Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve de mathématiques

Éléments de correction

BECEAS 2014

1

Partie I :

1/ . $F \subset E$, E est un $\mathbb{C}$-e.v et $(0)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient clairement à F.

. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(u,v) \in F^2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty\ (\text{resp}^t\ -\infty)}{=} o\left(|n|^{-p}\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty\ (\text{resp}^t\ -\infty)}{=} o\left(|n|^{-p}\right)$, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il est légitime d'introduire $(U,V) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant U \Rightarrow |u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|+1} \cdot |n|^{-p} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant V \Rightarrow |v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \cdot |n|^{-p} \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant \max\{U,V\} \quad \left|(\lambda.u+v)_n\right| \leqslant \left(\dfrac{|\lambda|\,\varepsilon}{2|\lambda|+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |n|^{-p}$

et donc $\forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant \max\{U,V\} \quad \left|(\lambda.u+v)_n\right| \leqslant \varepsilon \cdot |n|^{-p}$

Il en résulte que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad (\lambda.u+v)_n \underset{n\to+\infty\ (\text{resp}^t\ -\infty)}{=} o\left(|n|^{-p}\right)$, soit que $(\lambda.u+v) \in F$.

"Par caractérisation usuelle", F est un sev. de E.

2/ Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, $\forall p \in \mathbb{N} \quad \dfrac{z^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{-p})$.

"Par théorème de composition", $\dfrac{z^{-n}}{(-n)!} \underset{n\to-\infty}{=} o\left((-n)^{-p}\right)$ et donc, finalement, $\left(\dfrac{z^{|n|}}{|n|!}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in F$.

3/ a/ Supposons que : $\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant n_0$ et $P(n) = 0$.

On construit alors aisément une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \quad k<l \Rightarrow |r_k| < |r_l| \\ \forall k \in \mathbb{N} \ P(r_k) = 0. \end{array} \right.$$

P admettant alors une infinité de racines, il est nul ; ce qui contredit l'énoncé.

On en déduit alors que : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| \geqslant n_0 \Rightarrow P(n) \neq 0$.

b/ . Supposons que $\left(P(n).\, z^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. En particulier, $P(n).\, z^n \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$

Vu que $P \neq 0$, il est clair que $\left(1/P(n)\right)_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geqslant n_0}}$ est bornée ; par conséquent

$z^n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ et donc $|z| < 1$.

(2)

• Supposons que $z \neq 0$ et $|z|<1$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Il est clair que $\left|\dfrac{P(n+1).z^{n+1}.(n+1)^p}{P(n).z^n.n^p}\right| \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_0}}{\longrightarrow} |z|$.

Or $|z|<1$; il est donc licite d'introduire un élément m de $\mathbb{N}^*$ tel que

$m > n_0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \Rightarrow \left|\dfrac{P(n+1).z^{n+1}.(n+1)^p}{P(n).z^n.n^p}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{2}$

(car $\dfrac{1+|z|}{2} > |z|$).

Par un raisonnement aisé par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq m \Rightarrow |P(n).z^n.n^p| \leq |P(m).z^m m^p| . \left(\frac{1+|z|}{2}\right)^{n-m}$$

Or $0 \leq \dfrac{1+|z|}{2} < 1$, donc $\left(\dfrac{1+|z|}{2}\right)^{n-m} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En découle le fait que :

$|P(n).z^n.n^p| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $P(n).z^n \underset{n \to +\infty}{=} o(n^{-p})$.

Une démonstration analogue prouverait que, de même, $P(n)\, z^{|n|} \underset{n \to -\infty}{=} o(|n|^{-p})$.

Si $z=0$, il est clair que le résultat est vrai.

L'équivalence logique est alors prouvée.

4a/ * Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$, $f \circ (id_{\mathbb{R}} + T) = f$. Or f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; de même $id_{\mathbb{R}}+T$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; d'après le "théorème de dérivation d'une fonction composée", $f' = f' \circ (id_{\mathbb{R}}+T) \times 1$. Du coup, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(x+T)$. Il en résulte que $f' \in C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

* $T.c_n(f') = \displaystyle\int_0^T \left(f'(t).e^{-in\omega t}\right).dt = \left[f(t).e^{-in\omega t}\right]_0^T + in\omega . \int_0^T \left(f(t) e^{-in\omega t}\right) dt$

$= T.in.\omega.c_n(f)$ car f et $e^{-in\omega .}$ sont T-périodiques et donc

$$\left[f(t).e^{-in\omega t}\right]_0^T = 0$$

le résultat en découle.

b/ Si $f \in C^\infty_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, grâce à a/, on montrerait aisément par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad c_n(f) = (i.n.\omega)^{-(p+1)}. c_n(f^{(p+1)})$$

③

Or $f^{(p)}$ étant bornée (car T-périodique), $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $|c_n(f)| \leq \frac{\max |f^{(p+1)}|}{(|n|.\omega)^{p+1}}$

On en conclut que : $\forall p \in \mathbb{N}$ $c_n(f) \underset{\substack{n \to +\infty \\ (\text{resp } -\infty)}}{=} o\left(|n|^{-p}\right)$

et donc que $\left(c_n(f)\right)_{n \in \mathbb{Z}} \in F$.

4

Partie II :

5/ a) Soit $c\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |f(y)-f(x)|\leqslant c.|y-x|^\alpha$.

Soit $x_0\in\mathbb{R}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\} \quad \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant c.|x-x_0|^{\alpha-1}$

Vu que $\alpha>1$, $\quad \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} |x-x_0|^{\alpha-1}=0$. Du coup, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$

Il en résulte que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0)=0$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=0_{\mathbb{K}^\mathbb{R}}$.

b/ D'après a/, si $f\in H^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$, f est constante. Il est clair que les applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ sont α-holdériennes et même T-périodiques et α-holdériennes. Il ressort de tout cela que les ensembles recherchés sont les ensembles des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

6/ . Soit $f\in H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$. f est T-périodique. Soit $c\in\mathbb{R}^+$ tel que :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |f(y)-f(x)|\leqslant c.|y-x|^\alpha$. Vu que $\alpha>0$, si $x_0\in\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} |x-x_0|^\alpha=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \big(f(x)-f(x_0)\big)=0$ donc f est continue en x_0

"Par généralisation", f est continue. Du coup, $H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})\subset C_T^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

. $C_T^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev. et $0_{\mathbb{K}^\mathbb{R}}\in H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (évident).

. Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(f,g)\in H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$. $\lambda.f+g$ est T-périodique

Soit $(c,d)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ tel que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} |f(y)-f(x)|\leqslant c.|y-x|^\alpha \\ |g(y)-g(x)|\leqslant d.|y-x|^\alpha \end{cases}$

Il est clair que $(|\lambda|.c+d)\in\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$|(\lambda.f+g)(y)-(\lambda.f+g)(x)|\leqslant|\lambda|.|f(y)-f(x)|+|g(y)-g(x)|$

$\leqslant|\lambda|.c.|y-x|^\alpha+d.|y-x|^\alpha=(|\lambda|.c+d).|y-x|^\alpha$.

Il en résulte que $(\lambda.f+g)\in H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

$H_T^\alpha(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est donc bien un sev. de $C_T^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$

5

. Avec les hypothèses et notations précédentes, comme f et g sont bornées (car continues et périodiques), il est licite d'introduire $F = \max|f|$ et $G = \max|g|$

$(F, G) \in \mathbb{R}_+^2$ et, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left|(f\times g)(y) - (f\times g)(x)\right| = \left|f(y)\cdot\left[g(y) - g(x)\right] + g(x)\cdot\left[f(y) - f(x)\right]\right|$$

$$\leq F.\ |g(y) - g(x)| + G\ |f(y) - f(x)| \leq (F.d + G.c).|y-x|^{\alpha}$$

D'où, finalement, $(f\times g) \in H_T^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. $H_T^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est donc $\times$-stable.

7/ a/ • Si $|y-x| \leq T$, il est clair que "x convient" car $\begin{cases} x \equiv x\,[T] \\ |y-x| \leq T \\ |y-x| \leq |y-x| \end{cases}$

• Sinon, soient $e = E\left(\dfrac{y-x}{T}\right)$ et $\tilde{x} = x + e.T$

Il est acquis que $\tilde{x} \equiv x\,[T]$. Comme $\dfrac{y-x}{T} - 1 \leq e \leq \dfrac{y-x}{T}$,

$y - x - T \leq eT \leq y - x$ donc $0 \leq y - \tilde{x} \leq T$ donc $|y - \tilde{x}| \leq T \leq |y-x|$

et donc "$\tilde{x}$ convient encore".

b/ Soit $f \in H_T^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Soit $c \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ |f(y) - f(x)| \leq c.|y-x|^{\alpha}$

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(\tilde{x})| \leq c.|y-\tilde{x}|^{\alpha} \leq c.\,|y-\tilde{x}|^{\beta}.\,|y-\tilde{x}|^{\alpha-\beta}$$

$$\leq c.\left(T^{\alpha-\beta}.\,|y-\tilde{x}|^{\beta}\right) \leq \left(c.\,T^{\alpha-\beta}\right)|y-x|^{\beta} \quad (\text{car } \alpha - \beta \geq 0)$$

Vu que $\left(c.\,T^{\alpha-\beta}\right) \in \mathbb{R}_+$, "par généralisation", $f \in H_T^{\beta}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Il résulte de tout cela que : $H_T^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \subset H_T^{\beta}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Partie III : 5

8/ Soit $f :]0, T/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^\alpha$. Il est clair que f est une application continue, qui converge en 0 vers 0 (car $\alpha > 0$). Il est donc licite de la prolonger "par parité" en l'application continue

$$\overline{f} : [-T/2, T/2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto |t|^\alpha$$

Comme, de plus, $\overline{f}(-T/2) = \overline{f}(\frac{T}{2})$, $\overline{f}$ admet un prolongement T-périodique continu sur $\mathbb{R}$.

9/ a/ Soit $\varphi :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto (t-1)^\alpha - (t^\alpha - 1)$. Il est clair que $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} \varphi(t) = 0$

et que φ est dérivable et que : $\forall t \in]1, +\infty[\ \varphi'(t) = \alpha(t-1)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1}$
$= \alpha\left((t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right)$. Or, vu que $\alpha \in]0,1[$, $\alpha - 1 < 0$ donc $\cdot^{\alpha-1}$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall t \in]1, +\infty[\ \varphi'(t) \geq 0$. φ est donc croissante et, vu que $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t > 1}} \varphi(t) = 0$, $\varphi \geq 0$. D'où le résultat.

b/ $*$ Soit $(u,v) \in [0, T/2]^2$ tel que $u \leq v$.
- si $u = 0$, $|f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| = |v^\alpha - 0^\alpha| = v^\alpha \leq (v-u)^\alpha$
- sinon : $\frac{v}{u} \in]1, +\infty[$ donc $\left(\frac{v}{u}\right)^\alpha - 1 \leq \left(\frac{v}{u} - 1\right)^\alpha$ et donc,

vu que $u^\alpha > 0$, $v^\alpha - u^\alpha \leq (v-u)^\alpha$.

