Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Durée : 4h

Objectif du problème et remarques liminaires :

— On se propose ici d'introduire les notions d'applications hölderiennes et « à variation bornée ».

— Les cinq parties du problème sont relativement indépendantes les unes des autres.

— L'évaluation des copies sera étroitement liée à la rigueur des raisonnements et à une utilisation dûment justifiée du cours.

Notations :

- Si A et B sont deux ensembles, B^A est l'ensemble des applications de A dans B.
- Dans la suite, on note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ muni de ses lois usuelles.
- Dans tout le problème, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $\omega = \dfrac{2.\pi}{T}$ et on convient que $0^x = 0$ si $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, alors $[\![p,q]\!]$ désigne l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, p \leq k \leq q\}$.
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ et $n \in \mathbb{N}^*$, un élément $x = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]^{[\![0,n]\!]}$ est dit subdivision de $[a,b]$ si, et seulement si, x est croissant et tel que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Si c'est le cas et $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$, on note $V_x(f)$ la somme (appelée variation de f relativement à x) :

  $$\sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$$

  En outre, $S_{[a,b]}$ désignera l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Enfin, on dit que f est à variation bornée (sur $[a,b]$) si, et seulement si, l'ensemble $\{V_x(f), x \in S_{[a,b]}\}$ est majoré et, lorsque c'est le cas, on appelle variation de f (sur $[a,b]$) sa borne supérieure, que l'on note $V_{[a,b]}(f)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, $C_T^p(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est classiquement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^p et T-périodiques. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, on note $H^\alpha(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{K}$ qui vérifient : $\exists c \in \mathbb{R}^+ \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad \left| f(y) - f(x) \right| \leq c.\left| y - x \right|^\alpha$

  On note aussi $H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ l'ensemble des éléments de $H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ T-périodiques.
- Dans tout le problème, F est l'ensemble des éléments $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de E satisfaisant la condition :

  pour tout élément p de $\mathbb{N}$, z_n est négligeable devant $|n|^{-p}$ lorsque n tend vers $-\infty$ et $+\infty$.
- Enfin, si $f \in C_T^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f)$ le nombre complexe :

  $$\frac{1}{T}.\int_0^T \left(f(t).e^{-i.n.\omega.t}\right) dt$$

PARTIE I

1/ Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E.

2/ Constater que la suite $(z^{|n|}/|n|!)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à F si $z \in \mathbb{C}$.

3/ Soient P un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geq n_0 \Rightarrow P(n) \neq 0\,.$$

b) En déduire que $(P(n).z^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à F si, et seulement si : $|z| < 1$.

4/ a) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in C^1_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que $f' \in C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que $c_n(f') = i.n.\omega.c_n(f)$.

b) Prouver que $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in F$ si $f \in C^\infty_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

PARTIE II

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5/ On suppose ici que $\alpha \in]1,+\infty[$.

a) Vérifier que, si $f \in H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$, alors f est dérivable et préciser f'.

b) En déduire $H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ puis $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

6/ Constater que, si $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ stable par $\times$.

7/ a) Montrer que, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un élément $\widetilde{x}$ de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \widetilde{x} = x + k.T \quad \text{et} \quad \left|y - \widetilde{x}\right| \leq T \quad \text{et} \quad \left|y - \widetilde{x}\right| \leq \left|y - x\right|\,.$$

b) En conclure que $H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ contient $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$ et $\beta \leq \alpha$.

PARTIE III

Dans cette partie, $\alpha \in]0,1[$ et I_α est l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \left(u^{\alpha-2}.(1-\cos u)\right).du$$

8/ Justifier qu'il soit licite de considérer une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f_α, continue, T-périodique, paire et satisfaisant :

$$\forall t \in]0, T/2] \quad f_\alpha(t) = t^\alpha$$

9/ a) Vérifier que : $\forall t \in]1,+\infty[\quad t^\alpha - 1 \leq (t-1)^\alpha$.

b) Prouver que $H^\alpha([0,T],\mathbb{K})$ contient la restriction de f_α à $[0,T]$.

c) En déduire que $f_\alpha \in H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Appartient-elle à $H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si $\beta \in]\alpha,+\infty[$?

10/ Montrer que I_α converge puis que $I_\alpha > 0$.

11/ a) Déterminer, en fonction de I_α, un équivalent de $c_n(f)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient-elle à F ?

PARTIE IV

Dans toute la suite du problème, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $a<b$ et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. De plus, $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des applications à variations bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

12/ a) Constater que, si $n\in\mathbb{N}^*$, alors le uplet $(x_k)_{k\in[\![0,n+1]\!]}$ défini par

$$x_0=0,\ x_{n+1}=1 \text{ et } \forall k\in[\![1,n]\!]\ x_k=\frac{1}{2.(n+1-k)}$$

est une subdivision de $[0,1]$.

b) Montrer que l'application φ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=x.\cos\left(\dfrac{\pi}{2.x}\right)$ admet un prolongement à $[0,1]$ continu puis que celui-ci n'est pas à variation bornée.

13/ a) Constater que toute application monotone de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est à variation bornée et préciser sa variation.

b) Prouver que $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ contient $H^1([a,b],\mathbb{K})$. Qu'en déduit-on sur toute application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 ?

14/ a) Vérifier que $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

b) Soient $f\in\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t)=f(\lambda.t+\mu)$ est à variation bornée sur son domaine de définition. Comparer les variations de f et $\tilde{f}$.

