Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

Partie I - Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A - Posons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang.

L'application $A \mapsto I$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ car constante sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. L'application $\text{Id} \ : \ A \mapsto A$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Soit $k \geqslant 2$. Soient $g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^k \\ A & \mapsto & (A, A, \ldots, A) \end{array}$ et $h \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^k & \rightarrow & \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ (A_1, A_2, \ldots, A_k) & \mapsto & A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \end{array}$.

g est linéaire et $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Donc g est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

h est k-linéaire et $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Donc h est continue sur $(\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^k$.

Mais alors l'application $\varphi_k \ : \ A \mapsto A^k$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ car $\varphi_k = h \circ g$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_k \ : \ A \mapsto A^k$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Puisque $f_P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k$ où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang, f_P est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire d'applications continues sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

I.B - Posons $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$$\text{Tr}\left({}^t AB\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} B_{i,j}\right).$$

Donc l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}\left({}^t AB\right)$ n'est autre que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

I.C - Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$|A_{i,j}| = \sqrt{A_{i,j}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} A_{k,l}^2} = \|A\|.$$

I.D - Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}
\|A \times B\|^2 &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2\right) = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n} a_{i,j}^2 b_{k,l}^2 \\
&= \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2\right)\left(\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} b_{k,l}^2\right) \\
&= \|A\|^2 \|B\|^2,
\end{aligned}$$

et donc $\|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.

I.E - Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

• L'inégalité est vraie pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\|A^n| \leqslant \|A\|^n$. Alors

$$\left\|A^{n+1}\right\| = \|A^n \times A\| \leqslant \|A\|^n \times \|A\| = \|A\|^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^n| \leqslant \|A\|^n$.

Partie II - Séries entières de matrices

II.A - Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, posons $\varphi_n(A) = a_n A^n$.

Soit $\rho \in [0, R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| \leqslant \rho$,

$$\|\varphi_n(A)\| = |a_n| \|A^n\| \leqslant |a_n| \|A\|^n \leqslant |a_n| \rho^n.$$

Puisque $0 \leqslant \rho < R$, la série numérique de terme général $|a_n| r^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Ceci montre que la série de fonctions de terme général φ_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$ et donc uniformément puis simplement sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$.

On en déduit d'abord que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ existe pour tout A de $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$. Ensuite, puisque chaque φ_n est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et en particulier sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$ d'après la question I.A, la fonction φ est continue sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$ en tant que limite uniforme sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$ d'une suite de fonctions continues sur $\{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ \|A\| \leqslant \rho\}$.

Ceci étant vrai pour tout r de $[0, R[$, on a démontré que φ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B.1) Soit $E = \{k \in \mathbb{N} /\ \left(A^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ libre$\}$. E est une partie non vide (car $0 \in E$) de $\mathbb{N}$ et majorée par n^2 (car le cardinal d'une famille libre est inférieur à la dimension de l'espace). On en déduit que E admet un plus grand élément que l'on note $r - 1$ où $r \in \mathbb{N}^*$. Par définition de r, la famille $\left(A^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant r-1}$ est libre et la famille $\left(A^i\right)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ est liée.

II.B.2) L'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \ldots, \lambda_{r-1,n})$ est assurée par la liberté de la famille $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant r - 1$. On a $A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \delta_{k,n} A^k$ où $\delta_{k,n}$ désigne le symbole KRONECKER. On en déduit l'existence d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \ldots, \lambda_{r-1,n})$ dans ce cas.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant r$, il existe un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \ldots, \lambda_{r-1,n})$ tel que $A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$.

• La famille $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est libre et la famille $\left(A^i\right)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est liée. On sait alors que $A^r \in \text{Vect}\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ ou encore il existe un r-uplet $(\lambda_{0,r}, \ldots, \lambda_{r-1,r})$ tel que $A^r = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,r} A^k$. Le résultat est donc vrai quand $n = r$.

• Soit $n \geqslant r$. Supposons que $A^n \in \text{Vect}\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$. Alors $A^{n+1} \in \text{Vect}\left(A^k\right)_{1 \leqslant k \leqslant r} \subset \text{Vect}\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ (d'après l'étude du cas $n = r$) et donc il existe un r-uplet $(\lambda_{0,n+1}, \ldots, \lambda_{r-1,n+1})$ tel que $A^{n+1} = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n+1} A^k$.

