Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

L'objet du problème est l'étude, dans différents contextes, de la convergence et, parfois, de la valeur de la somme d'une série de terme général $\dfrac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1.

Partie I : Quelques cas déterministes

On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $\gamma_n = H_n - \ln n$.
Montrer que la suite de terme général $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. On note γ sa limite.

2. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité : $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n} = H_N - H_{2N}$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cdot$

3. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n, $\varepsilon_{3n+1} = \varepsilon_{3n+2} = 1$ et $\varepsilon_{3n+3} = -1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$?

4. On suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = -1.$$

a) Prouver, pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) = \int_0^1 \frac{1-x^{4N+4}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot$

c) Calculer, de même, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}\right)$ et en déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

Dans toute la suite de cette partie, pour tout entier naturel p non nul, on considère la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{2pn+1} = \varepsilon_{2pn+2} = \cdots = \varepsilon_{2pn+p} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2pn+p+1} = \varepsilon_{2pn+p+2} = \cdots = \varepsilon_{2pn+2p} = -1.$$

La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constituée de p termes égaux à 1, suivis de p termes égaux à -1, suivis de p termes égaux à 1, etc.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{k}\cdot$

5. a) Prouver, pour tout entier naturel n, la majoration : $\sum_{k=2pn+1}^{2pn+2p} \frac{\varepsilon_k}{k} \leqslant \frac{1}{2n^2}\cdot$

b) En déduire la convergence de la suite $(S_{2pn})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Prouver la convergence de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}\cdot$

On note Σ_p la somme de cette série c'est-à-dire $\Sigma_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}\cdot$

6. a) Établir, pour tout entier naturel N non nul, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2pn+1} + \cdots + \frac{1}{2pn+p} - \frac{1}{2pn+p+1} - \cdots - \frac{1}{2pn+p+p}\right) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (1+x+\cdots+x^{p-1})\,(1-x^p)\,x^{2pn}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_{2p(N+1)} = \int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{p-1}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

c) Conclure à l'égalité : $\displaystyle\Sigma_p = \int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{p-1}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$.

7. `Calcul de` Σ_3

a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Vérifier que la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{b}\arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ puis conclure à l'égalité : $\Sigma_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}\ln 2$.

8. `Une relation de récurrence`

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\cdots+x^{p-2}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ et établir l'égalité :

$$(1)\qquad \Sigma_p = \frac{\ln 2}{p} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\cdots+x^{p-2}}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

b) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2p-4})}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+u+u^2+\cdots+u^{p-2})}{1+u^p}\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire l'égalité : $\displaystyle\Sigma_{2p} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2p-2}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Sigma_p$.

9. `Calcul de` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x$

a) Soit A un réel strictement positif et f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont on note f_1 (resp. f_2) la partie réelle (resp. imaginaire).
On rappelle (ou on admet) que $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne la somme $\displaystyle\int_{-A}^{A} f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_{-A}^{A} f_2(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $\alpha\in]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$. Établir l'égalité :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} \frac{1}{t-\mathrm{e}^{i\alpha}}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} i\pi & \text{si } \alpha\in]0,\pi[\,;\\ -i\pi & \text{sinon.}\end{cases}$$

b) **(i)** On note, pour tout $k\in[\![0,2p-1]\!]$, $z_k = \exp\left(\dfrac{(2k+1)i\pi}{2p}\right)$.

Établir, pour tout entier $r\in[\![0,2p-1]\!]$, l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$, noté L_r, tel que

$$L_r(z_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq r\,;\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(ii) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_{2p-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{2p-1}[X]$.

c) Soit $q\in[\![0,p-1]\!]$.

(i) Justifier l'existence de nombres complexes λ_0, λ_1,..., λ_{2p-1} tels que, pour tout réel t,

$$\frac{t^{2q}}{1+t^{2p}} = \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\lambda_k}{t-z_k}.$$

(ii) Établir l'égalité : $\sum_{k=0}^{2p-1} \lambda_k = 0$.

(iii) Prouver, pour tout $k \in [\![0, 2p-1]\!]$, l'égalité : $\lambda_k = -\dfrac{z_k^{2q+1}}{2p}$.

d) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2q}}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}x = -\frac{i\pi}{2p}\sum_{k=0}^{p-1} \exp\Big(\Big[\frac{(2k+1)(2q+1)}{2p}\Big]\, i\pi\Big)$.

10. Déterminer la valeur de Σ_4.

Partie II : Un cas aléatoire

On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes**, **centrées** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et possédant un moment d'ordre 2.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge si, et seulement si, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}^* \quad \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \Big(p \geqslant N \text{ et } n \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon\Big).$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $\Big(S_n(\omega)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

A. `La convergence presque sûre`

1. On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon\,\Big]$.

a) **(i)** Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à $\mathscr{A}$.

(ii) Établir l'égalité : $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$.

(iii) Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

(iv) Établir l'égalité : $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$ et en déduire que $\mathscr{C} \in \mathscr{A}$.

2. **a)** Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbf{P}\Big(B(\frac{1}{k})\Big) = 1\,.$$

b) En déduire que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big]\Big) = 0.$$

c) Montrer que $\mathbf{P}(\mathscr{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}} \Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big]\Big) = 0$.

B. `Une inégalité`

Quand une variable aléatoire U, définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, a une espérance on note $\mathbf{E}(U)$ sa valeur.

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$T_N(\omega) = \inf\Big\{p \in \mathbb{N}^*\,;\, p > N \quad \text{et} \quad |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon\Big\}$$

(avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$).

1. **a)** Soit A un événement. Établir l'égalité : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel N non nul et pour tout entier $p > N$, les valeurs des espérances $\mathbf{E}(S_p - S_N)$ et $\mathbf{E}((S_p - S_N)^2)$ en fonction des moments des Y_k.

