblistement)** — On a :

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= \left[A \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right] \cap \left[\overline{B} \cup \left(B \cap \overline{A}\right)\right] && \text{(distributivité)} \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= \left[(A \cup B) \cap \left(\underbrace{A \cup \overline{A}}_{=E}\right)\right] \cap \left[\left(\underbrace{\overline{B} \cup B}_{=E}\right) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)\right] && \text{(re-distributivité)} \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= [(A \cup B) \cap E] \cap \left[E \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} && \text{(loi de Morgan)} \\
\Longleftrightarrow A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Conclusion.} \quad A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

Exercice 6 — **(Simplification de sommes).**

1) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule du binôme de Newton :

$$S_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1 + (-1))^n = 0^n = 0 \qquad \boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \; S_{n,0} = 0}$$

b) En revanche : $\boxed{S_{0,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^0 \binom{0}{0} = 1}$.

2) a) Soit $n \geqslant 1$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.

D'après la formule du binôme de Newton : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = (1-x)^n}$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a (suivant que l'on utilise l'expression de la question précédente, ou la définition de l'énoncé) :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -n\,(1-x)^{n-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k x^{k-1}}$$

c) $S_{1,1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} k$ d'où $\boxed{S_{1,1} = -1}$.

Par ailleurs, pour tout entier $n > 1$, on peut calculer $f'(1)$ grâce aux deux expressions de la question précédente pour obtenir :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k \qquad \boxed{\textbf{Conclusion} : S_{1,1} = -1 \text{ et } \forall n > 1,\ S_{n,1} = 0}.$$

3) a) Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

➤ Si $k \leqslant n$, alors : $k\dbinom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\dbinom{n-1}{k-1}$

➤ Si $k > n$, alors : $\dbinom{n}{k} = 0$ et $\dbinom{n-1}{k-1} = 0$ d'où en particulier : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$

Observons enfin que lorsque n est nul et k est non nul, les deux termes de l'égalité sont tous deux égaux à 0.

$$\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

b) Soient k et n deux entiers naturels non nuls.

➤ Si $k > n$, alors : $\dbinom{n}{k} = 0$, $\dbinom{n-1}{k-1} = 0$ et $\dbinom{n-1}{k} = 0$ d'où en particulier : $\dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n}{k} - \dbinom{n-1}{k}$

➤ Si $k = n$, alors : $\dbinom{n}{k} = 1$, $\dbinom{n-1}{k-1} = 1$ et $\dbinom{n-1}{k} = 0$ d'où en particulier : $\dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n}{k} - \dbinom{n-1}{k}$

➤ Enfin $k < n$, alors : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$ d'après la relation de Pascal ‡. D'où : $\dbinom{n}{k} - \dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n-1}{k-1}$.

Il reste à observer que dans le cas particulier où n est nul, tous les termes de l'égalité sont égaux à 0 pour conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}}$$

c) Soient n et p deux entiers naturels. On a, d'après la question a) :

$$S_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, n \binom{n-1}{k-1} k^p$$

En utilisant la question précédente, on obtient donc :

$$S_{n,p+1} = n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) k^p$$

d'où :

$$S_{n,p+1} = n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p \right) \qquad (\clubsuit)$$

Il reste à observer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p$ puisque le terme correspondant à $k = n$ dans cette somme est nul, du fait que $\dbinom{n-1}{n} = 0$. Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k} k^p = S_{n-1,p}$.

‡. Qu'il n'était pas nécessaire de redémontrer.

On déduit de cette remarque et de la relation (♣) : $\boxed{S_{n,p+1} = n\,(S_{n,p} - S_{n-1,p})}$

e) Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel p. Notons $R(p)$ la propriété :

$$R(p) : \quad \text{“}\forall\, n > p,\ S_{n,p} = 0\text{”}$$

La propriété $R(0)$ est vraie d'après la question 1-a) : la propriété est donc initialisée.

Etablissons son hérédité. On suppose donc que la propriété $R(p)$ est vraie pour un certain entier naturel p, et on veut établir que $R\,(p+1)$ l'est aussi, c'est-à-dire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ [n > p+1] \Longrightarrow [S_{n,p+1} = 0]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n > p+1$.
D'après la relation établie dans la question précédente : $S_{n,p+1} = n\,(S_{n,p} - S_{n-1,p})$.
Par hypothèse de récurrence, $S_{n,p} = S_{n-1,p} = 0$ et on en déduit que $S_{n,p+1} = 0$.

Ce qui entraîne que $R(p+1)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

Conclusion : $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > p,\ S_{n,p} = 0$

Exercice 7 — **(Technique).** Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la relation de Pascal, il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}\right] = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k-1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}\right)$$

En changeant l'indice dans la première somme, on obtient alors :

$$S_n = 1 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{2n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k}\right) = 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left[(-1)^{k+1} + (-1)^k\right]}_{=0 \text{ pour tout } k} \binom{2n}{k}\right) - 1 + (-1)^n \binom{2n}{n}$$

On a donc établi que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (-1)^n \dbinom{2n}{n}$.

Par ailleurs : $S_0 = 1$. On en déduit que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = (-1)^n \dbinom{2n}{n}.}$