On en déduit aisément que : $f_\alpha\big|_{[0,T/2]} \in H^\alpha([0, T/2], \mathbb{R})$

De même, on montrerait aisément que $f_\alpha\big|_{[\frac{T}{2}, T]} \in H^\alpha\left(\left[\frac{T}{2}, T\right], \mathbb{R}\right)$

$*$ Soit $(u,v) \in [0,T]^2$ tel que $u \leq \frac{T}{2} \leq v$. D'après ce qui précède :

$$|f_\alpha(v) - f_\alpha(u)| \leq \left|f_\alpha(v) - f_\alpha\left(\tfrac{T}{2}\right)\right| + \left|f_\alpha\left(\tfrac{T}{2}\right) - f_\alpha(u)\right| \leq \left|v - \tfrac{T}{2}\right|^\alpha + \left|\tfrac{T}{2} - u\right|^\alpha$$

$= \left(v - \frac{T}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{T}{2} - u\right)^\alpha$. Supposons, par exemple, que $v - \frac{T}{2} \leq \frac{T}{2} - u$.

(7)

$$\left|f_\alpha(v)-f_\alpha(u)\right| \leq 2\cdot\left(\frac{T}{2}-u\right)^2 \leq 2\cdot(v-u)^\alpha$$

Résulte de tout ce qui précède que :

$$\forall (u,v)\in[0,T]^2 \quad \left|f_\alpha(v)-f_\alpha(u)\right| \leq 2\cdot|v-u|^\alpha$$

soit que $\quad f_\alpha\big|_{[0,T]} \in H^\alpha([0,T],\mathbb{R})$.

c/ * Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(\tilde{x},\tilde{y})\in[0,T]^2$ tel que : $\begin{cases}\tilde{x}\equiv x\,[T]\\ \tilde{y}\equiv y\,[T]\\ |\tilde{y}-\tilde{x}|\leq|y-x|\end{cases}$

(Cela est licite d'après la question 9/a/). D'après b/ :

$$\left|f_\alpha(y)-f_\alpha(x)\right| = \left|f_\alpha(\tilde{y})-f_\alpha(\tilde{x})\right| \leq |\tilde{y}-\tilde{x}|^\alpha \leq |y-x|^\alpha \quad (\text{car } \alpha>0)$$

f_α est donc un élément de $H^\alpha_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

* Supposons que $f_\alpha\in H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $c\in\mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \left|f_\alpha(y)-f_\alpha(x)\right| \leq c\cdot|y-x|^\beta$$

En particulier, $\forall t\in\left]0,\frac{T}{2}\right] \quad \left|f_\alpha(t)-f_\alpha(0)\right| \leq c\cdot|t-0|^\beta$

donc $\forall t\in\left]0,\frac{T}{2}\right] \quad t^\alpha\leq c\cdot t^\beta$ et donc $\forall t\in\left]0,T/2\right] \quad t^{\alpha-\beta}\leq c$

Or $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{\alpha-\beta}=+\infty$ car $\beta>\alpha$. Cela relève donc d'une contradiction.

Il en résulte, finalement, que : $\quad f_\alpha\notin H^\beta_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

10/ Soit $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}\\ u\longmapsto u^{\alpha-2}\cdot(1-\cos u)\end{array}$. Il est clair que f est une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}^+$. De plus, vu que $1-\cos u \underset{\substack{u\to 0\\ u>0}}{\sim} \frac{u^2}{2}$, $f(u)\underset{\substack{u\to 0\\ u>0}}{\sim} u^\alpha$.

~~Comme~~ $\alpha>0$, $\cdot^\alpha$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ et donc f l'est aussi.

Par ailleurs, $f(u)\underset{u\to+\infty}{=}O\left(u^{\frac{\alpha-3}{2}}\right)$ (costé). Comme $\frac{\alpha-3}{2}<-1$, $\cdot^{\frac{\alpha-3}{2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. f est donc intégrable sur $]1,+\infty[$: I_α est donc bien définie.

8

De plus, comme f est continue et positive, $I_\alpha = 0 \Rightarrow f = 0$. Vu que $f(1) \neq 0$, $I_\alpha \neq 0$ et donc, finalement, $I_\alpha > 0$.

11/ a/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f_α est paire : $C_n(f) = \frac{2}{T}.\int_0^{T/2}\left(u^\alpha \cos(n\omega u)\right).du$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left[\left(\frac{v}{n\omega}\right)^\alpha.\cos v.\frac{1}{n\omega}\right]dv = \frac{2}{T(n\omega)^{\alpha+1}}.\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left(v^\alpha.\cos v\right)dv$$

"$v = n\omega u$"

$$= \frac{2}{T.(n\omega)^{\alpha+1}}\left\{\cancel{\left[v^\alpha.\sin v\right]_0^{n\omega\frac{T}{2}}} - \alpha\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left(v^{\alpha-1}.\sin v\right)dv\right\}$$

$$= \frac{-2\alpha}{T.(n\omega)^{\alpha+1}}.\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left(v^{\alpha-1}.\sin v\right)dv = \frac{-2\alpha}{T.(n\omega)^{\alpha+1}}.\left\{\left[v^{\alpha-1}.(1-\cos v)\right]_0^{n\omega\frac{T}{2}} - (\alpha-1)\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left[v^{\alpha-2}.(1-\cos v)\right]dv\right\}$$

Or $v^{\alpha-1}.(1-\cos v) \xrightarrow[v>0]{v\to 0} 0$ car $\begin{cases} v^{\alpha-1}.(1-\cos v) \underset{\substack{v\to 0\\ v>0}}{\sim} \frac{v^{\alpha+1}}{2} \\ \text{et} \\ \alpha+1 > 1 \end{cases}$

D'après 10/, $\int_0^{n\omega\frac{T}{2}}\left[v^{\alpha-2}.(1-\cos v)\right).dv \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_\alpha$ (car $n\omega\frac{T}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Il en résulte donc que : $C_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\alpha.(\alpha-1)}{T.(n\omega)^{\alpha+1}}.I_\alpha$.

b/ D'après a/, $C_n(f).n^{\alpha+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et donc, a fortiori,

si $p \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant \alpha+2$, alors $C_n(f)\,n^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

On en conclut que : $\left(C_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \notin F$.

9

Partie IV :

12/ a) Il est clair que $(x_k)_{k\in[\![0,n+1]\!]}$ croît, que $x_0=0$ et $x_{n+1}=1$.
Il s'agit donc bien d'une subdivision de $[0,1]$.

b/ • $\varphi\in C^0(]0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi(x)\xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$. D'où : $\overline{\varphi}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto\begin{cases}\varphi(x) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

est un prolongement continu de φ à $[0,1]$.
En utilisant la question a/,

$$V_x(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}|\varphi(x_{k+1})-\varphi(x_k)|\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}|\overline{\varphi}(x_{k+1})-\overline{\varphi}(x_k)|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|x_{k+1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2x_{k+1}}\right)-x_k\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2x_k}\right)\right|=\sum_{k=1}^{n-1}\left|x_{k+1}\cdot\cos((n-k)\pi)-x_k\cdot\cos((n+1-k)\pi)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left|x_{k+1}\cdot(-1)^{n-k}-x_k\cdot(-1)^{n+1-k}\right|=\sum_{k=1}^{n-1}|x_{k+1}+x_k|\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}x_k$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=n}^{n-1}\frac{1}{n+1-k}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty.$$

Il en résulte que $\{V_s(f),\ s\in S_{[0,1]}\}$ n'est pas majoré et donc que $\overline{\varphi}$ n'est pas à variation bornée.

13/ a/ • Supposons que f est une application croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $x=(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}\in S_{[a,b]}$. Vu que f croît,

$$V_x(f)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1})-f(x_k)\big)=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a).$$

On en conclut aisément que $f\in VB([a,b],\mathbb{R})$ et que $V_{[a,b]}(f)=f(b)-f(a)$.
• Si f décroît, $-f$ croît donc $-f$ est à variation bornée et donc f l'est (d'après la définition de "variation bornée").

b/ • Soit $f\in H^1([a,b],\mathbb{K})$. Soit $c\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall(x,y)\in[a,b]^2\ |f(y)-f(x)|\leqslant c|y-x|$
Avec les hypothèses précédentes, $V_x(f)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left(c\cdot|x_{k+1}-x_k|^1\right)=c\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$
$=c\cdot(b-a)$. Donc f est à variation bornée.
• Si $f\in C^1([a,b],\mathbb{K})$, d'après le théorème des accroissements finis,
$$\forall(x,y)\in[a,b]^2\quad |f(y)-f(x)|\leqslant\max|f'|\cdot(b-a)$$

15

D'après ce qui précède, $f \in H^1([a,b],\mathbb{K})$. Il en résulte donc que :

$$C^1([a,b],\mathbb{K}) \subset VB([a,b],\mathbb{K}).$$

14/ a/ . $VB([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^{[a,b]}$, $\mathbb{K}^{[a,b]}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. et $0_{\mathbb{K}^{[a,b]}}$ est trivialement à variation bornée.

. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(f,g) \in \left(VB([a,b],\mathbb{K})\right)^2$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in S_{[a,b]}$.

$$V_x(\lambda.f+g) = \sum_{k=0}^{n-1} \left|(\lambda.f+g)(x_{k+1}) - (\lambda.f+g)(x_k)\right| \leq |\lambda| . \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|$$

$$= |\lambda| . V_x(f) + V_x(g) \leq |\lambda| . V_{[a,b]}(f) + V_{[a,b]}(g).$$

Il en résulte que $\left\{V_x(\lambda.f+g),\ x \in S_{[a,b]}\right\}$ est majoré et donc que $(\lambda.f+g) \in VB([a,b],\mathbb{K})$.

On déduit de tout cela que $VB([a,b],\mathbb{K})$ est un sev. de $\mathbb{K}^{[a,b]}$.

b/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in S_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right]}$.

$$V_x(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\tilde{f}(x_{k+1}) - \tilde{f}(x_k)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(\lambda.x_{k+1}+\mu) - f(\lambda.x_k+\mu)\right|$$

Or $(\lambda.x_k+\mu)_{k \in [\![0,n]\!]} \in S_{[a,b]}$ donc $V_x(\tilde{f}) \leq V_{\lambda.x+\mu}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$.

"Par généralisation", $\tilde{f}$ est à variation bornée et : $V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right]}(\tilde{f}) \leq V_{[a,b]}(f)$.

En remarquant que $\forall t \in \left[\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right]$ $f(t) = \tilde{f}\left(\frac{t-\mu}{\lambda}\right)$ et que $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^+$, on en déduirait de même que : $V_{[a,b]}(f) \leq V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right]}(\tilde{f})$.

Il s'en déduit que : $V_{[a,b]}(f) = V_{\left[\frac{a-\mu}{\lambda}, \frac{b-\mu}{\lambda}\right]}(\tilde{f})$.