2. Exprimer, pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.

3. **a)** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\varepsilon^2\,\mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_k - S_N)^2\,\mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big)$.

b) Soit p un entier strictement plus grand que N.
Justifier, pour tout $k \in [\![N+1, p]\!]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbf{1}_{[T_N=k]}$.

c) En déduire, pour tout $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leqslant p$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2\,\mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \mathbf{E}\Big((S_p - S_N)^2\,\mathbf{1}_{[T_N=k]}\Big).$$

d) Prouver, pour tout entier $p > N$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbf{P}([\,T_N = k\,]) \leqslant \sum_{i=N+1}^{p} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

4. On suppose, de plus, que la série $\sum \mathbf{E}(Y_m^2)$ converge. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{p>N}\Big[|S_p - S_N| > \varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

C. Le résultat

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1. On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par

$$\mathbf{P}([\,X_1 = -1\,]) = \mathbf{P}([\,X_1 = 1\,]) = \frac{1}{2}\cdot$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\cdot$

1. Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{n\geqslant N\\ p\geqslant N}}\Big[\,|S_p - S_n| > \varepsilon\,\Big] \subset \bigcup_{p>N}\Big[\,|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\Big]\cdot$$

2. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \dfrac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \dfrac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a, on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ mais pas devant $(x-a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a. On dit que f est *ultraplate en a* si $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^m$ lorsque x tend vers a, quel que soit l'entier naturel m.

L'objet du problème est l'étude des fonctions plates et de leurs approximations polynomiales. Les quatre parties du sujet sont largement indépendantes, mais les notations de la partie 1 sont utilisées dans les deux parties suivantes.

L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours. Une présentation soignée sera appréciée, une présentation par trop négligée sanctionnée.

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a.

1. Soit $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle :

   $$f \in E_n(a) \Longleftrightarrow \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0\ .$$

   b) Démontrer que la somme $s : x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ d'une série entière de rayon de convergence infini est ultraplate en 0 si, et seulement si, s est une fonction constante.

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0

   Pour tout $x > 0$, on pose : $b(x) = \exp\big(-(\ln x)^2\big)$.

   a) Donner l'allure du graphe de b en précisant les coordonnées de ses points d'inflexion.

   b) Justifier que b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

   $$\forall\, x > 0,\ b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp\big(-(\ln x)^2\big)$$

   (on précisera le degré et le coefficient du monôme dominant de B_n).

   c) En déduire que la fonction $c : x \longmapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0. En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Montrer que, pour tout réel a, $E_n(a)$ est une sous-algèbre de l'algèbre E.

   b) L'ensemble $E_n(a)$ est-il un idéal de l'anneau commutatif E ?

4. a) Montrer que, si une fonction f est ultraplate en 0, alors la fonction $x \longmapsto f(x-a)$ est ultraplate en a.

   b) Construire à l'aide de la fonction c définie plus haut une fonction de E ultraplate à la fois en 0, en $+1$ et en -1.

Partie 2 : interpolations polynomiales avec ajustement de dérivées

1. a) Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

   b) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.

2. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

   Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$.

   Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

   $$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\right)$$

   (où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

   a) Vérifier que Φ est linéaire et vérifier que son noyau est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   b) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

   $$\forall k \in [\![1,p]\!],\ P(a_k) = \alpha_k\ .$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Justifier l'existence d'une unique fonction polynomiale paire H_n de degré inférieur ou égal à $n+4$, appartenant à $E_n(0) \cap E_1(-1) \cap E_1(+1)$ et telle que $H_n(0) = 0$, $H_n(-1) = H_n(+1) = 1$.

   b) Calculer H_n, selon la parité de n.

   c) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle ouvert $]-1,+1[$.

Partie 3 : fonctions génératrices plates en 0

Dans cette partie, on note $(\Omega, \mathscr{A})$ l'espace probabilisable $\left(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})\right)$.
On admet que, quelle que soit la série convergente $\sum p_n$ à termes positifs ou nuls , telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P([X = n]) = p_n\ .$$

1. Dans cette question, G_X désigne la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ muni d'une probabilité P.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction de répartition de X pour que G_X soit plate à l'ordre n en 0.

   b) Démontrer que G_X est ultraplate en 0 si, et seulement si, $P([X=0]) = 1$.

2. Dans cette question, $\sum a_n x^n$ désigne une série entière de rayon de convergence infini, dont la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est égale à 1 pour $x = 1$ et dont tous les coefficients a_n sont positifs ou nuls.

   Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P([X=n]) = a_n\ .$$

   a) Justifier que X admet un moment à n'importe quel ordre.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si S est plate à l'ordre n en 0, alors l'espérance de X est supérieure ou égale à $n+1$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et c un réel strictement supérieur à $n+1$.

   a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la fonction généra-
   trice G appartient à $E_n(0)$ et vérifie $G'(1) = c$.
   On pourra chercher une variable aléatoire ne prenant que deux valeurs entières distinctes.

   b) Démontrer que la fonction génératrice G d'une telle variable aléatoire vérifie nécessairement l'inégalité :

$$G''(1) \geq c(c-1)\ .$$

   c) Démontrer que cette inégalité ne peut devenir une égalité que lorsque c est un nombre entier. Quelle est la valeur minimale de $G''(1)$ dans le cas contraire ?

Partie 4 : approximations polynomiales

Dans cette partie, on note $\|\ \|$ la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions réelles bornées sur le segment $[-1, +1]$.

1. Soit F l'espace vectoriel normé obtenu en munissant de la norme $\|\ \|$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $[-1, +1]$.

   a) L'ensemble des fonctions f de F qui vérifient $f(0) = 0$ est-il une partie fermée de F ?

   b) Montrer que l'ensemble des fonctions f de F pour lesquelles $f(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 n'est pas une partie fermée de F.
   Pour le prouver, on pourra utiliser la suite des fonctions $f_n : x \longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}$.

2. On note T l'application qui, à chaque fonction f de F, associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-1,+1]$ par :

$$\forall\ x \in [-1,+1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a) Démontrer que T est une application continue de F dans F.

b) Soit $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note T^n la composée n-ième $T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n fois T). Démontrer que $T^n(f)$ est l'unique fonction de F nulle en 0 dont la dérivée n-ième est f et dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à n s'annulent en 0.

c) L'application T est-elle injective ? Est-elle surjective ?

