SESSION 2015

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I - Représentation intégrale de sommes de séries

I.A -

I.A - 1) a_n existe si et seulement si $n \geqslant 2$.
$a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{dt}{t} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge, il en est de même de la série de terme général a_n, $n \geqslant 2$.

I.A - 2) Soit $n \geqslant 2$. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = H_n - 1 - \int_1^n \dfrac{dt}{t} = H_n - 1 - \ln n$. En posant $\ell = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$, on a donc

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + 1 + \ell + o(1).$$

D'où l'existence d'une constante A telle que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)$. En particulier, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(\ln n)$ ou encore $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

I.B - $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^r} > 0$.
Si $r = 0$, la série de terme général $\dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ est grossièrement divergente.
Si $r = 1$, $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} = \dfrac{H_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n} > 0$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$ et donc la série de terme général $\dfrac{H_n}{(n+1)^r}$ diverge.
Si $r \geqslant 2$, $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$. De plus,

$$n^{3/2}\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

d'après un théorème de croissances comparées et donc $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$), il en est de même de la série de terme général $\dfrac{H_n}{(n+1)^r}$, $n \geqslant 1$.

En résumé, la série de terme général $\dfrac{H_n}{(n+1)^r}$, $n \geqslant 1$, converge si et seulement si $r \geqslant 2$.

I.C -

I.C - 1) On sait que $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ et $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$, le rayon de convergence de chacune de ces deux séries étant égal à 1.

I.C - 2) La fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$. Pour tout $t \in]-1,1[$

$$\begin{aligned}
-\frac{\ln(1-t)}{1-t} &= \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots\right)\left(1 + t + t^2 + t^3 + \dots\right) \\
&= t + \left(1 + \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)t^3 + \dots \text{ (produit de Cauchy de deux séries entières)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.
\end{aligned}$$

I.D -

I.D - 1) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $f_{p,q}\ :\ t \mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

$$\sqrt{t}f_{p,q}(t) = t^{p+\frac{1}{2}}(\ln t)^q \underset{t\to 0}{\to} 0$$

d'après un théorème de croissances comparées et donc $f_{p,q}(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et il en est de même de $f_{p,q}$. On a montré que $I_{p,q}$ existe.

I.D - 2) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{1} t^p(\ln t)^q dt &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^{p+1}}{p+1} \times \frac{q}{t}(\ln t)^{q-1}\ dt \\
&= -\frac{q}{p+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^p(\ln t)^{q-1}\ dt - \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}(\ln \varepsilon)^q = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}.
\end{aligned}$$

I.D - 3) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Alors $p+1 \geqslant 1$ et donc $-\frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Quand ε tend vers 0, on obtient alors

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1}I_{p,q-1}.$$

I.D - 4) Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{p,0} = \int_0^1 t^p\ dt = \frac{1}{p+1}$ puis pour $q \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{p,q} = \left(-\frac{q}{p+1}\right)\left(-\frac{q-1}{p+1}\right)\ldots\left(-\frac{1}{p+1}\right)I_{p,0} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q},$$

ce qui reste vrai quand $q = 0$.

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}.}$$

I.E - Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(t) = a_n t^n(\ln t)^{r-1}$ et $g(t) = (\ln t)^{r-1}f(t)$ de sorte que pour tout $t \in]0,1]$, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$. Chaque fonction g_n et la fonction g sont continues par morceaux sur $]0,1]$. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |g_n(t)|\ dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n I_{n,r-1}| \\
&= (r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{a_n}{(n+1)^r}\right| \text{ (d'après la question I.D.4))} \\
&< +\infty \text{ (par hypothèse de l'énoncé).}
\end{aligned}$$

En résumé,

- la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers g sur $]0,1]$;
- chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $]0,1]$;
- g est continue par morceaux sur $]0,1]$;
- $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |g_n(t)|\ dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, g est intégrable sur $]0,1]$, chaque g_n est intégrable sur $]0,1]$, la série de terme général $\int_0^1 g_n(t)\ dt$ converge et

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\ dt &= \int_0^1 g(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t)\ dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 t^n (\ln t)^{r-1}\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} \\ &= (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r} \text{ (d'après la question I.D.4))}\end{aligned}$$

I.F -

I.F - 1) Soit $r \geqslant 2$. La fonction $f\ :\ t \mapsto -\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$. f est développable en série entière sur $]-1,1[$ d'après la question I.C.2) et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{a_n}{(n+1)^r}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} < +\infty$ d'après la question I.B. On peut donc appliquer la question précédente à la fonction f et on obtient

