I. S. F. A. 2011-2012

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION A

Durée : 4 heures

Calculatrice et ordinateur non autorisés

Objectif et remarques :

- On se propose, dans ce sujet, d'étudier la définition de plusieurs intégrales dont les intégrandes sont définies à partir des fonctions trigonométriques circulaires et la fonction logarithme népérien puis de déterminer leurs valeurs lorsqu'elles sont bien définies. Pour cela, l'énoncé utilisera diverses méthodes.
- La partie I est indépendante des autres.
- L'appréciation des copies tiendra compte de la rigueur des raisonnements.

Notations :

- Dans le problème, on notera σ la fonction numérique de variable réelle définie par $\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$

et l'on pourra s'appuyer (sans justification) sur le résultat classique : $\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE I :

Dans cette partie, a est un élément de $\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$.

1/ a) Montrer que : $\forall t\in\mathbf{R}\ \ a^2-2.a.\cos(t)+1>0$.

b) En déduire qu'il est légitime de considérer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2.a.\cos(t) + 1).dt ,$$

que l'on notera I_a dans la suite.

c) Etablir que $I_a = I_{1/a} + 2.\pi.\ln|a|$ si $a\neq 0$.

2/ Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Décomposer le polynôme $X^{2.n}-1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{C}[X]$.

b) En conclure que : $\prod_{k=1}^{n}\left(a^2 - 2.a.\cos\frac{k.\pi}{n} + 1\right) = \frac{(a+1).(a^{2.n}-1)}{a-1}$.

3/ a) En déduire la valeur de I_a si $|a|<1$. (On pourra exploiter la notion de somme de Riemann.)

b) Que vaut I_a si $|a|>1$?

4/ Justifier, si $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ et $x^2\neq y^2$, la définition de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2.x.y.\cos(t) + y^2).dt$$

puis indiquer sa valeur.

PARTIE II :

On définit la fonction F, de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, par :

$$F(x,y) = \int_0^{\pi/2} \ln[x^2.\cos^2(\theta) + y^2.\sin^2(\theta)].d\theta \ .$$

5/ a) Constater que, si $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, alors :

$$\forall\theta\in[0,\pi/2] \ \ x^2.\cos^2(\theta)+y^2.\sin^2(\theta)\in[x^2,y^2]\cup[y^2,x^2] \ .$$

b) Déterminer le domaine de définition de F (noté D_F dans la suite).

6/ Etablir que, si $(x,y)\in D_F$, alors $(y,x)\in D_F$ et $F(x,y)=F(y,x)$.

7/ Soient $(u,v)\in\mathbf{R}^{+*2}$ et $t\in[u,v]$. Prouver que : $|\ln(t)|\leq|\ln(u)|+|\ln(v)|$. (On pourra remarquer que $-\ln$ est convexe.)

Dans la fin de cette partie, $y\in\mathbf{R}^{+*}$ et F_y la fonction de $[0,y]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$F_y(x) = F(x,y).$$

8/ a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $]0,y]$ qui converge vers 0. Constater que :

$$\forall n\in\mathbf{N} \ \forall\theta\in]0,\pi/2] \ \ |\ln[x_n^2.\cos^2(\theta)+y^2.\sin^2(\theta)]|\leq 2.[|\ln(y)|+|\ln(y.\sin(\theta)|] \ .$$

b) En déduire que F_y est continue en 0. (On pourra utiliser le « théorème de la convergence dominée ».)

9/ a) Montrer que, si $\eta\in]0,y]$, $x\in[\eta,y]$ et $\theta\in]0,\pi/2]$, alors :

$$\overline{\qquad\qquad} \ \leq 2 \ . \ - \ .$$

b) En déduire que F_y est dérivable sur $]0,y]$.

c) Si $x\in]0,y[$, exhiber deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\frac{1}{\left(y^2.X^2+x^2\right).(X^2+1)} = \frac{\lambda}{y^2.X^2+x^2} + \frac{\mu}{X^2+1} \ .$$

d) En conclure que : $\forall x\in]0,y[\ F_y'(x) = \dfrac{\pi}{x+y}$.

10/ a) Déduire enfin de ce qui précède une expression simple de F utilisant les fonctions usuelles.

b) Evaluer, en particulier, les intégrales $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos(t)).dt$ et $\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(t)).dt$.

PARTIE III :

On considère ici deux nombres réels strictement positifs a et b.

11/ a) Vérifier qu'il est licite de considérer le nombre réel $\dfrac{b-a}{b+a}$ (noté ρ dans la suite) puis que $\rho\in]-1,1[$.

b) En déduire que : $2.\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\rho^k.\cos(k.\pi/2)}{k} = \overline{\qquad}$.

12/ Constater qu'il est légitime d'envisager l'application f, π-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, satisfaisant $\forall x\in\mathbf{R}$ $f(x) = \ln(a^2.\cos^2 x+b^2.\sin^2 x)$ puis évaluer $f(\pi/4)$.

13/ a) Prouver que f est dérivable (sur **R**) puis établir que :

$$\forall x\in\mathbf{R}\ \ f'(x) = 4\,.\sum_{k=1}^{+\infty}[\rho^k.\sin(2.k.x)]\,.$$

b) En conclure que : $\forall x\in\mathbf{R}$ $f(x) = 2.\ \text{——} - 2.\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\rho^k.\cos(2.k.x)}{k}$.

14/ a) Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f (considérée comme application π-périodique).

b) Retrouver le résultat établi à la question 9/ de la partie II.

15/ En exploitant « la formule de Parseval », conclure de ce qui précède que :

$$\int_0^{\pi} \left(f(x)\right)^2.dx = 2.\pi.\,[\,2.\ \text{——} + \sigma(\rho^2)\,]\ .$$

PARTIE IV :

On envisage, dans cette dernière partie, les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*\ \ a_n = \frac{1}{n+1}\ \text{ et }\ b_n = \frac{n}{n+1}\ .$$

16/ a) Déterminer précisément le domaine de définition de σ.

b) Justifier que σ est continue (sur son domaine de définition).

c) Montrer que : $\sigma(-1) = -\ \text{——}$.

17/ a) Etablir la convergence simple de la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, d'applications de $]0,\pi[$ dans **R**, définie par : $\forall n\in\mathbf{N}^*\ \forall x\in]0,\pi[\ \ g_n(x) = \ln^2[a_n^2.\cos^2(x)+b_n^2.\sin^2(x)]$.

b) Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N}^*\ \forall x\in]0,\pi[\ \ g_n(x) \le 4.\ln^2\text{———}$.

(On pourra remarquer que la restriction de la fonction sinus à $[0,-]$ est concave et utiliser la question 5/ a).)

18/ En conclure qu'il est légitime de considérer les intégrales $\int_0^{\pi/2}[\ln(\cos(t))]^2.dt$,

$\int_0^{\pi/2}[\ln(\sin(t))]^2.dt$ et $\int_0^{\pi/2}\left(\ln(\sin(t)).\ln(\cos(t))\right).dt$ puis indiquer leurs valeurs.

(On pourra utiliser le théorème de « la convergence dominée ».)
