ONDES

I. Cordes vibrantes

I.1. Propagation d'un signal le long d'une corde

1. On lit $\boxed{t_1 = 2,0\,\text{ms}}$. La perturbation a mis un temps t_1 pour parcourir une distance x_M à la célérité c, d'où :

$$\boxed{c = \frac{x_M}{t_1}} = \underline{40\,\text{m.s}^{-1}}$$

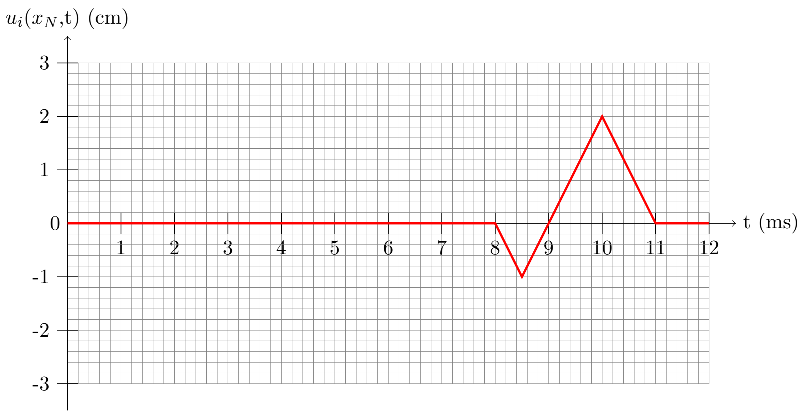
2. On pose $c = \alpha T^a \mu^b$, avec α une constante multiplicative. Or :

$$\begin{cases} [T] = M.L.T^{-2} \\ [\mu] = M.L^{-1} \\ [c] = L.T^{-1} \end{cases} \Rightarrow L.T^{-1} = M^{a+b}.L^{a-b}.T^{-2a} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \\ -2a=-1 \end{cases} \Rightarrow a = -b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c = \alpha\sqrt{\frac{T}{\mu}}}.$$

3. **Tendre la corde** fait **augmenter** T, et donc c.
Augmenter la masse de la corde pour une longueur fixée fait augmenter μ, donc **diminuer** c.
L'amplitude de la perturbation n'a **aucune influence sur** c tant que milieu est caractérisé par une équation de propagation d'ondes qui est linéaire [1], en pratique pour des ondes d'amplitudes modérées.

4. On lit sur le graphe de $u_i(M,t)$ que le point M est affecté pendant $\boxed{\Delta t = 3,0\,\text{ms}}$. Cela correspond alors à une longueur $\boxed{L = c\Delta t = 12\,\text{cm}}$.

5. La perturbation arrive en N à la date $\boxed{t_2 = \frac{x_N}{c}} = \underline{8,0\,\text{ms}}$. La perturbation étant progressive, elle ne se déforme pas. Ainsi :



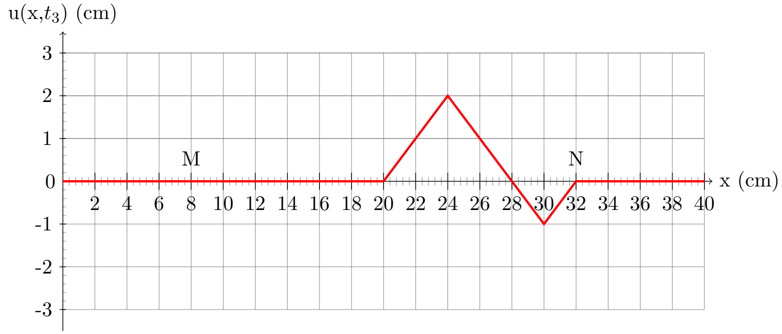
6. La propagation vers les x croissants sans déformation à la vitesse c permet d'écrire

$$\boxed{u_i(x,t_3) = u_i(x_M, t_3 - \frac{x - x_M}{c}) = u_i(x_M, -\frac{x - x_M - ct_3}{c})}.$$

Cette relation permet de voir que la forme du signal spatial est obtenue à partir du signal temporel par une **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées** (signe $-$), suivie d'une **dilatation horizontale de**