15/ . Supposons que f est à variation bornée. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une subdivision de $[a,c]$. Soient $x_{n+1} = b$ et $\tilde{x} = (x_k)_{k \in [\![0,n+1]\!]}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(\tilde{x}_{k+1}) - f(\tilde{x}_k)\right| \leq V_{[a,b]}(f).$$

(10)

donc $f|_{[a,c]} \in VB([a,c],\mathbb{K})$. De même, on prouverait que :

$$f|_{[c,b]} \in VB([c,b],\mathbb{K})$$

o Supposons que $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[b,c]}$ sont à variation bornée.

Soit $g : \begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a,c] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}\end{array}$ et $d : \begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [a,c[\\ f(x) \text{ sinon.} \end{cases}\end{array}$

Il est clair que g et d sont à variations bornées (car $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ le sont) et que, de plus, $\begin{cases} V_{[a,b]}(g) = V_{[a,c]}(f|_{[a,c]}) \\ \\ V_{[c,b]}(d) = V_{[c,b]}(f|_{[c,b]}) \end{cases}$

Vu que $f = g+d$, d'après 14/a), $f \in VB([a,b],\mathbb{K})$.

On montrerait aisément, en utilisant ce qui précède que :

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f).$$

16/ a). $\left| \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left((f(t) - f(x_k)).e^{-in\omega t} \right) dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(|f(t) - f(x_k)|.1 \right) dt$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} V_{[x_{k-1},x_k]}(f) = \sum_{k=1}^{K} \left[V_{[x_{k-1},x_k]}(f).(x_k - x_{k-1}) \right]$$

Car, si $k \in [\![1,K]\!]$ et $t \in [x_{k-1},x_k]$ $(x_{k-1},t,x_k) \in S_{[x_{k-1},x_k]}$.

• $\left| \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_k)\, e^{-in\omega.t} \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{K} \left(f(x_k) \left[\dfrac{e^{-in\omega\cdot}}{-in\omega} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \right) \right|$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \left| \sum_{k=1}^{K} \left[f(x_k).\left(e^{-in\omega x_k} - e^{-in\omega x_{k-1}}\right) \right] \right|$$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^{K} \left(f(x_k) . e^{-in\omega x_k} \right) - \sum_{k=1}^{K} \left(f(x_k) . e^{-in\omega x_{k-1}} \right) \right| \quad (12)$$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \left| \sum_{k=1}^{K} \left(f(x_k) . e^{-in\omega x_k} \right) - \sum_{k=0}^{K-1} \left(f(x_{k+1}) . e^{-in\omega x_k} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \cdot \left| \sum_{k=1}^{K-1} \left(\left(f(x_k) - f(x_{k+1}) \right) . e^{-in\omega x_k} \right) + f(x_K) . e^{-in\omega x_K} - f(x_1) . e^{-in\omega . 0} \right|$$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \left| \sum_{k=1}^{K-1} \left[\left(f(x_k) - f(x_{k+1}) \right) . e^{-in\omega x_k} \right] + f(T) e^{-in\omega T} - f(x_1) . 1 \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|n|.\omega} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K-1} \left| f(x_k) - f(x_{k+1}) \right| + \left| f(T) - f(x_1) \right| \right]$$

$$= \frac{1}{|n|.\omega} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K-1} \left| f(x_k) - f(x_{k+1}) \right| + \left| f(x_1) - f(0) \right| \right] \leqslant \frac{1}{|n|.\omega} \cdot V_{[0,T]}(f).$$

b/ Du coup, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k \in [\![0,K]\!]} \in \mathcal{S}_{[0,T]}$,

$$T . |c_n(f)| = \left| \int_0^T \left(f(t) . e^{-in\omega t} \right) . dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(t) e^{-in\omega t} \right) . dt \right|$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\left[f(t) - f(x_k) \right] e^{-in\omega t} \right) dt \right| + \left| \sum_{k=1}^{K} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_k) . e^{-in\omega t} \right) . dt \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{K} \left[V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) . (x_k - x_{k-1}) \right] + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n|.\omega}$$

En adoptant, en particulier la suite $\left(\frac{kT}{K} \right)_{k \in [\![0,K]\!]}$ qui est bien une subdivision de $[0, T]$, il vient que :

$$T . |c_n(f)| \leqslant \frac{T}{K} \sum_{k=1}^{K} V_{[x_{k-1}, x_k]}(f) + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n|.\omega}$$

13

On en déduit alors, d'après 15/, que :

$$\left| c_n(f) \right| \leq \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{T}{K} V_{[0,T]}(f) + \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n|\,\omega} \right)$$

Ceci étant vrai quelquesoit le nombre entier naturel non nul K, on en conclut que :

$$\left| c_n(f) \right| \leq \frac{V_{[0,T]}(f)}{|n| .\, 2\pi}$$

- On en déduit aisément que $c_n(f) \xrightarrow[\substack{n \to +\infty \\ (\text{resp } -\infty)}]{} 0$.

Partie V : 14

17/ a/ La série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^{-p}$ converge car $-p<-1$. Sa somme est un réel strictement positif car il est supérieure à $\sum_{k=1}^{1} k^{-p}$, qui vaut 1.

Il est donc licite d'envisager le nombre réel ρ égal à $\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-p}}$. Il satisfait clairement "les conditions de l'énoncé".

b/ Si $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} k^{-p} > \sum_{k=1}^{n} k^{-p}$ donc, vu que $\rho>0$,

$$-\rho\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{-p} > -\rho\cdot\sum_{k=1}^{n+1} k^{-p} \text{ et donc } \lambda_n > \lambda_{n+1}.$$

En découle le fait que λ décroisse. $\lambda_0=1$ et $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

D'après le cours de première année, λ est à valeurs dans $]0,1]$.

18/a/ Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $t\in[0,1]$. $|t-\mu_n|\leq \frac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2}$

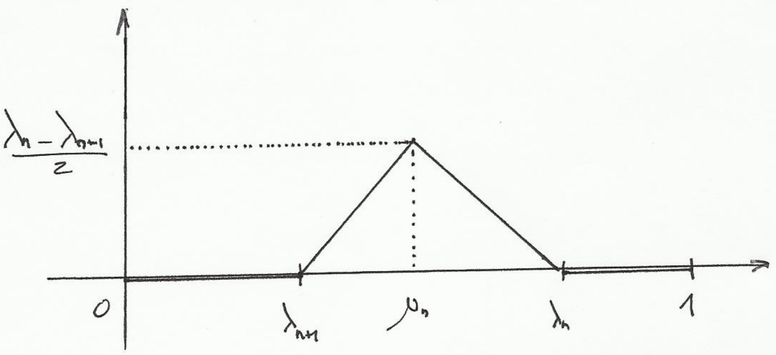
$$\iff \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}\leq t-\mu_n\leq\frac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2} \iff \frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}+\mu_n\leq t\leq\frac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2}+\mu_n$$

$$\iff \lambda_{n+1}\leq t\leq\lambda_n.$$

Du coup, si $t\in[0,\lambda_{n+1}]\cup[\lambda_n,1]$ $g_n(t)=0$ et, sinon :

- si $t\in[\lambda_{n+1},\mu_n]$ $g_n(t)=t-\lambda_{n+1}$
- si $t\in[\mu_n,\lambda_n]$ $g_n(t)=\lambda_n-t$.

On en déduit l'allure de la courbe représentative de g_n :



14

• Les restrictions de g_n à $[0,\lambda_{n+1}]$, $[\lambda_{n+1},\mu_n]$, $[\mu_n,\lambda_n]$ et $[\lambda_n,1]$ étant clairement de classe C^1 et monotones, d'après 15/, $g_n \in H^1([0,1],\mathbb{R})$ et, de plus, $V_{[0,1]}(g_n) = V_{[0,\lambda_{n+1}]}(g_n)+V_{[\lambda_{n+1},\mu_n]}(g_n)+V_{[\mu_n,\lambda_n]}(g_n)+V_{[\lambda_n,1]}(g_n)$

soit : $V_{[0,1]}(g_n) = 2\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n+1}}{2}-0\right) = \lambda_n-\lambda_{n+1} = \frac{p}{(n+1)^p}$.

b/ • Si $t\in\,]0,1]$, vu que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît,

$\exists!\, n\in\mathbb{N}\quad t\in\,]\lambda_{n+1},\lambda_n]$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $t\in\,]\lambda_{n_0+1},\lambda_{n_0}]$

$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{n_0\}\quad g_n(t)=0$; il est donc légitime d'envisager $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

• $\forall n\in\mathbb{N}\quad g_n(0)=0$; il est donc légitime d'envisager $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(0)$.

Par conséquent, il est licite de considérer l'application $h : [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

• Soit $(u,v)\in[0,1]^2$ tel que $u<v$.

– Si $u=0$, $v\in\,]0,1]$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $v\in\,]\lambda_{n+1},\lambda_n]$.

$|h(v)-h(u)| = |g_n(v)-0| = |g_n(v)-g_n(\lambda_{n+1})| \le |v-\lambda_{n+1}|^1 \le |v-0|^1=|v-u|^1$

– Sinon, soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $u\in\,]\lambda_{p+1},\lambda_p]$ et $v\in\,]\lambda_{q+1},\lambda_q]$.

. si $p=q$, alors $|h(v)-h(u)|=|g_p(v)-g_p(u)|\le|v-u|^1$ car $g_p\in H^1([0,1],\mathbb{R})$

. sinon, $p>q$ (absurde) donc $q+1\le p$. Du coup :

$|h(v)-h(u)| = |g_q(v)-g_p(u)| \le |g_q(v)-g_q(\lambda_{q+1})|+|g_p(\lambda_{p+1})-g_p(\lambda_p)|$

$\le |v-\lambda_{q+1}|^1+|u-\lambda_p|^1 = v-\lambda_{q+1}+\lambda_p-u \le v-u=|v-u|^1$.

Il en découle le fait que : $h\in H^1([0,1],\mathbb{R})$.

c/ Soit $(u,v)\in[0,1]^2$. D'après ce qui précède, vu que $\cdot^\alpha$ croît car $\alpha>0$,

$|h^\alpha(v)-h^\alpha(u)| \le |h(v)-h(u)|^\alpha \le |v-u|^{1\alpha} = |v-u|^\alpha$.

D'où $h^\alpha\in H^\alpha([0,1],\mathbb{R})$.

15

19/ a/ D'après les questions et remarques précédentes, si $n\in\mathbb{N}$,

$$V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{[\lambda_{k+1},\lambda_k]}(h^\alpha) = 2.\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\rho}{2(k+1)^p}\right)^\alpha$$

$$= 2^{1-\alpha}.\rho^\alpha.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^{p.\alpha}} = 2^{1-\alpha}.\rho^\alpha.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p.\alpha}}.$$

b/ Vu que $p\in]1,1/\alpha[$, $p.\alpha\in]\alpha,1[$ donc $p.\alpha<1$.

donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{p.\alpha}}$ diverge vers $+\infty$. On en conclut que l'ensemble $\left\{V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha),\ n\in\mathbb{N}\right\}$ n'est pas majoré. Hors, si h^α était à variation bornée, on aurait $\forall n\in\mathbb{N}$ $V_{[\lambda_n,1]}(h^\alpha)\leq V_{[0,1]}(h^\alpha)$ (cf. 15/). Cela constitue une contradiction : $h^\alpha\notin VB([0,1],\mathbb{R})$.