15/ Soient $f\in\mathbb{K}^{[a,b]}$ et $c\in]a,b[$. Justifier que f est à variation bornée si, et seulement si, les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ le sont. Montrer que, sous cette hypothèse :

$$V_{[a,b]}(f)=V_{[a,c]}(f)+V_{[c,b]}(f)\,.$$

16/ Soit $f\in C^0_T(\mathbb{R},\mathbb{K})$ telle que la restriction de f à $[0,T]$ soit à variation bornée. On considère $K\in\mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,K]\!]}$ de $[0,T]$.

a) Vérifier que, si $n\in\mathbb{N}^*$, alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[(f(t)-f(x_k)).e^{-i.n.\omega.t}\right].dt\right|\leq\sum_{k=1}^{K}\left[V_{[x_{k-1},x_k]}(f).(x_k-x_{k-1})\right]$$

puis que :

$$\left|\sum_{k=1}^{K}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x_k).e^{-i.n.2.\pi.t/T}\right].dt\right|\leq\frac{V_{[0,T]}(f)}{|n|.\omega}$$

b) En conclure que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|c_n(f)\right|\leq\dfrac{V_{[0,T]}(f)}{2.\pi.|n|}$. Qu'en déduit-on sur $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$?

PARTIE V

Dans cette dernière partie, $\alpha \in]0,1[$ et $p \in]1, 1/\alpha[$. On se propose de prouver que $H^\alpha([a,b],\mathbb{K})$ n'est pas inclus dans $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$.

17/ a) Exhiber un nombre réel ρ tel que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n = 1 - \rho.\sum_{k=1}^{n} k^{-p}$$

converge vers 0.

b) Vérifier qu'alors elle est à valeurs dans $]0,1]$ et qu'elle décroît.

18/ Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \dfrac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}$ et on note g_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0,1] \quad g_n(t) = \max\left\{0, \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{2} - \left|t - \mu_n\right|\right\}$$

a) Représenter graphiquement (sans justification) l'application g_n, montrer que $g_n \in H^1([0,1],\mathbb{R})$ puis évaluer $V_{[0,1]}(g_n)$, lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'il est légitime de considérer l'application h définie par :

$$\forall t \in [0,1] \quad h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(t)$$

puis que $h \in H^1([0,1],\mathbb{R})$.

c) Montrer que $h^\alpha \in H^\alpha([0,1],\mathbb{R})$.

19/ a) Evaluer $V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que h^α n'appartient pas à $\mathrm{VB}([0,1],\mathbb{R})$.

20/ a) Conclure.

b) A quelle condition, portant sur l'élément β de $\mathbb{R}^{*+}$, $\mathrm{VB}([a,b],\mathbb{K})$ contient-il $H^\beta([a,b],\mathbb{K})$?

Fin

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Durée : 4h

Le problème a pour objet l'extension de la notion de série entière à des séries de matrices, dans le but de définir le logarithme d'une matrice au voisinage de la matrice-identité et d'en examiner certaines propriétés.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes. Quel que soit l'ordre dans lequel le candidat décide de les aborder, on attend de lui une démarche claire, ainsi qu'une rédaction soignée. La présentation, la précision des arguments et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

Dans tout le problème, p désigne un nombre entier strictement positif. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, et $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont réels.
Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et tout couple (ℓ, k) d'entiers compris entre 1 et p, on note $M[\ell, k]$ le coefficient situé dans la ℓ-ième ligne et la k-ième colonne de la matrice M.
Dans la base des matrices élémentaires $E_{\ell,k}$ (matrice dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé dans la ℓ-ième ligne et la k-ième colonne, qui vaut 1) une matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ s'écrit donc :

$$M = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} M[\ell, k]\ E_{\ell,k}\ .$$

On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est triangulaire si tous ses coefficients sous-diagonaux (les $M[\ell, k]$ pour lesquels $\ell > k$) sont nuls.

On appelle polynôme caractéristique de M le polynôme $\chi_M = \det(X.I_p - M)$, où I_p désigne la matrice-identité d'ordre p. Pour tout entier k compris entre 0 et p, on notera $a_k(M)$ le coefficient de son monôme de degré k, de sorte que :

$$\chi_M = \sum_{k=0}^{p} a_k(M)\, X^k \text{ , avec } a_p(M) = 1 \text{ et } a_0(M) = (-1)^p \det(M).$$

Le spectre de M, constitué des racines (complexes) de χ_M, sera noté $\mathrm{sp}(M)$:

$$\mathrm{sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \det(\lambda.I_p - M) = 0\}\ .$$

On dit qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est convergente si chacune des suites $(M_n[\ell, k])_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$.
On dit que la série de terme général M_n est convergente si la suite $(\sum_{m=0}^{n} M_m)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Partie 1 : convergence d'une série entière de matrices

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ des matrices-colonnes à p coefficients complexes.

On note $\| \cdot \|_s$ la norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ subordonnée à $\| \cdot \|$, définie par :

$$\forall\ A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C}),\ \| A \|_s = \mathrm{Sup}\{\ \| A\,Y \|\ ;\ Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \| Y \| \le 1\}\ .$$

1. Justifier pour toute matrice Y de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et tout couple (A,B) de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ les inégalités :

$$\| AY \| \leq \| A \|_s \| Y \| ,$$

$$\| AB \|_s \leq \| A \|_s \| B \|_s \ .$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on appelle rayon spectral de A, noté $\rho(A)$, le plus grand des modules des valeurs propres (complexes) de A : $\rho(A) = \mathrm{Max}\{|\lambda| ;\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

   Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) \leq \| A \|_s$.

3. Dans cette question, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ soit strictement positif.
   On note R ce rayon de convergence, éventuellement infini.

   On note $\mathscr{A}_c$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n A^n$ soit convergente.

   a) Établir les deux inclusions :

$$\{A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C});\ \| A \|_s < R\} \subset \mathscr{A}_c \subset \{A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C});\ \rho(A) \leq R\} \ .$$

   b) Quel résultat sur les séries entières retrouve-t-on lorsque p est égal à 1, si on identifie alors $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$?

   c) Démontrer que $\mathscr{A}_c$ est invariant par similitude, c'est-à-dire que, si A appartient à $\mathscr{A}_c$ et si A' est semblable à A, alors A' est aussi un élément de $\mathscr{A}_c$.

   d) Démontrer que si A est une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont le rayon spectral est strictement inférieur à R, alors A appartient à $\mathscr{A}_c$.