Le résultat est démontré par récurrence.

II.B.3) Soit $F = \text{Vect}\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$. $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est une base de F. Puisque F est un espace de dimension finie, on sait que toutes les normes sur F sont équivalentes.

Pour $B \in F$, posons $B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k A^k$. L'application $B \mapsto \sum_{k=0}^{r-1} |b_k|$ est la norme 1, notée N_1, associée à la base $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$. Cette norme est équivalente à la norme $\|\ \|$ et donc il existe $C > 0$ tel que pour tout $B \in F$, $N_1(B) \leqslant C\|B\|$.

En particulier, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| = N_1\left(A^n\right) \leqslant C\left\|A^n\right\|$.

II.B.4) Soit $k \in [\![0, r-1]\!]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n \lambda_{k,n}| \leqslant |a_n| \sum_{i=0}^{r-1} |\lambda_{i,n}| \leqslant C\,|a_n|\,\|A^n\| \leqslant C\,|a_n|\,\|A\|^n.$$

Puisque la série numérique de terme général $C|a_n|\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série numérique de terme général $a_n\lambda_{k,n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument.

II.B.5) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{r-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{k,n} a_n\right) A^k \text{ (les } r \text{ séries étant convergentes)}\\ &= P(A)\end{aligned}$$

où $P = \sum_{k=0}^{r-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{k,n} a_n\right) X^k$ est un polynôme de degré strictement plus petit que r. Ceci montre l'existence de P.

Si P_1 et P_2 sont deux polynômes tels que $\varphi(A) = P_1(A) = P_2(A)$. Alors $(P_1 - P_2)(A) = 0$. Puisque $P_1 - P_2$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r-1$ et que la famille $\left(A^k\right)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ est libre, les coefficients de $P_1 - P_2$ sont nuls ou encore $P_1 - P_2 = 0$. Ceci montre l'unicité du polynôme P.

On a montré que pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, il existe un unique polynôme P de degré strictement plus petit que r tel que $\varphi(A) = P(A)$.

II.B.6) $\chi_A = \begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 2X + 1) + (X-1) + (1-X) = -X(X-1)^2$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$ et donc pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = A$. Par suite, $r \leqslant 1$. D'autre part, la famille (I_3, A) est libre et donc $r = 1$.

On a $A^0 = 1I_3 + 0A + 0A^2 + \dots$ et pour $n \geqslant 1$, $A^n = 0I_3 + 1A + 0A^2 + \dots$ Donc

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = I_3 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) A = I_3 + (e-1)A.$$

Donc $P = (e-1)X + 1$.

II.C - Si les a_n sont nuls à partir d'un certain rang n_0, alors $R = +\infty$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = P(A)$ où $P = \sum_{k=0}^{n_0} a_k X^k$ est un polynôme indépendant de A.

Réciproquement, supposons qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $A \in \{B \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}),\ \|B\| < R\}$, on ait $\varphi(A) = P(A)$. Pour tout $x \in \left]-\frac{R}{\sqrt{d}}, \frac{R}{\sqrt{d}}\right[$, $\|xI_d\| = |x|\|I_d\| = |x|\sqrt{d} < R$ et donc

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) I_d = \varphi(A) = P(A) = P(x)I_d.$$

et donc, pour tout $x \in \left]-\frac{R}{\sqrt{d}}, \frac{R}{\sqrt{d}}\right[$, $P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que les a_n sont nuls à partir d'un certain rang. Dans ce cas, $R = +\infty$ et que l'égalité $\varphi(A) = P(A)$ est vraie pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Finalement, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = P(A)$ si et seulement si les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

Partie III - Deux applications

III.A -

III.A.1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Si les deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont absolument convergentes, la série de terme général w_n converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

III.A.2) On sait que les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{i^n}{n!}A^n$ et $\dfrac{i^n}{n!}B^n$ sont absolument convergentes.

