SESSION 2012

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I - Suites récurrentes linéaires

I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

• Par définition, il existe un polynôme A non nul (de degré p) tel que $A(\sigma)(x) = 0$ et donc $J_x \neq \{0\}$ et aussi $J_x \neq \varnothing$.
• Soit $(A, B) \in (J_x)^2$. Alors $(A - B)(\sigma)(x) = A(\sigma)(x) - B(\sigma)(x) = 0$ et donc $A - B \in J_x$.
• Soit $(A, P) \in J_x \times \mathbb{K}[X]$. $PA(\sigma)(x) = (P(\sigma) \circ (A(\sigma))(x) = P(\sigma)(A(\sigma)(x)) = P(\sigma)(0) = 0$ (car $P(\sigma)$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

On a montré que J_x est un idéal non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{K}[X]$.

I.B - Quelques exemples

I.B.1) • Une suite récurrente d'ordre 0 est une suite x telle que

$$\exists a_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ a_0 x_n = 0.$$

Ces égalités sont équivalentes à $x = 0$ et donc, il existe une et une seule suite récurrente d'ordre 0 à savoir la suite nulle.

• Soit $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} x \text{ est une SRL d'ordre } 1 &\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{0\} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{K} / \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = q x_n. \end{aligned}$$

Les SRL d'ordre 1 sont les suites géométriques.

• Soit $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} (\sigma - \mathrm{Id})^2(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{K}^2 / \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = an + b \\ &\Leftrightarrow x \text{ est une suite arithmétique.} \end{aligned}$$

Maintenant, les suites précédentes ont un polynôme minimal qui est un diviseur unitaire de $(X - 1)^2$ et donc admettent pour polynôme minimal 1, $X - 1$, $(X - 1)^2$. De plus,

- il y a une et une seule suite arithmétique admettant 1 pour polynôme minimal à savoir la suite nulle,
- les suites admettant $X - 1$ pour polynôme minimal sont les suites constantes et non nulles.

Donc, les suites admettant $(X - 1)^2$ pour polynôme minimal sont les suites arithmétiques de raison non nulle ou encore les suites arithmétiques non constantes.

I.B.2) Le polynôme caractéristique de la récurrence est $X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)^3$. Donc, le polynôme minimal B_x de x est l'un des quatre polynômes 1, $X + 1$, $(X + 1)^2$ ou $(X + 1)^3$.

$x \neq 0$ car $x_1 = -1$ et donc $B \neq 1$ puis $x_0 + x_1 = -1 \neq 0$ et donc $B \neq X + 1$ car $(x_n + x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$.
• $x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 - 2 + 2 = 0$ et donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Alors

$$x_{n+3} + 2x_{n+2} + x_{n+1} = (-3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n) + 2x_{n+2} + x_{n+1} = -x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0.$$

Le résultat est démontré par récurrence. Ainsi, $(X+1)^2(\sigma)(x)=0$ et donc le polynôme minimal de x est $(X+1)^2$.

I.C - L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

I.C.1) • $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est le noyau de l'endomorphisme $A(\sigma)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et donc $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

• σ et $A(\sigma)$ commutent. Donc σ laisse stable le noyau de $A(\sigma)$ qui est $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

• Montrons que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est de dimension p. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) \end{array}$. Montrons que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- φ est une application de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^p$. De plus, φ est linéaire.
- Soit $\alpha=(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\in\mathbb{K}^p$. Soit x la suite définie par : $\forall k\in[\![0,p-1]\!]$, $x_k=\alpha_k$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+p}=-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{a_p}x_{n+k}$. x est un élément de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(x)=\alpha$. Ceci montre que φ est surjective.
- Soit $x\in\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$. Si $x\in\operatorname{Ker}(\varphi)$,

$$\forall k\in[\![0,p-1]\!],\ x_k=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+p}=-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{a_p}x_{n+k}.$$

Mais alors, $x_0=x_1=\ldots=x_{p-1}=0$ et si pour $n\geqslant 0$, $x_n=x_{n+1}=\ldots=x_{n+p-1}$ alors $x_{n+p}=0$. Ceci montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n=0$ et donc $x=0$. Par suite, $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{0\}$ et donc φ est injective.

Finalement, φ est un isomorphisme.

Puisque φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, $\dim(\mathcal{R}_A(\mathbb{K}))=\dim(\mathbb{K}^p)=p$.