Partie 2 : quelques calculs et un exemple

Pour tout couple $(n,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$, on note $u_n(z) = (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ et $v_n(z) = \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

1. a) Démontrer que la suite $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $d_n = \ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ est convergente.

   b) Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{2N-1} u_n(1)$ en fonction de d_{2N} et d_N, et en déduire l'égalité : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \ln(2)$.

c) Pour quelles valeurs réelles de x la série de terme général $u_n(x)$ est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?

2. a) Préciser le rayon de convergence de la série entière de terme général v_n.

   b) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$, pour tout réel x tel que la série $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ converge.

   c) Établir, pour tout réel $x \in [-1,+1]$, l'égalité : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i\arctan(x)$.

   d) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n(i)$ et calculer sa somme.

3. Dans cette question, on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

   b) Utiliser le résultat de la question 2d pour calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} D^{n+1}$.

   c) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1}$.

Partie 3 : quelques questions topologiques

1. Soit T une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

   Pour tout entier strictement positif n on pose : $T_n = T + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.

   a) Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, de la différence $T_n[\ell,\ell] - T_n[k,k]$ de deux coefficients diagonaux de T_n.

   b) Démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de T_n soient deux à deux distincts.

2. a) Rappeler pourquoi toute matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

   b) Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

3. Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ de $\mathbb{C}_p[X]$, on note : $\| Q \|_1 = \sum_{k=0}^{p} |b_k|$.

   Justifier, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C}), \quad \| N - M \|_s \leq \alpha \Rightarrow \| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1 \,.$$

4. Soit $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mu \in \mathrm{sp}(M)$.

   a) Justifier successivement les inégalités :

   (1) $|\mu|^p \leq \mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|$ (2) $\mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} \leq \mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p} |a_k(M)|$ et (3) $|\mu| \leq \| \chi_M \|_1$.

   b) En déduire que, pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(N), \quad |\lambda| \leq 2 \| \chi_M \|_1 \ .$$

5. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, de limite M.

   On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique de M_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ c'est-à-dire qu'il admet p racines réelles $\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n}$, distinctes ou non :

$$\chi_{M_n} = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_{k,n}) \ .$$

   a) Justifier l'existence d'une suite convergente extraite de la suite $\big((\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) En déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

   a) Démontrer que l'adhérence de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice M de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, alors il existe une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers M.

   c) Que peut-on en déduire sur l'intérieur de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$?

Partie 4 : logarithme de matrice

On note $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire.

Soit $\mathscr{B} = \{M \in \mathscr{T}_p(\mathbb{R}) ;\ \| M - I_p \|_s < 1\}$.

1. Soit $M \in \mathscr{B}$.

   a) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(M-I_p)^{n+1}$.

   b) Démontrer que $\mathrm{sp}(M)$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]0,2[$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{B}$, on note désormais : $\displaystyle\mathrm{Log}(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(M-I_p)^{n+1}$.

2. Démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{B}$, la trace de $\mathrm{Log}(M)$ est égale à $\ln(\det M)$ (on pourra commencer par le cas où M est diagonalisable).

3. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

   a) Démontrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle les deux matrices $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires.

   b) Démontrer qu'il existe deux suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers M et N, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$M_n N_n = N_n M_n .$$

4. Utiliser le résultat précédent pour prouver que, si M et N sont deux matrices de $\mathscr{B}$ telles que $MN = NM$ et $MN \in \mathscr{B}$, alors :

$$\mathrm{Log}(MN) = \mathrm{Log}(M) + \mathrm{Log}(N) .$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Le sujet est constitué d'un problème en 4 parties et d'un exercice indépendant du problème. On pourra choisir de commencer par traiter l'exercice.

Rappel de résultats

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés dans la suite sans qu'il soit nécessaire de les redémontrer.

1. **Inégalité de Markov :** pour toute variable aléatoire positive X possédant une espérance, et pour tout nombre réel $x > 0$, on a l'inégalité :
$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{x}.$$

2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** pour toute variable aléatoire réelle X possédant une espérance et une variance, et pour tout nombre réel $x > 0$, on a l'inégalité :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}.$$

3. **Identité pour l'espérance :** pour toute variable aléatoire positive X, on a
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,dx,$$
l'espérance de la variable aléatoire X étant définie si et seulement si l'intégrale ci-dessus est convergente.

4. **Espérance d'un produit :** si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes possédant chacune une espérance, alors la variable aléatoire produit XY possède également une espérance, et
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

5. **Loi faible des grands nombres :** on considère une variable aléatoire réelle X possédant une espérance, et, pour tout $N \geq 1$, et tout $\varepsilon > 0$, on pose
$$p(N, \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right),$$
où $X_1, \ldots, X_N$ désigne une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X. La loi faible des grands nombres affirme que l'on a alors :
$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{N \to +\infty} p(N, \varepsilon) = 0.$$

Problème

Cadre mathématique

Dans tout ce problème, X désigne une variable aléatoire positive, dont on note F_X la fonction de répartition, N désigne un entier vérifiant la condition $N \geq 1$, et $X_1, \dots, X_N$ désigne une famille de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X. On définit alors la variable aléatoire S_N de la manière suivante :

$$S_N = X_1 + \cdots + X_N.$$

L'objectif du problème est l'étude de diverses bornes pour des probabilités de la forme

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right).$$

Contexte actuariel

Aucune connaissance en assurance n'est nécessaire pour traiter ce problème. Cependant, la question étudiée se rattache à une problématique actuarielle concrète, brièvement esquissée ci-après.