$$\begin{aligned}
e^{iA}\times e^{iB} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}B^n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{i^k}{k!}A^k\frac{i^{n-k}}{(n-k)!}B^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(iA)^k(iB)^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(iA+iB)^n \text{ (d'après la formule du binôme de Newton puisque } iA \text{ et } iB \text{ commutent)}\\
&= e^{iA+iB} = e^{i(A+B)}.
\end{aligned}$$

III.A.3) Soit $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On a $\cos(A)=\dfrac{1}{2}\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)$ et $\sin(A)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iA}-e^{-iA}\right)$ puis

$$\begin{aligned}
\cos^2(A)+\sin^2(A) &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{2i}\left(e^{iA}-e^{-iA}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)^2-\left(e^{iA}+e^{-iA}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(4e^{iA}e^{-iA}\right)\\
&= e^{iA-iA} \text{ (car les matrices } iA \text{ et } -iA \text{ commutent)}\\
&= e^{0_d} = I_d.
\end{aligned}$$

III.B -

III.B.1) Soit $R_0 = 1+\mathrm{Max}\{|\lambda|,\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$. Pour $R\geqslant R_0$, $Re^{i\theta}\notin\mathrm{Sp}(A)$ et donc la matrice $\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)$ est inversible.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et R supérieur ou égal à R_0.

$$\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(Re^{i\theta}\right)^{N-1-n}A^n\right) = \left(Re^{i\theta}\right)^N I_d - A^N$$

puis

$$\left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n = \left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}\left(I_d-\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right)\quad (*).$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\left\|\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right\| = \dfrac{1}{R^N}\left\|A^N\right\| \leqslant \left(\dfrac{\|A\|}{R}\right)^N$. Donc, si $R\geqslant R_0$ et aussi $R>\|A\|$ ou encore si $R\geqslant R_1 = \mathrm{Max}\{R_0,\|A\|\}$, la suite $\left(\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis la suite $\left(I_d-\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

L'application $\varphi\ :\mapsto \left(Re^{i\theta}-A\right)^{-1}M$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}$ qui est de dimension finie et donc cette application est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Par suite, $\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}\left(I_d-\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right) = \varphi\left(I_d-\left(Re^{i\theta}\right)^{-N}A^N\right)$ converge vers $\varphi\left(I_d\right) = \left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}$.

Mais alors, d'après $(*)$, la série de terme général $\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n$, $n\in\mathbb{N}$, converge puis, quand N tend vers $+\infty$, $(*)$ fournit

$$\left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n = \left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}.$$

On a montré que pour R grand, la matrice $Re^{i\theta}I_d-A$ est inversible et $\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1} = \left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n$.

III.B.2) Soient $R\geqslant\mathrm{Max}\{R_0,\|A\|+1\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $p\in\mathbb{N}$ et $\theta\in[0,2\pi]$, posons $f_p(\theta) = \left(Re^{i\theta}\right)^{n-1}\left(Re^{i\theta}\right)^{-p}A^p$. Chaque fonction f_p, $p\in\mathbb{N}$, est continue sur le segment $[0,2\pi]$.

$$\|f_p(\theta)\| = \left\|\left(Re^{i\theta}\right)^{n-1}\left(Re^{i\theta}\right)^{-p}A^p\right\| \leqslant R^{n-1}R^{-p}\|A\|^p = R^{n-1}\left(\frac{\|A\|}{R}\right)^p.$$

Puisque $\dfrac{\|A\|}{R} \in]-1,1[$, $R^{n-1}\left(\dfrac{\|A\|}{R}\right)^p$, $p \in \mathbb{N}$, est le terme général d'une série numérique convergente. Mais alors la série de fonctions de terme général f_p, $p \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme sur $[0, 2\pi]$ et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^n\left(Re^{i\theta}-A\right)^{-1}\,d\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^{n-1}\left(Re^{i\theta}\right)^{-p}A^p\,d\theta\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}R^{n-1-p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-1-p)\theta}\,d\theta\right)A^p\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}R^{n-1-p}\delta_{p,n-1}A^p = A^{n-1}.\end{aligned}$$