I.C.2) Soit $x\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $x\in\mathcal{R}_A(\mathbb{K})\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+p}=0\Leftrightarrow\forall n\geqslant p,\ x_n=0$.

Pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, soit e_k la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(e_k)_n=\delta_{n,k}$. Chaque e_k, $0\leqslant k\leqslant p-1$ est un élément de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$. De plus, la famille $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1} (où φ a été défini à la question précédente). Donc, la famille $(e_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

I.C.3) a) $E_A(\mathbb{K})=\operatorname{Vect}\left(\left(n^k\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ et donc $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension inférieure ou égale à p.

Montrons que la famille $\left(\left(n^k\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre. Soit $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\in\mathbb{K}^p$. Posons $Q=\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kX^k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k\left(n^k\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}=0 &\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{p-1}\alpha_kn^k\lambda^n=0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ Q(n)\lambda^n=0\\ &\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ Q(n)=0 \text{ (car } \lambda\neq 0)\\ &\Rightarrow Q=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}\\ &\Rightarrow\forall k\in[\![0,p-1]\!],\ \alpha_k=0.\end{aligned}$$

Donc la famille $\left(\left(n^k\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre et finalement, la famille $\left(\left(n^k\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $E_A(\mathbb{K})$. On en déduit que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension p.

b) Soient $Q\in\mathbb{K}_{p-1}[X]$ puis $x=(Q(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(X-\lambda)(\sigma)(x)=(\sigma-\lambda\mathrm{Id})(x)=\left(Q(n+1)\lambda^{n+1}-\lambda Q(n)\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}=((\lambda Q(n+1)-\lambda Q(n))\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Donc $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})^1(x)=(Q_1(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $Q_1=\lambda(Q(X+1)-Q(x))$. On note alors que $\deg(Q_1)\leqslant\deg(Q)-1\leqslant p-2$. Par récurrence descendante, $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})^k(x)=(Q_k(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Q_k est un polynôme tel que $\deg(Q_k)\leqslant p-k-1$. En particulier, pour $k=p$, $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})^p(x)=(Q_p(n)\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Q_p est un polynôme tel que $\deg(Q_p)\leqslant -1$ et donc $Q_p=0$. Ceci montre que $(\sigma-\mathrm{Id})^p(x)=0$ et donc que $x\in\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$. On a montré que $E_A(\mathbb{K})$ est contenu dans $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

Puisque $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et que $\dim(E_A(\mathbb{K}))=p=\dim(\mathcal{R}_A(\mathbb{K}))<+\infty$, on a montré que

$$\boxed{\mathcal{R}_A(\mathbb{K})=E_A(\mathbb{K}).}$$

I.D - Etude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Si $d = 0$, le résultat à établir l'a été à la question I.C.2). On suppose dorénavant que $d \geqslant 1$.
Les polynômes X^{m_0} et $(X-\lambda_k)^{m_k}$, $1 \leqslant k \leqslant d$, sont deux à deux premiers entre eux (car sans racine commune dans $\mathbb{C}$). D'après la théorème de décomposition des noyaux et les questions 1.C.2) et I.C.3),

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_A[X] &= \mathrm{Ker}A(\sigma) = \mathrm{Ker}\left(\sigma^{m_0}\right) \oplus \left(\underset{1\leqslant k\leqslant d}{\oplus} \mathrm{Ker}\left(\sigma - \lambda_k \mathrm{Id}\right)^{m_k}\right)\\ &= \left\{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \geqslant m_0,\ x_n = 0\right\} \oplus \left(\underset{1\leqslant k\leqslant d}{\oplus} \left\{\left(Q_k(n)\lambda_k^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ Q_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]\right\}\right)\\ &= \left\{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \ \forall n \geqslant m_0,\ x_n = 0\right\} \oplus \left\{\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n,\ \forall k \in [\![1,d]\!],\ Q_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]\right\}.\end{aligned}$$

Si x est de la forme ci-dessus, alors $\forall n \geqslant m_0$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$ où $\forall k \in [\![1,d]\!]$, $Q_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$.

Réciproquement, soit x une suite de la forme précédente. Soit x' la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$. Alors $x = (x - x') + x'$ où la suite $x - x'$ s'annule à partir du rang m_0. Donc x est dans $\mathcal{R}_A[X]$.