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de F plate d'ordre k en 0.

a) Justifier l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $f^{(k+3)}$ sur le segment $[-1,+1]$.

b) Démontrer que la suite $\left(T^{k+3}(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,+1]$ vers une fonction de la forme $f+R$, où R est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $k+2$.

c) Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n(-1) = f(-1)$, $Q_n(0) = f(0)$ et $Q_n(1) = f(1)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est une fonction plate à l'ordre k en 0 ;
- la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-1,+1]$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet se compose d'un problème et d'un exercice pouvant être traités de manière indépendante. Les différentes parties du problème peuvent également, dans une certaine mesure, être traitées de manière indépendante, quitte à admettre les résultats des parties précédentes. Une liste de résultats susceptibles d'être utiles, et pouvant être utilisés sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer, est donnée au début.

La qualité de la rédaction et la précision des réponses apportées entrent pour une part importante dans la notation. Les réponses absurdes sont pénalisées.

Rappel de résultats

Ci-après figurent plusieurs résultats que l'on pourra utiliser sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer. Par souci de simplicité, certains énoncés sont donnés dans des cas particuliers, et non pas dans le cadre le plus général possible.

1. **Inégalité triangulaire pour l'espérance** : pour toute variable aléatoire réelle bornée X, on a l'inégalité :
$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$$

2. **Inégalité pour l'espérance d'une puissance** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X et un nombre réel $h \geq 1$, on a $(\mathbb{E}(|X|))^h \leq \mathbb{E}\left(|X|^h\right)$.

3. **Espérance conditionnelle à un événement** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X, et un événement A tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on a
$$\mathbb{E}(X|A) = \frac{\mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)},$$
où $\mathbf{1}_A$ est la variable aléatoire indicatrice de l'événement A, c'est-à-dire la variable aléatoire définie par :
$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}.$$

4. **Décomposition de l'espérance** : étant donné une variable aléatoire réelle bornée X, et un système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ (où I est un ensemble fini ou dénombrable), on a :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{E}(X|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i). \tag{1}$$

Problème

Un résultat fondamental en théorie des probabilités est le théorème central limite, dont l'une des formulations possibles est la suivante : étant donné une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et de même loi, satisfaisant en outre les conditions $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{V}(X_1) = 1$ (où la notation $\mathbb{V}$ désigne la variance), on a la convergence en loi

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Y, \tag{2}$$

où

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

et où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que (2) équivaut au fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \tag{3}$$

Dans ce problème, on se propose notamment d'établir le résultat plus élémentaire suivant : étant donné une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et de même loi, satisfaisant en outre les trois conditions

(a) $\mathbb{P}(|X_1| \leq c) = 1$ pour une certaine constante $c > 0$,

(b) $\mathbb{E}(X_1) = 0$,

(c) $\mathbb{V}(X_1) = 1$,

on a, pour tout entier $m \geq 1$, le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^m\right) = \mathbb{E}(Y^m),$$

où, comme précédemment, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans la suite, on utilisera les notations

$$T_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

et

$$M(m) = \mathbb{E}(Y^m).$$

Dans le cadre de ce problème, étant donné une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dira que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe lorsqu'il existe un nombre réel I tel que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)dx = I,$$

et l'on écrira alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = I$. (Il s'agit d'une définition simplifiée uniquement destinée à ce problème.)

Partie I – Calcul de $M(m)$

Dans cette partie, on calcule explicitement pour tout entier $m \geq 1$ la valeur de $M(m)$.

Question 1) Que représente la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour une variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$? En déduire l'identité :

$$M(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1. \tag{4}$$

Question 2) Montrer que, pour tout $m \geq 1$, on a l'identité

$$M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx.$$

Question 3) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $M(2k+1) = 0$.
Question 4) Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a $M(2k+2) = (2k+1) \cdot M(2k)$.
Indication : On pourra utiliser la formule d'intégration par parties.
Question 5) Déduire de ce qui précède l'identité, valable pour tout $k \geq 0$:

$$M(2k) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}.$$

Partie II – Un résultat sur les suites

Cette partie est consacrée à la preuve d'un résultat général sur les suites, qui est utilisé dans la partie III.

Etant donné une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels, un nombre réel $q \geq 0$ et un nombre réel α tels que la propriété suivante soit vérifiée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{n^q} = \alpha, \tag{5}$$

on va prouver le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}. \tag{6}$$

Question 6) Montrer que, pour tout nombre réel $q \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^q}{n^{q+1}} = \frac{1}{q+1}.$$

Indication : On pourra d'abord établir que pour tout $1 \leq \ell \leq n-1$, on a un encadrement donné par $\int_{\ell-1}^{\ell} x^q dx \leq \ell^q \leq \int_{\ell}^{\ell+1} x^q dx$, et en déduire un encadrement de $\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^q$.
Question 7) On considère une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Montrer que pour tout entier $q \geq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{\ell=1}^{n-1} v_\ell \cdot \ell^q}{n^{q+1}} = 0.$$

Indication : si n_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|v_n| \leq \epsilon$, utiliser une majoration très simple de $\left|\sum_{\ell=n_0}^{n-1} v_\ell \cdot \ell^q\right|$ faisant intervenir $\sum_{\ell=n_0}^{n-1} \ell^q$.
Question 8) En faisant la synthèse des questions précédentes, établir le résultat sur les suites souhaité : la propriété (5) entraîne la propriété (6).

Partie III – Convergence de $\mathbb{E}(T_n^m)$ vers $M(m)$

Dans cette partie, on prouve le fait que, pour tout $m \geq 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n^m) = M(m). \tag{7}$$

On commence par étudier les cas particuliers $m = 1, 2, 3$, avant d'effectuer une preuve dans le cas général.
Question 9) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 1$.

