SESSION 2017

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

Partie I - Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

On notera $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A - 1) On sait que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Vérifions que ces sous-espaces sont orthogonaux l'un à l'autre.

Soit $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A, S\rangle = \mathrm{Tr}(A^T S) = \mathrm{Tr}(-AS) = -\mathrm{Tr}(AS) = -\mathrm{Tr}(SA) = -\mathrm{Tr}(S^T A) = -\langle S, A\rangle = -\langle A, S\rangle$$

et donc $2\langle A, S\rangle = 0$ puis $\langle A, S\rangle = 0$. Ainsi, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ puis $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ par égalité des dimensions.

I.A - 2) Soit $(A, S) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A - A_s = A_a \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ et $A_s - S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Pythagore

$$\|A - S\|_2^2 = \|(A - A_s) + (A_s - S)\|_2^2 = \|A - A_s\|_2^2 + \|A_s - S\|_2^2 \geqslant \|A - A_s\|_2^2$$

ou encore $\|A - S\|_2 \geqslant \|A - A_s\|_2$ avec égalité si et seulement si $\|A_s - S)\|_2 = 0$ ce qui équivaut à $S = A_s$.

I.B - Valeurs propres de A_s

I.B - 1) La matrice A_s est symétrique réelle et donc ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ sont réelles d'après le théorème spectral.

• Supposons que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A_s X \geqslant 0$ (resp. $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A_s X > 0$). Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A_s puis X un vecteur propre associé (en particulier, $X \neq 0$). Alors,

$$X^T A_s X = X^T(\lambda X) = \lambda\|X\|_2^2.$$

Par suite, $\lambda\|X\|_2^2 \geqslant 0$ (resp. $\lambda\|X\|_2^2 > 0$). Puisque $\|X\|_2^2 > 0$, on en déduit $\lambda \geqslant 0$ (resp. $\lambda > 0$). Ainsi, $A_s \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

• Supposons que $A_s \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ (de sorte que $P^{-1} = P^T$) et $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^+)$ telles que $A_s = PDP^{-1}$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, posons $P^{-1}X = X' = (x_i')_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X^T A_s X = X^T PDP^{-1}X = \left(P^{-1}X\right)^T D\left(P^{-1}X\right) = X'^T DX' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \geqslant 0.$$

Donc $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A_s X \geqslant 0$.

Supposons de plus $A_s \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Puisque P est inversible, $X' = P^{-1}X \neq 0$ et donc l'un au moins des x_i' est non nul. Mais alors

$$X^T A_s X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 > 0$$

car tous les $\lambda_i x_i'^2$ sont positifs, l'un d'entre eux au moins étant strictement positif. Donc, $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A_s X > 0$.

I.B - 2) Soient λ une valeur propre réelle de A puis X un vecteur propre unitaire associé.

$$\lambda = \lambda\|X\|_2^2 = \lambda X^T X = X^T AX = X^T A_s X + X^T A_a X.$$

Ensuite, $X^TA_aX = -X^TA_a^TX = -(A_aX)^TX = -\left((A_aX)^TX\right)^T = -X^TA_aX$ et donc $X^TA_aX = 0$. Avec les notations de la question précédente, il reste donc

$$\lambda = X^TA_sX = X'^TDX = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i'^2.$$

Puisque P est une matrice orthogonale, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \|X'\|_2^2 = \|X\|_2^2 = 1$ et donc

$$\lambda \geqslant \mathrm{Min}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}\sum_{i=1}^{n} x_i'^2 = \mathrm{Min}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

et de même $\lambda \leqslant \mathrm{Max}\{\lambda_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On a montré que

$$\mathrm{Min}\ \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leqslant \lambda \leqslant \mathrm{Max}\ \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s).$$

Supposons de plus $A_s \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Min}\ \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) > 0$ et donc toute valeur propre réelle de A est strictement positive. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

I.B - 3) a) On pose $A_s = PDP^{-1}$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(]0,+\infty[)$. Soit $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(]0,+\infty[)$ puis $B = P\Delta P^{-1}$.
B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et donc $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, $B^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A_s$. Ceci montre l'existence de B.

$B = P\Delta P^{-1}$ désignant la matrice précédente, soit $B' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B'^2 = A_s$. B' est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(B')} E_\lambda(B')$. De même, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A_s)} E_\lambda(A_s)$.

Mais pour chaque λ de B', $E_\lambda(B') \subset E_{\lambda^2}(A_s)$ car $B'X = \lambda X \Rightarrow A_sX = B^2X = \lambda^2X$ et de plus, les λ éléments de $\mathrm{Sp}(B')$ étant strictement positifs, les λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B')$, sont deux à deux distincts. Ceci montre que le spectre de A_s est exactement l'ensemble des λ^2, $\lambda \in \mathrm{Sp}(B')$ et que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(B')$, $E_\lambda(B') = E_{\lambda^2}(A_s)$.

Dit autrement, la matrice $P^{-1}B'P$ est une matrice diagonale $D' = \mathrm{diag}(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où les μ_i sont strictement positifs.. Enfin,

$$B'^2 = A_s \Leftrightarrow PD'^2P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow D'2 = D \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mu_i^2 = \lambda_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i} \Leftrightarrow D' = \Delta \Leftrightarrow B' = B.$$

Ceci montre l'unicité de B.

b) Soit $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Puisque $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, B est inversible et on peut poser $Q = B^{-1}A_aB^{-1}$.