Sur une période d'un an, un assureur prend à sa charge les montants des sinistres affectant une population de N assurés. En modélisant les montants individuels des sinistres associés à chacun des assurés par une famille de variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$, la somme S_N représente donc le montant total à la charge de l'assureur sur une période d'un an. En supposant que chacun des N assurés verse une prime d'assurance annuelle égale à x, le montant total des primes perçues pour une année est Nx, et l'événement $\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\}$ correspond à la situation défavorable où le montant des primes perçues est inférieur au montant des sinistres à prendre en charge. La valeur de la prime x est généralement fixée de manière à rendre suffisamment faible la probabilité d'un tel événement, et l'estimation de probabilités du type $\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)$ est donc une question pertinente dans le contexte de l'assurance.

Organisation

Les parties II et III peuvent être traitées indépendamment de la partie I, en admettant simplement le résultat de la question 8) et les définitions données dans la partie I. La partie IV peut être traitée indépendamment des parties I, II, III.

Notation exponentielle

Dans tout le problème, on utilise indifféremment les notations e^x et $\exp(x)$ pour désigner l'exponentielle d'un nombre réel x.

Partie préliminaire

1) On suppose que la variable aléatoire X possède une espérance. Montrer, en faisant appel à la loi des grands nombres, que pour tout $x > \mathbb{E}(X)$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) = 0.$$

Partie I – Bornes exponentielles : cadre général

Dans toute cette partie, on suppose que la variable aléatoire X vérifie la propriété suivante : il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que

$$\forall x \geq 0,\ \mathbb{P}(X > x) \leq a\exp(-bx). \tag{1}$$

2) Montrer, grâce à l'inégalité (1), que la variable aléatoire X possède une espérance. (On pourra utiliser l'identité pour l'espérance figurant dans la liste de résultats rappelés en page 2/10.)

3) Pour $t \in [0, +\infty[$ et $z \geq 1$, déduire de l'inégalité (1) une majoration de la probabilité $\mathbb{P}(\exp(tX) > z)$. Donner ensuite une majoration très simple de cette probabilité lorsque $z \in [0, 1[$.

4) En déduire que, pour tout $t \in [0, b[$, la variable aléatoire $\exp(tX)$ possède une espérance, et justifier que $\mathbb{E}(\exp(tX)) > 0$.

Définitions : pour tout $t \in [0, b[$, on définit $\Lambda(t)$ par $\Lambda(t) = \ln\big(\mathbb{E}(\exp(tX))\big)$.

5) Montrer que, pour tout $t \in [0, b[$, la variable $\exp(tS_N)$ possède une espérance donnée par

$$\mathbb{E}(\exp(tS_N)) = \exp\left(N\Lambda(t)\right).$$

Définitions : pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on définit les événements $A(N,x)$ et $B(N,x,t)$ par

$$A(N,x) = \left\{ \frac{S_N}{N} \geq x \right\}, \; B(N,x,t) = \left\{ \exp(-Ntx)\exp(tS_N) \geq 1 \right\}.$$

6) Montrer que, pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, on a l'inclusion entre événements

$$A(N,x) \subset B(N,x,t),$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}(A(N,x)) \leq \mathbb{P}(B(N,x,t)).$$

7) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, et tout $t \in [0,b[$,

$$\mathbb{P}(B(N,x,t)) \leq \exp\left(-N(tx - \Lambda(t))\right).$$

8) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \exp\left(-NI(x)\right), \tag{2}$$

où $I(x)$ désigne la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par $tx - \Lambda(t)$ lorsque t décrit l'intervalle $[0,b[$, autrement dit :

$$I(x) = \sup\{tx - \Lambda(t) \mid t \in [0,b[\}.$$

9) Au vu du résultat de la question 8), est-il possible d'avoir $I(x) > 0$ pour un nombre $x \in [0, \mathbb{E}(X)[$? (Justifier la réponse.)

Partie II – Bornes exponentielles : le cas de la loi exponentielle

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, où λ est un nombre réel strictement positif. On rappelle que cette loi est caractérisée par la densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

10) Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X > x)$ pour tout $x \geq 0$.

11) En déduire que l'inégalité (1) est satisfaite avec $a = 1$ et $b = \lambda$.

12) Pour $z \geq 0$ et $t \in [0,+\infty[$, calculer la valeur de $\mathbb{P}(\exp(tX) > z)$ en distinguant les cas $z \in [0,1[$ et $z \in [1,+\infty[$.

13) En déduire que, pour tout $t \in [0,\lambda[$, la variable aléatoire $\exp(tX)$ possède une espérance, et calculer la valeur de celle-ci.

14) En déduire, à l'aide de la question 8), que, pour tout $x \geq \frac{1}{\lambda}$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \exp\left(-N I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x)\right),$$

où l'on a posé :

$$I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x) = \lambda x - 1 - \ln(\lambda x).$$

15) Montrer que $I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x) > 0$ pour tout $x > \frac{1}{\lambda}$. Que vaut $I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x)$ lorsque $x = \frac{1}{\lambda}$?

Partie III – Bornes exponentielles : le cas de la loi de Bernoulli

Dans cette partie, on suppose que X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$. Autrement dit, la loi de X est caractérisée par :

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1-p & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

16) Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X > x)$ pour tout $x \geq 0$.

17) Montrer que, pour tout $b > 0$, on peut trouver un $a > 0$ tel que l'inégalité (1) soit satisfaite.

18) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

19) Calculer, pour tout $t \geq 0$, la valeur de $\Lambda(t)$.

20) En déduire à l'aide de la question 8) l'inégalité, valable pour tout $x \in]p,1[$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq I_{\mathscr{B}(p)}(x),$$

où

$$I_{\mathscr{B}(p)}(x) = x\ln(x/p) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right).$$

21) Montrer que $I_{\mathscr{B}(p)}(x) > 0$ pour tout $x \in]p,1[$. Comment se comporte $I_{\mathscr{B}(p)}(x)$ lorsque $x \searrow p$ et lorsque $x \nearrow 1$?