III.B.3) Pour R grand, la question III.B.2 fournit

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= \sum_{k=0}^{d}a_kA^k = \sum_{k=0}^{d}\frac{a_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^{k+1}\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}\,d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{d}a_k\left(Re^{i\theta}\right)^k\right)\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}\,d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)\chi_A\left(Re^{i\theta}\right)\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)^{-1}\,d\theta.\end{aligned}$$

III.B.4) Puis, pour R assez grand,

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)\chi_A\left(Re^{i\theta}\right)\frac{1}{\det\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)}{}^t\mathrm{com}\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)\,d\theta\\ &= \frac{(-1)^d}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right){}^t\mathrm{com}\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)\,d\theta.\end{aligned}$$

Maintenant, les coefficients de la matrice $\left(Re^{i\theta}\right){}^t\mathrm{com}\left(Re^{i\theta}I_d-A\right)$ sont des polynômes en $e^{i\theta}$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(e^{i\theta}\right)^n\,d\theta = 0$, on en déduit que $\chi_A(A) = 0$.

Partie IV - Etude d'une équation fonctionnelle

IV.A - Soit $x \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$. La primitive sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ de la fonction $y \mapsto 2f(x+y)$ qui s'annule en α est la fonction $y \mapsto 2(F(x+y)-F(x+\alpha))$ et la primitive sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ de la fonction $y \mapsto f(2x)+f(2y)$ qui s'annule en α est la fonction $y \mapsto f(2x)(y-\alpha)+\dfrac{1}{2}(F(2y)-F(2\alpha))$.

Ces deux primitives sont égales et donc, pour $(x,y) \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[^2$, $2(F(x+y)-F(x+\alpha)) = f(2x)(y-\alpha)+\dfrac{1}{2}(F(2y)-F(2\alpha))$ puis pour $(x,y) \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[\times \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[\setminus \{\alpha\}$,

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y)-F(x+\alpha)-\frac{1}{4}F(2y)+\frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}.$$

IV.B - Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, f est de classe C^n sur $]-\infty, M[$.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Soit $y \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[\setminus \{\alpha\}$ fixé. Supposons f de classe C^n sur $]-\infty, M[$. Alors F est de classe C^{n+1} sur $]-\infty, M[$ puis la fonction $x \mapsto 2\dfrac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$ est de classe C^{n+1} sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ ou encore la fonction $x \mapsto f(2x)$ est de classe C^{n+1} sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ ou enfin la fonction f est de classe C^{n+1} sur $]-\infty, M[$.

Le résultat est démontré par récurrence. On a ainsi démontré que f est de classe C^∞ sur $]-\infty, M[$.

IV.C - Soit $y \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$. En dérivant deux fois par rapport à x les deux membres de l'égalité IV.1, pour tout x de $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ on obtient $2f''(x+y) = 4f''(2x)$. En particulier, pour $y = x$, pour tout x de $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ on obtient $2f''(2x) = 4f''(2x)$ puis $f''(2x) = 0$. Finalement, pour tout x de $]-\infty, M[$, $f''(x) = 0$.

Donc, f est une fonctions affine. Réciproquement, pour tout x de $]-\infty, M[$, posons $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels. f est continue sur $]-\infty, M[$ et pour $(x, y) \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[^2$,

$$2f(x+y) - f(2x) - f(2y) = 2(a(x+y) + b) - (2ax + b) - (2ay + b) = 0.$$

Donc f convient. Les solutions de IV.1 sont les fonctions affines sur $]-\infty, M[$. Elles constituent un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2. Une base de cet espace est (f_1, f_2) où $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto x$.

Partie V - Etude d'une autre fonction matricielle

V.A - Si $d = 1$, la condition V.1 s'écrit : $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Rightarrow \xi(a) \neq 0$. Les fonctions ξ solutions de V.1 sont les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$.

V.B - Soit A la matrice proposée par l'énoncé.

