Partie 1 : Suites récurrentes affines du premier ordre à cœfficients constants

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il s'agit des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

1) Donner la nature de la suite lorsque $a = 1$.

2) On suppose $a \neq 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda.$$

3) Applications : Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Partie 2 : Suites récurrentes linéaires du second ordre à cœfficients constants

Soit (a, b) dans $\mathbb{K}^2$. On désigne par $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

appelées suites récurrentes linéaires du second ordre à cœfficients constants.

4) Montrer que $E_{a,b}$ n'est pas vide.

5) Montrer que toute combinaison linéaire de deux éléments de $E_{a,b}$ est élément de $E_{a,b}$.

6) Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux éléments de $E_{a,b}$ définis par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, \quad U_1 = 0 \\ V_0 = 0, \quad V_1 = 1 \end{cases}.$$

a/ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha U_n + \beta V_n = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = 0$.
On dira que $((U_n)_n, (V_n)_n)$ est libre dans $E_{a,b}$.

b/ Soit $(u_n)_n \in E_{a,b}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 U_n + u_1 V_n.$$

On dira que $((U_n)_n, (V_n)_n)$ est générateur de $E_{a,b}$.

Partie 3 : Recherche d'éléments particuliers de $E_{a,b}$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{K}$, est appelée l'équation caractéristique des suites récurrentes linéaires du second ordre à cœfficient constant. On pose $\Delta = a^2 + 4b$.

7) On suppose que $\Delta \neq 0$ (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou $\Delta > 0$ (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Montrer qu'il existe r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$ tel que toute suite de $E_{a,b}$ s'écrive comme combinaison linéaire des suites géométriques $(r_1^n)_n$, $(r_2^n)_n$ appartenant à $E_{a,b}$.

8) On suppose que $\Delta = 0$.
Montrer qu'il existe r_0 dans $\mathbb{K}$, tel que toute suite de $E_{a,b}$ s'écrive comme combinaison linéaire des deux suites $(r_0^n)_n$, $(nr_0^{n-1})_n$ appartenant à $E_{a,b}$.

9) On suppose que $\Delta < 0$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On note $E'_{a,b}$ l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

a/ Montrer que $E_{a,b} = E'_{a,b} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b/ Montrer que $E'_{a,b} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} /\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$, où r_1 et r_2 sont à déterminer dans $\mathbb{C}$.

c/ Montrer que :

$$E_{a,b} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n})_{n\in\mathbb{N}} /\ \lambda_1 \in \mathbb{C}\right\}.$$

d/ En posant

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(A - iB), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2, \\ \rho &= |r_1|, \quad \theta = \arg(r_1). \end{aligned}$$

Déduire de ce qui précède, la forme générale des éléments de $E_{a,b}$

Partie 4 : Applications

10) Suite de Fibonacci
Calculer le terme général de la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}.$$

11) Calculer u_n sachant que

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \end{cases}.$$