On a montré que

$$\boxed{\mathcal{R}_A[X] = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \ \forall k \in [\![1,d]\!],\ \exists Q_k \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X] / \ \forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n\right\}.}$$

Partie II - Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

II.A.1) Par définition, x est un élément de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$. D'après la question I.C.1), $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est stable par σ. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Ainsi, $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une famille de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ de cardinal $p = \dim\left(\mathcal{R}_B(\mathbb{K})\right) < +\infty$. Pour montrer que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$, il suffit de vérifier que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

Soient $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ puis $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \sigma^k(x) = 0 &\Rightarrow P(\sigma)(x) = 0\\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (car } \deg(P) < \deg(B) \text{ et par définition du polynôme minimal)}\\ &\Rightarrow \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \alpha_k = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre et donc la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \leqslant p$, la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une sous-famille de la famille libre $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$. On en déduit que la famille $\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre et donc de rang n.
- Si $n > p$, alors $\forall k \in [\![p, n-1]\!]$, $\sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$. Par suite,

$$\mathrm{rg}\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1} = \mathrm{rg}\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1} = p.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{rg}\left(\sigma^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1} = \begin{cases} n \text{ si } n < p \\ p \text{ si } n \geqslant p \end{cases}.}$$

II.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme à la question I.C.1), $\forall n \geqslant p$, φ_n est (linéaire) injective.

Soit $n \geqslant p$. On remarque que $H_n(x) = \left((\sigma^{j-1}(x))_{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On note $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de la matrice $H_n(x)$. Puisque $\forall k \geqslant p$, $\sigma^k(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\right)$, on a encore $\forall j \geqslant p+1$, $C_j \in \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ et donc

$$\mathrm{rg}(H_n(x)) = \mathrm{rg}\left((\sigma^{j-1}(x))_{i-1}\right)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p).$$

Maintenant, la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est l'image par φ_n de la famille libre $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x))$. Puisque φ_n est linéaire injective, on en déduit que la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est libre et finalement que

$$\mathrm{rg}(H_n(x)) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = p.$$

II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

II.B.1) Si $m < p$, $H_m(x)$ est de format $m < p$ et donc $\mathrm{rg}(H_m(x)) < p$.
Puisque $p = \mathrm{rg}(H_m(x))$, on a $m \geqslant p$ puis $\forall n \geqslant p$, $\mathrm{rg}(H_n(x)) = p$. D'autre part, si p' est l'ordre minimal de x, pour $n \geqslant p'$, on a $\mathrm{rg}(H_n(x)) = p'$ d'après la question précédente.
Si $n = \max\{p, p'\}$, on obtient $p = \mathrm{rg}(H_n(x)) = p'$ et donc x est d'ordre minimal p.

Puisque $\mathrm{rg}(H_p(x)) = p$, les p colonnes de $H_p(x)$ constituent une famille libre. Notons C'_1, ..., C'_p, les p colonnes de $H_p(x)$ et C_1, ..., C_p, C_{p+1}, les $p+1$ colonnes de $H_{p+1}(x)$. Les colonnes C_1, ..., C_p, sont linéairement indépendantes car

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k C_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \alpha_k C'_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!],\ \alpha_k = 0.$$

Puisque $\mathrm{rg}H_{p+1}(x) = p$ et que $(C_1, \dots, C_p)$ est libre, on en déduit que $C_{p+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$. Par suite, il existe $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $C_{p+1} = -b_0 C_1 - \dots - b_{p-1} C_p$. Mais alors, le vecteur $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$ est un vecteur non nul du noyau de $H_{p+1}(x)$.
D'autre part, le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(H_{p+1}(x))) = p + 1 - \mathrm{rg}(H_{p+1}(x)) = p + 1 - p = 1,$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(H_{p+1}(x))$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$.

II.B.2) L'égalité $b_0 C_1 + \dots + b_{p-1} C_p + C_{p+1} = 0$ fournit $b_0 x + b_1 \sigma(x) + \dots + b_{p-1}\sigma^{p-1}(x) + \sigma^p(x) = 0$ (par injectivité de φ_{p+1}) et donc $x \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ où $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \dots + b_1 X + b_0$.
Puisque x est d'ordre minimal p et que B est unitaire de degré p, B est le polynôme minimal de x.

II.C - Etude d'un exemple

II.C.1)
II.C.2) x est d'ordre minimal au plus 4. $x_4 = x_3 - 2x_1 = -2$, $x_5 = x_4 - 2x_2 = -4$ et $x_6 = x_5 - 2x_3 = -4$.
x n'est ni nulle, ni géométrique et donc $p \neq 0$ et $p \neq 1$.

