DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
OPTION B
Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée.

Assurance bris de glace et championnat de fléchettes

Les trois exercices sont indépendants. Certaines parties de ce sujet sont présentées dans un contexte d'actuariat, néanmoins aucune connaissance en assurance ou en finance n'est nécessaire pour traiter ce sujet, et toutes les questions se traitent avec les outils du programme.

1 Exercice 1 : Assurance Bris de Glace

Soit $n \geq 1$ fixé (représentant un nombre de polices d'assurance bris de glace). Soit $(N_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que N_1 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On a donc pour tout $j \geq 0$,

$$P(N_1 = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}.$$

Pour $k \geq 1$, N_k représente le nombre de sinistres de type bris de glace pour l'assuré numéro k.

1. Rappeler ou retrouver la moyenne et la variance de N_1.
2. Déterminer la loi de $N_1 + N_2$.
3. Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} N_k$ suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.
4. Déterminer la fonction de répartition de S_n/n.
5. Pour $\lambda = 0,09$ et $n = 10$, calculer la probabilité que $S_n/n \in [0,08; 0,11]$.
6. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable. Montrer l'inégalité de Markov : pour tout $a > 0$,
$$P(|X| > a) \leq \frac{E(|X|)}{a}.$$
7. Soit Y une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Montrer l'inégalité de Tchebycheff : pour tout $a > 0$,
$$P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}.$$

8. Pour $\lambda = 0,09$ et $n = 5000$ donner une borne inférieure non nulle de la probabilité
$$P(S_n/n \in [0,08; 0,11]).$$
9. Pour $\lambda = 0,09$ donner une estimation du nombre minimal $n \geq 1$ tel que
$$P(S_n/n \in [0,08; 0,11]) \geq 0,995.$$

2 Exercice 2 : Championnat de fléchettes

1. Après des heures de compétition, deux champions de fléchettes que l'on n'arrive pas à départager décident de terminer la rencontre rapidement avec une épreuve simplissime : le premier qui atteint le cœur de la cible a gagné. On suppose (en négligeant donc les facteurs psychologiques et de fatigue entre autres) que les lancers sont indépendants, et qu'à chaque lancer le joueur A (respectivement B) a une probabilité de réussir égale à $p_A = 0,8$ (resp. $p_B = 0,8$). On suppose que le joueur A commence : s'il réussit son premier lancer (une seule fléchette), alors il gagne (le joueur B n'a pas le droit de lancer de fléchette). Sinon, c'est le tour du joueur B, etc... Quelle est la probabilité que l'épreuve soit remportée par le joueur A ?
2. Montrer que la loi du nombre total de lancers (en additionnant les lancers des deux joueurs) avant que l'un des joueurs ne gagne est une loi géométrique dont on précisera le paramètre. Comme il y a plusieurs définitions possibles de la loi géométrique, précisons que dans cet exercice on suppose que N suit une loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ si pour $k \geq 1$,
$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}.$$
3. Quel est le nombre moyen de lancers avant que l'un des joueurs ne gagne ?
4. Quelle est la loi du nombre de lancers du joueur A avant que l'un des joueurs ne gagne ?
5. Quelle est la loi du nombre de lancers du joueur B avant l'un des joueurs ne gagne ?
6. Quelle est la loi du nombre de lancers du joueur B avant l'un des joueurs ne gagne, sachant que le gagnant est le joueur B ?

7. On suppose maintenant (uniquement dans cette question) que chaque joueur a le droit a trois fléchettes. Si l'une d'elles atteint le cœur de la cible, alors le jeu s'arrête et il gagne. Sinon c'est à l'autre joueur d'avoir le droit à trois fléchettes, et ainsi de suite... Le joueur A commence toujours. Quelle est la probabilité que l'épreuve soit remportée par le joueur A ?
8. Revenons aux règles de la première question (une fléchette à la fois pour chaque joueur). C'est toujours le joueur A qui commence. Le jeu n'étant pas équitable, les joueurs décident de se donner un objectif plus difficile que le centre de la cible (avec une probabilité de succès d'un lancer de p). Déterminer toutes les probabilités $p \in [0, 1]$ qui rendent le jeu équitable (probabilité que le joueur A gagne = probabilité que le joueur B gagne). Que se passe-t-il quand le jeu est équitable ?
9. Finalement les joueurs décident de s'infliger des difficultés différentes pour rendre le jeu plus équitable. Le joueur A doit lancer sa fléchette les yeux bandés et a donc un probabilité de réussite à chaque lancer de $p_A = 5/36$. Le joueur B doit lancer sa fléchette en regardant à travers les lunettes de sa grand-mère et a donc une probabilité de réussite de $p_B = 1/6$ à chaque lancer. C'est toujours le joueur A qui commence. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne la partie ?
10. En supposant que $p_A = 5/36$ et que le joueur A commence toujours, quelle devrait être la valeur de p_B de manière à rendre le jeu équitable ?

3 Exercice 3 : propriétés de bases des lois logistiques et log-logistiques

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au point $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = a\frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2}.$$
Déterminer la valeur du réel a tel que f soit une fonction de densité sur $\mathbb{R}$. On suppose dorénavant que a est tel que f soit une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Déterminer la moyenne et la variance de X si elle(s) existe(nt).
4. Déterminer l'inverse de la fonction de répartition de X (utile pour effectuer des simulations).
5. Soit $\mu = 0$ et $s = 1$. Soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \alpha e^{X/\beta},$$

   où $\alpha > 0$ et $\beta \geq 1$. Déterminer la densité de Y.
6. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ et $\beta \geq 1$ la moyenne de Y est-elle finie ?