20/ a/ Soit $\tilde{h}:\begin{array}{l}[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto h^\alpha\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\end{array}$. D'après la question 14/b), si $\tilde{h}$ était à variation bornée, h^α le serait puisque $b-a\in\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall u\in[0,1]\quad h^\alpha(u)=\tilde{h}(a+u.(b-a))$$

Or $h^\alpha\notin VB([0,1],\mathbb{R})$ donc $\tilde{h}\notin VB([a,b],\mathbb{R})$. Pourtant, $\tilde{h}\in H^\alpha([a,b],\mathbb{R})$.

En effet : $\forall (t,t')\in[a,b]^2$ $\left|\tilde{h}(t')-\tilde{h}(t)\right| = \left|h^\alpha\left(\frac{t'-a}{b-a}\right)-h^\alpha\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right|$

$$\leq\left|\frac{t'-a}{b-a}-\frac{t-a}{b-a}\right|^\alpha=\frac{1}{(b-a)^\alpha}.|t'-t|^\alpha.$$

A donc été prouvé le fait que : $H^\alpha([a,b],\mathbb{R})\not\subset VB([a,b],\mathbb{R})$.

b/ Si $\beta\in]0,1[$, $H^\beta([a,b],\mathbb{R})\not\subset VB([a,b],\mathbb{R})$ et, si $\beta\in[1,+\infty[$, alors $H^\beta([a,b],\mathbb{R})\subset VB([a,b],\mathbb{R})$ d'après les questions 5/a) et 13/b/.

On conclut finalement que :

$$H^\beta([a,b],\mathbb{R})\subset VB([a,b],\mathbb{R})\iff\beta\in[1,+\infty[.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (A) : Mathématiques

Éléments de correction

Partie 1 : convergence d'une série entière de matrices

1. $\| A \|_s = \mathrm{Sup}\{ \| AZ \| \ ; \ Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \ \| Z \| \leq 1\}$.

   • $\| AY \| \leq \| A \|_s \| Y \|$

   Si $Y = 0$, l'inégalité est évidente.

   Sinon, on pose $Z = \dfrac{1}{\| Y \|} Y$ qui vérifie $\| Z \| = 1$, donc $\| AZ \| \leq \| A \|_s$ par définition de la norme subordonnée.

   On en déduit : $\| AY \| = \| AZ \| \ \| Y \| \leq \| A \|_s \| Y \|$.

   • $\| AB \|_s \leq \| A \|_s \| B \|_s$.

   Pour tout $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que $\| Z \| \leq 1$, on a :

   $$\| ABZ \| \leq \| A \|_s \| BZ \| \leq \| A \|_s \| B \|_s \ .$$

   On en déduit : $\| AB \|_s = \mathrm{Sup}\{ \| ABZ \| \ ; \ Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), \ \| Z \| \leq 1\} \leq \| A \|_s \| B \|_s$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et X une colonne-propre de A associée à cette valeur propre.

   $$| \lambda | \ \| X \| = \| \lambda X \| = \| AX \| \leq \| A \|_s \| X \| ,$$

   d'où, comme $\| X \| > 0$, $| \lambda | \leq \| A \|_s$.

   Il en résulte que le rayon spectral de A est majoré par la norme de A :

   $$\rho(A) \leq \| A \|_s \ .$$

3. a) Il s'agit de prouver : $\{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \ \| A \|_s < R\} \subset \mathcal{A}_c \subset \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}); \ \rho(A) \leq R\}$.

   • Première inclusion

   Si $\| A \|_s < R$, la série numérique de terme général $\| c_n A^n \|_s$ est convergente, puisque, par récurrence immédiate à partir de la question 1, $\| c_n A^n \|_s \leq |c_n| \ \| A \|_s{}^n$.

   Dès lors, la série $\sum_{n\geq 0} c_n A^n$ est absolument convergente, donc convergente (puisque l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est de dimension finie). Par conséquent A est un élément de $\mathcal{A}_c$.

   • Seconde inclusion

   Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) > R$. Soit X une colonne-propre de A associée à une valeur propre λ de module strictement supérieur à 1.

   Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{n=0}^{N} c_n A^n X = \sum_{n=0}^{N} c_n \lambda^n X$.

Comme $|\lambda| > R$, la suite $\left(c_n \lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Il en résulte que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} c_n\lambda^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} c_n A^n X$ et donc $\sum\limits_{n\geq 0} c_n A^n$ sont divergentes.
Par conséquent A n'est pas un élément de $\mathscr{A}_c$.

b) Lorsque $p = 1$, les normes sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}$, sont proportionnelles au module :

$$\exists\, \alpha > 0, \forall Z = \left(z\right) \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}),\ \| Z \| = \alpha\, |z|\ .$$

La norme subordonnée sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}$, est donc le module :

$$\forall A = \left(a\right) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C}),\ \| a \|_s = |z|$$

puisque $\| AZ \| = \alpha\ |az| = |a|\ \| Z \|$.

La double inclusion précédente signifie donc que l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ est convergente est compris entre le disque de convergence (ouvert) de la série entière et son adhérence, le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

c) Soit $\mathscr{A}_c \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et A' une matrice semblable à A.

Soit alors P une matrice inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum\limits_{n=0}^{N} c_n (A')^n = P^{-1}\big(\sum\limits_{n=0}^{N} c_n A^n\big)P$.
Par continuité de l'endomorphisme $M \longmapsto P^{-1}MP$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, A' est donc un élément de $\mathscr{A}_c$, puisque $P^{-1}\big(\sum\limits_{n=0}^{N} c_n A^n\big)P$ tend vers $P^{-1}\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n\big)P$ quand N tend vers l'infini.

d) Soit A une matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ et P une matrice inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit égale à une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Si le rayon spectral de A est strictement inférieur à R, la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n D^n$ est convergente, et de somme $\mathrm{diag}(\sum\limits_{n\geq 0} c_n\, {\lambda_1}^n, \ldots, \sum\limits_{n\geq 0} c_n\, {\lambda_p}^n)$.
Il en résulte d'après c) que A, semblable à D appartient à $\mathscr{A}_c$.

Partie 2 : quelques calculs et un exemple

1. $u_n(z) = (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$

a) $d_{n+1} - d_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} = O(\frac{1}{n^2})$.

La série de terme général $d_{n+1} - d_n$ est donc convergente, par comparaison. Il en résulte (par le théorème "suite-série") que la suite $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \big(\ln(2n) - d_{2N}\big) - \big(\ln(n) - d_N\big) = \ln(2) + d_N - d_{2N} \ (*).$$

Grâce à a), on déduit de $(*)$ que $\displaystyle\sum_{n=0}^{2N-1} u_n(1)$ tend vers $\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.

Comme de plus $u_n(1)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, cette convergence suffit pour affirmer que la série de terme général $u_n(1)$ est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \ln(2)\ .$$

c) Pour x réel, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente si et seulement si $-1 < x \leq +1$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1, +1]\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \ln(1+x)\ .$$

2. $v_n(z) = \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$

a) La série de terme général $v_n(z)$ est convergente lorsque $|z| < 1$, grossièrement divergente lorsque $|z| > 1$.

Le rayon de convergence de la série entière de terme général v_n est donc égal à 1.

b) Pour x réel, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente si et seulement si $-1 < x < 1$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1, +1[\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = \operatorname{argth}(x)\ .$$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$.

Il en résulte que, pour tout x strictement compris entre -1 et $+1$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(ix) = i\arctan(x)\ .$$

On le prouve par intégration terme à terme d'une série entière géométrique.

Quant au prolongement de cette égalité pour $x = -1$ et $+1$, on le justifie par la continuité de la fonction arctan et la convergence uniforme de la série sur le segment $[-1, +1]$, qui assure la continuité de sa somme sur ce segment. La preuve de la convergence uniforme exploite le contrôle du reste d'une série alternée vérifiant le "critère spécial".

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{4N+3} u_n(i) = \sum_{n=0}^{4N+3} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{N} \Big(\frac{i}{4k+1} + \frac{1}{4k+2} - \frac{i}{4k+3} - \frac{1}{4k+4}\Big)$

d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(i) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{\ln 2}{2} + i\,\frac{\pi}{4}\ .$$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Le polynôme caractéristique $\chi_A = (X - i)(X + i)$ de A étant scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable : il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) Pour $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, on obtient : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = D$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} D^{n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, i^{n+1} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, (-i)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln 2}{2} + i\,\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{\ln 2}{2} - i\,\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} A^{n+1} = P \begin{pmatrix} \dfrac{\ln 2}{2} + i\,\dfrac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{\ln 2}{2} - i\,\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{\ln 2}{2} I_2 + \frac{\pi}{4} A = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln 2}{2} & -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\pi}{4} & \dfrac{\ln 2}{2} \end{pmatrix}$.

Partie 3 : quelques questions topologiques

1. $T_n = T + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.

   a) $T_n[\ell,\ell] - T_n[k,k]$ tend vers $T[\ell,\ell] - T[k,k]$ quand n tend vers l'infini.

   b) Pour ℓ et k distincts et fixés, il n'y qu'une alternative :

   • ou bien $T[\ell,\ell] = T[k,k]$ et alors $T_n[\ell,\ell] \neq T_n[k,k]$ pour tout n

   • ou bien $T[\ell,\ell] \neq T[k,k]$ et alors $T_n[\ell,\ell] \neq T_n[k,k]$ pour n suffisamment grand puisque la différence $T_n[\ell,\ell] - T_n[k,k]$ tend vers une limite non nulle quand n tend vers l'infini.

   Comme il n'existe qu'un nombre fini de couple (ℓ, k) d'entiers distincts compris entre 1 et p, on peut donc affirmer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de T_n sont deux à deux distincts.

2. a) Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindable (théorème de d'Alembert-Gauss). Par conséquent, toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindable.

   b) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. D'après a), il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour laquelle la matrice $T = P^{-1}MP$ est triangulaire.

   D'après 1.b), il existe une suite de matrices triangulaires T_n dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts, donc diagonalisables, qui convergent vers T quand n tend vers l'infini. La matrice M est donc la limite d'une suite de matrices diagonalisables, les matrices PT_nP^{-1}.

   Il en résulte que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

3. L'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \quad \| N - M \|_s \leq \alpha \Rightarrow \| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1$$

   résulte de la continuité en M de l'application de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_p[X]$ qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique. Cette continuité provient de celle des applications $N \longmapsto a_k(N)$, qui sont polynomiales. Le choix des normes importe peu puisque, sur deux espaces vectoriels de dimensions finies, p^2 et $p+1$ en l'occurrence, toutes les normes sont équivalentes.

4. Soit $\mu \in \mathrm{sp}(M)$.

   a) Comme $\mu \in \mathrm{sp}(M)$, $\chi_M(\mu) = 0$, c'est-à-dire : $\mu^p = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k(M)\,\mu^k$.