Question 10) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = n$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 2$.
Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2$, développer cette expression, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(S_{n+1}^2\right) - \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$.
Question 11) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}\left(S_n^3\right) = n\mathbb{E}(X_1^3)$, et en déduire (7) dans le cas particulier où $m = 3$.
Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^3 = (S_n + X_{n+1})^3$, développer cette expression, et en déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(S_{n+1}^3\right) - \mathbb{E}\left(S_n^3\right)$.
Question 12) On va maintenant prouver par récurrence le fait que, pour tout entier $q \geq 1$, on a la propriété (H_q) définie par

$$(\mathrm{H}_q) \ : \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(T_n^{2q}\right) = M(2q).$$

On suit pour cela les étapes indiquées ci-après.

(i) Vérifier la propriété (H_q) pour $q = 1$.

(ii) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, on a, pour tout entier $k \leq 2q - 1$, le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(|S_n|^k)}{n^q} = 0.$$

Indication : On pourra utiliser les points 1 et 2 du rappel de résultats.

(iii) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\left(S_{n+1}^{2(q+1)}\right) - \mathbb{E}\left(S_n^{2(q+1)}\right)}{n^q} = (2q+1)\cdot(q+1)\cdot M(2q).$$

Indication : On pourra écrire que $S_{n+1}^{2(q+1)} = (S_n + X_{n+1})^{2(q+1)}$, développer cette expression, et penser à utiliser (ii) pour traiter le comportement d'une partie des termes.

(iv) Montrer que, si l'on suppose que la propriété (H_q) est vérifiée pour un certain $q \geq 1$, la propriété (H_{q+1}) est également vérifiée.
Indication : Utiliser ce qui précède et les résultats des parties I et II.

Question 13) Montrer que, pour tout entier $q \geq 0$, on a la propriété

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(T_n^{2q+1}\right) = 0.$$

Indication : Adapter les arguments précédents.
Question 14) Effectuer un bilan des résultats précédents, établissant la validité de la propriété (7) pour tout $m \geq 1$.

Partie IV – Convergence de $\mathbb{E}\left(f(T_n)\right)$ pour f continue et bornée

Une formulation mathématiquement équivalente de l'énoncé (3) du théorème central limite est que, pour toute fonction **continue et bornée** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a la convergence :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(T_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(Y)\right), \tag{8}$$

où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Cette partie est consacrée à établir le fait que la propriété (8) entraîne effectivement la propriété (3).
Question 15) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{E}\left(g_x(T_n)\right)$, où g_x est définie par

$$g_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

La fonction g_x ainsi définie est-elle bornée ? Est-elle continue ?

Question 16) Etant donné $\epsilon > 0$, définir une fonction **continue** $f_{x,\epsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'on ait :

- $g_x(t) \le f_{x,\epsilon}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $f_{x,\epsilon}(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $g_x(t) = f_{x,\epsilon}(t)$ pour tout $t \notin]x, x+\epsilon[$.

Question 17) Montrer que, étant donné $x \in \mathbb{R}$, et une variable aléatoire Y suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on doit avoir, pour la fonction $f_{x,\epsilon}$ définie à la question 16), la propriété :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{E}\left(f_{x,\epsilon}(Y)\right) = \mathbb{E}\left(g_x(Y)\right).$$

Question 18) Déduire de ce qui précède que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f, alors, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout $n \ge n_0$, on a :

$$\mathbb{E}\left(g_x(T_n)\right) \le \mathbb{E}\left(g_x(Y)\right) + \alpha.$$

Question 19) Adapter le raisonnement des questions 16) à 18) pour établir que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f, alors, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout $n \ge n_0$, on a :

$$\mathbb{E}\left(g_x(T_n)\right) \ge \mathbb{E}\left(g_x(Y)\right) - \alpha,$$

où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Question 20) Conclure de ce qui précède le fait que, si l'on suppose la validité de (8) pour toute fonction continue bornée f, on a la propriété (3).

Partie V – Un petit exemple d'application du théorème central limite

Sur une période d'une année, un assureur prend à sa charge les montants des sinistres affectant une population de 10000 assurés. En modélisant les montants individuels des sinistres associés à chacun des assurés par une famille de variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_{10000}$ indépendantes et de même loi, la somme $Z_1 + \cdots + Z_{10000}$ représente donc le montant total à la charge de l'assureur sur une période d'une année.

Question 21) En supposant que les variables Z_i (exprimées en euros) vérifient $\mathbb{E}(Z_i) = 4$ et $\mathbb{V}(Z_i) = 4$, utiliser le théorème central limite (voir (3)) pour proposer une approximation des probabilités suivantes :

$$p_1 = \mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_{10000} \ge 40200) \text{ et } p_2 = \mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_{10000} \ge 40400).$$

Données : valeurs approchées à $\pm 10^{-3}$ près de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ pour certaines valeurs de x.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$	$0,023$	$0,067$	$0,159$	0.309	$0,5$	$0,691$	$0,841$	$0,933$	$0,977$

Indication : On pourra transformer les variables Z_i en des variables X_i de manière à garantir les conditions $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathbb{V}(X_i) = 1$.

Exercice

On considère une population d'individus évoluant au cours du temps. L'écoulement du temps est représenté par une succession de dates $t = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, la date $t = 0$ étant prise comme origine pour l'étude de la population. Un individu présent dans la population à la date t et né à la date $s \leq t$ est considéré comme ayant un âge égal à $t - s$ à la date t. Pour tout entier $t \geq 0$, et tout entier $x \geq 0$, on note $N_x(t)$ le nombre d'individus présents dans la population à la date t et ayant un âge égal à x. On suppose l'existence d'un âge maximal atteignable $x^* \geq 1$, si bien que $N_x(t)$ est automatiquement égal à 0 lorsque $x > x^*$. La **durée de vie** d'un individu est définie comme le nombre total de périodes de temps pendant lesquelles l'individu s'est trouvé en vie. Ainsi, un individu né à la date t_1, encore en vie à la date $t_2 \geq t_1$, et décédé à la date $t_2 + 1$, a une durée de vie égale à $t_2 - t_1$. Finalement, on note $N(t)$ le nombre **total** (tous âges confondus) d'individus présents dans la population à la date t.