- $\mathrm{rg}(H_1(x)) = \mathrm{rg}((1)) = 1$.
- $\mathrm{rg}(H_2(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 2$. Donc $p \neq 2$ puis $p \in \{3, 4\}$.
- $\mathrm{rg}(H_3(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \geqslant 2$ puis $\det(H_3(x)) = -1 \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(H_3(x) = 3$.
- $H_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{rg}(H_3(x)) = 3$, $\mathrm{rg}(H_4(x)) \geqslant 3$ puis

$$(a, b, c, d) \in \mathrm{Ker}(H_4(x)) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ a + b - 2d = 0 \\ a - 2c - 4d = 0 \\ -2b - 4c - 4d = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b = -c \\ 2d = -c \\ a = 0 \\ b = 2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -c = 2d \end{array}\right.$$

$(0, 2, -2, 1)$ est un vecteur non nul du noyau de $H_4(x)$. Donc $\mathrm{rg}(H_4(x)) = 3 \neq 4$ puis $p = 3$. Mais alors, $\forall n \geqslant 3$, $\mathrm{rg}(H_n(x)) = 3$. On en déduit que x est d'ordre minimal 3.

II.C.3) D'après la question II.B.2), le polynôme minimal de x est $X^3 - 2X^2 + 2X$ et donc la récurrence minimale de x est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}.$$

II.C.4) Puisque $X^3 - 2X^2 + 2X = X\,(X - (1 + i))\,(X - (1 - i))$, la question I.D- permet d'affirmer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \geqslant 1$, $x_n = a(1 + i)^n + b(1 - i)^n$. Puis

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(1+i)+b(1-i) = 1 \\ a(1+i)^2+b(1-i)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(1+i)+b(1-i) = 1 \\ 2i(a-b) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b = \dfrac{1}{2} \\ a-b = -\dfrac{i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1-i}{4} \\ b = \dfrac{1+i}{4} \end{array}\right. .$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{1-i}{4}(1+i)^n + \dfrac{1+i}{4}(1-i)^n = \dfrac{1}{2}((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}) = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right)$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ x_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right).}$$

II.C.5) De nouveau, $p \in \{2,3,4\}$ et $x_4 = -2$ puis $x_5 = -4$ puis $x_6 = -4$.

• $\text{rg}(H_2(x)) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

• $\text{rg}(H_3(x)) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \geqslant 2$ puis $\det(H_3(x)) = -1+2-1 = 0$. Donc $\text{rg}(H_3(x)) = 2$ et $p \neq 3$.

• $H_4(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. En développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\begin{aligned}\det(H_4(x)) &= -2\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2(0)+4(0)-4(0) = 0.\end{aligned}$$

Donc, $\text{rg}(H_4(x)) = 2$ puis $p = 2$ puis $\forall n \geqslant 2$, $\text{rg}\,(H_n(x)) = 2$. x est d'ordre minimal 2.

Le noyau de $H_3(x)$ est la droite vectorielle engendrée par $(2,-2,1)$ et donc, d'après la question II.B.2, le polynôme minimal de x est $X^2 - 2X + 2$.

Partie III - Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

III.A - Préliminaires

III.A.1) Si M est une matrice de HANKEL de taille n, M est en particulier une matrice symétrique réelle. Le théorème spectral permet d'affirmer que M est orthogonalement semblable à une matrice diagonales et en particulier que le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$.

III.A.2) Si $\text{Spo}(M) = (\lambda, \ldots, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors, M étant diagonalisable, M est semblable à λI_n puis $M = \lambda I_n$.
Mais puisque $n \geqslant 3$, ligne 3, colonne 1, de M on lit $a_2 = 0$ et ligne 2, colonne 2, de M, on lit $a_2 = \lambda \neq 0$. Ceci est une contradiction et donc on ne peut avoir $\text{Spo}(M) = (\lambda, \ldots, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

III.B - Une première condition nécessaire

III.B.1) On sait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \text{Tr}(M) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}$ puis que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = \mathrm{Tr}(A^2) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}M_{j,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}^2\right)\\
&= \sum_{k=2}^{2n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=k}}M_{i,j}^2\right) \text{ (sommation en diagonale)}\\
&= \sum_{k=2}^{2n}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=k}}a_{i+j-2}^2\right) = \sum_{k=0}^{2n-2}\left(\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n-1\\ i+j=k}}a_{i+j}^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k}a_k^2\right) + \sum_{k=n}^{2n-2}\left(\sum_{i=k-(n-1)}^{n-1}a_k^2\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}((n-1)-(k-(n-1))+1)a_k^2\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2.
\end{aligned}
$$

