FILTRAGE ET ONDES

I. Etude d'un filtre *(d'après Centrale II TSI 2010)*

I.1. Etude expérimentale

1. Il y a chaque fois 5 périodes, donc $T_1 = 100\,\text{ms}$, $T_2 = 200\,\mu\text{s}$, $T_3 = 20,0\,\mu\text{s}$, donc

$$\boxed{f_1 = 10,0\,\text{Hz},\ f_2 = 5,00\,\text{kHz},\ f_3 = 50,0\,\text{kHz}}.$$

La tension de sortie est très faible à haute fréquence et importante à basse fréquence. Cela est caractéristique d'un filtre passe-bas.

2. Le rapport des amplitudes donne le gain (cf Fig. 1) $\boxed{G = \frac{0.50\,\text{V}}{1,00\,\text{V}}} = 0,50$.

On peut mesurer le retard temporel de la sortie sur l'entrée en comparant par exemple les instants des zéros montant : $\Delta t = 0.06\,\text{ms}$. Donc $\boxed{\phi = -\omega\Delta t = -2\pi\, f_2\,\Delta t} = -1.9\,\text{rad}$.

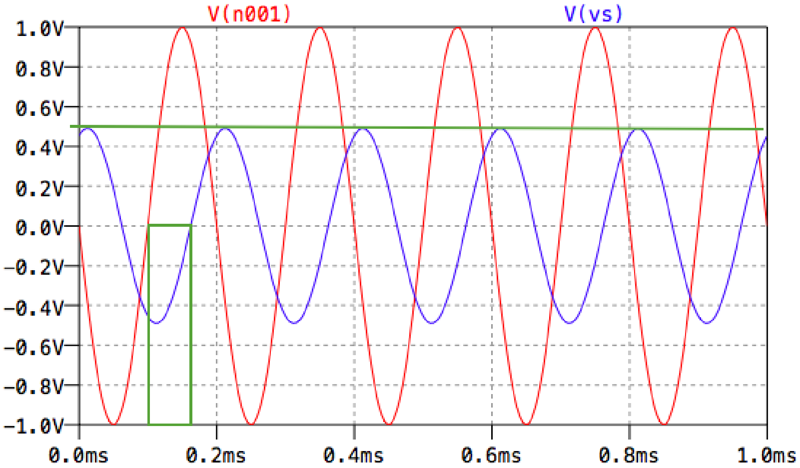


FIGURE 1 – Etude à f_2

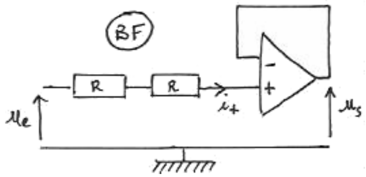
3. On passe de -17dB pour $10\,\text{kHz}$ à -97dB à 1 MHz, c'est-à-dire en $\log 10^6 - \log 10^4 = 2\,\text{décades}$ (cf Fig. 2). La pente de l'asymptote est donc de $\frac{-97--17}{2} = -40\,\text{dB/decade}$: c'est donc un filtre d'ordre 2.

4. On cherche la fréquence pour laquelle le gain en décibel vaut $G_{dB} = G_{dB,\max} - 3,0\,\text{dB} = -3,0\,\text{dB}$. Il vient graphiquement $f_c \approx 4\,\text{kHz}$.

I.2. Etude théorique

5.

À basses fréquences, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. Donc l'intensité i_+ traverse les deux résistances R. Comme $i_+ = 0$, il vient $V_+ = V_e = u_e$. Or $V_s = V_- = V_+$, donc $\boxed{u_s = u_e}$.



