DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION B

(Durée : 4 heures)

Dés non transitifs et succession de Ramsès II

Les trois exercices sont indépendants. Certaines parties de ce sujet sont présentées dans un contexte d'actuariat, néanmoins aucune connaissance en assurance ou en finance n'est nécessaire pour traiter ce sujet, et toutes les questions se traitent avec les outils du programme.

1 Exercice 1 : Dés non transitifs d'Efron

Soit 4 dés à six faces non pipés (les faces sont équiprobables et tous les lancers sont mutuellement indépendants). Le dé A a pour faces 3 ;3 ;3 ;3 ;3 ;3. Le dé B a pour faces 2 ;6 ;2 ;6 ;2 ;2. Le dé C a pour faces 1 ;5 ;1 ;5 ;1 ;5. Le dé D a pour faces 4 ;0 ;4 ;0 ;4 ;4. Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé (les deux dés étant différents). Le gagnant est celui dont la face du dessus du dé comporte le chiffre le plus grand.

1. Montrer que si Ben joue avec le dé A, et Jerry joue avec le dé B, alors Ben a une probabilité de gagner égale à $2/3$.
2. Montrer que si Ben joue avec le dé B, et Jerry joue avec le dé C, alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
3. Montrer que si Ben joue avec le dé C, et Jerry joue avec le dé D, alors Ben a une probabilité de gagner strictement plus grande qu'un demi. Calculer cette probabilité.
4. Que se passe-t-il si Ben joue avec le dé D, et si Jerry joue avec le dé A ?
5. On suppose dans cette question (jeu J1) que Ben a le droit de sélectionner un des 4 dés, et que Jerry peut ensuite choisir un des 3 dés restants. Puis chacun des joueurs lance son dé et le gagnant est celui dont la face du dessus du dé comporte le chiffre le plus grand. Préférez-vous être à la place de Ben ou de Jerry ? Justifier la réponse.
6. Toujours avec le jeu de la question précédente, on suppose que Ben doit payer 1 euro à Jerry si Jerry gagne, et que Jerry doit payer $\alpha \geq 0$ euro(s) à Ben si Ben gagne. On suppose que Ben n'accepte de jouer que si son gain moyen est positif ou nul. Donner l'ensemble des $\alpha \geq 0$ pour lesquels Ben accepterait de jouer.

7. On suppose dans cette question (jeu différent, appelé J2) que Ben a le droit de sélectionner deux des 4 dés, et que Jerry joue avec les 2 dés restants. Puis chacun des joueurs lance ses dés et le gagnant est celui dont les face du dessus des 2 dés donne la somme la plus grande. Préférez-vous être à la place de Ben ou de Jerry ? Justifier la réponse.

2 Exercice 2 : Sur la loi du Chi-deux

On rappelle que lorsque X et Y sont deux variables aléatoires positives ou nulles indépendantes admettant pour densités respectives f_X et f_Y, la variable aléatoire $X+Y$ admet pour densité au point $x \geq 0$

$$f * g(x) = \int_0^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt.$$

Soit $n \geq 1$, et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition de $Y_1 = X_1^2$.
2. Déterminer la densité de Y_1.
3. Pour $n \geq 1$, déterminer la densité de $Y_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $\lambda > 0$,

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} - b \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt,$$

   où b est un réel à préciser.
5. Pour $n \geq 1$ et $\lambda > 0$, soit Y_{2n} défini comme plus haut, et Z_λ une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Montrer que

$$P(X_{2n} > \lambda) = P(Z_\lambda < n).$$

3 Exercice 3 : Succession de Ramsès II

Le pharaon Ramsès II, inquiet pour sa succession, souhaite souscrire une assurance contre le risque qu'au moins un de ses enfants décède avant lui : si cet événement ce produit, l'assureur lui verserait une compensation financière de 1000 deben (sorte d'unitaire monétaire égyptienne) au décès du premier enfant seulement (le contrat s'arrête ensuite) pour l'aider à construire une pyramide. Ramsès II a eu de nombreux enfants (plus d'une centaine) avec 7 concubines principales et environ 200 concubines en tout, et aurait survécu à une très grande partie de ses enfants, même si son treizième fils a pu lui succéder. Nous allons supposer qu'à cette époque, les actuaires utilisent des tables de mortalité très simples construites à partir de la loi exponentielle, et qu'il n'y a pas de phénomène d'actualisation ou de taux d'intérêt. Par souci de simplification, nous supposerons que Ramsès II a eu 100 enfants le même jour, alors que Ramsès II avait exactement 20 ans. Soit X_0 la durée de vie résiduelle de Ramsès II, et soit X_k, $1 \leq k \leq 100$ les durées de vie de ses enfants. On suppose que les X_i, $0 \leq i \leq 100$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) de loi exponentielle de paramètre λ (de densité $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$). On admettra le résultat suivant : si X est une variable aléatoire positive admettant la densité f_X, alors pour toute variable aléatoire Y indépendante de X,

$$P(Y > X) = \int_0^{+\infty} P(Y > x) f_X(x) dx.$$

1. Supposons qu'à l'époque l'espérance de vie soit de 30 ans. Comment choisir λ de manière à respecter cette contrainte ?
2. Déterminer et donner la valeur numérique de la probabilité que Ramsès II vive plus de 86 ans selon cette approche.
3. Quelle est la probabilité que Ramsès II perde au moins un de ses 100 enfants avant de décéder ?
4. Quelle est la loi de la prestation aléatoire Z à payer par l'assureur ?
5. En supposant que l'actuaire passe payer à Ramsès II une prime basée sur l'écart-type $E(Z) + 2\sigma_Z$, où σ_Z est l'écart-type de Z, calculer la prime demandée par l'actuaire.
6. Déterminer la loi de $\min(X_1, X_2)$.
7. Déterminer la loi de $\min(X_1, \ldots X_n)$.
8. On suppose à partir de maintenant que Ramsès II, au contraire de ses fils, dispose d'une complémentaire santé avec de bonnes garanties, notamment en dentaire. En fait, il est très probable que Ramsès II soit décédé à cause d'un problème à la mâchoire. Mais nous supposerons donc dorénavant que la durée de vie résiduelle de Ramsès II est décrite

par une variable aléatoire exponentielle de paramètre μ tel que $E(X_0) = 45$. Les X_i, $1 \leq i \leq 100$ sont toujours i.i.d., de loi exponentielle de paramètre λ défini plus haut, et indépendants de X_0.

(a) Déterminer la loi de $\min(X_0, X_1, \ldots X_n)$.

(b) Déterminer la probabilité que Ramsès II perde un de ses 100 enfants avant de décéder dans ce nouveau modèle.

(c) Calculer la prime $E(Z) + 2\sigma_Z$ qu'il devrait payer.

(d) On suppose dorénavant que Ramsès II s'assure 9 mois plus tôt, au début des 100 grossesses, et qu'il n'y a pas de risque de fausse couche. Déterminer la probabilité que Ramsès II perde un de ses 100 enfants avant de décéder dans ce nouveau modèle (à partir de la signature du contrat) ; calculer la prime $E(Z) + 2\sigma_Z$ qu'il devrait payer à ce moment-là (il aurait alors 19 ans et 3 mois).

9. Bien évidemment, la loi exponentielle est très mauvaise pour représenter la durée de vie humaine, puisqu'elle ne prend pas en compte le vieillissement (propriété de perte de mémoire). Proposer un moyen de prendre en compte ce vieillissement en utilisant d'autres types de lois (faire une proposition concrète et justifier sa pertinence).