$Q^T = \left(B^{-1}A_aB^{-1}\right)^T = \left(B^T\right)^{-1}A_a^T\left(B^T\right)^{-1} = -B^{-1}A_aB^{-1} = -Q$ et donc $Q \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(A_s + A_a) = \det\left(B^2 + A_a\right) = \det\left(B\left(I_n + B^{-1}A_aB^{-1}\right)B\right) = \det(B)\det(I_n + Q)\det(B)\\ &= \det\left(B^2\right)\det(I_n + Q) = \det(A_s)\det(I_n + Q).\end{aligned}$$

La matrice Q convient.

c) Vérifions que $\det(I_n + Q) \geqslant 1$.

Soit λ une valeur propre de Q dans $\mathbb{C}$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Puisque Q est antisymétrique réelle,

$$\lambda\overline{X}^TX = \overline{X}^T(\lambda X) = \overline{X}^TQX = -\overline{X}^T\overline{Q}^TX = -\left(\overline{QX}\right)^TX = -\overline{\lambda}\,\overline{X}^TX$$

et donc $\left(\lambda + \overline{\lambda}\right)\overline{X}^TX = 0$ avec $\overline{X}^TX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 > 0$. On en déduit que $\lambda + \overline{\lambda} = 0$ puis que $\lambda \in i\mathbb{R}$. Ainsi, les valeurs propres de Q sont imaginaires pures. En particulier, la seule valeur propre réelle possible de Q est 0.

Autre solution : $\left(Q^2\right)^T = (-Q)(-Q) = Q^2$ et donc Q^2 est symétrique réelle. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TQ^2X = -(QX)^TQX = -\|QX\|_2^2 \leqslant 0$ et donc Q^2 est symétrique réelle négative. Si λ est une valeur propre réelle de Q dans $\mathbb{C}$, alors λ^2 est une valeur propre de Q^2 dans $\mathbb{C}$ et donc λ^2 est un réel négatif puis λ est un imaginaire pur.

Le déterminant de $I_n + Q$ est le produit des valeurs propres de $I_n + Q$ qui sont les $1 + \lambda$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(Q)$. La valeur propre éventuelle 0 de Q fournit la valeur propre éventuelle 1 de $I_n + Q$. Sinon, puisque Q et donc $I_n + Q$ sont réelles, pour tout $\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ valeur propre éventuelle de Q, $1 + \overline{\lambda}$ est valeur propre de $I_n + Q$ avec le même ordre de multiplicité que $1 + \lambda$.

On regroupe les éventuels conjugués deux à deux. Le déterminant de $I_n + Q$ est alors le produit d'un nombre de 1 et de nombres réels de la forme $(1+\lambda)\left(1+\overline{\lambda}\right) = (1+ix)(1-ix) = 1+x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Tous les facteurs de ce produit sont supérieurs ou égaux à 1 et donc $\det\left(I_n + Q\right) \geqslant 1$.

Puisque $A_s \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det\left(A_s\right) > 0$ et donc

$$\det(A) = \det\left(A_s\right) \times \det\left(I_n + Q\right) \geqslant \det\left(A_s\right) \times 1 = \det\left(A_s\right).$$

I.B - 4) Vérifions que $A\left(A^{-1}\right)_s A^T = A_s$. $A = A_s + A_a$. Mais d'autre part,

$$A = A\left(A^{-1}\right)^T A^T = A\left(\left(A^{-1}\right)_s + \left(A^{-1}\right)_a\right)^T A^T = A\left(A^{-1}\right)_s A^T - A\left(A^{-1}\right)_a A^T.$$

Maintenant, $A\left(A^{-1}\right)_s A^T$ est symétrique (car $\left(A\left(A^{-1}\right)_s A^T\right)^T = A\left(A^{-1}\right)_s A^T$) et $A\left(A^{-1}\right)_a A^T$ est anti-symétrique. Par unicité de la décomposition, $A\left(A^{-1}\right)_s A^T = A_s$. Mais alors

$$\det\left(A_s\right) = \det\left(A\left(A^{-1}\right)_s A^T\right) = (\det(A))^2 \det\left(\left(A^{-1}\right)_s\right).$$

I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C - 1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A_s puis X un vecteur propre unitaire associé. Déjà,

$$X^T A_a X = -X^T A_a^T X = -\left(A_a X\right)^T X = -\left(\left(A_a X\right)^T X\right)^T = -X^T A_a X$$

et donc $X^T A_a X = 0$ puis

$$X^T A X = X^T A_s X + X^T A_a X = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda.$$

Par suite, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \left|X^T A X\right| = |\langle X, AX\rangle| \\
&\leqslant \|X\|\|AX\| = \|X\|^2 \text{ (car } A \in O_n(\mathbb{R})) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(A_s\right) \subset [-1, 1]$.

I.C - 2) Les matrices orthogonales A de format 2 sont de deux types disjoints.

- $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $A_s = \cos\theta I_n$ puis $\mathrm{Sp}(A) = (\cos\theta, \cos\theta)$.
- $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $A_s = A$ puis $\mathrm{Sp}\left(A_s\right) = \mathrm{Sp}(A) = (1, -1)$.

Donc, par exemple, $S = \mathrm{diag}(1, 0)$ est une matrice symétrique dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$ et qui n'est la partie symétrique d'aucune matrice orthogonale de format 2.