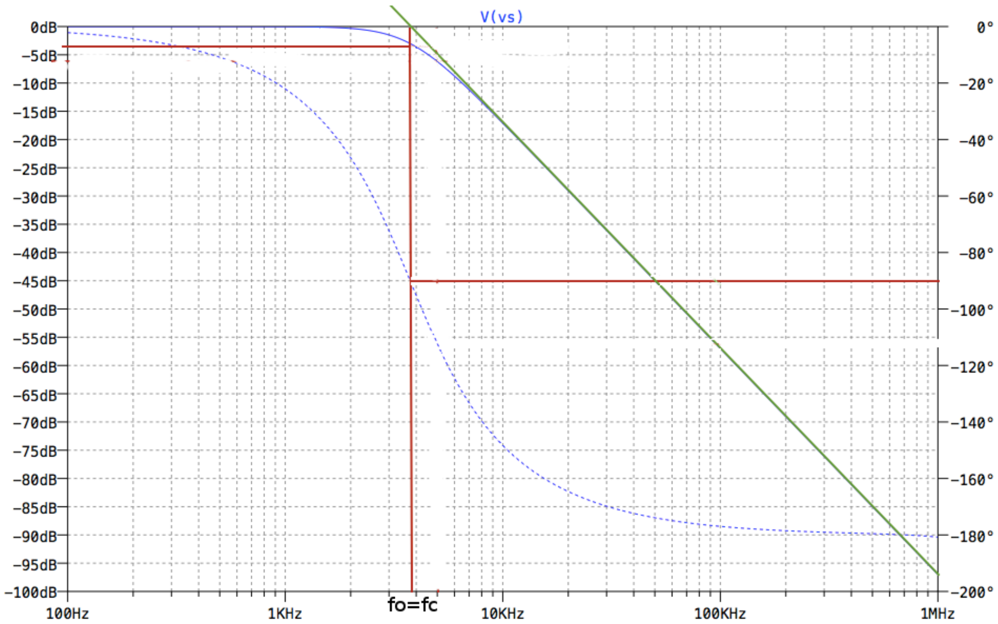
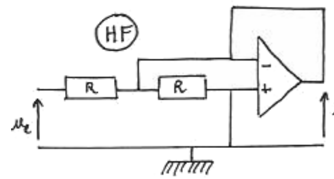


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre

À hautes fréquences, un condensateur se comporte comme un fil. Donc $V_+ = 0$ donc $\boxed{u_s = V_- = V_+ = 0}$.

Il s'agit donc bien d'un **filtre passe-bas**.



6. a) Comme $i_+ = 0$, R et C forme un pont diviseur de tension donc : $\boxed{\underline{V_+} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{V_A}}$.

b) La loi des noeuds en terme de potentiel s'écrit :

$$\frac{\underline{V_E}-\underline{V_A}}{R} + \frac{\underline{V_+}-\underline{V_A}}{R} + j2C\omega(\underline{V_S}-\underline{V_A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2\,(1+j\omega RC)\,\underline{V_A} = \underline{u_e} + \underline{V_+} + 2j\omega RC\,\underline{u_s}}.$$

c) En injectant $V_+ = V_- = u_s$ dans les deux équations ci-dessus, on obtient

$$2\,(1+j\omega RC)^2\,\underline{u_s} = \underline{u_e} + (1+2j\omega RC)\,\underline{u_s} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \left(1+2j\omega RC+2(j\omega RC)^2\right)^{-1}.$$

$$\text{D'où}\quad \underline{H} = \frac{H_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1}\ ,\ \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

7. On a $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ d'où $\boxed{G = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}}$.

8. Basses fréquences : $\boxed{G_{dB} \underset{\frac{\omega}{\omega_0}\to 0}{\longrightarrow} 0}$ donc l'asymptote est horizontale confondue avec l'axe des abscisses pour $\frac{f}{f_0} \ll 1$. C'est cohérent avec le tracé expérimental.

Haute fréquence : $\boxed{G_{dB} \approx -20\log\left(\frac{f^2}{f_0^2}\right) = 40\log(f_0) - 40\log f}$. L'asymptote est **une droite de pente** $\underline{-40\,\text{dB/decade}}$.

Le point d'intersection des deux asymptotes est en $f = f_0$. On peut donc trouver f_0 graphiquement. On trouve $\boxed{f_0 \approx 4\,\text{kHz}}$.

On retrouve bien que $f_0 = f_c$ comme attendu théoriquement pour cette valeur du facteur de qualité Q.

9. On a $\underline{H}(f_0) = \frac{1}{\sqrt{2}j}$ donc $\boxed{\phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}} = \underline{-90°}$, ce qui est cohérent avec le tracé expérimental.

I.3. Application du filtre : démodulation d'un signal en amplitude

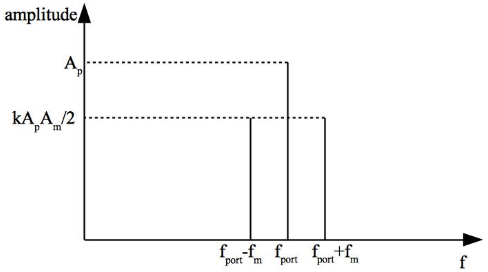
10. En linéarisant $s(t)$, on obtient trois composantes spectrales (3 harmoniques) :

$$s(t) = A_p\cos(2\pi f_p t) + \frac{kA_pA_m}{2}\left(\cos(2\pi(f_m + f_p)t) + \cos(2\pi(f_p - f_m)t)\right)$$