Un calcul par blocs fournit $\det(A) = (ad - bc)\det(I_{d-2}) = ad - bc$. D'autre part, les deux premières colonnes de $f_\xi(A)$ sont $\begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \xi(c) & \xi(d) \\ \vdots & \vdots \\ \xi(c) & \xi(d) \end{pmatrix}$. Aux $n-2$ dernières lignes de $f_\xi(A)$, on retranche la deuxième sans modifier la valeur de son déterminant. On obtient

$$\det(f_\xi(A)) = \det \begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \times & \dots & \times \\ \xi(c) & \xi(d) & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & f_\xi(I_{d-2}) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs fournit $\det(f_\xi(A)) = (\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c))\det(f_\xi(I_{d-2}))$. Par suite,

$$\begin{aligned} ad - bc \neq 0 &\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(\xi(A)) \neq 0 \Rightarrow (\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c))\det(f_\xi(I_{d-2})) \neq 0 \\ &\Rightarrow \xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c) \neq 0, \end{aligned}$$

ou encore $ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$.

V.C - Supposons que ξ s'annule en tout réel non nul. Par continuité, ξ s'annule en 0. Ceci est impossible car alors $f_\xi(I_d) = 0 \notin GL_d(\mathbb{R})$. Donc, il existe un réel $x_0 \neq 0$ tel que $\xi(x_0) \neq 0$.
En prenant $c = d = x_0$, pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned} a \neq b &\Rightarrow ax_0 \neq bx_0 \text{ (car } x_0 \neq 0) \\ &\Rightarrow \xi(a)\xi(x_0) \neq \xi(b)\xi(x_0) \\ &\Rightarrow \xi(a) \neq \xi(b) \text{ (car } \xi(x_0) \neq 0). \end{aligned}$$

La fonction ξ est donc nécessairement injective sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction ξ est continue et injective sur $\mathbb{R}$, le théorème d'homéomorphisme permet d'affirmer que la fonction ξ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

V.D - En particulier, la fonction ξ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $\xi(c) = 0$. Alors si a et b sont deux réels distincts, ac et bc sont deux réels distincts mais $\xi(a)\xi(c) = 0 = \xi(b)\xi(c)$. Ceci est exclu et donc la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, la fonction ξ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ et si c'est le cas, $\xi(0) = 0$.

V.E -

V.E.1) Supposons que $\xi(0) \neq 0$. D'après ce qui précède, la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Puisque la fonction ξ est continue sur $\mathbb{R}$, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \xi(0)\xi(2) - \xi(1)\xi(x)$. Puisque la fonction ξ ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone sur $\mathbb{R}$,

$$g(0) \times g(2) = \xi(0)\xi(2)(\xi(2) - \xi(1))(\xi(0) - \xi(1)) < 0.$$

Puisque g est continue sur l'intervalle $[0, 2]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction g s'annule au moins une fois dans $]0, 2[$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ ou encore tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

V.E.2) Ainsi, $0 \times 2 - 1 \times \alpha = -\alpha \neq 0$ mais $\xi(0)\xi(2) - \xi(1)\xi(\alpha) = 0$. Ceci est exclu et donc $\xi(0) = 0$.

V.F - Soient x et y deux réels tels que x^2, y^2 et xy soient dans I. $\xi(\eta(x^2))\xi(\eta(y^2)) = x^2y^2 = (xy)^2 = \xi(\eta(xy))\xi(\eta(xy))$. Par contrapositon de l'implication de V.B, on obtient alors $\eta(x^2)\eta(y^2) = (\eta(xy))^2$.

V.G -

V.G.1) Puisque ξ est un homéomorphisme, on sait que I est ouvert.
Soit m la borne supérieure de I puis $M = \ln(m)$ si m est réel ou $M = +\infty$ si $m = +\infty$. Soient X et Y deux réels de $]-\infty, M[$ puis $x = e^X$ et $y = e^Y$. x et y sont strictement positifs et strictement plus petits que la borne supérieure de I. De plus

$$\begin{aligned}2f(X+Y) &= 2\ln(\eta(e^{X+Y})) = 2\ln(\eta(xy)) = \ln((\eta(xy))^2) = \ln(\eta(x^2)\eta(y^2)) = \ln((\eta(x^2)) + \ln(\eta(y^2))\\ &= \ln(\eta(e^{2X})) + \ln(\eta(e^{2Y})) = f(2X) + f(2Y).\end{aligned}$$

Donc f vérifie l'équation IV.1 sur $]-\infty, M[$.