I.C - 3) a) Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et que pour tout valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, la dimension de $E_\lambda(S)$ est paire. Puisque S est diagonalisable, la dimension de chaque sous-espace propre est l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante et donc les éventuelles valeurs propres éléments de $]-1, 1[$ peuvent se regrouper par paires de valeurs propres égales.
D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$ et D est de la forme $D = \mathrm{diag}\left(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \cos\left(\theta_1\right), \cos\left(\theta_1\right), \cos\left(\theta_2\right), \cos\left(\theta_2\right), \ldots, \cos\left(\theta_k\right), \cos\left(\theta_k\right)\right)$.

Soit $A' = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & \ldots & & & & & & & \ldots & 0 \\
0 & \ddots & & & & & & & & & \vdots \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & \cos\left(\theta_1\right) & -\sin\left(\theta_1\right) & & & \\
 & & & & & & \sin\left(\theta_1\right) & \cos\left(\theta_1\right) & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & 0 & \cos\left(\theta_k\right) & -\sin\left(\theta_k\right) \\
0 & \ldots & & & & & & & \ldots & 0 & \cos\left(\theta_k\right) & -\sin\left(\theta_k\right)
\end{array}\right)$ puis $A = PA'P^{-1}$.

A' est une matrice orthogonale telle que $A'_s = D$ et donc A est une matrice orthogonale telle que $A_s = S$.

b) Soit $A \in O_n(\mathbb{R}$ telle que $A_s = S$. On sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est du type A'. Puisque $A = A_s + A_a$, $P^{-1}AP = P^{-1}A_sP + P^{-1}A_aP$ avec $P^{-1}A_sP \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}A_aP \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc, toujours avec les notations de la question précédente,

$$D = A'_s = \left(P^{-1}AP\right)_s = P^{-1}A_sP = P^{-1}SP$$

puis $S = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}\left(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \cos(\theta_1), \cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_2), \ldots, \cos(\theta_k), \cos(\theta_k)\right)$. Les valeurs propres de S qui sont les valeurs propres de D sont toutes dans $[-1, 1]$ (ce qui était déjà connu après la question I.C.1) et les valeurs propres éléments de $]-1, 1[$ éventuelles sont d'ordre pair. Mais alors, puisque S est diagonalisable, la dimension d'un sous-espace propre associé à une valeur propre élément de $]-1, 1[$ éventuelle est paire.

Partie II - Matrices F*-singulières*

II.A - Cas où F est un hyperplan

II.A - 1) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière, il existe $X \in E_n \setminus \{0\}$ tel que $AX = 0$ Mais alors, il existe $X \in E_n \setminus \{0\}$ tel que pour tout $Z \in E_n$, $Z^TAX = 0$.

Inversement, supposons qu'il existe $X \in E_n \setminus \{0\}$ tel que pour tout $Z \in E_n$, $Z^TAX = 0$. Alors, $\forall Z \in E_n$, $\langle Z, AX\rangle = 0$ puis $AX \in E_n^{\perp} = \{0\}$. Ainsi, X est un vecteur non nul du noyau de A et donc A est singulière.

II.A - 2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
A \text{ est } H\text{-singulière} &\Leftrightarrow \exists X \in H \setminus \{0\}/\ \forall Z \in H,\ Z^TAX = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists X \in H \setminus \{0\}/\ \forall Z \in H,\ \langle A, AX\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists X \in H \setminus \{0\}/\ AX \in H^{\perp} = \text{Vect}(N) \\
&\Leftrightarrow \exists X \in H \setminus \{0\}/\ \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ AX = \lambda N
\end{aligned}$$

II.A - 3) Si A est H-singulière, soient $X \in H \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $AX = \lambda N$. Soit $X' = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Un calcul par blocs fournit

$$A_NX' = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda N \\ \langle N, X\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

X' est un vecteur non nul du noyau de A_N et donc A_N est singulière.

Inversement, supposons que la matrice A_N soit singulière. Soit $X' = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix}$, $X \in E_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un vecteur non nul du noyau de cette matrice. Alors, $AX = \lambda N$ et $\langle N, X\rangle = 0$. Donc, $X \in N^{\perp} = H$. D'autre part, si $X = 0$, alors $\lambda = 0$ puis $X' = 0$ ce qui n'est pas. Donc, X est un élément non nul de H tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda N$. On en déduit que A est H-singulière.

II.A - 4) Un calcul par blocs fournit

$$A_NB = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 + NB_3 & AB_2 + NB_4 \\ N^TB_1 & N^TB_2 \end{pmatrix}.$$

On prend $B_2 = -A^{-1}N$, $B_1 = A^{-1}$, $B_3 = 0$ et $B_4 = 1 \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$. On obtient

$$A_NB = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^TA^{-1} & -N^TA^{-1}N \end{pmatrix}.$$

II.A - 5) Un calcul par blocs fournit $\det(B) = \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$ et $\det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^TA^{-1} & -N^TA^{-1}N \end{pmatrix} = -N^TA^{-1}N$. L'égalité $\det(A_N)\det(B) = \det\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^TA^{-1} & -N^TA^{-1}N \end{pmatrix}$ fournit $\det(A_N) = -N^TA^{-1}N\det(A)$.

II.A - 6) Supposons que $\det\left(\left(A^{-1}\right)_s\right) = 0$. Soit N un vecteur unitaire du noyau de $\left(A^{-1}\right)_s$. On a déjà vu que $N^T\left(A^{-1}\right)_a N = 0$ et donc

$$N^TAN = N^T\left(A^{-1}\right)_s N + N^T\left(A^{-1}\right)_a N = N^T0 + 0 = 0.$$

La question précédente montre que $\det(A_N) = 0$ et la question II.A.3 montre que A est H-singulière où $H = N^{\perp}$.