Le processus d'évolution de la population au cours du temps est modélisé de la manière suivante : les nombres $N_0(x)$ pour $x = 0, \ldots, x^*$ (composition initiale de la population) sont supposés connus. Ensuite, pour tout $t \geq 0$, étant donné l'évolution de la population jusqu'à la date t, et indépendamment de tous les autres individus de la population, la probabilité pour un individu d'âge x à la date t d'être décédé à la date $t + 1$ est donnée par un nombre $q_x > 0$. On a $q_{x^*} = 1$. Un individu décédé à la date $t + 1$ n'est alors plus considéré comme faisant partie de la population. D'autre part, on suppose que les nombres de nouveaux-nés $N_0(1), N_0(2), \ldots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes entre elles, et indépendantes de la survie/non-survie des autres individus présents dans la population.

Question A) Pour $t \geq 0$, exprimer $N(t)$ en fonction de $N_0(t), \ldots, N_{x^*}(t)$.

Question B) Etant donné $x \geq 0$, un entier $n \geq 0$, et un entier $t \geq 0$, exprimer la valeur de $\mathbb{E}(N_{x+1}(t+1) | N_x(t) = n)$ en fonction de n et de q_x.

Question C) En déduire une expression de $\mathbb{E}(N_{x+1}(t+1))$ en fonction de $\mathbb{E}(N_x(t))$ et de q_x.

Question D) On considère un individu d'âge $y \geq 0$ à la date 0. On note T la variable aléatoire correspondant à la durée de vie (totale) de cet individu, et S la variable aléatoire correspondant à la durée de vie **restante** de cet individu après la date 0, c'est-à-dire $S = T - y$. Donner une expression explicite de $\mathbb{P}(S = z)$ pour tout $z \geq 0$ en fonction des q_x.

Question E) Déduire du résultat de la question précédente une expression pour $\mathbb{E}(S)$ et pour $\mathbb{V}(S)$.

Question F) On dit que la population est **stationnaire en moyenne** lorsque, pour tout $t \geq 0$, et tout $x = 0, \ldots, x^*$, on a $\mathbb{E}(N_x(t+1)) = \mathbb{E}(N_x(t))$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la population soit stationnaire en moyenne est que les équations suivantes soient satisfaites :

(i) pour tout $t \geq 1$, $\mathbb{E}(N_0(t)) = N_0(0)$,

(ii) pour tout $x = 0, \ldots, x^* - 1$, on a $(1 - q_x) N_x(0) = N_{x+1}(0)$.

Question G) On suppose que la condition (i) de la question précédente est vérifiée. Montrer que, pour une valeur donnée de $N(0)$ et des q_x, il existe un et un seul jeu de valeurs $N_0(0), \ldots, N_0(x^*)$ tel que la population soit stationnaire en moyenne. Donner une expression explicite de ces valeurs de $N_0(0), \ldots, N_0(x^*)$, en fonction de $N(0)$ et des q_x.

Question H) On suppose que la population est stationnaire en moyenne. On numérote les individus présents dans la population à la date 0 par $i = 1, \ldots, N(0)$, et l'on utilise la notation S_i pour désigner la durée de vie restante (après la date 0) de l'individu numéro i. Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la relation : $N_x(0) = \sum_{i=1}^{N(0)} \mathbb{P}(S_i = x)$.

Question I) Justifier l'interprétation suivante de la relation obtenue en H) : « dans une population stationnaire en moyenne, le nombre moyen d'individus âgés de x années est égal au nombre moyen d'individus auxquels il reste exactement x années à vivre ».

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h

Ce sujet se compose de deux parties distinctes (probabilités et optimisation économique) pouvant être traitées de manière totalement indépendante.

Probabilités

`Cette partie compte pour 1/3 de la note`

Le problème du collectionneur de vignettes

Une personne collectionne les vignettes qui se trouvent dans les paquets de biscuits qu'elle achète. Une vignette peut appartenir à m types différents, numérotés de 1 à m, où m est un entier ≥ 2, et l'on suppose que, dans chaque nouveau paquet de biscuits acheté, le type de la vignette se trouvant dans le paquet est tiré uniformément au hasard parmi les m types possibles, indépendamment des vignettes trouvées dans les paquets précédents. On s'intéresse au nombre de paquets qu'il est nécessaire d'acheter pour disposer d'au moins un exemplaire de chacun des m types différents de vignette.

Pour tout $k \geq 0$, on définit la variable aléatoire Z_k comme étant le nombre total de types distincts de vignettes obtenus après l'achat de k paquets de biscuits. (On a donc $Z_0 = 0$.)

On pose $T_0 := 0$, et l'on définit récursivement pour tout $k \geq 1$ la variable

$$T_k = \inf\{n \geq T_{k-1} + 1 \mid Z_n = k\}. \tag{1}$$

Rappels

- Loi géométrique : une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ lorsque, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : étant donné une variable aléatoire X possédant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X) > 0$, on a, pour tout $t > 0$, l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}.$$

- Probabilité d'une réunion : étant donné n événements $A_1, \dots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n),$$

et

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \alpha_k,$$

avec

$$\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Questions à traiter

1) Expliquer à partir de (1) pourquoi T_k correspond bien au nombre minimal de paquets que le collectionneur doit acheter pour disposer de k types différents de vignettes dans sa collection.
2) Montrer que les variables aléatoires $(T_k - T_{k-1})_{1 \leq k \leq m}$ sont indépendantes, et que, pour tout $1 \leq k \leq m$, la variable aléatoire $(T_k - T_{k-1})$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{m-k+1}{m}\right)$.
3) Montrer que, si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
4) En déduire l'espérance et la variance de T_m.
5) Montrer que, lorsque $m \to +\infty$, on a $\mathbb{E}(T_m) \sim m \log m$ et $\mathbb{V}(T_m) = O(m^2)$.