V.G.2) D'après la question IV.C, f est affine Donc, il existe deux réels a et b tels que pour tout X de $]-\infty, M[$, $\ln(\eta(e^X)) = aX + b$ ou encore tels que pour tout x de $I \cap]0, +\infty[$, $\ln(\eta(x)) = a\ln(x) + b$. On en déduit que pour tout x de $I \cap]0, +\infty[$, $\eta(x) = e^{a\ln(x)+b} = e^b x^a$. Ainsi, en posant $K_1 = e^b$ et $\alpha_1 = a$, on a montré que pour tout x de $I \cap]0, +\infty[$, $\eta(x) = K_1 x^{\alpha_1}$.
On note que $K_1 = e^b > 0$. D'autre part, on ne peut avoir $\alpha_1 = 0$ car η ne serait plus injective et on ne peut avoir $\alpha_1 < 0$ car η ne serait pas continue en 0. Donc $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

V.G.3) Puisque η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$, ξ prend des valeurs strictement positives sur $]0, +\infty[$. Puisque $\xi(0) = 0$, que ξ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$, η est strictement croissante sur I (et ξ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

La fonction $\eta_1 : x \mapsto -\eta(-x)$ prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$ et vérifie

$$(\eta_1(xy))^2 = (\eta(xy))^2 = \eta(x^2)\eta(y^2) = \eta_1(x^2)\eta_1(y^2).$$

Donc, il existe $C > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que pour tout x de $I \cap]0, +\infty[$, $\eta_1(x) = Cx^{\alpha_2}$. Mais alors, pour tout x de $I \cap]-\infty, 0[$, $\eta(x) = -C(-x)^{\alpha_2} = K_2(-x)^{\alpha_2}$ avec $K_2 = -C < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

V.G.4) On doit avoir $\lim\limits_{x \to m^-} K_1 x^{\alpha_1} \lim\limits_{x \to m^-} \eta(x) = +\infty$ ce qui impose $m = +\infty$. La borne supérieure de I est donc $+\infty$. De même, la borne supérieure de l'intervalle de définition de η_1 est $+\infty$. Donc η est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel,

$$(\eta(x))^2 = (\eta(x \times 1))^2 = \eta(x^2)\eta(1^2) = \eta(x^2)\eta((-1)^2) = (\eta(-x))^2.$$

Donc, $\eta(-x) = \pm\eta(x)$. Si x n'est pas nul, $-x \neq x$ et donc $\eta(-x) \neq \eta(x)$ par injectivité. Il ne reste donc que $\eta(-x) = -\eta(x)$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ puisque $\eta(0) = 0$. Ainsi, pour tout x réel, $\eta(-x) = -\eta(x)$ et donc η est impaire.

V.H - Si ξ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, η est strictement positive sur $I \cap]0, +\infty[$. Dans ce cas, il existe $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout x réel, $\eta(x) = \begin{cases} K_1 x^{\alpha_1} \text{ si } x \geqslant 0 \\ -K_1(-x)^{\alpha_1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$. On en déduit que pour tout x réel,

$$\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{K_1^{1/\alpha_1}}x^{1/\alpha_1} \text{ si } x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{K_1^{1/\alpha_1}}(-x)^{1/\alpha_1} \text{ si } x<0\end{cases}.$$

Ainsi, ξ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire et sa restriction à $]0,+\infty[$ est de la forme $x\mapsto Cx^\beta$ avec $C>0$ et $\beta>0$.

Si ξ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, la fonction $-\xi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et solution de V.1 sur $\mathbb{R}$ car une matrice est inversible si et seulement si son opposée est inversible. Dans ce cas, $-\xi$ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire et sa restriction à $]0,+\infty[$ est de la forme $x\mapsto Cx^\beta$ avec $C>0$ et $\beta>0$ ou encore ξ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire et sa restriction à $]0,+\infty[$ est de la forme $x\mapsto Cx^\beta$ avec $C<0$ et $\beta>0$.

En résumé, ξ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire et sa restriction à $]0,+\infty[$ est de la forme $x\mapsto Cx^\beta$ avec $C\neq 0$ et $\beta>0$.