II.A - 7) Si $\det(A_s) = 0$, alors $(\det(A))^2\det\left(\left(A^{-1}\right)_s\right) = 0$ d'après la question I.B.4 puis $\det\left(\left(A^{-1}\right)_s\right) = 0$ car A est inversible. La question précédente montre qu'il existe un hyperplan H telle que A est H-singulière.

II.A - 8) Supposons par l'absurde qu'il existe un hyperplan H tel que A soit H-singulière. Soit N un vecteur unitaire normal à H. Il existe un vecteur X de $H \setminus \{0\}$ et un réel λ tel que $AX = \lambda N$. Mais alors

$$X^TA_sX = X^TA_sX + X^TA_aX = X^TAX = \lambda X^TN = \lambda\langle X, N\rangle = 0.$$

Mais ceci est impossible car A_s est définie, positive et X est non nul. Donc, pour tout hyperplan H, A est H-régulière.

II.B - Exemple

II.B - 1) $\det(A(\mu)) = (2-\mu)(2-\mu+\mu-1) + (-1+\mu) = 1 \neq 0$. Donc, $A(\mu)$ est inversible pour tout réel μ.

II.B - 2) $(A(\mu))_s = \dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu-1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu & -1 \\ \mu & \mu-1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \dfrac{\mu}{2} \\ -1 & 2-\mu & \dfrac{\mu}{2}-1 \\ \dfrac{\mu}{2} & \dfrac{\mu}{2}-1 & 1 \end{pmatrix}$.

En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\det\left((A(\mu))_s\right) &= (2-\mu)\left(-\frac{\mu^2}{4}+1\right) + \left(-\frac{\mu^2}{4}+\frac{\mu}{2}-1\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu^2}{2}-\frac{3\mu}{2}+1\right) \\ &= \frac{\mu^3}{2} - \frac{3\mu^2}{2} + 1 = (\mu-1)\left(\frac{\mu^2}{2}-\mu-1\right) = \frac{1}{2}(\mu-1)\left(\mu^2-2\mu-2\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mu-1)\left(\mu-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(\mu-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)\end{aligned}$$

Donc, $(A(\mu))_s$ est singulière si et seulement si $\mu \in \left\{1, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right\}$.

II.B - 3) $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $A(1) = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Alors, $A(1)^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

$$\begin{aligned} A(1) = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = -e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_2 = e_1 - e'_1 \\ e_3 = -e_1 + e'_3 \\ e'_2 = -e_1 + (e_1 - e'_1) - (-e_1 + e'_3) \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e_1 = e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_2 + e'_3 \\ e_3 = -e'_1 - e'_2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

et donc $A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\left(A(1)^{-1}\right)_s = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un vecteur unitaire du noyau de $\left(A(1)^{-1}\right)_s$ est $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour ce vecteur N, on a $N^TA^{-1}N = N^T\left(A^{-1}\right)_sN = 0$ puis $\det(A_N) = 0$ d'après la question II.A.5 et donc $A(1)$ est $N^\perp$-singulière.

En résumé, $A(1)$ est H-singulière où H est le plan d'équation $z = 0$.

II.C - Cas où F est de dimension $n-2$

II.C - 1) A est F-singulière si et seulement si il existe $X \in F\setminus\{0\}$ tel que $AX \in F^\perp$ ce qui équivaut à l'existence de $X \in F\setminus\{0\}$ et de deux réels λ_1 et λ_2 tels que $AX = \lambda_1N_1 + \lambda_2N_2$.

II.C - 2) Si A est F-singulière, soit $X \in F\setminus\{0\}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $AX = \lambda_1N_1 + \lambda_2N_2$. Soit $X' = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+2,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned} A_N X' &= \begin{pmatrix} A & N_1 & N_2 \\ N_1^T & 0 & 0 \\ N_2^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX - \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \langle N_1, X\rangle \\ \langle N_2, X\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

X' est un vecteur non nul du noyau de A_N et donc A_N est singulière.

Réciproquement, si A_N est singulière, il existe $X' = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_N X' + 0$ ou encore tel que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$ et $\langle N_1, X\rangle = \langle N_2, X\rangle = 0$.
$X \in (N_1, N_2)^\perp = F$. De plus, si $X = 0$, alors $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0$ puis $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ car (N_1, N_2) est libre et finalement $X' = 0$ ce qui n'est pas. Donc, X est un vecteur non nul de F tel qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$. On en déduit que A est F-singulière.