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ dt.$$

I.F - 2) Soit $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Une intégration par parties licite fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ dt &= \left[(\ln t)^{r-1}(-(\ln(1-t))^2/2)\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} - (r-1)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{(\ln t)^{r-2}}{t}(-(\ln(1-t))^2/2)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left(-(\ln(1-\varepsilon))^{r-1}(\ln(\varepsilon))^2 + (\ln(\varepsilon))^{r-1}(\ln(1-\varepsilon))^2 + (r-1)\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt\right)\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, $-(\ln(1-\varepsilon))^{r-1}(\ln(\varepsilon))^2 \sim (-1)^r \varepsilon^{r-1}(\ln(\varepsilon))^2 \to 0$ car $r-1 \geqslant 1$ et $(\ln(\varepsilon))^{r-1}(\ln(1-\varepsilon))^2 \sim \varepsilon^2(\ln(\varepsilon))^{r-1} \to 0$. Donc, quand ε tend vers 0, on obtient

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t}\ dt = \frac{r-1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt$$

puis

$$S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\ dt = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt.$$

I.F - 3) Pour $r = 2$, on a en particulier

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln(1-u))^2}{u}\ du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t}\ dt \text{ (en posant } t = 1-u).$$

En appliquant la question I.E. à $r = 3$ et à la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$, on obtient

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln(t))^{3-1} \times \frac{1}{1-t}\ dt = \frac{1}{2} \times 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

$$\boxed{\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t}\ dt.}$$

Partie II - La fonction β

II.A - La fonction Γ

II.A - 1) Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
• $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x-1} > 0$ avec $x-1 > -1$. Donc, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Finalement, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit l'existence de $\Gamma(x)$.

II.A - 2) Soient $x > 0$ et $\alpha > 0$. En posant $u = \alpha t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t}\ dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{x-1} e^{-u}\frac{du}{\alpha} = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}.$$

II.B - La fonction β et son équation fonctionnelle

II.B - 1) Soient $x > 0$ et $y > 0$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente en 0 à t^{x-1} avec $x-1 > -1$ et donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite, équivalente en 1 à $(1-t)^{y-1}$ avec $y-1 > -1$ et donc intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. Donc, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est intégrable sur $]0,1[$. On en déduit l'existence de $\beta(x,y)$.

II.B - 2) Soient $x > 0$ et $y > 0$. En posant $u = 1-t$, on obtient

$$\beta(y,x) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\ dt = \int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}\ (-du) = \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}\ du = \beta(x,y).$$

II.B - 3) Soient $x > 0$ et $y > 0$.

$$x\left(\beta(x,y) - \beta(x+1,y)\right) = x\left(\int_0^1 \left(\left(t^x - t^{x+1}\right)(1-y)^{y-1}\right)\ dt\right) = \int_0^1 xt^{x-1}(1-t)^y\ dt$$

Soit $\varepsilon \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. Une intégration par parties licite fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} xt^{x-1}(1-t)^y\ dt &= \left[t^x(1-t)^y\right]_\varepsilon^{1-\varepsilon} + y\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^x(1-t)^{y-1}\ dt \\ &= -(1-\varepsilon)^x\varepsilon^y + \varepsilon^x(1-\varepsilon)^y + y\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^y\ dt.\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $x\left(\beta(x,y) - \beta(x+1,y)\right) = y\beta(x+1,y)$ et donc $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

II.B - 4) Soient $x > 0$ et $y > 0$.

$$\beta(x+1,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x) = \frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}\beta(y,x) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y).$$

II.C - Relation entre la fonction β et la fonction Γ

II.C -1) Supposons démontrée la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tel que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Alors, $x+1 > 1$ et $y+1 > 1$ puis

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\beta(x+1,y+1) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \\ &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\end{aligned}$$

et la relation $(\mathcal{R})$ est encore vérifiée si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$ et finalement pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

II.C -2) Soient $x > 1$ et $y > 1$. La fonction $u \mapsto \dfrac{u}{1+u} = 1 - \dfrac{1}{1+u} = t$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, de réciproque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t} - 1 = \dfrac{t}{1-t}$ qui est de classe C^1 sur $]0,1[$. On peut poser $t = \dfrac{u}{1+u}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\ \frac{du}{(1+u)^2}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ du\end{aligned}$$

II.C -3) Soient $x > 1$ et $y > 1$. Pour tout réel positif t, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant F_{x,y}(t) = \int_0^t u^{x+y-1}e^{-u}\ du = \Gamma(x+y) - \int_t^{+\infty} u^{x+y-1}e^{-u}\ du \leqslant \Gamma(x+y).$$

II.C -4) Soient $x > 1$ et $y > 1$. Pour $(u,a) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, posons $g(u,a) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}((1+u)a)$ de sorte que pour tout réel positif a, $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(u,a)\ du$.

