I. S. F. A. 2010-2011

Concours d'Entrée

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION A

Durée : 4 heures

Calculatrice et ordinateur non autorisés

OBJECTIF ET REMARQUE :

On se propose, dans ce sujet, d'établir des liens entre les notions de convexité, de dérivation et de valeur moyenne pour des fonctions numériques de « une ou deux variable(s) ». Il inclut un barème indicatif par parties établi sur 100 points.

Notations :

- o **R** est le corps des nombres réels.
- o le **R**-espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni de ses normes usuelles $\| \|_1$ et $\| \|_2$ et, si $c \in \mathbf{R}^2$ et $r \in \mathbf{R}^+$, on note $B_1(c,r)$ (respectivement $B_2(c,r)$) la boule fermée de $\mathbf{R}^2$ de centre c et de rayon r, relativement à sa norme $\| \|_1$ (respectivement $\| \|_2$).
- o $S_2^+(\mathbf{R})$ désigne classiquement l'ensemble des matrices réelles symétriques S d'ordre 2 qui sont positives, c'est-à-dire vérifiant : $\forall X \in M_{2,1}(\mathbf{R})\ {}^tX \times S \times X \geq 0$.
- o I et Ω désignent respectivement des parties non vides, convexes et ouvertes de **R** et $\mathbf{R}^2$. En particulier : $\forall (\omega_1,\omega_2) \in \Omega^2\ \forall t \in [0,1]\ ((1-t).\omega_1 + t.\omega_2) \in \Omega$.
- o Si f est une application de Ω dans **R**, on dit que f est convexe si, et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \Omega^2\ \forall t \in [0,1]\ f((1-t).x+t.y) \leq (1-t).f(x)+t.f(y) .$$

- o Lorsque A est une partie ouverte de **R** ou de $\mathbf{R}^2$, on note, selon l'usage, $C^0(A,\mathbf{R})$ (respectivement $C^2(A,\mathbf{R})$) l'ensemble des applications continues (respectivement de classe C^2) de A dans **R**.
- o En outre, si A est une partie ouverte de **R** (respectivement de $\mathbf{R}^2$) et $f \in C^0(A,\mathbf{R})$, on dira que f est convexe en moyenne si, et seulement si :

$$\forall a \in A\ \forall r \in \mathbf{R}^+\ [a-r,a+r] \subset A \Rightarrow \int_{a-r}^{a+r} f(t).dt \geq 2.r.f(a)$$

(respectivement : $\forall a \in A\ \forall r \in \mathbf{R}^+\ B_2(a,r) \subset A \Rightarrow \iint_{B_2(a,r)} f(x,y).dx.dy \geq \pi.r^2.f(a)$) .

Enfin, on notera $C^{0+}(A,\mathbf{R})$ (respectivement $C^{2+}(A,\mathbf{R})$) l'ensemble des éléments de $C^0(A,\mathbf{R})$ (respectivement $C^2(A,\mathbf{R})$) qui sont convexes en moyenne.

PARTIE I : Convexité et convexité moyenne en dimension 1 (*15 points*).

Soit f une application de I dans **R**.

1/ On suppose que f est convexe.

a) Prouver que f est dérivable à droite en tout élément de I.

b) En déduire que $f \in C^0(I,\mathbf{R})$.

c) Prouver que $f \in C^{0+}(I,\mathbf{R})$.

2/ On suppose ici que $f \in C^2(I,\mathbf{R})$.

a) Montrer que f n'est pas convexe en moyenne si $a \in I$ et $f''(a)<0$.

(On pourra, par exemple, étudier les variations de la fonction de variable réelle g définie par : $g(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t).dt - 2.x.f(a)$.)

b) Que peut-on déduire des questions antérieures ?

PARTIE II : Etude de $C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$ (*24 points*).

On considère, dans cette partie, une application f de Ω dans **R**.

3/ Montrer que, si $(g,h) \in (C^{0+}(\Omega,\mathbf{R}))^2$ et $\alpha \in \mathbf{R}^+$, alors $(\alpha.g+h) \in C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$.

4/ Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$ qui converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathbf{R}^2$ incluse dans Ω. Montrer que la limite de cette suite appartient à $C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$.

5/ On suppose ici que $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$, que $\mu \in \mathbf{R}^2$ et que ϕ est l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ satisfaisant : $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \ \phi(x,y)=\lambda.(x,y)+\mu$.

a) Constater que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même et préciser ϕ^{-1}.

b) Montrer que, si $\tilde{f} = f o \phi^{-1}$ et $\tilde{\Omega}=\phi(\Omega)$, alors $\tilde{\Omega}$ est une partie non vide, ouverte et convexe de $\mathbf{R}^2$ et que, de plus : $\tilde{f} \in C^{0+}(\tilde{\Omega},\mathbf{R}) \Leftrightarrow f \in C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$.

PARTIE III : Convexité et convexité en moyenne en dimension 2 (*20 points*).