   Il en résulte que : $|\mu|^p \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|\,|\mu|^k \leq \mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|$

   puisque, pour tout k compris entre 1 et $p-1$, $|\mu|^k$ est inférieur ou égal à $|\mu|^{p-1}$ si $|\mu| \geq 1$, à 1 sinon.

   On a donc bien (1). Pour établir (2), il suffit dès lors d'observer que $\mathrm{Max}\{1, |\mu|^p\} \leq 1 + |\mu|^p$ et que $a_p(M) = 1$.

   En simplifiant les deux membres de (2) par $\mathrm{Max}\{1, |\mu|^{p-1}\} = \left(\mathrm{Max}\{1, |\mu|\}\right)^{p-1}$, on obtient $\mathrm{Max}\{1, |\mu|\} \leq \| \chi_M \|_1$, d'où finalement (3) : $|\mu| \leq \| \chi_M \|_1$.

   b) Si $\| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1$ et $\lambda \in \mathrm{sp}(N)$, on a :

$$|\lambda| \leq \| \chi_N \|_1 \leq 1 + \| \chi_M \|_1 \leq 2 \| \chi_M \|_1 \ .$$

5. a) D'après la question 3, on peut choisir $\alpha > 0$, tel que, pour tout $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on ait :

$$\| N - M \|_s \leq \alpha \Rightarrow \| \chi_N - \chi_M \|_1 \leq 1 \ .$$

   Comme la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\| M_n - M \|_s \leq \alpha \ .$$

Il en résulte, d'après 4.b), que pour tout $n \geq N$, les valeurs propres $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n}$ de M_n ont des valeurs absolues n'excédant pas $2 \parallel \chi_M \parallel_1$.
Il en résulte que $\big((\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^p$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

b) Soit $\big((\lambda_{1,j_n}, \dots, \lambda_{p,j_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente extraite de la suite $\big((\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{p,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sa limite.

Le polynôme caractéristique $\chi_{M_{j_n}}$ converge vers le polynôme scindé $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ quand n tend vers l'infini, puisque ses coefficients, fonctions polynomiales symétriques de ses racines, convergent vers ceux de ce polynôme.
Comme sa limite est aussi le polynôme caractéristique de M, celui-ci est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6. a) On procède par double inclusion.

- Soit M une matrice appartenant à l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$. Cette matrice est la limite d'une suite convergente de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. D'après le résultat précédent (5.b), le polynôme caractéristique de M est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui signifie que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}$.

- Soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$. Elle est donc trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour laquelle la matrice $T = P^{-1}MP$ est triangulaire. Les matrices T_n construites à partir de T comme en question 1 convergent vers T et sont diagonalisables (pour n assez grand). Il en résulte que les matrices $M_n = PT_nP^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ (pour n assez grand). Comme elles convergent vers M, celle-ci appartient bien à l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$.

b) $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et telle que $D[\ell,\ell] = D[k,k]$, avec $\ell \neq k$, M est la limite quand n tend vers l'infini de la matrice $M_n = P\big(D + \frac{1}{n}E_{\ell,k}\big)P^{-1}$.

Si on note r la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda = D[\ell,\ell] = D[k,k]$ de M, ce qui signifie que λ figure r fois sur la diagonale de D, le rang de $\big(D + \frac{1}{n}E_{\ell,k}\big) - \lambda I_p$, donc celui de M_n est égal à $n - r + 1$.
La dimension du sous-espace propre $E_\lambda(M_n)$ est donc $r - 1 \neq r$.
Il en résulte que M_n n'est pas diagonalisable.

On vient donc bien de prouver que, si le polynôme caractéristique d'une matrice M de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, la matrice M est la limite d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de matrices non diagonalisables.

c) Il en résulte que l'intérieur de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ est inclus dans l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
Remarque : cet ensemble est en fait égal à l'intérieur de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, mais la seconde inclusion est plus longue à établir.

Partie 4 : logarithme de matrice

1. Soit $M \in \mathcal{B} = \{M \in \mathcal{T}_p(\mathbb{R});\ \parallel M - I_p \parallel_s < 1\}$.

a) Par 3.a de la partie 1, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}(M - I_p)^{n+1}$ est convergente, puisque $\parallel M - I_p \parallel_s$ est strictement inférieur au rayon de convergence $R = 1$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ (étudiée dans la partie 2).

b) Comme M est trigonalisable, $\text{sp}(M)$ est inclus dans $\mathbb{R}$, de même que $\text{sp}(M - I_p)$.
Par la question 2 de la partie 1, $\rho(M - I_p) \leq \parallel M - I_p \parallel_s$. On en déduit que $\text{sp}(M - I_p)$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]-1, +1[$, donc que $\text{sp}(M)$ est inclus $]0, 2[$.

2. On suppose d'abord que M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.
Comme $\| M - I_p \|_s < 1\}$, on a, pour tout entier k compris entre 1 et p, $|\lambda_k - 1| < 1$ et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (\lambda_k - 1)^{n+1} = \ln(\lambda_k) .$$

Comme $M - I_p = P(D - I_p)P^{-1}$, on a, pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} (M - I_p)^{n+1} = P\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} (D - I_p)^{n+1}\Big)P^{-1} ,$$

qui tend vers $P \,\text{Diag}(\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_p)\, P^{-1}$ quand N tend vers l'infini. Par conséquent :

$$\text{Log}(M) = P\, \text{Diag}(\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_p)\, P^{-1} .$$

La trace de $\text{Log}(M)$ est donc égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \ln(\lambda_k) = \ln \prod_{k=1}^{p} \lambda_k = \ln(\det M)$.

Si M n'est pas diagonalisable, il existe (d'après la question 2.b de la partie 3) une suite de matrices diagonalisables M_n qui converge vers M. Comme $\| M_n - I_p \|_s \longrightarrow \| M - I_p \|_s < 1$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$: $M_n \in \mathscr{B}$. Par continuité de la fonction Log sur $\mathscr{B}$ (qui résulte de la convergence normale donc uniforme de la série entière matricielle définissant cette fonction sur toute partie compacte de la boule ouverte $\mathscr{B}$), et de la trace, on peut affirmer que la trace de $\text{Log}(M_n)$ (égale à $\ln(\det M_n)$) converge vers la trace de $\text{Log} M$. On en déduit, par continuité du déterminant et la fonction ln, que la trace de $\text{Log}(M)$ est égal à $\ln(\det M)$.

3. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ telles que : $MN = NM$.

a) Il suffit de démontrer par récurrence sur p la propriété :

$(\mathscr{P}_p) \quad \forall\, (M, N) \in (\mathscr{T}_p(\mathbb{R}))^2, MN = NM \Rightarrow \exists\, P \in \text{GL}_p(\mathbb{R}), P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ triangulaires

- Initialisation : la propriété $\mathscr{P}_1$ est évidente, puisque toutes les matrices carrées d'ordre 1 sont triangulaires.

- Hérédité : on suppose la propriété $\mathscr{P}_p$ et on considère deux matrices M et N de $\mathscr{T}_{p+1}(\mathbb{R})$, tels que $MN = NM$.

On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^{p+1}$ canoniquement associés à M et N.
Soit $\lambda \in \text{sp}(f)$.
Comme f et g commutent, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ de f associé à la valeur propre λ est stable par g.
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par g est scindé puisque c'est un diviseur du polynôme caractéristique de g, qui est scindé puisque N est trigonalisable. Cet endomorphisme induit admet donc un vecteur propre x_1, qui est à la fois vecteur propre de g et de f. En complétant ce vecteur pour former une base $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ de $\mathbb{R}^{p+1}$, dans laquelle les matrices M' et N' ont une première colonne dont tous les coefficients sous-diagonaux sont nuls.

Par blocs : $M' = \begin{pmatrix} \lambda & L_M \\ 0 & M_0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} \lambda & L_N \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}$, où L_M et L_N sont des matrices-lignes, M_0 et N_0 des matrices carrées, qui appartiennent à $\mathscr{T}_p(\mathbb{R})$ puisque leurs polynômes caractéristiques divisent respectivement ceux de M et de N et sont donc scindés.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice $P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}M_0P$ et $P^{-1}N_0P$ soient toutes les deux triangulaires.

Dès lors, la matrice inversible $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ trigonalise à la fois M' et N', c'est-à-dire que les deux matrices $Q^{-1}M'Q$ et $Q^{-1}N'Q$ sont triangulaires.

Ce deux matrices représentent respectivement f et g dans une même base de $\mathbb{R}^{p+1}$, ce qui prouve que M et N sont simultanément trigonalisables et achève la démonstration par récurrence de la propriété $\mathscr{P}_p$.

b) Soit $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ telles que les deux matrices $U = P^{-1}MP$ et $V = P^{-1}NP$ soient triangulaires.

Comme en début de partie 3, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\ell}{n}\, E_{\ell,\ell}$ $V_n = V + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\ell}{n}\, E_{\ell,\ell}$, puis $M_n = PU_nP^{-1}$ et $M_n = PV_nP^{-1}$.

Comme M et N commutent, il en de même de U et de V, donc de U_n et V_n, et par conséquent de M_n et N_n.

Pour n assez grand, les matrices M_n et N_n possèdent chacune p valeurs propres réelles distinctes et appartiennent donc à $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$. Elles convergent respectivement vers M et N quand n tend vers l'infini et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_nN_n = N_nM_n$.