1. cf programme de SPE.

facteur c (ce qui place le front (début de la perturbation) à $x = -8\,\text{cm}$) et d'une **translation horizontale de** $\underline{x_M + ct_3 = 40\,\text{cm}}$.
Ainsi, à la date $\underline{t_3 = 8,0\,\text{ms}}$, le début de la perturbation se trouve maintenant au point N d'abscisse $\underline{x_N = 32\,\text{cm}}$. Le signal ne se déformant pas, il occupe toujours une longueur $\underline{L = 12\,\text{cm}}$. Pour terminer le schéma de la corde, on peut déterminer les positions du minimum et du maximum, qui interviennent respectivement $\Delta t_m = 0,5\,\text{ms}$ et $\Delta t_M = 2\,\text{ms}$ après le début de la perturbation. Ils sont donc situés respectivement à une distance $\underline{\Delta x_m = c\Delta t_m = 2\,\text{cm}}$ et $\underline{\Delta x_M = c\Delta t_M = 8\,\text{cm}}$ à gauche du point N. D'où l'allure suivante :



7. Au point de fixation, la corde ne bouge pas. En l'absence d'onde réfléchie on aurait donc $u_i(L,t) = 0 \quad \forall t$ donc $u_i(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)$, **il n'y a pas d'onde incidente. Cela est absurde donc il existe une onde réfléchie** $u_r(x,t)$ vérifiant

$$u_r(L,t) = -u_i(L,t) \quad \forall t\,.$$

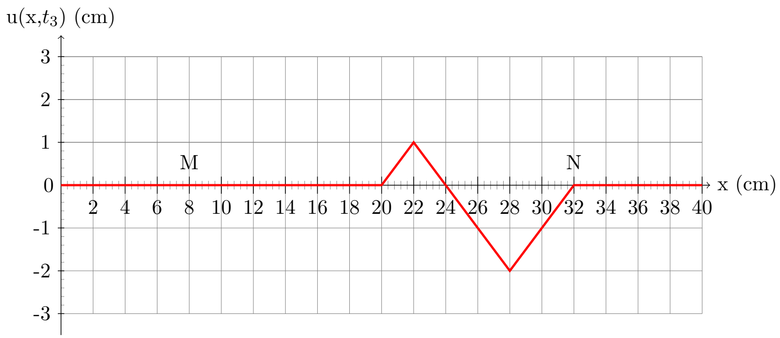
Cette onde se propage dans le sens des x décroissants. On en déduit

$$u_r(x,t) = u_r(L, t + \frac{x-L}{c}) = -u_i(L, t + \frac{x-L}{c}) = -u_i(x_M, t + \frac{x-L}{c} - \frac{L - x_M}{c})$$

d'où

$$\boxed{u_r(x,t) = -u_i\left(x_M, t + \frac{x + x_M - 2L}{c}\right)}.$$

Par conséquent $\boxed{u_r(x,t_4)) = -u_i\left(x_M, \frac{x}{c} + t_{rM}\right)}$ en notant $t_{rM} = t_4 + \frac{x_M - 2L}{c} = \underline{-3\,\text{ms}}$. On en déduit que ce profil spatial s'obtient à partir du profil temporel $u_i(x_M,t)$ par une **translation de 3 ms** vers la droite, suivie d'une **dilatation horizontale de facteur** c (pour passer sur l'axe des x, et qui donne toujours à la perturbation une étendue spatiale de 12 cm) et d'une **symétrie par rapport à l'axe des abscisses** Ox (à cause du signe $-$ devant). En particulier la perturbation débute à la position x_d telle que $\frac{x_d}{c} - t_{rM} = 2\,\text{ms}$ (instant du début de la perturbation incidente en x_M, cf figure énoncé), d'où $\underline{x_d = 20\,\text{cm}}$. D'où l'allure ci-dessous.