• Pour tout réel a de $[0,+\infty[$, la fonction $u \mapsto g(u,a)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ (car $x-1>0$).

• Pour tout réel u de $[0,+\infty[$, la fonction $a \mapsto g(u,a)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $(u,a) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $|g(u,a)| = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F_{x,y}((1+u)a) \leqslant \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\Gamma(x+y) = \varphi(u)$. La fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{\Gamma(x+y)}{u^{y+1}}$ et donc est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $y+1>1$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction G est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

II.C -5) Avec les notations de la question précédente,

• Pour tout réel a de $[0,+\infty[$, la fonction $u \mapsto g(u,a)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

• Pour chaque u de $[0,+\infty[$, $F_{x,y}((1+u)a) = \displaystyle\int_0^{(1+u)a} t^{x+y-1}e^{-t}\ dt \underset{a\to+\infty}{\to} \Gamma(x+y)$ et donc $g(u,a) \underset{a\to+\infty}{\to} \varphi(u)$ avec φ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $(u,a) \in [0,+\infty[^2$, $|g(u,a)| \leqslant \varphi(u)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée généralisée et la question II.C.2),

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} G(a) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\lim_{a\to+\infty}F((1+u)a)\ du = \Gamma(x+y)\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\ du = \Gamma(x+y)\beta(x,y).$$

II.C -6) En plus des hypothèses vérifiées à la question II.C.4), g admet sur $[0,+\infty[\times[c,d]$ une dérivée partielle par rapport à a et pour tout $(u,a) \in [0,+\infty[\times[c,d]$,

$$\frac{\partial g}{\partial a}(u,a) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}(1+u)e^{-(1+u)a}((1+u)a)^{x+y-1} = a^{x+y-1}u^{x-1}e^{-(1+u)a}.$$

• Pour tout $a \in [c,d]$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(u,a)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

• Pour tout $u \in [0,+\infty[$, la fonction $a \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(u,a)$ est continue sur $[c,d]$.

• Pour tout $(u,a) \in [0,+\infty[\times[c,d]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial a}(u,a)\right| \leqslant d^{x+y-1}u^{x-1}e^{-(1+u)c} = \varphi_1(u)$ où φ_1 est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $c>0$).

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, G est de classe C^1 sur tout segment de $]0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. On en déduit encore que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme.

II.C -7) Pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned}G'(a) &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial a}(u,a)\ du = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-ua}\ du\\ &= a^{x+y-1}e^{-a}\frac{\Gamma(x)}{a^x}\ \text{(d'après la question II.A.2))}\\ &= \Gamma(x)a^{y-1}e^{-a}.\end{aligned}$$

II.C -8) Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a > 0$, $G(a) = C + \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}\ dt$. Cette égalité reste vraie pour $a = 0$ par continuité de G sur $[0, +\infty[$. Quand $a = 0$, on obtient $C = 0$ et donc pour tout $a \geqslant 0$,

$$G(a) = \Gamma(x)\int_0^a t^{y-1}e^{-t}\ dt.$$

Quand a tend vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$ (d'après la question II.C.5)) et donc $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Partie III - La fonction digamma

III.A - Pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient pour tout réel $x > 0$, $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$. En divisant les deux membres ce rte égalité par le réel non nul $\Gamma(x+1)$, on obtient pour tout réel x,

$$\psi(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x) + x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)} = \psi(x) + \frac{1}{x},$$

et finalement, pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B - Sens de variation de ψ

III.B - 1) Soit $x_0 > 0$. Pour tout réel y, $\beta(x_0, y) = \dfrac{\Gamma(x_0)\Gamma(y)}{\Gamma(x_0+y)}$. La fonction $y \mapsto \beta(x_0, y)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ et ceci pour tout $x_0 > 0$.
Ainsi, la fonction β admet sur $]0, +\infty[^2$ une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable y et pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) &= \Gamma(x)\frac{\Gamma'(y)\Gamma(x+y) - \Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{(\Gamma(x+y))^2} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left(\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right)\\ &= \beta(x,y)\left(\psi(y) - \psi(x+y)\right).\end{aligned}$$