6) En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_m}{m\log m} - 1\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Indication : utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
7) Pour tout $1 \leq k \leq m$, et tout $n \geq 1$, on définit l'événement A_k^n par

$$A_k^n = \{\text{aucun des } n \text{ premiers paquets ne contient de vignette de type } k\}.$$

Exprimer l'événement $T_m > n$ à partir des événements A_k^n.
8) Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq m$, et tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(A_k^n) = (1 - 1/m)^n$.
9) En déduire que $\mathbb{P}(T_m > n) \leq m(1 - 1/m)^n$.
10) Comment se comporte la borne obtenue à la question précédente lorsque $m \to +\infty$ et $n = \lceil m\log m + cm \rceil$, où $c \geq 0$, et où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x (c.à.d. l'entier immédiatement supérieur ou égal à x) ?
11) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(T_m > n) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} C_m^j \left(1 - \frac{j}{m}\right)^n, \tag{2}$$

où $C_m^k = \binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial (combinaison de k parmi m).
Indication : Utiliser la formule d'inclusion-exclusion.
12) La fonction génératrice de T_m est définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathbb{P}(T_m = k).$$

Donner une expression explicite de $G(x)$.
Indication : Calculer d'abord la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

Optimisation économique

Cette partie compte pour 2/3 de la note

Problème 1

7 points : 2+2+3

Soit une économie produisant un bien i dont les fonctions de demande et d'offre sont respectivement les suivantes : $Q^D = 10 - 3P_i$ et $Q^O = \frac{1}{2}P_i - 2$.

1. Calculez l'élasticité prix de la demande au point d'équilibre. Le producteur a-t-il intérêt à augmenter son prix de vente ? Justifiez votre réponse.
2. On suppose à présent que l'Etat impose une taxe à la production de 0,5 euro par produit. Déterminez le nouvel équilibre et la part payée par le consommateur et le producteur. Expliquez.
3. On suppose à présent l'introduction d'un second bien j dans l'économie, dont le prix P_j est fixé à 1 euro. La demande du bien i devient : $Q^D = 10 - 3P_iP_j$ et l'offre reste inchangée. Déterminez le nouvel équilibre de marché et calculez l'élasticité croisée en ce point. Quelle est la nature des biens i et j ?

Problème 2

7 points : 2+2+3

Soit un producteur dont la technologie exclusivement basée sur la main d'œuvre est donnée par la fonction de production suivante : $Y = \sqrt{L}$, Y désignant les quantités produites et L, le nombre d'ouvriers.

1. Déterminez les productivités marginales et moyennes pour $L = 30$ et $L = 25$.
2. Si l'on suppose que le prix de vente du bien est $P = 20$ et la taux de salaire de l'ouvrier $w = 2$, l'entreprise a-t-elle intérêt à embaucher 25 ouvriers, 30 ouvriers ? Justifiez votre réponse.
3. Suite à un progrès technique, on suppose à présent que l'entreprise se mécanise. La fonction de production devient ainsi : $Y = \sqrt{L}\sqrt{K}$, Y désignant les quantités produites, L le niveau d'emploi et K de capital. L'entreprise utilise 36 machines et 49 ouvriers. Le coût de l'ouvrier (w) est à présent de 1, celui du capital (i) de 2, et l'entreprise dispose d'une somme totale de 112. Son choix est-il optimal ? Justifiez votre réponse.

Problème 3

6 points : 1+2+3

On considère un marché où deux firmes se font concurrence et produisent des biens verticalement différenciés x_i $(i = 1,2)$ avec des coûts de production égaux à zéro. On suppose que la qualité du bien 2 est supérieure à celle du bien 1 de telle sorte que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Les consommateurs sont uniformément distribués sur un intervalle $[0,1]$ et l'utilité du consommateur t achetant le bien x_i au prix p_i est donnée par $u_i = t \cdot x_i - p_i$.

1. Représentez graphiquement (dans un référentiel $[t, u_i]$) les fonctions d'utilité pour les deux biens.
2. Déterminez les demandes adressées à chacune des deux firmes.
3. Déterminez les prix, demandes et profits optimaux lorsque les firmes se concurrencent en prix. Qu'en concluez-vous ?

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas*, *c'est-à-dire*, *le plus grand*, comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Tout pouvoir politique obtient finalement la subordination par le moyen de la théâtralité, plus apparente dans certaines sociétés que dans d'autres ; parce que leurs différences de civilisation les rendent à des degrés inégaux « spectaculaires ». Il représente, dans toutes les acceptions du terme, la société qu'il gouverne. Il se montre comme son émanation, il en assure la présentation à l'extérieur, il lui renvoie une image d'elle-même idéalisée et donc acceptable. Mais la représentation implique la séparation, la distance ; elle établit des hiérarchies ; elle change ceux qui en ont la charge. Et ces derniers dominent la société tout en lui donnant un spectacle d'elle-même où elle doit (ou devrait) se trouver magnifiée. Les manifestations du pouvoir s'accommodent mal de la simplicité. La grandeur ou l'ostentation, le décorum ou le faste, le cérémonial ou le protocole les caractérisent généralement.

Le pouvoir utilise d'ailleurs des moyens spectaculaires pour marquer sa prise en charge de l'histoire (commémorations), exposer les valeurs qu'il exalte (manifestations) et affirmer sa force (exécutions). Ce dernier aspect est le plus dramatique, non seulement parce qu'il met en activité la violence des institutions, mais aussi parce qu'il sanctionne publiquement la transgression des interdits que la société et son pouvoir ont décrété inviolables. La place de Grève a été la scène où se produit une représentation sacrée, sacrificielle, de la force. Et qui a une valeur exemplaire pour le public y assistant et y participant. Les grands procès politiques, dans leur déroulement, dans la présentation qui en est faite, portent la dramatisation à son plus fort degré d'intensité. [...] Ils transforment pour un temps la scène politique en un théâtre tragique, puisque l'enjeu du drame est la mort physique ou morale de ceux que le pouvoir accuse au nom de la sauvegarde de la forme et des valeurs suprêmes de la société.