Partie IV - Un exemple de comportement polynomial

Dans cette partie, on suppose que la loi de X est caractérisée par une densité f_X dépendant d'un paramètre $\alpha \in]1,2[$, et possédant l'expression suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(x+1)^{-(\alpha+1)} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

22) Montrer que la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X est donnée, pour tout $x \geq 0$, par la formule :

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^\alpha}.$$

23) Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance, et calculer la valeur de celle-ci.

Définitions : pour $u \geq 0$, on définit la variable aléatoire $W_N(u)$ comme étant le nombre d'indices i entre 1 et N pour lesquels $X_i \geq u$. Autrement dit :

$$W_N(u) = \text{nombre d'éléments de l'ensemble } \{i \in \{1, \dots, N\} \mid X_i \geq u\}.$$

24) Quelle est la loi de $W_N(u)$? En déduire une expression simple de

$$\mathbb{P}(W_N(u) \geq 1).$$

25) Montrer que, pour tout $x > 0$ fixé, on a l'équivalent suivant lorsque $N \to +\infty$:

$$\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha}.$$

26) En déduire que, pour tout $x > 0$, et tout $\epsilon \in]0,1[$, il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \geq (1-\epsilon) x^{-\alpha} N^{1-\alpha}.$$

27) Une inégalité semblable à l'inégalité (2) obtenue à la question 8), dans laquelle on aurait $I(x) > 0$, est-elle possible dans le cas étudié ici ? (Justifier la réponse.)

Définitions : pour tout $u \geq 0$, on introduit la variable aléatoire $Y^{(u)}$ définie par

$$Y^{(u)} = \min(X, u).$$

Autrement dit,

$$Y^{(u)} = \begin{cases} X & \text{lorsque } X \leq u, \\ u & \text{lorsque } X > u. \end{cases}$$

28) Pour $u \geq 0$, calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y^{(u)}$.

29) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $Y^{(u)}$ possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y^{(u)}) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{(1+u)^{\alpha-1}}\right).$$

30) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $\left[Y^{(u)}\right]^2 = Y^{(u)} \times Y^{(u)}$, possède une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}\left(\left[Y^{(u)}\right]^2\right) = \frac{2}{2-\alpha}(1+u)^{2-\alpha} - \frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(1+u)^{\alpha-1}}\right).$$

31) En déduire que, pour tout $u \geq 0$, la variable aléatoire $Y^{(u)}$ possède une variance, et donner une expression de celle-ci.

Définitions : pour tout $u \geq 0$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on définit la variable aléatoire $Y_i^{(u)}$ par $Y_i^{(u)} = \min(X_i, u)$, puis l'on définit la variable aléatoire $R_N^{(u)}$ en posant

$$R_N^{(u)} = Y_1^{(u)} + \cdots + Y_N^{(u)}.$$

32) Montrer que la variable aléatoire $\frac{R_N^{(u)}}{N}$ possède une espérance et une variance, respectivement données par

$$\mathbb{E}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \mathbb{E}(Y^{(u)}), \ \mathbb{V}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N}.$$

33) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, et pour tout $x > \mathbb{E}(Y^{(u)})$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N\left(x - \mathbb{E}(Y^{(u)})\right)^2}.$$

34) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, on a l'inclusion entre événements :

$$\{W_N(u) = 0\} \subset \{S_N = R_N^{(u)}\}.$$

35) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, et pour tout $x > \mathbb{E}(Y^{(u)})$, on a l'inclusion entre événements :

$$\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\} \subset \{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right\}.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(W_N(u) \geq 1\right) + \mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right).$$

36) On considère à présent un nombre $x > \frac{1}{\alpha-1}$ fixé. En utilisant les résultats précédents avec $u = xN$, montrer que, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, il existe un entier $N_1 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq (1+\epsilon)x^{-\alpha}N^{1-\alpha}g(x),$$

où

$$g(x) := 1 + \frac{2}{(2-\alpha)\left(1 - \frac{1}{(\alpha-1)x}\right)^2}$$

37) Comparer les inégalités obtenues aux questions 26) et 36).

Exercice

Un assureur proposant des contrats d'assurance automobile utilise le modèle suivant. Deux profils de conducteurs sont pris en compte : les "bons conducteurs" (profil 1), et les "mauvais conducteurs" (profil 2). Pour un conducteur de profil donné $i \in \{1,2\}$, le nombre de sinistres annuel que l'assureur est amené à indemniser est modélisé par une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda_i)$ de paramètre λ_i. La différence entre les bons et les mauvais conducteurs se traduit par l'inégalité :

$$\lambda_1 < \lambda_2. \tag{3}$$

Par ailleurs, pour $i \in \{1,2\}$, on note ρ_i la probabilité pour qu'un assuré pris au hasard corresponde au profil i, et l'on suppose que $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$.

Dans la suite, on note D la variable aléatoire correspondant au nombre de sinistres annuel pour un assuré pris au hasard, et l'on note Π la variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2\}$ indiquant le profil de ce même assuré.

On rappelle la définition de la loi de Poisson : si X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$, on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On rappelle en outre les formules valables dans ce contexte :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

A) Pour $k \in \mathbb{N}$, expliciter la valeur de $\mathbb{P}(D = k | \Pi = 1)$ et de $\mathbb{P}(D = k | \Pi = 2)$.

B) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer la valeur de $\mathbb{P}(D = k)$ en fonction de $k, \lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.

C) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(D)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.

D) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(D^2)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.

E) En déduire une expression de la variance $\mathbb{V}(D)$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2$.

F) Comparer $\mathbb{V}(D)$ à la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2$.

G) Calculer $\mathbb{P}(\Pi = 1 | D = k)$ et $\mathbb{P}(\Pi = 2 | D = k)$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (C) : Économie

Durée : 4h

Exercice de Probabilités

Soit $\{B_n \,|\, n \in I\!N^*\} = B_1, B_2, B_3, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$, de Bernoulli de paramètre p : $I\!P(B_n = 1) = p = 1 - I\!P(B_n = 0)$.