On considère encore une application convexe f, de Ω dans **R**, et un élément ω de Ω.

6/ Justifier l'existence d'un élément ρ de $\mathbf{R}^{+*}$ tel que le domaine de définition de la fonction φ, de $\mathbf{R}^2$ dans **R**, définie par

$$\varphi(x,y) = f\left(\rho.(x,y)+\omega\right) - f(\omega)$$

contienne $B_1((0,0),1)$.

7/ a) Prouver que le domaine de définition de φ est une partie ouverte et convexe de $\mathbf{R}^2$.

b) Constater que φ est convexe.

8/ a) Montrer qu'il existe un nombre réel positif M tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \|(x,y)\|_1 = 1 \ \Rightarrow \ \varphi(x,y) \le M .$$

b) Soient $u \in \mathbf{R}^2$ tel que $\|u\|_1 = 1$ et ψ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in [-1,1] \quad \psi(t) = \varphi(t.u) .$$

Vérifier que ψ est convexe puis que : $\forall t \in [-1,1]$ $|\psi(t)| \leq M.|t|$.

9/ En conclure que f est continue sur Ω.

10/ Démontrer enfin que $f \in C^{0+}(\Omega,\mathbf{R})$. (On pourra utiliser les coordonnées polaires.)

PARTIE IV : Laplacien et convexité en moyenne en dimension 2 (*21 points*).

On se propose, dans cette partie, d'établir une condition nécessaire et suffisante, portant sur un élément de $C^2(\Omega,\mathbf{R})$ pour qu'il appartienne à $C^{2+}(\Omega,\mathbf{R})$. A cet effet, on suppose que $f \in C^2(\Omega,\mathbf{R})$.

11/ Justifier qu'il soit légitime d'envisager l'application Δ de $C^2(\Omega,\mathbf{R})$ dans $C^0(\Omega,\mathbf{R})$ satisfaisant $\forall g \in C^2(\Omega,\mathbf{R})$ $\forall \omega \in \Omega$ $\Delta(g)(\omega) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\omega) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\omega)$ et puis que celle-ci est linéaire.

12/ Soient $\omega \in \Omega$ et $r \in \mathbf{R}^{+*}$ tels que $B_2(\omega,r) \subset \Omega$.

a) Montrer que la fonction $\hat{f}$, de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, définie par $\hat{f}(z) = f(z+\omega)-f(\omega)$ est de classe C^2 sur son domaine de définition puis que l'intégrale double $\iint_{B_2(0,r)} \hat{f}(x,y).dx.dy$ vaut :

$$\int_0^r \left(\frac{r^2-\rho^2}{2} . \int_0^{2.\pi} \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(\rho.\cos\theta,\rho.\sin\theta).\cos\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial y}(\rho.\cos\theta,\rho.\sin\theta).\sin\theta \right].d\theta \right).d\rho \quad .$$

(On pourra invoquer une intégration par partie soigneusement justifiée.)

b) En déduire que :

$$\iint_{B_2(\omega,r)} f(x,y).dx.dy - \pi.r^2.f(\omega) = \int_0^r \left(\frac{r^2-\rho^2}{2.\rho} . \iint_{B_2(\omega,\rho)} \Delta(f)(x,y).dx.dy \right).d\rho .$$

(On pourra exploiter la formule de Green-Riemann.)

13/ Conclure de ce qui précède que :

$$f \in C^{2+}(\Omega,\mathbf{R}) \Leftrightarrow \Delta(f) \geq 0 .$$

PARTIE V : Convexité et matrices hessiennes en dimension 2 (*20 points*).

On suppose désormais que $f \in C^2(\Omega,\mathbf{R})$ et que H est l'application de Ω dans $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad H(\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\omega) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\omega) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\omega) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\omega) \end{bmatrix} .$$

14/ Vérifier que, si $(\omega,\omega')\in\Omega^2$, alors il est licite de considérer l'application $f_{\omega,\omega'}$, de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, définie par : $\forall t\in[0,1]\ \ f_{\omega,\omega'}(t) = f((1-t).\omega+t.\omega')$.

15/ Démontrer que f est convexe si, et seulement si, pour tout élément (ω,ω') de Ω^2, $f_{\omega,\omega'}$ est convexe.

16/ Prouver que, si $(\omega,\omega')\in\Omega^2$, alors $f_{\omega,\omega'}$ est de classe C^2 puis préciser sa dérivée seconde.

17/ Conclure de ce qui précède que f est convexe si, et seulement si :

$$\forall\omega\in\Omega\ H(\omega)\in S_2^{\ +}(\mathbf{R}).$$

18/ a) Retrouver, grâce à la question antérieure, le résultat (établi au III 10/) :

$$\text{si f est convexe, alors } f\in C^{2+}(\Omega,\mathbf{R}).$$

b) Qu'en est-il de sa réciproque, « en général » ?

- Fin -