La puissance politique n'apparaît pas uniquement lors des circonstances exceptionnelles. Elle se veut inscrite dans la durée, immortalisée dans une matière impérissable, exprimée dans des créations manifestant sa « personnalité » et son éclat. Elle conduit une politique des lieux et des œuvres monumentales. La monarchie louis-quatorzienne se montre, se dit, se glorifie dans le château de Versailles qui se construit et dans l'opéra qui se constitue comme drame lyrique. Chaque « règne », même républicain, marque d'une manière nouvelle un territoire, une cité, un espace public. Il aménage, modifie et organise, selon les exigences des rapports économiques et sociaux dont il est le gardien, mais aussi afin de ne pas être effacé par l'oubli et de créer les conditions de ses commémorations futures. Dans les illusions que produit le pouvoir se trouve, au centre, celle d'avoir la capacité d'échapper aux assauts du temps. [...]

Toute ville au cours de son histoire s'enrichit de ces lieux auxquels peut être attribuée une fonction symbolique, qu'ils la reçoivent par destination ou qu'ils la tiennent de l'événement. Ils sont les théâtres où la société « officielle » se produit, et ceux, à l'inverse, où la protestation populaire se « manifeste ». La topographie symbolique d'une grande cité est une topographie sociale et politique ; la Bastille désigne des composantes sociologiques, des classes et des activités, en même temps que l'espace ouvert aux démonstrations de revendication ou de révolte. Certains lieux expriment le pouvoir, imposent sa sacralité, mieux que ne pourrait le faire toute explication. La basilique Saint-Pierre de Rome, mise en valeur par la place à colonnade conçue par Le Bernin, est un décor destiné à provoquer vénération et crainte. La liturgie y devient, participation et spectacle, une consécration de la toute-puissance de Dieu et aussi de celle du pontife souverain, naguère maître d'un Empire. [...]

Aujourd'hui, le pouvoir se manifeste néanmoins sur trois terrains principaux. Celui des activités rationnelles où siègent les compétents et les gestionnaires, les gens qui ont la charge du pouvoir-faire humain et de la solution technique des problèmes ; ils érigent l'organisation, l'efficacité, le résultat – qu'il soit profit ou tout autre acquis – en objets de leur foi. Celui des activités médiatisées où le réel se construit par l'information, la parole, l'image et la dramatisation ; il donne l'existence par la visibilité, il hiérarchise selon les degrés du vedettariat, il accorde moins d'importance à la confrontation poussée des points de vue, des idées, des projets qu'à leur traduction spectaculaire. L'affrontement, l'*agôn*, n'occupe plus la scène sacrée et civique comme dans le théâtre antique, il se produit par spectacles et contre-spectacles reçus sur ces multiples scènes que sont les écrans ; ces petits espaces visuels où les pouvoirs, quels qu'ils soient, se font et se maintiennent par la présence, se déforcent et s'effacent par l'absence. Le troisième terrain, le plus difficile à préserver et à occuper durablement, est celui où le politique se transfigure en « mystique », selon le mot de Péguy ; le mythe, le symbole, le rite, les valeurs collectives les plus élevées et les émotions qui les servent y ont pour fonction d'unir en créant (ou en tentant de créer) une solidarité supérieure et généralisée, de mobiliser en orientant et fortifiant l'action des sujets et des groupes auxquels ils appartiennent. C'est sur ce terrain que se situe, exhaussée, distante, la figure du souverain, du *Suprême*.

Aucune société, serait-elle la plus technicisée, la plus soumise aux gouvernements des experts, ou la plus médiatisée et régie par les nouveaux constructeurs de la réalité, ne pourrait faire l'économie de ce pouvoir-là. Une tendance à un réinvestissement du symbolique, de l'imaginaire et des affects dans le champ politique se manifeste périodiquement ; c'est l'expression d'une nécessité qui n'a jamais cessé de s'imposer au cours de la longue histoire humaine, indifférente à tous les bouleversements. Dans le monde présent, ouvert aux changements rapides et cumulés, aux incertitudes et aux inquiétudes qui entretiennent la *conscience de désordre*, se renforce la demande d'une image du pouvoir suprême crédible, parce qu'elle serait ajustée à ce temps et en montrerait le sens, parce qu'elle éprouverait le mouvement sans le subir, parce qu'elle traduirait dans le langage de l'idéal la réalité contemporaine. On peut dire, sans trop d'excès, que le temps du refaçonnage des souverains est venu. Il y a une attente, qui permet aux princes, héritiers du passé, de reparaître sur plusieurs scènes politiques contemporaines et qui ravive une nostalgie des monarchies, déjà exploitées par le commerce de l'audiovisuel et par certains magazines spécialisés ; une attente qui rend plus facile la transformation des régimes démocratiques en républiques d'aspect monarchique ou qui, à plus hauts risques, pare les leaders populistes et autocratiques des vieux habits de la souveraineté.

G. BALANDIER, *Le Pouvoir sur scènes*, 1980.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2016

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

1 Summarize this text in English in 200 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

The real danger of Brexit
Feb 27th 2016 | The Economist

The battle is joined, at last. David Cameron has called a referendum on Britain's membership of the European Union for June 23rd, promising to campaign hard to stay in. What began as a gambit to hold together his divided Tory party is turning into an alarmingly close contest. Betting markets put the odds that Britons opt to leave at two-to-one; some polls suggest the voters are evenly split; several cabinet ministers are campaigning for Brexit. There is a real chance that in four months' time Britain could be casting off from Europe's shores.

That would be grave news—and not just for Britain. A vote to leave would damage the economy, certainly in the short term and probably in the long run. (As financial markets woke up to the prospect, the pound this week fell to its lowest level against the dollar since 2009.) It would imperil Britain's security, when threats from terrorists and foreign powers are at their most severe in years. And far from reclaiming sovereignty, Britons would be forgoing clout, by giving up membership of a powerful club whose actions they can influence better from within than without. Those outside Britain marvelling at this proposed act of self-harm should worry for themselves, too. Brexit would deal a heavy blow to Europe, a continent already on the ropes. It would uncouple the world's fifth-largest economy from its biggest market, and unmoor the fifth-largest defence spender from its allies. Poorer, less secure and disunited, the new EU would be weaker; the West, reliant on the balancing forces of America and Europe, would be enfeebled, too.