4. Soit M et N deux matrices de $\mathscr{B}$ telles que $MN = NM$ et $MN \in \mathscr{B}$.

   Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers M et N, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $M_nN_n = N_nM_n$. Soit P_n une matrice inversible de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, telle que les deux matrices $P_n^{-1}M_nP_n$ et $P_n^{-1}N_nP_n$ (M_n et N_n sont simultanément diagonalisables, parce qu'elles sont diagonalisables et commutent) :

$$P_n^{-1}M_nP_n = \mathrm{Diag}(\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \ldots, \lambda_{p,n})$$

$$P_n^{-1}N_nP_n = \mathrm{Diag}(\mu_{1,n}, \mu_{2,n}, \ldots, \mu_{p,n}) \;.$$

   Pour n suffisamment grand, M_n, N_n et M_nN_n appartiennent à $\mathscr{B}$, et on peut donc écrire :

$$\mathrm{Log}(M_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(M_n - I_p)^{n+1} = P_n\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\Big(\mathrm{Diag}(\lambda_{1,n}-1, \ldots, \lambda_{p,n}-1)\Big)^{n+1}\Big)P_n^{-1}$$

   c'est-à-dire :

$$\mathrm{Log}(M_n) = P_n\Big(\mathrm{Diag}\big(\ln(\lambda_{1,n}), \ldots, \ln(\lambda_{p,n})\big)\Big)P_n^{-1} \;.$$

   De même :

$$\mathrm{Log}(N_n) = P_n\Big(\mathrm{Diag}\big(\ln(\mu_{1,n}), \ldots, \ln(\mu_{p,n})\big)\Big)P_n^{-1} \;.$$

   Il en résulte que :

$$\mathrm{Log}(M_n) + \mathrm{Log}(N_n) = P_n\Big(\mathrm{Diag}\big(\ln(\lambda_{1,n}\mu_{1,n}), \ldots, \ln(\lambda_{p,n}\mu_{p,n})\big)\Big)P_n^{-1} = \mathrm{Log}(M_nN_n) \;.$$

   Par passage à la limite et continuité de Log sur $\mathscr{B}$, on en déduit que :

$$\mathrm{Log}(MN) = \mathrm{Log}(M) + \mathrm{Log}(N) \;.$$

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (B) : Probabilités

Éléments de correction

Problème

1) On réécrit l'inégalité
$$\frac{S_N}{N} \geq x$$
sous la forme
$$\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X) \geq x - \mathbb{E}(X),$$
qui, en vertu de l'hypothèse selon laquelle $x > \mathbb{E}(X)$, entraîne l'inégalité
$$\left|\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X)\right| \geq x - \mathbb{E}(X).$$
On en déduit l'inclusion entre événements :
$$\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X)\right| \geq x - \mathbb{E}(X)\right\},$$
d'où l'inégalité
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - \mathbb{E}(X)\right| \geq x - \mathbb{E}(X)\right).$$
En vertu du fait que $x > \mathbb{E}(X)$, la loi faible des grands nombres entraîne que le terme de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.
2) D'après l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels de résultats (numéro 3), il s'agit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)dx$ est convergente. Ceci se déduit directement de l'inégalité, valable pour tout $x \geq 0$,
$$0 \leq \mathbb{P}(X > x) \leq ae^{-bx},$$
et du fait que, comme on suppose $b > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-bx}dx$ est convergente.
3) Supposons d'abord $t > 0$ et $z \geq 1$. L'inégalité $\exp(tX) > z$ entraîne que $tX > \ln z$, puis (en utilisant le fait que $t > 0$) que $X > (\ln z)/t$. En posant $x = (\ln z)/t$, on a alors $x \geq 0$, d'où
$$\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq \mathbb{P}(X > x) \leq ae^{-bx} = az^{-b/t}.$$
Si $t = 0$, on a de toute façon $\exp(tX) = 1$ et $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 0$. Lorsque $z \in [0,1[$, on peut de toute façon écrire que $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq 1$, par définition d'une probabilité. On peut noter que, comme il est toujours vrai que $\exp(tX) \geq 1$, vu que X est une variable aléatoire à valeurs positives et que $t \geq 0$, on a en fait $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ lorsque $z \in [0,1[$.
4) Le cas $t = 0$ est réglé immédiatement par le fait que $\exp(tX) = 1$ dans ce cas. Dans le cas $t > 0$, prouver l'existence de $\mathbb{E}(\exp(tX))$ revient, d'après l'identité pour l'espérance déjà utilisée pour traiter la question 2), à vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z)dz$ est convergente. Comme on a supposé $0 < t < b$, on a donc $b/t > 1$, et l'on en déduit la convergence de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} z^{-b/t}dz$. Compte-tenu également du fait que $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) \leq 1$ pour $0 \leq z \leq 1$, on a finalement, en utilisant l'inégalité prouvée en 3), la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z)dz$, donc l'existence de $\mathbb{E}(\exp(tX))$. Comme on a toujours $\exp(tX) \geq 1$, on a également $\mathbb{E}(\exp(tX)) \geq 1$.

5) La variable aléatoire $\exp(tS_N)$ se réécrit

$$\exp(tS_N) = \exp\left[t(X_1 + \cdots + X_N)\right] = \exp\left[tX_1\right] \times \cdots \times \exp\left[tX_N\right].$$

Ainsi, $\exp(tS_N)$ apparaît comme le produit de N variables aléatoires indépendantes et de même loi que $\exp(tX)$. Cette dernière possédant une espérance d'après 4), on a, en utilisant la propriété de l'espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes (rappel de résultats, numéro 4), le fait que

$$\mathbb{E}\left(\exp(tS_N)\right) = \mathbb{E}\left(\exp(tX_1)\right)\cdots\mathbb{E}\left(\exp(tX_N)\right) = \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right)^N = \exp\left(N\Lambda(t)\right),$$

ce qui conclut la preuve.
6) Pour tout $x \geq 0$ et $t \geq 0$, l'inégalité $\frac{S_N}{N} \geq x$ entraîne (car $N \geq 0$) que $S_N - Nx \geq 0$, puis, en multipliant par t (supposé ≥ 0), que $t\,(S_N - Nx) \geq 0$, puis, par croissance de la fonction exponentielle, le fait que $\exp\left[t\,(S_N - Nx)\right] \geq 1$. On obtient ainsi l'inclusion $A(N,x) \subset B(N,x,t)$. L'inégalité $\mathbb{P}(A(N,x)) \leq \mathbb{P}(B(N,x,t))$ est une conséquence directe de cette inclusion.
7) On applique l'inégalité de Markov (rappel de résultats, numéro 1) de la manière suivante :

$$\mathbb{P}\left(\exp\left[t\,(S_N - Nx)\right] \geq 1\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left[t\,(S_N - Nx)\right]\right) = \exp(-Ntx)\mathbb{E}\left(\exp\left[tS_N\right]\right).$$

On en déduit, avec 5), que

$$\mathbb{P}(B(N,x,t)) \leq \exp\left(-N(tx - \Lambda(t))\right),$$

ce qui conclut la preuve.
8) Pour tout $t \in [0,b[$ fixé, 6) et 7) entraînent que

$$\mathbb{P}(A(N,x)) \leq \exp\left(-N(tx - \Lambda(t))\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [0,b[$, on a donc également :

$$\mathbb{P}(A(N,x)) \leq \inf\left\{\exp\left(-N(tx - \Lambda(t))\right) \mid t \in [0,b[\,\right\}.$$

Ensuite, en exploitant la décroissance stricte de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h \mapsto \exp(-Nh)$, on en déduit que

$$\inf\left\{\exp\left(-N(tx - \Lambda(t))\right) \mid t \in [0,b[\,\right\} = \exp\left(-NI(x)\right),$$

ce qui fournit la conclusion demandée.
9) Montrons par l'absurde qu'il n'est pas possible d'avoir $I(x) > 0$ pour un nombre $x \in [0, \mathbb{E}(X)[$. Dans le cas contraire, l'inégalité vue en 8) entraînerait que

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A(N,x)) = 0.$$

Mais, comme $x < \mathbb{E}(X)$, la loi faible des grands nombres entraîne, par un argument similaire à celui employé à la question 1), que $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A(N,x)^c) = 0$ (où $A(N,x)^c$ désigne l'événement complémentaire de $A(N,x)$). On aurait donc que $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(A(N,x)) = 1$. Contradiction.
10) On a par définition que

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = e^{-\lambda x},$$

ce qui répond à la question.
11) Au vu du résultat du calcul mené à la question 10), c'est immédiat.
12) Supposons d'abord $t > 0$. Pour $z \in [0,1[$, on a $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ car $\exp(tX) \geq 1$ vu que $t \geq 0$ et que X est une variable aléatoire ne prenant que des valeurs positives. Pour $z > 1$, on a $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = \mathbb{P}(X > \ln(z)/t) = e^{-\lambda \ln(z)/t} = z^{-\lambda/t}$. Cett égalité est encore vraie pour $z = 1$, car $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ du fait que $\exp(tX) \geq 1$, et $1^{-\lambda/t} = 1$. Pour $t = 0$, on a $e^{tX} = 1$ et donc : $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 1$ si $z < 1$ et $\mathbb{P}(\exp(tX) > z) = 0$ si $z \geq 1$.
13) Pour $t = 0$, il est clair que $\mathbb{E}(\exp(tX)) = 1$. Supposons $t > 0$. Grâce à l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels (numéro 3), il s'agit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z)\,dz$ est bien convergente et de calculer sa valeur. D'après la question 12), on a, compte-tenu du fait que $t \in [0,\lambda[$:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\exp(tX) > z)\,dz = \int_0^1 1\,dz + \int_1^{+\infty} z^{-\lambda/t}\,dz = 1 + \frac{1}{\lambda/t - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

On note que cette dernière formule donne encore la valeur de l'espérance lorsque $t = 0$.

14) D'après la question 8) et le résultat des questions 11) et 13), il faut s'intéresser à la quantité

$$\sup\{\, h_x(t) |\ t \in [0,\lambda[\},$$

où, pour tout $t \in [0,\lambda[$, on a posé

$$h_x(t) = tx - \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right).$$

On vérifie facilement que h_x est dérivable sur $[0,\lambda[$, et, que, pour tout $t \in [0,\lambda[$, on a $h'_x(t) = x - \frac{1}{\lambda - t}$. On constate que h'_x est positive pour t entre 0 et $\lambda - 1/x$, puis négative pour t entre $\lambda - 1/x$ et λ, avec annulation en $t = \lambda - 1/x$. On en déduit que

$$\sup\{\, h_x(t) |\ t \in [0,\lambda[\} = h_x(\lambda - 1/x),$$

et l'on vérifie que

$$h_x(\lambda - 1/x) = I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x).$$

Le résultat de la question 8) entraîne alors l'inégalité demandée.
15) On vérifie que $I_{\mathscr{E}(\lambda)}(1/\lambda) = 0$ et que $I_{\mathscr{E}(\lambda)}$ est dérivable sur $[1/\lambda, +\infty[$, avec $I'_{\mathscr{E}}(x) = \lambda - 1/x$, cette expression étant strictement positive pour tout $x > 1/\lambda$, ce qui entraîne en particulier que, pour $x > 1/\lambda$, on a $I_{\mathscr{E}(\lambda)}(x) > I_{\mathscr{E}(\lambda)}(1/\lambda) = 0$.
16) On se rappelle que X ne prend comme valeurs que 0 et 1. Par conséquent, pour $x \in [0,1[$, $X > x$ équivaut à $X = 1$, et par conséquent $\mathbb{P}(X > x) = p$. Ensuite, pour $x \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X > x) = 0$.
17) On cherche donc un $a > 0$ tel que, pour tout $x \geq 0$, on ait $\mathbb{P}(X > x) \leq a\exp(-bx)$. Au vu de la question 16), une telle inégalité est vraie quel que soit $a > 0$ lorsque $x \geq 1$, et la seule contrainte à vérifier sur a est que l'on doit avoir, pour tout $x \in [0,1[$, l'inégalité $p \leq a\exp(-bx)$, ce qui revient à avoir $p \leq a\exp(-b)$. Du coup, il suffit de choisir $a = p\exp(b)$.
18) On a (classiquement) $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p$.
19) Par définition, on a $\Lambda(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = e^0 \times \mathbb{P}(X = 0) + e^t \times \mathbb{P}(X = 1) = (1 - p) + pe^t$.
20) D'après la question 8) et le résultat des questions 17) et 19), il faut s'intéresser, pour tout $b > 0$, à la quantité

$$\sup\{\, r_x(t) |\ t \in [0,b[\},$$

où pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a posé

$$r_x(t) = tx - \ln\big((1-p) + pe^t\big).$$

La fonction r_x est dérivable sur $[0,+\infty[$, avec $r'_x(t) = x - \frac{pe^t}{(1-p)+pe^t}$. On vérifie facilement que r'_x est positive pour t entre 0 et $t_x = \ln\left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p}\right)$, puis positive pour $t \geq t_x$, avec annulation en t_x. Le fait que $t_x > 0$ provient de ce que $p < x < 1$. On vérifie que $I_{\mathscr{B}(p)}(x) = r_x(t_x)$, et, par conséquent, l'inégalité demandée est une conséquence de la question 8), en choisissant $b > t_x$.
21) On vérifie que par continuité des différentes fonctions intervenant dans la définition de $I_{\mathscr{B}(p)}$, on a

$$\lim_{x \searrow p} I_{\mathscr{B}(p)}(x) = p\ln(p/p) + (1-p)\ln\left(\frac{1-p}{1-p}\right) = 0.$$