I.2. Positionnement des frettes d'une guitare

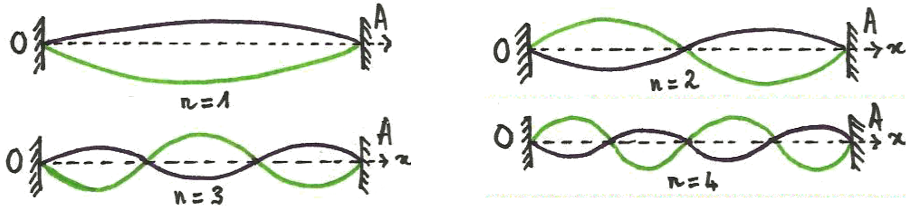
8. Un mode propre de vibration sinusoïdal est une **vibration en régime libre compatible avec les conditions aux limites imposées par le confinement** du milieu de propagation. En l'occurrence, ces conditions sont une absence totale de vibration en O et A donc le mode propre prend la forme d'une **onde stationnaire** (c'est-à-dire qui vibre sur place, sans effet de propagation). Sa forme générale est $u(x,t) = U\,\sin(kx+\varphi)\sin(\omega t+\psi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde angulaire (ou pulsation spatiale) et ω la pulsation temporelle.
Ses nœuds sont espacés de $\frac{\lambda}{2}$, en notant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la période spatiale. L'existence d'un nombre entier de fuseaux $n \in \mathbb{N}^*$ implique alors que

$$\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f_n = n\,\frac{c}{2L}}.$$

La forme des modes propres correspondant à l'absence de mouvement en O ($x = 0$ donc $\varphi = 0$) et en A ($x = L$) est alors

$$\boxed{u_n(x,t) = U\,\sin(k_n x)\sin(2\pi f_n t + \psi)} \quad \text{avec} \quad \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}.$$

9. Le mode n a n fuseaux, donc $n+1$ nœuds. D'où l'allure à deux instants différents :



10. La note entendue correspond à la fréquence du mode fondamental : $\boxed{c = 2Lf_1} = \underline{1,4 \times 10^2\,\text{m.s}^{-1}}$.

11. Cherchons la longueur L' à donner à la corde vibrante pour obtenir la fréquence $f_1' = 2f_1$ avec la même célérité des ondes, pour le mode fondamental $n = 1$:

$$L' = \frac{c}{2f_1'} = \frac{c}{4f_1} \Rightarrow \boxed{L' = \frac{L_{La}}{2}}$$

La frette permettant de monter d'une octave doit donc être placée en plein milieu de la longueur totale OA disponible, donc **à égale distance du sillet de tête et du chevalet**.

12. Pour passer d'un demi-ton au demi-ton supérieur, on multiplie la fréquence par K. En réalisant 12 fois l'opération, on monte d'une octave, c'est-à-dire que la fréquence a été multipliée par 2 :

$$K^{12} = 2 \Rightarrow \boxed{K = 2^{1/12}} \approx \underline{1,059}\,.$$

13. Le La# a une fréquence Kf_1. La longueur de corde nécessaire pour jouer cette note est alors :

$$L_{La\#} = \frac{c}{2Kf_1} = \frac{L_{La}}{K}$$

Ainsi, la distance entre les deux premières frettes s'écrit :

$$\boxed{\Delta x = L_{La} - L_{La\#} = L_{La}\left(1 - \frac{1}{K}\right)} \approx \underline{3,59\,\text{cm}}$$

N.B. : Par le même procédé, on peut calculer facilement la position de la m-ième frette, permettant de monter de m tons :

$$\frac{\Delta x_m}{L_{La}} = 1 - \frac{1}{K^m} = 1 - \frac{1}{2^{m/12}}$$

14. On impose un nœud au quart de la longueur de la corde. Ainsi, on empêche tous les modes n'ayant pas un nœud à cet endroit d'exister, notamment le mode fondamental ainsi que les modes $n = 2$ et $n = 3$. Le premier mode possible est alors $n = 4$ (puis ses multiples entiers $n = 8, 12...$). On obtient donc exactement le même effet en effleurant la corde aux trois-quarts de sa longueur.
La fréquence de vibration de ce mode est alors telle que :

$$L_{La} = 4\frac{c}{2f} \Rightarrow \boxed{f = 2\frac{c}{L_{La}} = 4f_1} \approx \underline{440\,\text{Hz}}$$

On obtient ainsi le La deux octaves au-dessus («La3»).