II.C - 3) Soit $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$.

$$A_N B = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix}.$$

II.C - 4) Un calcul par blocs fournit $\det(B) = \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$ puis

$$\det(A_N) = \frac{1}{\det(B)} \det(I_n) \det\left(-N^T A^{-1} N\right) = \det(A) \times (-1)^2 \det\left(N^T A^{-1} N\right) = \det\left(N^T A^{-1} N\right) \det(A).$$

II.C - 5) On pose $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

$$P^T A^{-1} P = \begin{pmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^T A \\ P_2^T A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^T A P_1 & P_1^T A P_2 \\ P_2^T A P_1 & P_2^T A P_2 \end{pmatrix}$$

où les $P_i^T A P_j$ sont des réels. Posons $P'_1 = A^{-1} P_1$ et $P'_2 = A^{-1} P_2$ puis $P' = \begin{pmatrix} P'_1 & P'_2 \end{pmatrix}$. Puisque A^{-1} est inversible, $P' \in \mathscr{G}_{n,2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow P \in \mathscr{G}_{n,2}(\mathbb{R})$. Ensuite, pour $(i, j) \in \{1, 2\}^2$,

$$P_i'^T A P'_j = \left(A^{-1} P_2\right)^T A A^{-1} P_j = P_2^T \left(A^{-1}\right)^T P_j = \left(P_2^T \left(A^{-1}\right)^T P_j\right)^T = P_j^T A^{-1} P_i$$

et donc

$$\begin{aligned} \det\left(P'^T A P'\right) &= \det \begin{pmatrix} P_1'^T A P'_1 & P_1'^T A P'_2 \\ P_2'^T A P'_1 & P_2'^T A P'_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(P_1'^T A P'_1\right)\left(P_2'^T A P'_2\right) - \left(P_2'^T A P'_1\right)\left(P_1'^T A P'_2\right) \\ &= \left(P_1^T A^{-1} P_1\right)\left(P_2^T A^{-1} P_2\right) - \left(P_1^T A^{-1} P_2\right)\left(P_2^T A^{-1} P_1\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} P_1^T A^{-1} P_1 & P_1^T A^{-1} P_2 \\ P_2^T A^{-1} P_1 & P_2^T A^{-1} P_2 \end{pmatrix} \\ &= \det\left(P^T A^{-1} P\right). \end{aligned}$$

En particulier, $\det\left(P'^T A P'\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(P^T A^{-1} P\right) = 0$.

II.C - 6) $\det\left(N'^T A N'\right) = \det \begin{pmatrix} N_1'^T A N'_1 & N_1'^T A N'_2 \\ N_2'^T A N'_1 & N_2'^T A N'_2 \end{pmatrix} = \left(N_1'^T A N'_1\right)\left(N_2'^T A N'_2\right) - \left(N_2'^T A N'_1\right)\left(N_1'^T A N'_2\right)$. Ensuite,

- $\left(N_1'^T A N'_1\right) = \left(N_1'^T A_s N'_1\right) + \left(N_1'^T A_a N'_1\right) = \left(N_1'^T A_s N'_1\right)$ et de même $\left(N_2'^T A N'_2\right) = \left(N_2'^T A_s N'_2\right)$ puis $\left(N_1'^T A N'_1\right)\left(N_2'^T A N'_2\right) = \left(N_1'^T A_s N'_1\right)\left(N_2'^T A_s N'_2\right)$.
- $\left(N_2'^T A_a N'_1\right) = \left(N_2'^T A_a N'_1\right)^T = -\left(N_1'^T A_a N'_2\right)$ et donc

$$\begin{aligned} \left(N_2'^T A N'_1\right)\left(N_1'^T A N'_2\right) &= \left(\left(N_2'^T A_s N'_1\right) + \left(N_2'^T A_a N'_1\right)\right)\left(\left(N_1'^T A_s N'_2\right) + \left(N_1'^T A_a N'_2\right)\right) \\ &= \left(\left(N_1'^T A_s N'_2\right) - \left(N_1'^T A_a N'_2\right)\right)\left(\left(N_1'^T A_s N'_2\right) + \left(N_1'^T A_a N'_2\right)\right) \\ &= \left(N_1'^T A_s N'_2\right)^2 - \left(N_1'^T A_a N'_2\right)^2 \end{aligned}$$

et finalement, $\det\left(N'^{T}AN'\right) = \left(N_1'^{T}A_sN_1'\right)\left(N_2'^{T}A_sN_2'\right) - \left(N_1'^{T}A_sN_2'\right)^2 + \left(N_1'^{T}A_aN_2'\right)^2$.

II.C - 7) On suppose que $A_s \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'application $\varphi\ :\ (X,Y) \mapsto X^TA_sY$ est bilinéaire, symétrique ($X^TA_sY = \left(X^TA_sY\right)^T = Y^TA_sX$), définie, positive car A_s est définie, positive. Donc, φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, la famille (N_1', N_2') étant libre,

$$\left(N_1'^{T}A_sN_1'\right)\left(N_2'^{T}A_sN_2'\right) - \left(N_1'^{T}A_sN_2'\right)^2 = \varphi\left(N_1', N_1'\right)\varphi\left(N_2', N_2'\right) - \varphi\left(N_1', N_2'\right)^2 > 0$$

et donc $\det\left(N^TA^{-1}N\right) = \det\left(N'^{T}AN'\right) = \left(N_1'^{T}A_sN_1'\right)\left(N_2'^{T}A_sN_2'\right) - \left(N_1'^{T}A_sN_2'\right)^2 + \left(N_1'^{T}A_aN_2'\right)^2 \geqslant \left(N_1'^{T}A_sN_1'\right)\left(N_2'^{T}A_sN_2'\right) - \left(N_1'^{T}A_sN_2'\right)^2 > 0$.

II.C - 8) On suppose que $A_s \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, pour tout $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{G}_{n,2}(\mathbb{R})$,

$$\det\left(A_N\right) = \det\left(N^TA^{-1}N\right)\det(A) \neq 0,$$

et donc A n'est pas $(N_1, N_2)^{\perp}$-singulière. On a montré que pour tout sous-espace F de dimension $n-2$, A est F-régulière.