III.B.2)

$$
\begin{aligned}
\langle v,w\rangle &= \sum_{i=1}^{p}\sqrt{2i-1}a_{2(i-1)}\times\frac{1}{\sqrt{2i-1}} + \sum_{i=p+1}^{n}\sqrt{2n-2i+1}a_{2(i-1)}\times\frac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} = \sum_{i=1}^{n}a_{2(i-1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}a_{2k} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i.
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \sum_{i=1}^{p}(2(i-1)+1)a_{2(i-1)}^2 + \sum_{i=p+1}^{n}(2n-2(i-1)-1)a_{2(i-1)}^2\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{2p-2}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=2p}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2 \text{ (car } \forall k\geqslant 2p\geqslant n,\ 2n-k-1\geqslant n-1\geqslant 0)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2 \text{ (car } n\in\{2p-1,2p\})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.
\end{aligned}
$$

III.B.3)

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_j^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\lambda_i^2\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \langle v,w\rangle^2,
\end{aligned}
$$

puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle v,w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 = \|w\|^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ et donc

$$
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - \langle v,w\rangle^2 \geqslant (n-\|w\|^2)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.
$$

III.B.4) Si de plus $n = 3$, alors $p = 2$ puis $\|w\|^2 = 1 + \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{7}{3}$ et donc $K_3 = \dfrac{2}{3}$. D'où

$$\begin{aligned}
(\text{III}.1) &\Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)^2 \geqslant \frac{2}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) \\
&\Leftrightarrow 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) - 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\right) \geqslant \frac{2}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) \geqslant 2\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\right) \\
&\Leftrightarrow 2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) \geqslant 3\left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\right).
\end{aligned}$$

III.C - D'autres conditions nécessaires

III.C.1) B est symétrique réelle et donc B est diagonalisable. Par suite, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de B est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de B. La famille (C_1, C_p, C_{2p-1}) est libre (car $n \geqslant 3 \Rightarrow p \geqslant 2 \Rightarrow 1 < p < 2p-1$) et donc $\text{rg}(B) \geqslant 3$. Mais les autres colonnes sont nulles et donc $\text{rg}(B) \leqslant 3$. Finalement, $\text{rg}(B) = 3$. Mais alors, 0 est valeur propre de B d'ordre $n-3$ (et donc 0 n'est pas valeur propre de B quand $n = 3$). Il manque encore trois valeurs propres de B.

Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
• $B(e_1 + e_n) = e_1 + e_n$. Donc 1 est valeur propre de B.
• $B(e_1 - e_n) = -(e_1 - e_n)$. Donc -1 est valeur propre de B.
•$Be_p = -2e_p$. Donc -2 est valeur propre de B

Finalement,

$$\boxed{\text{Spo}(B) = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-3}, -1, -2).}$$

III.C.2) D'après le résultat admis par l'énoncé, puisque M et B sont symétriques réelles,

$$\lambda_1 \times (-2) + \lambda_2 \times (-1) + \sum_{i=3}^{n-1} \lambda_i \times 0 + \lambda_n \times 1 \leqslant \text{Tr}(MB) \leqslant \lambda_1 \times 1 + \sum_{i=2}^{n-2} \lambda_i \times 0 + \lambda_{n-1} \times (-1) + \lambda_n \times (-2),$$

ou encore $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant -\text{Tr}(MB)$ et $\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant \text{Tr}(MB)$.

Maintenant, $\text{Tr}(MB) = m_{1,2p-1}b_{2p-1,1} + m_{p,p}b_{p,p} + m_{2p-1,1}b_{1,2p-1} = 1 \times a_{1+(2p-1)-2} - 2a_{p+p-2} + a_{(2p-1)+1-2} = (1-2+1)a_{2p-2} = 0$ et on a donc montré que

$$\boxed{2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geqslant 0 \text{ et } \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geqslant 0.}$$

III.D - Cas $n = 3$

III.D.1) $M(e_1 - e_3) = (a-c)(e_1 - e_3)$ et donc $a - c$ est valeur propre de M. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\chi_M &= \begin{vmatrix} a-X & b & c \\ b & c-X & b \\ c & b & a-X \end{vmatrix} = (a-X)(X^2 - (a+c)X + ac - b^2) - b(-bX + ab - bc) + c(cX + b^2 - c^2) \\
&= -X^3 + (2a+c)X^2 + X(-2ac + 2b^2 - a^2 + c^2) + a^2c - 2ab^2 + 2b^2c - c^3 \\
&= -(X - (a-c))(X^2 - (a+2c)X - 2b^2 + c(a+c))
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres de M (distinctes ou confondues) sont donc $a-c$, $\dfrac{1}{2}\left(a + 2c + \sqrt{a^2 + 8b^2}\right)$ et $\dfrac{1}{2}\left(a + 2c - \sqrt{a^2 + 8b^2}\right)$.

