I.S.F.A. Concours d'entrée 2011

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES
OPTION A
Durée : 4 heures
Calculatrices/téléphones non autorisés

Notation : Par la suite, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement les ensembles des nombres entiers naturels non nuls, entiers relatifs, rationnels et réels. $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

1. Intégration

(1) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^2 \max(\ln(1+x^2), 1)dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{...+\sqrt{x}}}}}_{n \text{ racines}}\, dx$ en justifiant d'abord l'existence de la limite.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right) \leq \int_\pi^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x}dx \leq \ln(2).$$

2. Equations aux dérivées partielles

Soit la fonction $v : [0,10]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solution de l'équation suivante :

$$(1) \qquad -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \max_{a\in\mathbb{R}}\left[-\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)(x+2a) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\frac{a^2}{2}\right] = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,10]\times\mathbb{R},$$

$$(2) \qquad v(10,x) = x^2 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution de la forme

$$(3) \qquad v(t,x) = \gamma(t)x^2 + \varphi(t)x + \rho(t),$$

où $\gamma : [0,10] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi,\ \rho : [0,10] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables à déterminer.

(a) Calculer $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)$ en fonction de x et des fonctions γ, φ et ρ.

(b) En utilisant (2), trouver les conditions terminales $\gamma(10), \varphi(10)$ et $\rho(10)$.

(c) Que devient l'équation (1) ?

(d) Rappeler ou retrouver le maximum d'une fonction $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + c$ où $\alpha < 0$ et $\beta, c \in \mathbb{R}$. En déduire le maximum de la fonction $a \mapsto -\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)(x+2a) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\frac{a^2}{2}$, où $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)$ sont les dérivées trouvées au premier point. Que devient l'équation (1) ?

(e) Trouver les équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions γ et φ.

(f) Calculer les solutions des équations trouvées au point précédent. Calculer la fonction ρ.

(g) En déduire la fonction v.

3. Polynômes

Soit n un entier naturel non nul.
On pose $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

(1) Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.

(2) Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$ (l'ensembles des nombres complexes). On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, ..., z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

(3) On pose
$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$
Montrer que
$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$
En déduire que, si
$$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$
alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

(4) Calculer de deux façons $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. En déduire Q_n et P_n.

(5) On pose $F = \frac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

(6) Question indépendante : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^n + X^{n-1} + ... + X + 1$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ les racines de P. Calculer
$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - 2}.$$

4. Matrices

Notations et notions preliminaires : Soient p et q appartenant à $\mathbb{Z}$ et
$$[\![p, q]\!] = \{m : m \in \mathbb{Z} \mid p \leq m \text{ et } m \leq q\}.$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n, n étant un entier supérieur ou égal à 2, dont les éléments sont des réels. On note I_n la matrice identité d'ordre n et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice A.

Une matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *matrice semi-magique* s'il existe un réel $\sigma(A)$ vérifiant :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sigma(A) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sigma(A).$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *matrice magique* si elle est semi-magique et si en plus

$$\sigma(A) = tr(A) = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ 1\leq i,j\leq n}} a_{ij}.$$

Les ensembles des matrices semi-magiques et magiques d'ordre n seront notés respectivement $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$.

Une matrice magique A est définie *carré magique* si la propriété suivante est vérifiée

$$\{a_{ij}; (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\} = [\![1,n^2]\!].$$

L'objet de ce problème, dont les trois parties peuvent être traitées indépendamment, est l'étude de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$ et de certaines propriétés des matrices magiques.

Partie I

I.1 Montrer que si A est un carré magique d'ordre n, le réel $\sigma(A)$ vaut nécessairement $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

I.2 Montrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

Partie II

II.1 Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application σ est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_n$. Vérifier également que $\mathcal{Q}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_n$.

II.2 Vérifier que la matrice J_n est magique. Calculer pour $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice J_n^p.

II.3 a) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{P}_n$ si et seulement si il existe un réel λ tel que $AJ_n = J_nA = \lambda J_n$. Quelle est alors la signification de λ ?

b) Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour $\mathcal{Q}_n$?

c) Montrer que l'application σ est un morphisme d'algèbres de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$.

d) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{P}_n$. Montrer que $\sigma(A)$ est non nul, que A^{-1} appartient à $\mathcal{P}_n$ et que $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$. Réciproquement, si A appartient à $\mathcal{P}_n$ et que $\sigma(A)$ est non nul, peut-on conclure que A est inversible ?

Partie III

On note maintenant $M_n = (m_{ij})$ la matrice d'ordre n qui vérifie $m_{ij} = 0$ si $i+j \neq n+1$ et $m_{ij} = 1$ si $i+j = n+1$.
Une matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ appartient à l'ensemble $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ si il existe un rationnel $\sigma(A)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sigma(A) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sigma(A).$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ appartient à l'ensemble $\mathcal{Q}_n(\mathbb{Q})$ si elle appartient à $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ et si en plus sa trace et la trace de M_nA sont égales à $\sigma(A)$.

III.1 Montrer que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q}) = \mathcal{Q}_n(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}I_n \oplus \mathbb{Q}M_n$.

III.2 Montrer que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

III.3 Montrer que si $A \in \mathcal{Q}_3(\mathbb{Q})$, alors $A^p \in \mathcal{Q}_3(\mathbb{Q})$ pour tout $p \geq 1$ impair.

III.4 Le résultat de la question précédente est-il encore valable pour des matrices magiques en dimension supérieure ?