II.D - Exemple

II.D - 1) $A(1)_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ et $A(1)_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On choisit déjà pour N_1' un vecteur non nul du noyau de $A(1)_s$. On peut prendre $N_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors, $\left(N_1'^{T}A_sN_1'\right) = 0$ et $\left(N_1'^{T}A_sN_2'\right)^2 = \left(N_2'^{T}A_sN_1'\right)^2 = 0$. D'après la question II.C.6, il reste $\det\left(N'^{T}AN'\right) = \left(N_1'^{T}A_aN_2'\right)^2$.

On cherche alors $N_2' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non colinéaire à N_1' et vérifiant $N_1'^{T}A(1)_aN_2' = 0$.

$$N_1'^{T}A(1)_aN_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.$$

On prend par exemple $N_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II.D - 2) Si on prend $N_1 = A(1)N_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = A(1)N_2' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\det\left(N^TA(1)^{-1}N\right) = 0$ et donc $A(1)$ est $(N_1, N_2)^{\perp}$-singulière. $F = (N_1, N_2)^{\perp}$ est la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ ou encore F est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II.E - Cas général

II.E - 1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(N_1, \ldots, N_p)$ une base de $F^{\perp}$ puis $N = \begin{pmatrix} N_1 & \ldots & N_p \end{pmatrix} \in \mathscr{G}_{n,p}$ puis $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{R})$. Comme aux questions II.A.3 ou II.C.2, A est F-singulière si et seulement si $\det\left(A_N\right) = 0$.

On suppose de plus A inversible. Comme aux questions II.A.4 et II.C.4, A est F-singulière si et seulement si $\det\left(N^TA^{-1}N\right) = 0$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $N'_i = A^{-1}N_i$ puis $N' = \begin{pmatrix} N'_1 & \dots & N'_p \end{pmatrix}$. Puisque A^{-1} est inversible, $N' \in \mathscr{G}_{n,p}$ puis

$$\left(N^T A^{-1} N\right) = \left(AN'\right)^T N' = N'^T A^T N' = \left(N'^T AN'\right)^T$$

et donc $\det\left(N^T A^{-1} N\right) = \det\left(N'^T AN'\right)$. N' est un élément de $\mathscr{G}_{n,p}$ tel que A est F-singulière si et seulement si $\det\left(N'^T AN'\right) = 0$.

II.E - 2) Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $N'X$ est un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc

$$X^T N'AN'X = X^T N'A_s N'X \geqslant 0.$$

Supposons de plus $N'X = 0$. Puisque $N' \in \mathscr{G}_{n,p}$, il existe p lignes de N' constituant une base de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. La matrice N'_1 constituée de ces p lignes est inversible de format p et donc

$$N'X = 0 \Rightarrow N'_1 X = 0 \Rightarrow X = 0.$$

Finalement, si $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors $X^T N'AN'X > 0$.

II.E - 3) $N'^T AN'$ est un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Soient λ une éventuelle valeur propre réelle de $N'^T AN'$ puis $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Puisque $X \neq 0$, $X^T N'AN'X > 0$ avec

$$X^T N'AN'X = X^T(\lambda X) = \lambda \|X\|_2^2.$$

Puisque $\|X\|_2^2 > 0$, on en déduit que $\lambda > 0$.

II.E - 4) Le déterminant de $N'^T AN'$ est le produit des valeurs propres de $N'^T AN'$. Les éventuelles valeurs propres réelles de $N'^T AN'$ sont strictement positives et les éventuelles valeurs propres non réelles de $N'^T AN'$ se regroupent deux à deux sous la forme $\lambda \times \overline{\lambda} = |\lambda|^2 > 0$ (puisque $\lambda \neq 0$). Donc $\det\left(N'^T AN'\right) > 0$.

II.E - 5) Pour tout $N' \in \mathscr{G}_{n,p}$, 0 n'est pas valeur propre de $N'^T AN'$ d'après la question II.E.3 et donc $\det\left(N'^T AN'\right) \neq 0$ puis A n'est pas F-singulière. On a montré que A est F-régulière pour tout sous-espace F de dimension $n - p$ avec $1 \leqslant p \leqslant n - 1$ et d'autre part A n'est pas E_n singulière d'après la question II.A.1. Finalement, A est F-régulière pour tout sous-espace $F \neq \{0\}$ de E_n.

Partie III - Matrices positivement stables

III.A - Exemples

III.A - 1) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))X + \det(A)$. Si χ_A admet deux solutions réelles éventuellement confondues strictement positives x_1 et x_2, il est nécessaire que $\mathrm{Tr}(A) = x_1 + x_2 > 0$ et $\det(A) = x_1 x_2 > 0$. Si χ_A admet deux solutions non réelles z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$ de parties réelles strictement positives, on a $\det(A) = |z_1|^2 > 0$ et il est nécessaire que $\mathrm{Tr}(A) = 2\mathrm{Re}\,(z_1) > 0$. On a montré que si A est positivement stable, alors $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. Si χ_A admet deux solutions réelles éventuellement confondues x_1 et x_2, alors $x_1 x_2 > 0$ de sorte que x_1 et x_2 sont non nuls et de même signe puis $x_1 + x_2 > 0$ de sorte que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. Si χ_A admet deux solutions non réelles conjuguées z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$, alors $\mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2) = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(A) > 0$.