III.B - 2) Soit $x > 0$. Soient y et y' deux réels strictement positifs tels que $y \leqslant y'$.

$$\begin{aligned} y \leqslant y' &\Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ (y-1)\ln(1-t) \geqslant (y'-1)\ln(1-t)\ (\text{car } 1-t \in]0,1[\text{ et donc } \ln(1-t) \leqslant 0)\\ &\Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ e^{(y-1)\ln(1-t)} \geqslant e^{(y'-1)\ln(1-t)} \Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ (1-t)^{y-1} \geqslant (1-t)^{y'-1}\\ &\Rightarrow \forall t \in]0,1[,\ t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geqslant t^{x-1}(1-t)^{y'-1}\\ &\Rightarrow \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt \leqslant \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y'-1}\ dt\\ &\Rightarrow \beta(x,y) \geqslant \beta(x,y'). \end{aligned}$$

Pour tout réel $x > 0$, la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

III.B - 3) Mais alors, pour tout $(x,y) \in]0, +\infty[^2$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) \leqslant 0$ ou encore

$$\text{pour tout } (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y)) \leqslant 0.$$

Maintenant, pour tout $(x,y) \in]0, +\infty[^2$, $\beta(x,y)$ est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $]0,1[$. On en déduit que pour tout $(x,y) \in]0, +\infty[^2$, $\beta(x,y) > 0$ puis que

$$\text{pour tout } (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \psi(y) \leqslant \psi(x+y).$$

Ceci montre que la fonction ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

III.C - Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C - 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1+\infty[$.

$$\begin{aligned}(\psi(x+1) - \psi(1)) - (\psi(x+1+n) - \psi(n+1)) &= \sum_{k=1}^{n}\left((\psi(x+k) - \psi(k)) - (\psi(x+k+1) - \psi(k+1))\right)\ (\text{somme télescopique})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left((\psi(k+1) - \psi(k)) - (\psi(x+k+1) - \psi(x+k))\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).\end{aligned}$$

III.C - 2) Puisque la fonction ψ est croissante sur $]0,+\infty[$ et que $n+x+1 \geqslant n$, on a $\psi(n+x+1)-\psi(n) \geqslant 0$. D'autre part, $x \leqslant p$ et donc

$$\begin{aligned}\psi(n+x+1)-\psi(n) \leqslant \psi(n+p+1)-\psi(n) &= \sum_{k=0}^{p}(\psi(n+k+1)-\psi(n+k)) = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k}\\ &= \sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = H_{n+p}-H_{n-1}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n} = \frac{p+1}{n}.\end{aligned}$$

III.C - 3) Soit $x > -1$. Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\psi(1+x)-\left(\psi(1)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)\right) &= \psi(x+n+1)-\psi(n+1)\\ &= (\psi(x+n+1)-\psi(n))-(\psi(n+1)-\psi(n)) = (\psi(x+n+1)-\psi(n))-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant \psi(x+n+1)-\psi(n) \leqslant \dfrac{E(x)+2}{n}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\psi(x+n+1)-\psi(n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en de même de $(\psi(x+n+1)-\psi(n))-\dfrac{1}{n}$ et on a montré que $\psi(1+x)-\left(\psi(1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Ainsi, la série de terme général $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}$, $n \geqslant 1$, converge et

$$\psi(x+1) = \psi(1)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

III.D - Un développement en série entière

III.D - 1) Pour $n \geqslant 2$ et $x \in [-1,+\infty[$, posons $g_n = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+x}$.
- La série de fonctions de terme général g_n, $n \geqslant 2$, converge simplement vers g sur $[-1,+\infty[$.
- Chaque fonction g_n, $n \geqslant 2$, est de classe C^∞ sur $[-1,+\infty[$ et

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant -1,\ g_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(n+x)^{k+1}}.$$

Maintenant, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $x \in [-1,+\infty[$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|g_n^{(k)}(x)\right| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}.$$

Puisque $k+1 \geqslant 2$, la série numérique de terme général $\dfrac{k!}{(n-1)^{k+1}}$, $n \geqslant 2$, converge. On en déduit que pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions de terme général $g_n^{(k)}$, $n \geqslant 2$, converge normalement et donc uniformément sur $[-1,+\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation terme à terme, g est de classe C^∞ sur $[-1,+\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$g^{(k)}(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n^{(k)}(0) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{n^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\,(\zeta(k+1)-1).$$

III.D - 2) Soit $x \in]-1,1[$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{|x||^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!},$$

où M_{n+1} est un majorant de $g^{(n+1)}$ sur $]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\left|g^{(n+1)}(t)\right| &= (n+1)!\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k+t)^{n+2}}\\ &\leqslant (n+1)!\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^{n+2}} = (n+1)!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{n+2}}\\ &\leqslant (n+1)!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = (n+1)!\zeta(2).\end{aligned}$$

puis $\dfrac{|x\|^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{|x\|^{n+1}n+1)!\zeta(2)}{(n+1)!} = \zeta(2)|x|^{n+1}$. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \left|g(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \zeta(2)|x|^{n+1}.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Alors, $\zeta(2)|x|^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de Taylor de g en x converge vers $g(x)$. Ceci montre que g est développable en série entière sur $]-1,1[$.