Notons $S_0 := 0$, puis pour $n \in I\!N^*$: $S_n := B_1 + \cdots + B_n$.
Pour tout $\ell \in I\!N^*$, notons $N_\ell := \min\{n \in I\!N \,|\, S_n = \ell\}$ le premier entier n tel que $S_n = \ell$.

0) Quelle est la loi de S_n ?

1) Quelle est la loi de N_1 ? préciser sa moyenne et sa variance.

2) Calculer $I\!P(N_1 = j\,, N_2 = j + k)$, pour j, k quelconques dans $I\!N^*$.

3) Déduire que $N_2 - N_1$ est indépendante de N_1, et préciser sa loi.

4) Expliciter la loi de N_2.

5) Calculer l'espérance et la variance de N_2.

Fixons un entier $\ell \geq 2$ pour les trois questions suivantes.

6) Pour tous $j_1, \dots, j_\ell \in I\!N^*$, expliciter à l'aide des variables $B_1, \dots, B_{j_1+\cdots+j_\ell}$ l'événement $\{N_1 = j_1\} \cap \{N_2 - N_1 = j_2\} \cap \ldots \cap \{N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\}$, et en déduire sa probabilité.

7) Quelle est la loi de la variable aléatoire $N_\ell - N_{\ell-1}$?

8) Que peut-on dire de la suite des variables aléatoires : $N_1, N_2 - N_1, \dots, N_\ell - N_{\ell-1}$?

9) Calculer l'espérance et la variance de N_ℓ, pour ℓ quelconque dans $I\!N^*$.

10) Soient ℓ, k quelconques dans $I\!N^*$. Exprimer l'événement $\{N_\ell = k\}$ à l'aide de B_k et de S_{k-1}, puis calculer $I\!P(N_\ell = k)$.

11) Quel est le comportement de la suite N_ℓ / ℓ, lorsque ℓ tend vers l'infini ?

Exercice n^o 1 d'optimisation économique

Soit un individu dont la fonction d'utilité est la suivante : $U = XL_0$, où X est la quantité consommée d'un bien composite de prix P et L_0 est le nombre d'heures de loisir de l'individu. L'individu touche un salaire horaire W issu de son travail et perçoit en plus de celui-ci des revenus non salariaux (de capital) Y constants. L'état prélève un impôt sur les revenus du travail (t_1) ainsi qu'un impôt sur les revenus du capital (t_2). On appelle L le nombre d'heures de travail offert ($L + L_0 = 24$). On sait que $Y = 12$, $W = 3$ et $P = 1$.

1. Déterminez l'offre optimale de travail en absence d'impôt.

2. Déterminez l'offre optimale de travail lorsque le taux de prélèvement fiscal (sur les revenus salariaux et non salariaux) est de 33,33 %. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.

3. Déterminez l'offre de travail lorsque seul le travail est imposé au taux de 33,33%. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.

4. Dans le dernier cas, décomposez l'effet global de la fiscalité en un effet substitution et un effet revenu, sachant que $Y^* = 20,6$ est la solution de l'équation du second degré suivante : $(Y^*)^2 + 96\,Y^* - 2400 = 0$. Discutez les résultats obtenus.

Exercice n^o 2 d'optimisation économique

Soit une économie à 3 agents (ménages, entreprises et État) représentée par les relations suivantes : $T = T_0$, T étant la fonction d'imposition,

$C = C_0 + c_1 Y_d$, Y_d étant le revenu disponible après impôt et C la consommation,

$I = I_0$, I représentant l'investissement privé autonome des entreprises,

$G = G_0$, G représentant les dépenses publiques de l'État.

Les données sont les suivantes : $G_0 = I_0 = c_0 = T_0 = 20$; $c_1 = 0,8$.

1. Déterminez la production (revenu) d'équilibre sur le marché des biens et services.

2. Supposons que l'État augmente ses dépenses de 10. Quel est l'effet de cette relance sur la production et le solde budgétaire ?

3. Sachant que la production de plein emploi est égale à 300, déterminez le montant de la relance budgétaire nécessaire pour atteindre le plein emploi si l'État poursuit de plus un objectif d'équilibre budgétaire.

On suppose à présent l'introduction d'un marché monétaire représenté par les équations suivantes : $M^d = aY - b\,i$, M^d représentant la demande de monnaie,

$M^O = M^d$, M^O représentant l'offre réelle de monnaie de la Banque Centrale.

On suppose de plus que l'investissement privé des entreprises dépend du taux d'intérêt de la manière suivante : $I = I_0 - g\,i$, i représentant le taux d'intérêt et g la sensibilité de l'investissement au taux. On suppose enfin que l'État instaure un impôt proportionnel, de telle sorte que $T = tY + T_0$, t étant le taux d'imposition et T_0 le niveau d'imposition autonome.

4. Déterminez de manière littérale la production d'équilibre sur le marché des biens et services et sur le marché monétaire.

5. Déterminez de manière littérale l'effet d'une hausse du taux d'imposition sur la production d'équilibre.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de français

Durée : 2h

Ce texte doit être résumé en **200 mots** (au sens où l'entendent les typographes ; par exemple : *il n'est pas, c'est-à-dire, le plus grand,* comptent respectivement pour 4, 4, 3 mots). Une marge de plus ou moins dix pour cent est tolérée. Tout dépassement de cette marge est pénalisé. Le candidat doit indiquer sur sa copie les tranches de 50 mots ainsi que le nombre total de mots utilisés.