On a montré que pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, A est positivement stable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

III.A - 2) a) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont positivement stables car de traces égales à 1 et de déterminants égaux à 1 mais la matrice $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas positivement stable car est de déterminant nul.

Donc, si A et B sont positivement stables, $A + B$ n'est pas nécessairement positivement stable.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, deux éléments A et B de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui commutent sont simultanément trigonalisables dans $\mathbb{C}$.

• C'est clair pour $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat pour n. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui commutent. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B respectivement.
f admet au moins une valeur propre λ_1 dans $\mathbb{C}$. Puisque f et g commutent, le sous-espace propre $E_{\lambda_1}(f)$ est stable par g ou encore g induit un endomorphisme de $E_{\lambda_1}(f)$. Mais alors, g admet au moins un vecteur propre dans $E_\lambda(f)$ qui est un vecteur propre e_1 commun à f et g. On complète la famille libre (e_1) en une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans laquelle les matrices de f et g s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & L_A \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mu_1 & L_B \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ où A' et B' sont des matrices carrées de format n et L_A et L_B sont des matrices lignes.

Il existe donc $P_1 \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L_A \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & L_B \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ soient des matrices triangulaires T_A et T_B. Si on pose $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, P_2 est un élément de $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ tel que $P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times \\ 0 & T_A \end{pmatrix}$ et $P_2^{-1}P_1^{-1}BP_1P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \times \\ 0 & T_B \end{pmatrix}$ ou encore, si $P = P_1P_2 \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$, alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires.

Le résultat est démontré par récurrence.

Soient maintenant A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ positivement stables et qui commutent. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{Sp}(B) = (\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1}BP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$. Mais alors $P^{-1}(A+B)P = \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix}$ puis $\mathrm{Sp}(A+B) = (\lambda_i+\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Puisque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Re}\,(\lambda_i+\mu_i) = \mathrm{Re}\,(\lambda_i) + \mathrm{Re}\,(\mu_i) > 0$, la matrice $A+B$ est positivement stable.

III.A - 3) a) $\mathrm{Re}\left(\overline{X}^T AX\right) = \mathrm{Re}\left((Y-iZ)^T A(Y+iZ)\right) = Y^TAY + Z^TAZ = Y^TA_sY + Z^TA_sZ$. Puisque $X \neq 0$, on a $Y \neq 0$ ou $Z \neq 0$. Puisque $A_a \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, les deux réels Y^TA_sY et Z^TA_sZ sont positifs, l'un d'entre eux au moins étant strictement positif. Donc, $\mathrm{Re}\left(\overline{X}^T AX\right) > 0$.

b) Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ puis $X = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors,

$$\mathrm{Re}\left(\overline{X}^T AX\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda\overline{X}^T X\right) = \mathrm{Re}(\lambda)\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 > 0.$$

Puisque $X \neq 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 > 0$ et finalement $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Ceci montre que A est positivement stable.

III.A - 4) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a une trace et un déterminant strictement positifs et est donc positivement stable. Mais $A_s = \mathrm{diag}(1,0)$ admet 0 pour valeur propre et n'est donc pas définie positive.

III.B -

III.B - 1) $v = u' + \lambda u \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left(e^{\lambda t}u\right)'(t) = e^{\lambda t}v(t) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,\ u(t) = u(0)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\displaystyle\int_0^t e^{\lambda x}v(x)\,dx$. Soit alors M un majorant de la fonction $|v|$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leqslant |u(0)|\left|e^{-\lambda t}\right| + \left|e^{-\lambda t}\right|\left|\int_0^t \left|e^{\lambda x}\right||v(x)|\,dx \leqslant M\left(|u(0)|e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t} + e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t}\int_0^t e^{\mathrm{Re}(\lambda)x}\,dx\right)\right. \\
&= M\left(|u(0)| + e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t}\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\left(e^{\mathrm{Re}(\lambda)t} - 1\right)\right) \text{ (car } \mathrm{Re}(\lambda) > 0) \\
&= M\left(|u(0)| + \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\left(1 - e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t}\right)\right) \\
&\leqslant M\left(|u(0)| + \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\right).
\end{aligned}$$

Donc la fonction u est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B - 2) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. On a $u_n' + \lambda_n u_n = 0$. D'après la question précédente, la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons que les fonctions $u_n, u_{n-1}, \dots, u_{i+1}$ soient bornées sur $\mathbb{R}^+$. A la ligne i du système $U' + TU = 0$, on obtient une égalité de la forme $u_i' + \lambda_i u_i = \displaystyle\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_k u_k$. D'après la question précédente, la fonction u_i est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

On a montré par récurrence descendante que chaque fonction u_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.B - 3) On note $\mu_1 = \lambda_1 - \alpha, \dots, \mu_n = \lambda_n - \alpha$ les valeurs propres de la matrice $A - \alpha I_n$. Les parties réelles de ces valeurs propres sont strictement positives. Il existe une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\mu_1, \dots, \mu_n$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}(A - \alpha I_n) P = T$.