The Brexiters' case is that Britain is held back by Europe: unshackled, it could soar as an open economy that continued to trade with the EU and all round the world. That is possible in theory, but it is not how things would work in practice. At a minimum, the EU would allow full access to its single market only in return for adherence to rules that Eurosceptics are keen to jettison. If Norway and Switzerland (whose arrangements with the EU many Brexiters idolise) are a guide, the union would also demand the free movement of people and a big payment to its budget before allowing unfettered access to the market.

Worse, the EU would have a strong incentive to impose a harsh settlement to discourage other countries from leaving. The Brexit camp's claim that Europe needs Britain more than the other way round is fanciful: the EU takes almost half Britain's exports, whereas Britain takes less than 10% of the EU's; and the British trade deficit is mostly with the Germans and Spanish, not with the other 25 countries that would have to agree on a new trade deal.

To some Eurosceptics these hardships would be worth it if they meant reclaiming sovereignty from Europe, whose bureaucrats and judges interfere with everything from bankers' bonuses to working-time limits. Yet the gain would be partly illusory. In a globalised world, power is necessarily pooled and traded: Britain gives up sovereignty in exchange for clout through its memberships of NATO, the IMF and countless other power-sharing, rule-setting institutions. Signing up to treaties on trade, nuclear power or the environment involves submitting to regulations set jointly with foreigners, in return for greater gains. Britain outside the EU would be on the sidelines: notionally independent from, but in fact still constrained by, rules it would have no role in formulating. It would be a purer but rather powerless sort of sovereignty.

One exception is immigration, the area over which many Eurosceptics most long for control. Half of Britain's migrants come from the EU, and there is little the government can do to stop them. If Britain left the union, it could. But doing so would have a double cost. Gaining the right to stop immigration from the EU would almost certainly mean losing full access to the single market. And reducing the numbers of immigrants would hurt Britain's businesses and public services, which rely on French bankers, Bulgarian builders and Italian doctors.

The longer-term costs would go beyond economics. Brexit might well break up the United Kingdom itself. Scotland, more Europhile than England, is again agitating for a divorce; if Britain decides to leave Europe, then the Scots may at last have a point. Brexit could also dangerously unsettle Northern Ireland, where the peace process over two decades has depended on the fact that both Ireland and Britain are members of the EU. The Irish government is among the most vocal foreign supporters of the campaign for Britain to stay in.

Ireland is not the only country that would suffer. European leaders know Brexit would weaken a club already in deep trouble over such issues as migration and the euro crisis. And Europe would be poorer without Britain's voice: more dominated by Germany; and, surely, less liberal, more protectionist and more inward-looking. Europe's links to America would become more tenuous. Above all, the loss of its biggest military power and most significant foreign-policy actor would seriously weaken the EU in the world.

The EU has become an increasingly important part of the West's foreign and security policy, whether it concerns a nuclear deal with Iran, the threat of Islamist terrorism or the imposition of sanctions against Russia. Without Britain, it would be harder for the EU to pull its global weight—a big loss to the West in a troubled neighbourhood, from Russia through Syria to north Africa. It is little wonder that Russia's Vladimir Putin is keen on Brexit—and that America's Barack Obama is not. It would be shortsighted for Eurosceptics to be indifferent to this. A weakened Europe would be unambiguously bad for Britain, whose geography, unlike its politics, is fixed.

A lot thus rests on the tight race now under way. For those who believe, as this newspaper does, in free trade and freedom of movement, the benefits to Britain of its membership of the EU have never been in much doubt. What more sceptical sorts must now recognise is that Brexit would also weaken Europe and the West. The stakes in Mr Cameron's great gamble are high; should he fail, the losses would be widely felt.

2 Translate the following text into French

San Francisco first U.S. city to require businesses to offer new parents paid leave

By Danielle Paquette April 6 at 7:49 PM The Washington Post

A week after Vanessa Harlin gave birth, she returned to work but could not sit down. The staples in her stomach would tear.

Harlin, an assistant bank manager at the time, had used up her sick days that year to care for her three older boys. So, as her mother watched baby Chloe, she strove to make rent on their San Francisco apartment.

Harlin, 36, was among the roughly 88 percent of American private-sector workers who receive no paid family leave from employers, a benefit generally reserved in the United States for high earners and those in the perk-friendly technology sector. She was thrilled to learn that this week, San Francisco became the first city in the country to require businesses to offer new parents fully paid leave.

The measure, unanimously approved Tuesday by the city's Board of Supervisors, comes as momentum grows nationwide for workplace policies that better support families — an effort pushed by both workers' rights activists and Silicon Valley juggernauts.

Twitter, for example, this week became the latest company in a string of high-profile firms, including Netflix and Spotify, to expand its paid-leave policy, offering new parents up to 20 weeks off.

The San Francisco provision gives mothers and fathers six weeks of time off without losing a penny of income. The help, expected to take effect next year, would also be available to parents who adopt.

Under federal law, most American employers must offer at least 12 weeks of leave. None of it, however, has to be paid.

California, Rhode Island and New Jersey offer new parents partial pay, using employee-funded programs. New York joined their ranks last month, approving up to 12 weeks of partial coverage.

Lawmakers in at least 18 other states, meanwhile, are considering some form of paid-family-leave policy. The District could soon outpace San Francisco in benefit generosity, with council members discussing legislation that would provide new parents with 16 weeks of paid leave, funded through a new employee tax.

Supporters say the action will chip away at inequality, since America's low-wage workers are among the least likely to have access to any paid time off. Those without savings can slip into poverty.

Adapted from *The Washington Post*, 06 April 2016.