Montaigne suggère, dans un passage de l'*Apologie de Raimond Sebond*, une définition de la vérité philosophique aussi déconcertante que pertinente : « Je ne me persuade pas aisément qu'Epicure, Platon et Pythagore nous aient donné pour argent comptant leurs Atomes, leurs Idées et leurs Nombres. Ils étaient trop sages pour établir leurs articles de foi de chose si incertaine et si débatable. Mais, en cette obscurité et ignorance du monde, chacun de ces grands personnages s'est travaillé d'apporter une telle quelle image de lumière, et ils ont promené leur âme à des inventions qui eussent au moins une plaisante et subtile apparence : pourvu que, toute fausse, elle se pût maintenir contre les oppositions contraires. » En d'autres termes, la vérité énoncée par les philosophes, et leur vérité la plus aiguë, celle qui sert depuis des millénaires à désigner et à caractériser leur pensée, est en même temps une vérité dont aucun de ceux qui l'ont avancée ne serait disposé à se porter le moins du monde garant, ou « auteur », au sens du latin *auctor*. Je rappellerai brièvement, pour en revenir à l'étymologie latine du mot auteur, que le terme *auctor* signifie à la fois garant et producteur. Or voici que le producteur en question, je veux dire le philosophe, se montre des plus défiants à l'égard de ses propres et meilleurs produits : Pythagore ne croit pas aux nombres, Platon ne croit pas aux idées, Epicure ne croit pas aux atomes. Contrairement au fanatique, il possède assez de sagesse pour ne pas défendre à n'en vouloir démordre une vérité qu'il a certes énoncée mais dont il sait aussi, et probablement mieux que personne, à quel point elle est douteuse (...)

Le fait qu'un philosophe soit moins persuadé que quiconque de la vérité dont il se recommande peut sembler hautement paradoxal. Le fait est pourtant indubitable et tient à la nature même de la « vérité » philosophique. On peut naturellement et justement observer qu'il est dans la nature de toute vérité, quel qu'en soit le genre, d'être douteuse. Ainsi tout fait, si simple et si évident soit-il lors de son événement, devient-il incertain et vague dès que celui-ci, une fois passé, se trouve convoqué au tribunal de la justice ou de la mémoire collective. De même une vérité scientifique, quelque certaine qu'elle puisse paraître sur le moment, s'use-t-elle vite au contact des conceptions ultérieures qui l'interprètent d'autre façon, dans le cadre d'une théorie nouvelle qui en modifie radicalement les termes. Aussi n'y a-t-il point, à proprement parler, de « sciences exactes » (hormis les mathématiques, qui renoncent à toute vérité de fait et se contentent d'accorder des conclusions avec des prémisses) : tout comme une vérité historique, une vérité physique est à jamais sujette à caution et à révision. Il n'en reste pas moins que l'historien et le physicien évoquent des faits indubitables, même s'ils sont incapables d'en proposer une version certaine et définitive. Les interprétations de la Révolution française ou de la loi de la chute des corps sont et seront peut-être toujours plus ou moins controversées ; impossible cependant de mettre leur fait en doute, de penser par exemple que la Révolution française n'a pas eu lieu, ou que la chute des corps ne correspond à rien d'observable dans la nature. L'une et l'autre sont vraies : la première quand elle a eu lieu, la seconde quand elle a été conçue. Elles sont vraies dans la mesure où elles ont été vraies en leur temps et peuvent ainsi se recommander, comme dirait Hegel, d'un certain « moment » de vérité. Or le propre des vérités philosophiques, à la différence des autres genres de vérité, est de ne pouvoir jamais se recommander d'un semblable « moment de vérité ». Dans la mesure où la philosophie est une science des problèmes insolubles, ou du moins des problèmes non résolus comme disait Brunschvicg, les solutions qu'elle apporte à ses propres problèmes sont nécessairement et par définition douteuses, – à tel point qu'une vérité qui serait certaine cesserait par là même d'être une vérité philosophique, et qu'un philosophe qui serait persuadé de la vérité qu'il propose cesserait du même coup d'être un philosophe (encore qu'il puisse lui arriver, en revanche, d'être très raisonnablement persuadé de la fausseté des thèses qu'il critique). Ce principe d'incertitude, selon qu'il est respecté ou non, peut servir d'ailleurs de critère pour départager véritables et faux philosophes : un grand penseur est toujours des plus réservés quant à la valeur des vérités qu'il suggère, alors qu'un philosophe médiocre se reconnaît, entre autres choses, à ceci qu'il demeure toujours persuadé de la vérité des inepties qu'il énonce.

On peut naturellement se demander en quoi consiste l'intérêt d'une vérité philosophique nécessairement promise au doute et à l'incertitude, et par conséquent privée de tous les attributs traditionnels de la vérité. Il est à remarquer ici, tout d'abord, que l'intérêt d'une idée ne s'est jamais confondu avec la connaissance assurée de sa vérité, pas plus que l'intérêt d'un fait ne se confond avec la connaissance de sa nature. Ainsi le fait de la sexualité, et l'aveu universel de son intérêt, s'est-il toujours accommodé sans dommage de son caractère hautement obscur et incompréhensible, dont témoignent en toute sincérité ceux qui ont le plus essayé d'en percer les mystères, tels Freud, Georges Bataille, Lacan et avant eux Schopenhauer. D'où l'on peut justement déduire que, comme toute vérité profonde, toute réalité intéressante est foncièrement ambiguë, pour ne pas dire paradoxale : étant à la fois reconnue par tout le monde et inconnue de chacun en particulier. Mais l'intérêt principal d'une vérité philosophique consiste en sa vertu négative, je veux dire sa puissance de chasser des idées beaucoup plus fausses que la vérité qu'elle énonce *a contrario*. Vertu critique qui, si elle n'énonce par elle-même aucune vérité claire, parvient du moins à dénoncer un grand nombre d'idées tenues abusivement pour vraies et évidentes. Il en va un peu de la qualité des vérités philosophiques comme de celle des éponges qu'on utilise au tableau noir et auxquelles on ne demande rien d'autre que de réussir à bien effacer. En d'autres termes, une vérité philosophique est d'ordre essentiellement hygiénique : elle ne procure aucune certitude mais protège l'organisme mental contre l'ensemble des germes porteurs d'illusion et de folie. Et d'autre part cette incertitude même, inhérente aux vérités philosophiques, qui en fait si l'on veut la faiblesse, en fait aussi la force. Le travail du doute n'a en effet de pouvoir que sur ce qui se donne pour certain et assuré ; il est en revanche totalement inefficace contre ce qui se présente de soi-même comme incertain et douteux. Car une vérité incertaine est aussi et nécessairement une vérité *irréfutable* : le doute ne pouvant rien contre le doute. (...)

