Mathématiques 2

MP 2012

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

On note σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, et tout $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un *morphisme d'algèbres* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$, on a :
- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$;
- si $A = 1$, alors $A(f) = \mathrm{Id}$;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$.

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :
- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre $p \geqslant 0$ s'il existe un polynôme $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire *d'ordre p*, dont A est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **I.1** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit, $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ est la réunion des $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ pour tous les polynômes A non nuls dans $\mathbb{K}[X]$).

I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.
On rappelle qu'il en résulte deux choses :
- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal ;
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est l'*ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B – Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?
Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.
On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.
a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.
b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k}$, où :
- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k} = 1$;
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de A. Si 0 n'est *pas* racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \ldots, d\}$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_k < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne qui lui correspond.

II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre *minimal* $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0,\dots,v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.

En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rang}(H_n(x)) = p$.

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rang}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0,\dots,b_{p-1},1)$, où $b_0,\dots,b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1X + b_0$.

II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2\,x_{n+1}$$

II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier *uniquement* la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.

III Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note $p = [(n+1)/2]$ la partie entière de $(n+1)/2$.

On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p-1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Un élément de $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hankel* s'il existe $a = (a_0,\dots,a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tous i et j de $\{1,\dots,n\}$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

On note alors $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ le *spectre ordonné* de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

III.A.2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda,\dots,\lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B – Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0,\dots,a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

On définit deux vecteurs $v = (v_1,\dots,v_n)$ et $w = (w_1,\dots,w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\, a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in \{1,\dots,p\} \\[2ex] v_i = \sqrt{2n-2i+1}\, a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in \{p+1,\dots,n\} \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2$$

III.B.2) Montrer que $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\|v\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer que $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \langle v, w\rangle^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \qquad \text{(III.1)}$$

III.B.4) Vérifier que si $n = 3$, la **condition III.1** équivaut à : $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geqslant 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

III.C – D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ et $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{n+1-i} \leqslant \operatorname{tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \qquad \text{(III.2)}$$

Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1} = 1 \qquad b_{2p-1,1} = 1 \qquad b_{p,p} = -2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de $(n+1)/2$).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

III.C.2) Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$.
On note $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Établir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0 \qquad \text{(III.3)}$$

III.D – Cas $n = 3$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois réels vérifiant

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \qquad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0 \qquad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M = H(a,b,c,b,a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b \geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de telle sorte que $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la **condition III.3** dans le cas $n = 3$?
En utilisant un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$, montrer que pour $n = 3$, la **condition III.1** n'est pas suffisante.

• • • FIN • • •