III.D - 3) Soit $x \in]-1,1[$. En tenant compte de $g(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\psi(1+x) &= \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + g(x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)!\,(\zeta(n+1)-1)\,x^n\\ &= \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)!\zeta(n+1)x^n.\end{aligned}$$

Partie IV - Expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

IV.A - Une relation entre B et ψ

Soit $x > 0$. La fonction ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $y \mapsto \psi(y) - \psi(x+y)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ceci montre la fonction $(x,y) \mapsto \psi(y) - \psi(x+y)$ admet une dérivée partielle par rapport à y sur $]0,+\infty[^2$. Puisque la fonction β admet aussi une dérivée partielle par rapport à y sur $]0,+\infty[^2$, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))$ admet une dérivée partielle par rapport à y sur $]0,+\infty[^2$. En particulier, $\dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,1)$ est défini pour tout $x > 0$.

D'après la question III.B.1), pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y)) + \beta(x,y)(\psi'(y) - \psi'(x+y))\\ &= \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))^2 + \beta(x,y)(\psi'(y) - \psi'(x+y)).\end{aligned}$$

Pour $y = 1$, on obtient en particulier $B(x) = \beta(x,1)\left[(\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1))\right]$ avec

$$\beta(x,1) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma(x)\times 1}{x\Gamma(x)} = \frac{1}{x}.$$

On a montré que

$$\forall x > 0,\ xB(x) = (\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1)).$$

Pour tout réel $x \in]-1,+\infty[$, $\psi(1+x) = \psi(1) + 1 - \dfrac{1}{1+x} + g(x)$. Puisque g est de classe C^∞ sur $[-1,+\infty[$ et en particulier sur $]0,+\infty[$, il en est de même de la fonction $x \mapsto \psi(1+x)$. Mais alors, la fonction $B\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\left((\psi(1) - \psi(x+1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x+1))\right)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

IV.B - Expression de S_r à l'aide de la fonction B

IV.B - 1) Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y)\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt$. Soit $x > 0$ fixé. Pour $t \in]0,1[$ et $y > 0$, posons $b(t,y) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ de sorte que $\beta(x,y) = \int_0^1 b(t,y)\ dt$. Soit $c > 0$. Pour $(t,y) \in]0,1[\times[c,+\infty[$,

$$\frac{\partial b}{\partial y}(t,y) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1} \text{ et } \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,y) = (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}.$$

Pour $(t,y) \in]0,1[\times[c,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial b}{\partial y}(t,y)\right| \leqslant |\ln(1-t)|t^{x-1}(1-t)^{c-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,y)\right| \leqslant (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1} = \varphi_2(t).$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues sur $]0,1[$, négligeable devant t^{x-1} quand t tend vers 0 avec $x-1 > -1$, et négligeables devant $(1-t)^{-1+\frac{c}{2}}$ quand t tend vers 1 avec $-1+\dfrac{c}{2} > -1$. Donc, φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $]0,1[$. Les autres hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme étant aisément vérifiées et ceci pour tout $c > 0$, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

Pour $y = 1$, on obtient en particulier

$$\forall x > 0,\ B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,1) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}\ dt.$$

IV.B - 2) En admettant que l'on puisse sans problème indéfiniment dériver sous le signe somme,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2(\ln t)^p t^{x-1}\ dt.$$

IV.B - 3) D'après la question I.F.2), $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt$.

Il suffit donc de démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt$ sachant que

$$\forall x > 0,\ B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2(\ln t)^{r-2}t^{x-1}\ dt.$$

- Pour chaque $x > 0$, la fonction $t \mapsto (\ln(1-t))^2(\ln t)^{r-2}t^{x-1}$ est continue et intégrable sur $]0,1[$.
- Pour chaque $t \in]0,1[$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\ln(1-t))^2(\ln t)^{r-2}t^{x-1} = \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}$.
- Pour chaque $(x,t) \in]0,+\infty[\times]0,1[$, $\left|((\ln(1-t))^2(\ln t)^{r-2}t^{x-1}\right| \leqslant \dfrac{|\ln t|^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t} = \varphi(t)$.