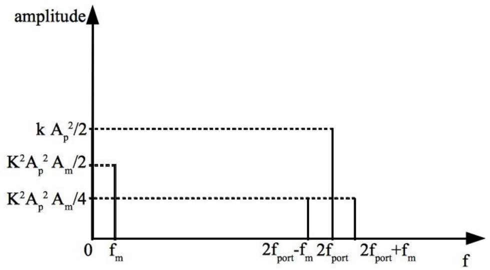
En linéarisant $s'(t) = kA_p^2[1 + kA_m\cos(2\pi f_m t)]\cos^2(2\pi f_p t)$, on obtient 4 harmoniques :

$$s'(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{k^2A_p^2A_m}{2}\cos(2\pi f_m t) + \frac{kA_p^2}{2}\cos(4\pi f_p t) + \frac{k^2A_p^2A_m}{4}\left(\cos(2\pi(f_m + 2f_p)t) + \cos(2\pi(2f_p - f_m)t)\right)$$

On en déduit les deux spectres en amplitude respectifs :



Spectre du signal modulé $s(t)$.



Spectre du signal $s'(t)$.

11. Le filtre passe-bas doit permettre de ne garder que le signal de fréquence f_m et la valeur moyenne. Grâce à cette contrainte de 80 dB, on atténue d'un facteur 10^4 les signaux qu'on ne désire pas garder situés au voisinage de la fréquence $2f_p$, ce qui les élimine totalement. On veut donc :

$$G(2f_p) = 10^{-4} \Leftrightarrow 1 + \frac{16f_p^4}{f_0^4} = 10^8 \Leftrightarrow 2f_p \approx 10^2 f_0 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{10^2}{4\pi\sqrt{2}Cf_p}} = \underline{30\,\text{k}\Omega}.$$

12. Dans ces conditions, et compte-tenu du fait que $f_m \ll f_c = f_0$, le gain et le déphasage qui s'appliquent respectivement à la composante continue et à la fréquence f_m sont : $G(0) = |H_0| = 1 \approx G(f_m)$ et $\varphi(0) = \arg(1) = 0 \approx \varphi(f_m)$. Finalement, **on conserve les deux premières composantes de $s'(t)$ intactes** à la sortie du filtre (cad celles de plus basses fréquences), ce qui donne $\boxed{s''(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{k^2A_p^2A_m}{2}\cos(2\pi f_m t)}$.

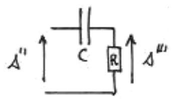
13. On veut maintenant récupérer uniquement le signal modulant, donc la composante de fréquence f_m. Il faut concevoir un filtre passe-haut. À l'aide de dipôles de type R, L et C, différents choix sont possibles :

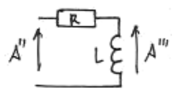
i. un circuit $R - C$ série en prenant la tension de sortie sur la résistance (filtre d'ordre 1) :

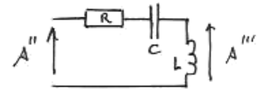
ii. un circuit $R - L$ série en prenant la tension de sortie sur la bobine (filtre d'ordre 1) :

iii. un circuit $R - L - C$ série en prenant la tension de sortie sur la bobine (filtre d'ordre 2) :

iv. d'autres filtres passifs plus compliqués, ou des filtres actifs...

i. 

ii. 

iii. 

Avec la première solution, la fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ et on veut $f_c \ll f_m \Leftrightarrow \boxed{RC \gg \frac{1}{2\pi f_m}}$. On doit pouvoir transmettre des fréquences sonores dans la bande [50 Hz ;5 kHz], ce qui impose $\underline{RC \gg 3\times 10^{-3}\,\text{s}}$. Cela peut être obtenu par exemple avec $\underline{R = 30\,\text{k}\Omega}$ et $\underline{C = 1\,\mu\text{F}}$ ce qui donne $\underline{RC = 3\times 10^{-2}\,\text{s}}$.

II. Piscine à vagues

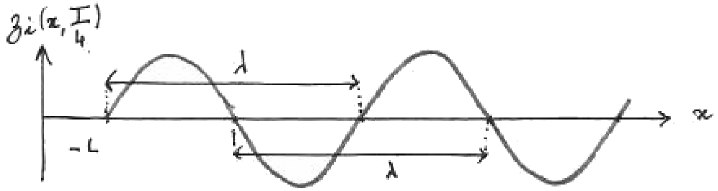
II.1. Utilisation d'une plaque oscillante

1. **a)** On a $\boxed{[\rho] = M.L^{-3}}$ d'où $[c^2] = L^2.T^{-2} = \frac{L.[A]}{M.L^{-1}}$ d'où $\boxed{[A] = M.T^{-2}}$.
La constante de tension superficielle représente une ***énergie par unité de surface****.*

b) On a alors $\boxed{H = \dfrac{c^2}{g}} = \underline{1,6\,\mathrm{m}}$.