Lorsque $x \nearrow 1$, $x\ln(x/p) \to \ln(1/p)$ par continuité, tandis que, classiquement, $(1-x)\ln(1-x) \to 0$, et $(1-x)\ln(1-p) \to 0$. On en déduit finalement que

$$\lim_{x \nearrow 1} I_{\mathscr{B}(p)}(x) = \ln(1/p).$$

D'autre part, on vérifie que $I_{\mathscr{B}(p)}$ est dérivable dans $]p,1[$ avec $I'_{\mathscr{B}(p)}(x) = t_x$, qui est strictement positif pour $x \in]p,1[$. On en déduit que $I_{\mathscr{B}(p)}(x) > 0$ pour tout $x \in]p,1[$.
22) On doit simplement vérifier que $\int_0^x \alpha(u+1)^{-(\alpha+1)}du = 1 - \frac{1}{(x+1)^\alpha}$, ce qui est immédiat.
23) D'après la question 22), on a pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_X(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$. Par conséquent, En faisant appel à l'identité pour l'espérance donnée dans les rappels (numéro 3), il s'agit de vérifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha}dx.$$

et de calculer sa valeur. La convergence est une conséquence immédiate du fait que $\alpha > 1$, et l'on a classiquement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha},$$

ce qui fournit la réponse à la question posée.

24) $W_N(u)$ compte le nombre d'indices i entre 1 et N pour lesquels l'événement $\{X_i \geq u\}$ se réalise. Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ sont par hypothèse indépendantes, les événements $\{X_i \geq u\}$, où $1 \leq i \leq N$, sont également indépendants. De plus, comme les variables aléatoires X_i ont toutes la même loi que X, on a pour tout i : $\mathbb{P}(X_i \geq u) = \mathbb{P}(X \geq u)$. Par conséquent, la variable aléatoire $W_N(u)$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ avec $n = N$ et $p = \mathbb{P}(X \geq u)$. Comme X possède une loi à densité, on a $\mathbb{P}(X \geq u) = \mathbb{P}(X > u)$ que l'on a déjà calculé : $\mathbb{P}(X > u) = \frac{1}{(u+1)^\alpha}$.

25) On a $\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(W_N(xN) = 0)$, et, d'après le résultat de la question 24),

$$\mathbb{P}(W_N(xN) = 0) = \left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)^N.$$

On écrit alors

$$\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)\right).$$

Comme $xN \to +\infty$ lorsque $N \to +\infty$, on peut utiliser le développement limité du logarithme au voisinage de 1 : lorsque $N \to +\infty$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right) = -\frac{1}{(xN+1)^\alpha}(1 + o(1)),$$

d'où

$$N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right) = -N^{1-\alpha} x^{-\alpha}(1 + o(1)).$$

Comme $\alpha > 1$, on a que $N^{1-\alpha} \to 0$ lorsque $N \to +\infty$, et l'on peut donc utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$\exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{(xN+1)^\alpha}\right)\right) = 1 - N^{1-\alpha} x^{-\alpha}(1 + o(1)).$$

On conclut finalement que

$$\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) = x^{-\alpha} N^{1-\alpha}(1 + o(1)),$$

ce qui est exactement le résultat demandé.

26) D'après la question 25), on sait que

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)}{x^{-\alpha} N^{1-\alpha}} = 1.$$

Par définition d'une limite, il existe donc, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, un entier $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right)}{x^{-\alpha} N^{1-\alpha}} \geq 1 - \epsilon.$$

On en déduit immédiatement le résultat souhaité.

27) Une telle inégalité est impossible. En effet, en combinant une telle inégalité avec celle obtenue à la question 26), on en déduirait que, étant donné $\epsilon \in]0,1[$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, on ait

$$x^{-\alpha} N^{1-\alpha} \leq \exp(-N I(x)),$$

ce qui est visiblement impossible (croissance comparée puissance/exponentielle).

28) Considérons $x \geq u$. Il est alors immédiat que $\mathbb{P}(Y^{(u)} \leq x) = 1$. Considérons $x < u$. Il est alors clair que l'événement $\{\min(X, u) \leq x\}$ s'identifie à l'événement $\{X \leq x\}$ et que l'on a donc alors $\mathbb{P}(Y^{(u)} \leq x) = \mathbb{P}(\min(X, u) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

29) En vertu de l'identité pour l'espérance donnée dans le rappel de résultats (numéro 3), nous voulons montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y^{(u)} > x)\,dx,$$

et montrer que sa valeur est donnée par la formule figurant dans l'énoncé. En faisant appel à la question 28), l'intégrale étudiée n'est autre que

$$\int_0^u \mathbb{P}(X > x)\,dx = \int_0^u \frac{1}{(x+1)^\alpha},$$

et la formule demandée s'en déduit par un calcul direct.

30) En vertu de l'identité pour l'espérance donnée dans le rappel de résultats (numéro 3), nous voulons montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left[Y^{(u)}\right]^2 > x\right) dx,$$

et montrer que sa valeur est donnée par la formule figurant dans l'énoncé. Pour $x \geq u^2$, il est clair que $\mathbb{P}\left(\left[Y^{(u)}\right]^2 > x\right) = 0$. Inversement, pour $x < u^2$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left[Y^{(u)}\right]^2 > x\right) = \mathbb{P}\left(X > \sqrt{x}\right) = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^\alpha}.$$

Finalement, nous cherchons donc à prouver que

$$\int_0^u \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}(1+u)^{2-\alpha} - \frac{2}{2-\alpha} - \frac{2}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(1+u)^{\alpha-1}}\right).$$

Plutôt que de chercher à calculer directement l'intégrale figurant à gauche de l'équation ci-dessus, il est plus simple de vérifier que les dérivées par rapport à u des deux expressions à gauche et à droite de l'équation coïncident, ainsi que leurs valeurs en $u = 0$. C'est un calcul élémentaire.

31) Les questions 29) et 30) établissent l'existence de l'espérance de $Y^{(u)}$ et $\left[Y^{(u)}\right]^2$, ainsi que des formules explicites pour ces quantités. On a donc l'existence de la variance de $Y^{(u)}$, et l'identité :

$$\mathbb{V}\left(Y^{(u)}\right) = \mathbb{E}\left(\left[Y^{(u)}\right]^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(Y^{(u)}\right)\right]^2,$$

et on peut reporter les expressions explicites obtenues aux questions 29) et 30) dans la formule ci-dessus.

32) La variable aléatoire $\frac{R_N^{(u)}}{N}$ possède une espérance car elle s'écrit comme une combinaison linéaire de variables aléatoires possédant une espérance. Par linéarité, on a alors :

$$\mathbb{E}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{1}{N}\left[\mathbb{E}(Y_1^{(u)}) + \cdots + \mathbb{E}(Y_N^{(u)})\right] = \mathbb{E}(Y^{(u)}),$$

où la dernière égalité utilise le fait que les variables aléatoires $Y_i^{(u)}$ possèdent la même loi, et donc la même espérance, que $Y^{(u)}$. L'existence de la variance s'obtient de la même façon. Quant au calcul, on note déjà que

$$\mathbb{V}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(R_N^{(u)}).$$

Ensuite, les variables aléatoires $Y_i^{(u)}$ étant indépendantes, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances, qui elles-mêmes sont toutes égales à la variance de $Y^{(u)}$, comme précédemment. Ainsi,

$$\mathbb{V}(R_N^{(u)}) = \mathbb{V}\left[\mathbb{E}(Y_1^{(u)}) + \cdots + \mathbb{E}(Y_N^{(u)})\right] = N\mathbb{V}(Y^{(u)}).$$

In fine, on obtient bien l'identité demandée.

33) C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (rappel de résultats, numéro 2), appliquée à la variable $\frac{R_N^{(u)}}{N}$, en utilisant la question 32) pour identifier l'espérance et la variance.

34) Lorsque l'événement $\{W_N(u) = 0\}$ est réalisé, on a, par définition, le fait que, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $X_i \leq u$. Ceci entraîne que, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a $X_i = Y_i^{(u)}$, et par conséquent $\sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i^{(u)}$, ce qui est exactement l'identité $S_N = R_N^{(u)}$.

35) Supposons l'événement $\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\}$ réalisé. Alors, soit l'événement $\{W_N(u) \geq 1\}$ est réalisé, soit l'événement $\{W_N(u) = 0\}$ est réalisé. Dans ce dernier cas, la question précédente montre que $S_N = R_N^{(u)}$, et, comme on a supposé au départ que $\frac{S_N}{N} \geq x$, on doit alors avoir l'inégalité $\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x$. On en déduit l'inclusion demandée. Du point de vue des probabilités, on déduit de l'inclusion

$$\left\{\frac{S_N}{N} \geq x\right\} \subset \{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right\}$$

l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(\{W_N(u) \geq 1\} \cup \left\{\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right\}\right).$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq \mathbb{P}\left(W_N(u) \geq 1\right) + \mathbb{P}\left(\frac{R_N^{(u)}}{N} \geq x\right),$$

ce qui est exactement l'inégalité voulue.
36) On utilise l'inégalité démontrée à la question 35). D'après la question 25), on a déjà, lorsque $N \to +\infty$, l'équivalent suivant : $\mathbb{P}(W_N(xN) \geq 1) \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha}$. Ensuite, on utilise l'inégalité obtenue à la question 33) dans laquelle on substitue les valeurs exactes obtenues aux questions 29) et 31). Lorsque $N \to +\infty$, on vérifie que, avec $u = xN$, on a le comportement asymptotique

$$\frac{\mathbb{V}(Y^{(u)})}{N\left(x - \mathbb{E}(Y^{(u)})\right)^2} \sim x^{-\alpha} N^{1-\alpha}(g(x) - 1),$$

ce qui permet de conclure.
37) En utilisant simultanément les inégalités obtenues aux questions 26) et 36), on obtient que, pour tout $\epsilon \in]0,1[$, et tout entier N suffisamment grand, on a l'encadrement :

$$(1-\epsilon)x^{-\alpha}N^{1-\alpha} \leq \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} \geq x\right) \leq (1+\epsilon)x^{-\alpha}N^{1-\alpha}g(x).$$

Du point de vue de la dépendance en N, les deux bornes de l'encadrement sont exactement du même ordre de grandeur (soit $N^{1-\alpha}$), mais les facteurs qui dépendent de x ne sont pas identiques de part et d'autre de l'inégalité.