III.D.2) Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels donnés tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ et $\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geqslant 0$ et $2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geqslant 0$. On cherche trois réels a, b et c tels que $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Il y a à priori 3 possibilités :

- **1èr cas.** $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}\left(a + 2c + \sqrt{a^2 + 8b^2}\right)$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\left(a + 2c - \sqrt{a^2 + 8b^2}\right)$ et $\lambda_3 = a - c$. Dans ce cas,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_1\\ \frac{1}{2}\left(a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_2\\ a-c=\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+2c=\lambda_1+\lambda_2\\ \sqrt{a^2+8b^2}=\lambda_1-\lambda_2\\ a-c=\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{8}\left((\lambda_1-\lambda_2)^2-\frac{1}{9}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)^2\right)\end{array}\right. \quad (\text{car } \lambda_1\geqslant\lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{18}(\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3)(2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\end{array}\right.$$

- **2ème cas.** $\lambda_1=\frac{1}{2}\left(a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}\right)$, $\lambda_2=a-c$ et $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_1\\ a-c=\lambda_2\\ \frac{1}{2}\left(a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+2c=\lambda_1+\lambda_3\\ \sqrt{a^2+8b^2}=\lambda_1-\lambda_3\\ a-c=\lambda_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{8}\left((\lambda_1-\lambda_3)^2-\frac{1}{9}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2\right)\end{array}\right. \quad (\text{car } \lambda_1\geqslant\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{18}(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\end{array}\right.$$

- **3ème.** $\lambda_1=a-c$, $\lambda_2=\frac{1}{2}\left(a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}\right)$, et $\lambda_3=\frac{1}{2}\left(a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l}a-c=\lambda_1\\ \frac{1}{2}\left(a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_2\\ \frac{1}{2}\left(a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}\right)=\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a-c=\lambda_1\\ a+2c=\lambda_2+\lambda_3\\ \sqrt{a^2+8b^2}=\lambda_2-\lambda_3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{8}\left((\lambda_2-\lambda_3)^2-\frac{1}{9}(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\right)\end{array}\right. \quad (\text{car } \lambda_2\geqslant\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\ c=\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\\ b^2=\frac{1}{18}(-\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)(\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)\end{array}\right.$$

Dans le deuxième cas, le système proposé a toujours une solution puisque $(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)\geqslant 0$ à savoir

$$a=\frac{1}{3}(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3),\ b=\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)} \text{ et } c=\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3).$$

Pour ces trois réels a, b et c, on a $\text{Spo}(M)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.
III.D.3) Ainsi, si $n=3$ et si un triplet ordonné vérifie les conditions (III.3), il existe une matrice de Hankel M telle que $\text{Spo}(M)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Donc, dans le cas $n=3$, (III.3) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel M telle que $\text{Spo}(M)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Soit $\lambda\geqslant 1$. Pour le triplet ordonné $(\lambda,1,1)$,

$$\begin{aligned}\text{(III.1)} &\Leftrightarrow 2(\lambda^2+2)\geqslant 3(2\lambda+1)\Leftrightarrow 2\lambda^2-6\lambda+1\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \lambda\in\left(\left]-\infty,\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{7}}{2},+\infty\right[\right)\cap[1,+\infty[\\ &\Leftrightarrow \lambda\geqslant\frac{3+\sqrt{7}}{2}=2,8\ldots\end{aligned}$$

La deuxième des conditions (III.3) s'écrit quant à elle $\lambda - 3 \geqslant 0$. Donc si on prend $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$, $(\lambda, 1, 1)$ est un triplet ordonnée tel que les conditions (III.3) ne sont pas vérifiées. Il n'existe donc pas de de matrice de Hankel M telle que $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda, 1, 1)$.
Néanmoins, la condition (III.1) est vérifiée par le triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$ et donc la condition (III.1) n'est pas une condition suffisante d'existence.