2. **a)** L'onde incidente se translate (sans déformation) vers la droite depuis $x = -L$, donc $z_i(x,t)$ est la perturbation vue en $x = -L$ à l'instant antérieur $t - \frac{x+L}{c}$, d'où $\boxed{z_i(x,t) = Z_m \cos(\omega t - k(x+L))}$, en posant $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$ le nombre d'onde angulaire. On a bien $z_i(-L,t) = Z_m \cos(\omega t)$.

b) Comme $\omega\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\boxed{z_i(x, \frac{T}{4}) = Z_m \sin(k(x+L))}$. La fonction n'est pas définie pour $x < -L$...



3. On a $z_i(0,t) = Z_m \cos(\omega t - kL)$ donc $z_r(0,t) = Z_{mr} \cos(\omega t - kL)$. Comme l'onde réfléchie se propage en sens inverse depuis $x = 0$, ceci conduit à $z_r(x,t) = Z_{mr} \cos(\omega(t + \frac{x}{c}) - kL) = Z_{mr} \cos(\omega t + k(x - L))$.
Pour que l'amplitude des vibrations temporelles soit maximale en $x = 0$, cela nécessite que

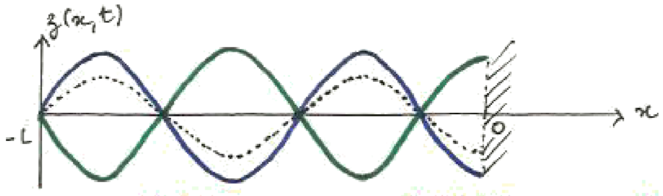
$$\forall t, \quad \frac{\partial(z_i + z_r)}{\partial x}(x = 0, t) = 0 \Leftrightarrow \forall t, \quad k(Z_m - Z_{mr}) \cos(\omega t - kL) = 0 \Leftrightarrow Z_m = Z_{mr}\,.$$

Ainsi l'onde réfléchie a la même amplitude que l'onde incidente, donc $\boxed{z_r(x,t) = Z_m \cos(\omega t + k(x - L))}$.

4. **a)** On peut factoriser la somme, ce qui donne $\boxed{z(x,t) = 2Z_m \cos(kx) \cos(\omega t - kL)}$. Les variables x et t sont découplées donc cette onde n'est pas progressive. Elle vibre « sur place », il s'agit d'une **onde stationnaire**.

b) On a donc $\cos(-kL) = 0$, donc $kL = (n + \frac{1}{2})\,\pi$ c'est-à-dire $\boxed{L = (2n+1)\,\dfrac{\lambda}{4}}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Cela s'interprète graphiquement simplement : puisque l'onde commence par un nœud et termine par un ventre, **la longueur totale est décomposée comme un nombre impair de quarts de longueur d'onde**.

c) S'il y a 4 nœuds, alors $n = 3$ et $L = 7\,\frac{\lambda}{4}$. Ci-dessous on représente la surface à deux instants correspondant aux positions extrêmes de chaque point de la surface (bleu et vert), et un instant quelconque (noir pointillé).



d) L'expression précédente s'écrit $\boxed{L = \frac{7}{4}\,cT} = \underline{21\,\mathrm{m}}$.

II.2. Utilisation d'injecteurs

5. Les injecteurs sont placés au niveau du premier ventre consécutif à celui du bord, donc $d = \frac{\lambda}{2}$. Or il y a deux fuseaux entiers et deux demi-fuseaux, donc $L = \frac{3}{2}\lambda$. Par conséquent $\boxed{d = \dfrac{L}{3}}$.

6. **a)** On a $L = \frac{3c}{2f}$ donc $\boxed{f = \dfrac{3c}{2L}} = \underline{0,50\,\mathrm{Hz}}$.

b) Deux ventres consécutifs sont en opposition de phase, donc les jets doivent l'être aussi, c'est-à-dire **déphasés de** π. D'un point de vue temporel ils sont décalés de $\underline{\frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = 1,0\,\mathrm{s}}$.

7. Avec un nœud de plus, on a un ventre de plus donc un jet supplémentaire, donc **3 jets au total**.
Les jets sont espacés de $\boxed{d = \dfrac{L}{4}}$.
Les deux jets extrêmes sont en phase, et le jet central est déphasé de π par rapport aux autres.