V.I - La matrice A_0 est symétrique réelle et donc diagonalisable. La matrice A_0+I_d est de rang 1. Donc -1 est valeur propre de A_0 d'ordre $d-1$ exactement. La dernière valeur propre μ est fournie par la trace de A_0 : $\mu-(d-1)=0$ et donc $\mu=d-1$. Par suite, $\det(A_0-XI_d)=\chi_{A_0}=(-1-X)^{d-1}((d-1)-X)$ puis

$$\det(A_\lambda)=\det(A_0+\lambda I_d)=\chi_{A_0}(-\lambda)=(\lambda-1)^{d-1}(\lambda+d-1).$$

En particulier, A_λ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda\in\{1,1-d\}$.

V.J - Soit $\lambda<0$.

$$f_\xi(A_\lambda)=\begin{pmatrix}\xi(\lambda)&\xi(1)&\dots&\xi(1)\\ \xi(1)&-\xi(-\lambda)&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\xi(1)\\ \xi(1)&\dots&\xi(1)&-\xi(-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C(-\lambda)^\beta&C&\dots&C\\ C&-C(-\lambda)^\beta&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&C\\ C&\dots&C&-C(-\lambda)^\beta\end{pmatrix}=CA_{-(-\lambda)^\beta}$$

puis $\det\left(f_\xi(A_\lambda)\right)=\det\left(CA_{-(-\lambda)^\beta}\right)=C^d\left(-(-\lambda)^\beta-1\right)^{d-1}\left(-(-\lambda)^\beta+d-1\right)$.

On choisit alors $\lambda=-(d-1)^{1/\beta}$ et on obtient $\det\left(f_\xi(A_\lambda)\right)=0$. La matrice $f_\xi(A_\lambda)$ n'est pas inversible et donc la matrice A_λ n'est pas inversible puis $\lambda\in\{1,1-d\}$. Puisque $\lambda<0$, on a nécessairement $\lambda=1-d$ puis $(d-1)^{1/\beta}=d-1$ (avec $d-1>0$).

On en déduit que $\left(\dfrac{1}{\beta}-1\right)\ln(d-1)=0$ puis que $\beta=1$ si $d\geqslant 3$. Ainsi, si $d\geqslant 3$, nécessairement il existe $C\neq 0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\xi(x)=Cx$ (par parité). Réciproquement, si $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $f_\xi(A)=CA$ et donc $A\in GL_d(\mathbb{R})\Rightarrow f_\xi(A)\in GL_d(\mathbb{R})$. Donc,

si $d\geqslant 3$, les solutions de IV.1 sont les fonctions linéaires non nulles.

Supposons maintenant $d=2$. Posons $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Alors $\det(A)=ad-bc$ et $\det\left(f_\xi(A)\right)=\xi(a)\xi(d)-\xi(b)\xi(c)$.

Soient x et y deux réels.

- Si l'un des deux réels x ou y est nul, on a $\xi(x)\xi(y)=0=C\xi(xy)$.
- Si les deux réels x et y sont strictement positifs, $\xi(x)\xi(y)=C^2(xy)^\beta=C\xi(xy)$.
- Si les deux réels x et y sont strictement négatifs, $\xi(x)\xi(y)-C(-x)^\beta\times -C(-y)^\beta=C^2(xy)^\beta=C\xi(xy)$.
- Si les réels x ou y sont non nuls et de signes contraires, $\xi(x)\xi(y)=-C^2(-xy)^\beta=C\xi(xy)$.

Ainsi,

$$\det\left(f_\xi(A)\right)=C(\xi(ad)-\xi(bc)).$$

Puisque $C\neq 0$ et que ξ est injective,

$$A \text{ inversible}\Rightarrow ad-bc\neq 0\Rightarrow C(\xi(ad)-\xi(bc))\neq 0\Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible}.$$

Dans le cas $d=2$, les solutions de V.1 sont les fonctions de la forme $x\mapsto\begin{cases}Cx^\beta \text{ si } x\geqslant 0\\ -C(-x)^\beta \text{ si } x<0\end{cases}=\operatorname{sgn}(x)C|x|^\beta$, $C\neq 0$, $\beta>0$.