Les solutions de $U' + TU = 0$ sont les fonction $U \ : \ t \mapsto e^{tT} U_0$, $U_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec

$$e^{tT} = e^{tP^{-1}(A-\alpha I_n)P} = P^{-1} e^{-\alpha t} e^{tA} P$$

et ces solutions sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. En posant $V(t) = PU(t)$ et $V_0 = PU_0$ de sorte que U_0 décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si et seulement si V_0 décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on obtient le fait que les fonctions de la forme $V \ : \ t \mapsto e^{-\alpha t} e^{tA} V_0$, $V_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

En prenant en particulier pour V_0 chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on obtient le fait que les fonctions vecteurs colonnes de la fonction matricielle $t \mapsto e^{-\alpha t} e^{tA}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$ et finalement la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t} e^{tA}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C - 1) Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, posons $\Phi_1'(M) = A^T M$ et $\Phi_2'(M) = MA$ et on note Φ_1 et Φ_2 les restrictions de Φ_1' et Φ_2' à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Φ_1 et Φ_2 commutent ($\forall M \in \mathscr{R}$), $\Phi_1 \circ \Phi_2(M) = \Phi_2 \circ \Phi_1(M) = A^T M A$. D'après la question III.A.2.b), il suffit de montrer que Φ_1 et Φ_2 sont positivement stables.

Une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de Φ_2 est encore valeur propre de Φ_2' et donc il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $MA = \lambda M$ puis $M(A - \lambda I_n) = 0$. Si $A - \lambda I_n$ est inversible, alors $M = 0$ ce qui n'est pas. Donc, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ou encore λ est une valeur propre de A. Par suite, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Ceci montre que Φ_2 est positivement stable.

Puisque A^T et A ont les mêmes valeurs propres, on montre de manière analogue que Φ_1 est positivement stable. Finalement, Φ est positivement stable.

III.C - 2) (a) Φ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas 0 pour valeur propre. Donc, Φ est un automorphisme de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, il existe un élément $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et un seul tel que $A^T B + BA = I_n$.

(b) En transposant, on obtient $A^T B^T + B^T A = I_n$ ou encore $\Phi\left(B^T\right) = I_n$. Par unicité, on en déduit que $B^T = B$ et donc B est symétrique.

Puisque B est symétrique, $I_n = A^T B^T + BA = (BA)^T + BA = 2(BA)_s$ et donc $(BA)_s = \dfrac{1}{2} I_n$. Par suite, $(BA)_s \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puis d'après la question I.B.3.c,

$$\det(A)\det(B) = \det(BA) \geqslant \det\left((BA)_s\right) > 0.$$

Le déterminant de A est un produit de réels strictement positifs et de nombres de la forme $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Donc, $\det(A) > 0$ et finalement $\det(B) > 0$.

III.C - 3) (a) L'application $M \mapsto M^T$ est un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc l'application $M \mapsto M^T$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\exp\left(-tA^T\right) &= \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{\left(-tA^T\right)^k}{k!} = \lim_{p \to +\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(-tA)^k}{k!} \right)^T \right) = \left(\left(\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-tA)^k}{k!} \right)^T \right) \\ &= (\mathrm{ext}(tA))^T.\end{aligned}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\exp\left(-tA^T\right)\exp(tA)\right)^T = (\exp(tA))^T \left(\exp\left(-tA^T\right)\right)^T = \exp\left(-tA^T\right)\exp(tA)$ et donc $V(t) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On sait que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(-tA) \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc $\exp(-tA)X \neq 0$ puis

$$X^T V(t) X = X^T \exp\left(-tA^T\right)\exp(tA)X = (\exp(tA)X)^T \exp(tA)X = \|\exp(tA)X\|_2^2 > 0.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t) = (v_{i,j}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a

$$(W(t))^T = \left(\left(\int_0^t v_{i,j}(s)\ ds \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \right)^T = \left(\int_0^t v_{j,i}(s)\ ds \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \int_0^t V(s)^T\ ds = \int_0^t V(s)\ ds = W(t)$$

et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $W(t) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

• Pour tout $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}X^T W(t) X &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \int_0^t v_{i,j}(s)\, ds = \int_0^t \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j v_{i,j}(s)\right)\, ds\\ &= \int_0^t X^T V(s) X\, ds > 0 \text{ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle).}\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t > 0$, $W(t) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) La fonction $t \mapsto A^T W(t) + W(t) A = \Phi(W(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction $t \mapsto A^T W'(t) + W'(t) A = A^T \exp\left(-tA^T\right) \exp(-tA) + \exp\left(-tA^T\right) \exp(-tA)\, A = -V'(t)$. En intégrant, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A^T W(t) + W(t) A = \Phi(W(t)) = \Phi(W(t)) - \Phi(W(0)) = -\int_0^t V'(s)\, ds = V(0) - V(t) = I_n - V(t).$$

(c) D'après la question III.B.3, $\exp(-tA) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-\alpha t}\right)$ et $\exp\left(-tA^T\right) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-\alpha t}\right)$ (car A^T a le même spectre que A) et donc $V(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-2\alpha t}\right)$. Puisque $\alpha > 0$, on a déjà $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = 0$.

Ensuite, toujours puisque $V(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-2\alpha t}\right)$, la fonction V est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc la fonction W a une limite quand t tend vers $+\infty$ qui est une matrice carrée W_∞. Quand t tend vers $+\infty$, on obtient $A^T W_\infty + W_\infty A = I_n$.

Par unicité, $W_\infty = B$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par continuité de l'application linéaire $M \mapsto X^T M X$,

$$X^T B X = X^T W_\infty X = X^T \lim_{t\to+\infty} W(t) X = \lim_{t\to+\infty} X^T W(t) X \geqslant 0.$$

Donc, B est symétrique définie positive ou encore les valeurs propres de B sont des réels positifs. Enfin, $\det(B) > 0$ et donc $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