Exercice

A) Au vu des hypothèses,

$$\mathbb{P}(D=k|\Pi=1)=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \text{ et } \mathbb{P}(D=k|\Pi=2)=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2},$$

ce qui répond à la question.
B) On applique la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D=k)=\mathbb{P}(D=k|\Pi=1)\times\mathbb{P}(\Pi=1)+\mathbb{P}(D=k|\Pi=2)\times\mathbb{P}(\Pi=2).$$

On a $\mathbb{P}(\Pi=1)=\rho_1$ et $\mathbb{P}(\Pi=2)=\rho_2$, d'où, en utilisant les formules obtenues au A), l'expression :

$$\mathbb{P}(D=k)=\rho_1\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}+\rho_2\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2},$$

ce qui répond à la question.
C) On peut simplement appliquer la formule $\mathbb{E}(D)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(D=k)$ avec l'expression obtenue au B). On en déduit facilement que

$$\mathbb{E}(D)=\rho_1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\right)+\rho_2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\right)=\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2,$$

en reconnaissant les expressions de l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson.
D) De même qu'au C), on peut simplement appliquer la formule $\mathbb{E}(D^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\mathbb{P}(D=k)$ avec l'expression obtenue au B), d'où

$$\mathbb{E}(D^2)=\rho_1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\right)+\rho_2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\right)=\rho_1(\lambda_1^2+\lambda_2)+\rho_2(\lambda_2^2+\lambda_2),$$

en reconnaissant les expressions de l'espérance du carré d'une variable aléatoire de loi de Poisson.
E) En faisant la différence entre les expressions obtenues en C) et en D), on obtient :

$$\mathbb{V}(D)=\mathbb{E}(D^2)-\mathbb{E}(D)^2=\rho_1(\lambda_1^2+\lambda_2)+\rho_2(\lambda_2^2+\lambda_2)-\left(\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2\right)^2,$$

ce qui répond à la question.
F) La variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda=\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2$ est égale à $\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2$. Calculons la différence entre $\mathbb{V}(D)$ et cette dernière valeur :

$$\mathbb{V}(D)-\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2=\rho_1\lambda_1^2+\rho_2\lambda_2^2-\left(\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2\right)^2.$$

On vérifie (par exemple en faisant appel à la convexité de la fonction $x\mapsto x^2$) que, compte-tenu du fait que ρ_1 et ρ_2 sont deux nombres positifs tels que $\rho_1+\rho_2=1$, on a toujours

$$\rho_1\lambda_1^2+\rho_2\lambda_2^2\geq\left(\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2\right)^2.$$

La variance de D est donc toujours supérieure à la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson possédant la même espérance que D.
G) On applique simplement la formule de Bayes.

$$\mathbb{P}(\Pi=1|D=k)=\frac{\mathbb{P}(D=k|\Pi=1)\times\mathbb{P}(\Pi=1)}{\mathbb{P}(D=k)}=\frac{\rho_1\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}}{\rho_1\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}+\rho_2\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}},$$

et l'on peut encore (si on le souhaite) simplifier par $k!$, une formule analogue étant obtenue pour $\mathbb{P}(\Pi=2|D=k)$.

Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2014

Épreuve à option (C) : Économie

Éléments de correction

Exercice de probabilités

0) S_n est de loi $\mathscr{B}(n,p)$ par définition.

1) $N_1 = \min\{n \in I\!N^* \,|B_n = 1\}$ est $\mathscr{G}(p)$. $I\!E(N_1) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{Var}(N_1) = \frac{1-p}{p^2}$.

$$2)\ I\!P(N_1 = j, N_2 = j+k) = I\!P(B_1 = \ldots = B_{j-1} = B_{j+1} = \ldots = B_{j+k-1} = 0, B_j = B_{j+k} = 1)$$

$$= (1-p)^{j+k-2}\,p^2 = (1-p)^{j-1}\,p \times (1-p)^{k-1}\,p = I\!P(N_1 = j) \times (1-p)^{k-1}\,p.$$

3) Ce qui précède montre par sommation sur j que $I\!P(N_2 - N_1 = k) = (1-p)^{k-1}\,p$, et par suite, que N_1 et $N_2 - N_1$ sont indépendantes et de même loi $\mathscr{G}(p)$.

4) Notons que $N_2 \geq 2$. Utilisant la question 2), nous avons : pour tout $m \in I\!N$

$$I\!P(N_2 = m+2) = \sum_{j=1}^{m+1} I\!P(N_1 = j, N_2 = m+2) = \sum_{j=1}^{m+1} (1-p)^m\,p^2 = (m+1)(1-p)^m\,p^2.$$

On peut aussi utiliser que la loi de S_{k+1} est $\mathscr{B}(k+1,p)$; pour tout $m \in I\!N$ nous avons :

$$I\!P(N_2 = m+2) = I\!P(S_{m+1} = 1, B_{m+2} = 1) = C^1_{m+1}\,p^1(1-p)^m \times p = (m+1)(1-p)^m\,p^2.$$

5) Via 3), nous avons aussitôt : $I\!E(N_2) = I\!E(N_1) + I\!E(N_2 - N_1) = 2\,I\!E(N_1) = 2/p$, et

$$Var(N_2) = Var(N_1) + Var(N_2 - N_1) = 2\,Var(N_1) = 2(1-p)/p^2.$$

6) Nous avons :

$$\Big\{N_1 = j_1\,,\, N_2 - N_1 = j_2\,,\ldots,\, N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\Big\} = \Big\{B_1 = \ldots = B_{j_1-1} = 0,$$

$$B_{j_1} = 1, B_{j_1+1} = \ldots = B_{j_1+j_2-1} = 0, B_{j_1+j_2} = 1, \ldots, \ldots = B_{j_1+\cdots+j_\ell-1} = 0, B_{j_1+\cdots+j_\ell} = 1\Big\},$$

de sorte que

$$I\!P\big(N_1 = j_1\,,\, N_2 - N_1 = j_2\,,\ldots,\, N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\big) = (1-p)^{j_1-1}\,p\ldots(1-p)^{j_\ell-1}\,p$$
$$= (1-p)^{j_1+\cdots+j_\ell-\ell}\,p^\ell.$$

7) En sommant ce qui précède sur $j_1,\ldots,j_{\ell-1} \geq 1$, il vient

$$I\!P\big(N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\big) = \sum_{j_1\geq 1}(1-p)^{j_1-1}\,p \times \ldots \times \sum_{j_{\ell-1}\geq 1}(1-p)^{j_{\ell-1}-1}\,p \times (1-p)^{j_\ell-1}\,p$$

$$= (1-p)^{j_\ell-1}\,p \quad \text{pour tout } j_\ell \in I\!N^*,$$

ce qui signifie que $N_\ell - N_{\ell-1}$ est géométrique de paramètre p, de même que N_1.

8) Selon les questions 6) et 7) nous avons

$$I\!P\Big(\bigcap_{k=1}^{\ell}\{N_k - N_{k-1} = j_k\}\Big) = \prod_{k=1}^{\ell}(1-p)^{j_k-1}\,p = \prod_{k=1}^{\ell} I\!P\big(N_k - N_{k-1} = j_k\big),$$

ce qui montre l'indépendance de la suite des $N_k - N_{k-1}$, qui ont toute $\mathscr{G}(p)$ pour loi.

9) La question précédente montre que $I\!E(X_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} I\!E(X_j - X_{j-1}) = \ell/p$,

et que $\quad Var(X_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} Var(X_j - X_{j-1}) = \ell\,(1-p)/p^2$.

10) Notons que $N_\ell \geq \ell$, de sorte que $I\!P(N_\ell = k) = 0$ si $k < \ell$. Et utilisant que S_{k-1} a pour loi $\mathscr{B}(k-1,p)$ et est indépendante de B_k, pour tout $k \geq \ell$ nous avons :

$$I\!P(N_\ell = k) = I\!P\big(S_{k-1} = \ell - 1, B_k = 1\big) = C_{k-1}^{\ell-1}\, p^{\ell-1}(1-p)^k\, p = C_{k-1}^{\ell-1}\, p^{\ell}\,(1-p)^k.$$

11) Par la loi des grand nombres : $N_\ell/\ell \to I\!E(N_1) = 1/p$, selon la question 8).

Exercice n°1 d'optimisation économique

Le problème revient à maximiser la fonction $U = X(24-L)$ sous la contrainte

$$WL(1-t_1) + Y(1-t_2) \leq PX$$

La condition de premier ordre permet d'obtenir :

$$L = 12 - Y(1-t_2)/2W(1-t_1) \quad \text{et} \quad X = [WL(1-t_1) + Y(1-t_2)]/P$$

1. En absence d'impôt, $L = 10$; $L_0 = 14$; $X = 42$; $U = 588$

2. Avec un taux de prélèvement de 33%, $L = 10$; $L_0 = 14$; $X = 28$; $U = 392$. Il n'y a aucun impact de l'impôt sur l'offre de travail du fait d'une stricte compensation entre effet substitution et effet revenu. Par contre la quantité de bien et le niveau d'utilité ont diminué.

3. Lorsque seul le travail est imposé, on obtient : $L = 9$; $L_0 = 15$; $X = 30$; $U = 450$. L'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu.

4. Le problème revient à chercher Y^* pour $U = 588$, $L = 12 - Y(1-t_2)/2W(1-t_1)$, $t_1 = 1/3$, et $t_2 = 0$. Après remplacement, on recherche la solution de

$$588 = (24 + 1/2Y)(12 + 1/4Y)$$

et on trouve $Y^* = 20{,}6$. D'où le nouveau point dans l'espace $(L_0; X) = (17{,}15; 34{,}3)$. L'effet total de l'impôt $(1; -12)$ se décompose donc en un effet substitution $(3{,}15; -7{,}7)$ qui nous dit qu'en taxant le travail, l'individu prend davantage de loisir et obtient moins de biens et un effet revenu $(-2{,}15; -4{,}3)$ qui nous dit qu'en taxant le travail l'individu prend moins de loisir et obtient moins de biens.

Exercice n°2 d'optimisation économique

L'équilibre entre l'offre et la demande permet d'obtenir :

1. $Y = (C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0)/(1-c_1) = 230$

2. Avec $dG = 10$, on obtient $dY = 50$ et $d(G-T) = 10$.

3. Théorème de Haavelmo : $dG = dT = dY = 70$.

4. L'équilibre simultané sur les deux marchés est :

$$Y = [b(C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0) + gM^O]/[ag + b(1 - c_1 + c_1 t)]$$

5.

$$\delta Y/\delta t = [-b^2 c_1 (C_0 - c_1 T_0 + I_0 + G_0) - bc_1 gM^O]/[ag + b(1 - c_1 + c_1 t)]^2$$