Je remarquerai en passant que le caractère incertain des plus profondes vérités philosophiques permet d'expliquer le fait, apparemment paradoxal et énigmatique, que des propositions formellement contraires et même contradictoires puissent être tenues pour également pertinentes. Rien de plus juste, par exemple, que ce que disent respectivement de l'amour Platon dans *Le banquet* et Lucrèce dans le *De rerum natura*, – mais rien aussi de plus diamétralement opposé. Cette coexistence pacifique des vérités contraires s'explique, non par le fantasme hégélien d'un savoir absolu réconciliant en bout de course l'ensemble de tous les énoncés philosophiques, mais par le caractère incertain de chacun de ces énoncés. Considérées comme définitivement acquises, les vérités philosophiques s'excluent nécessairement dès lors qu'elles ne parlent pas de même. Considérées en revanche comme toujours douteuses et approximatives, elle se tolèrent réciproquement.

Clément Rosset, *Le principe de cruauté* « Le principe d'incertitude », *Editions de Minuit*, 1988.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve d'anglais

Durée : 2h

1 Translate the following text into French

Companies are starting to open up about their environmental risks.

Until the late 2000s, most firms saw the environment as either irrelevant or a bit of a nuisance. Either way, they did not publish much about it. That has changed drastically. According to CDP, a group that collects environmental data on behalf of investors, more than half the companies listed on the world's 31 largest stock exchanges publish some environmental data.

The British government requires large quoted companies based in Britain to disclose their carbon-dioxide emissions to shareholders. And the European Union plans to make firms with more than 500 employees publish environmental and social data in their management accounts — though this proposal, like many emanating from Brussels, may sit gathering dust for years.

But by far the biggest influence on firms comes from investors. They are gathering together and demanding better data. Investors' main concern is that climate change — or policies to avert it — will damage the firms they invest in.

As Natasha Lamb, head of equity research at Arjuna, puts it, "Shareholder value is at stake".

Adapted from Economist.com/blogs/schumpeter March 29th 2014.

2 Summarize this text in English in 180 words (+/- 10%)

Indicate the number of words on your exam paper.

http://www.nytimes.com/2013/11/28/opinion/digital-passivity.html
Digital Passivity
By JARON LANIER
Published: November 27, 2013

I fear that 2013 will be remembered as a tragic and dark year in the digital universe, despite the fact that a lot of wonderful advances took place.

It was the year in which tablets became ubiquitous and advanced gadgets like 3-D printers and wearable interfaces emerged as pop phenomena; all great fun. Our gadgets have widened access to our world. We now regularly communicate with people we would not have been aware of before the networked age. We can find information about almost anything, any time.

But 2013 was also the year in which we became aware of the corner we've backed ourselves into. We learned — through the leaks of Edward J. Snowden, the former U.S. National Security Agency contractor, and the work of investigative journalists — how much our gadgets and our digital networks are being used to spy on us by ultra-powerful, remote organizations. We are being dissected more than we dissect.

I wish I could separate the two big trends of the year in computing — the cool gadgets and the revelations of digital spying — but I cannot.

Back at the dawn of personal computing, the idealistic notion that drove most of us was that computers were tools for leveraging human intelligence to ever-greater achievement and fulfillment. This was the idea that burned in the hearts of pioneers like Alan Kay, who a half-century ago was already drawing illustrations of how children would someday use tablets.

But tablets do something unforeseen: They enforce a new power structure. Unlike a personal computer, a tablet runs only programs and applications approved by a central commercial authority. You control the data you enter into a PC, while data entered into a tablet is often managed by someone else.

Steve Jobs, who oversaw the introduction of the spectacularly successful iPad at Apple, declared that personal computers were now "trucks" — tools for working-class guys in T-shirts and visors, but not for upwardly mobile cool people. The implication was that upscale consumers would prefer status and leisure to influence or self-determination.

I am not sure who is to blame for our digital passivity. Did we give up on ourselves too easily? This would be bleak enough even without the concurrent rise of the surveillance economy. Not only have consumers prioritized flash and laziness over empowerment; we have also acquiesced to being spied on all the time.

The two trends are actually one. The only way to persuade people to voluntarily accept the loss of freedom is by making it look like a great bargain at first.

Consumers were offered free stuff (like search and social networking) in exchange for agreeing to be watched. Vast fortunes can be made by those who best use the personal data you voluntarily hand them. Instagram, introduced in 2010, had only 13 employees and no business plan when it was bought by Facebook less than two years later for $1 billion.

One can argue that network technology enhances democracy because it makes it possible, for example, to tweet your protests. But complaining is not yet success. Social media didn't create jobs for young people in Cairo during the Arab Spring.

To be free is to have a private zone in which you can be alone with your thoughts and experiments. That is where you differentiate yourself and grow your personal value. When you carry around a smartphone with a GPS and camera and constantly pipe data to a computer owned by a corporation paid by advertisers to manipulate you, you are less free. Not only are you benefiting the corporation and the advertisers, you are also accepting an assault on your free will, bit by bit.

The rise of this consumer-surveillance economy is the uncomfortable and ironic backdrop to the outrage about the N.S.A. snooping. We feel violated. We don't know who has been reading our most tender emails. But why then were we pouring all our personal information into remote corporations to begin with?

Unless we resist giving away our information in exchange for a few free treats, we can't expect to prevent the government from dipping into that same data. 2013 was a year when our noses were rubbed in our own passivity. Citizens in the information age have to learn to be more than just consumers; they have to learn to be a match for their own inventions.