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
Quand t tend vers 0, $\varphi(t) \sim t|\ln t|^{r-2} \to 0$ d'après un théorème de croissances comparées. La fonction φ se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.
Quand t tend vers 1, $\varphi(t) \sim (t-1)^2|\ln t|^{r-2} \to 0$ et donc φ est intégrable sur un voisinage de 1.
Finalement, φ est intégrable sur $]0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée généralisée, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \lim_{x\to 0^+}(\ln(1-t))^2(\ln t)^{r-2}t^{x-1}\ dt = \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\ dt,$$

puis

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x).$$

IV.B - 4) Pour $r = 2$, on obtient $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[(\psi(1+x)-\psi(1))^2 + (\psi'(x)-\psi'(1+x))\right]}{x}$.
ψ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ ou encore la fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$. En particulier, les fonction $x \mapsto \psi(1+x)$ et $x \mapsto \psi'(1+x)$ admettent en 0 un développement limité à tout ordre, son développement de Taylor-Young. Donc, quand x tend vers 0,

$$(\psi(1+x)-\psi(1))^2 = (O(x))^2,$$

et

$$\psi'(1+x)-\psi'(1)=\psi''(1)x+o(x)$$

puis

$$B(x)=\frac{O(x^2)-\psi''(1)x+o(x)}{x}=-\psi''(1)+o(1).$$

Donc, $S_2=\dfrac{-\psi''(1)}{2}$. Or, pour tout $x>0$, $\psi(1+x)=\psi(1)+1-\dfrac{1}{1+x}+g(x)$ et donc, pour tout $x>0$, $\psi''(1+x)=-\dfrac{2}{1+x)^3}+g''(x)$ puis, d'après III.D.1)

$$\psi''(1)=-2-2(\zeta(3)-1)=-2\zeta(3).$$

On retrouve alors $S_2=\dfrac{-\psi''(1)}{2}=\zeta(3)$.

IV.C -

IV.C - 1) Puisque ψ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, φ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x>0$, $\varphi(x)=xB(x)$ D'après la formule de Leibniz, pour tout $n\geqslant$ et tout $x>0$,

$$\varphi(n)(x)=2\psi^{(n)}(1+x)((\psi(1+x)-\psi(1))+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(1+x)\psi^{(n-k)}(1+x)-\psi^{(n+1)}(1+x).$$

Pour $x=0$, on obtient en particulier

$$\varphi^{(n)}(0)=\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1)\right)-\psi^{(n+1)}(1).$$

IV.C - 2) Soit $r\geqslant 3$. Alors, $n=r-1\geqslant 2$ et

$$\varphi^{(r-1)}(0)=\left(\sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1)\right)-\psi^{(r)}(1).$$

Pour $x>0$, $\varphi(x)=xB(x)$. La formule de Leibniz fournit aussi pour $r\geqslant 3$ et $x>0$,

$$\varphi^{(n)}(x)=xB^{(n)}(x)+nB^{(n-1)}(x)$$

et donc, $\varphi^{(n)}$ étant continue en 0 et $B^{(n)}$ et $B^{(n-1)}$ ayant une limite réelle en 0 d'après IV.B.3),

$$\varphi^{(n)}(0)\varphi^{(r-1)}(0)=(r-1)\lim_{x\to 0^+}B^{(r-2)}(x)=2(r-1)!(-1)^rS_r.$$

Donc, pour $r\geqslant 3$, $2S_r=\dfrac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r-2}\binom{r-1}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1)\right)-\psi^{(r)}(1)\right]$.
Maintenant, d'après la question III.D.3), la fonction ψ est développable en série entière en 1 et pour tout $k\geqslant 1$,

$$\frac{\psi^{(k)}(1)}{k!}=(-1)^{k+1}\zeta(k+1).$$

Donc,

$$\begin{aligned}2S_r&=\frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\left(\sum_{k=1}^{r-2}\frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!}(-1)^{k+1}k!\zeta(k+1)(-1)^{r-1-k+1}(r-1-k)!\zeta(r-1-k+1)\right)-(-1)^{r+1}r!\zeta(r+1)\right]\\&=r\zeta(r+1)-\sum_{k=1}^{r-2}\zeta(k+1)\zeta(r-k).\end{aligned}$$

