SESSION 2012

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

Partie I - Produit de convolution

I.A - Généralités

I.A.1) a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)\ dt$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$. Puisque la fonction $t \mapsto \|g\|_\infty |f(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ et donc $f * g(x)$ existe. Ensuite,

$$|f*g(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)|\ dt \leqslant \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f*g(x)$ existe et $|f*g(x)| \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$. Donc $f*g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times C_b(\mathbb{R}),\ f*g \text{ est définie et bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty.}$$

b) Soit $(f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour tout réel t, la fonction $t \mapsto f(t)$ est de carré intégrable et la fonction $t \mapsto g(x-t)$ est de carré intégrable (car en posant $u = x-t$ qui est un changement de variable admissible puisque l'application $t \mapsto x-t$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même) on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-t))^2\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (g(u))^2\ du = \|g\|_2^2 < +\infty$. On sait alors que la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|f*g(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2\ dt}\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (g(x-t))^2\ dt} = \|f\|_2\|g\|_2.\end{aligned}$$

Pour tout réel x, $f*g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $|f*g(x)| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$. Donc $f*g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.

$$\boxed{\forall (f,g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),\ f*g \text{ est définie et bornée sur } \mathbb{R} \text{ et } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.}$$

I.A.2) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\ du = g*f(x).$$

On a montré que $f*g = g*f$.

I.A.3) Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que f et g soient nulles en dehors de $[-A, A]$. Soit $x \in]-\infty, -2A[\cup]2A, +\infty[$.

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)\ dt.$$

Si $x > 2A$, alors pour tout réel $t \in [-A, A]$, $x - t > 2A - A = A$ et donc $g(x-t) = 0$. Mais alors $f*g(x) = 0$.
Si $x < -2A$, alors pour tout réel t de $[-A, A]$, $x - t < -2A + A = -A$ et donc $g(x-t) = 0$. Mais alors $f*g(x) = 0$.

En résumé, $f*g$ est nulle en dehors de $[-2A, 2A]$ et donc $f*g$ est à support compact.

I.B - Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

I.B.1) • Supposons h uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(|x-y| < \nu \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit $\alpha \in]-\nu,\nu[$. Alors, pour tout réel x, $|x-(x-\alpha)| = |\alpha| < |\nu|$ et donc $|T_\alpha(h)(x) - h(x)| = |f(x-\alpha) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que $\|T_\alpha(h) - h\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu > 0/$ $(|\alpha| < \nu \Rightarrow \|T_\alpha(h) - h\|_\infty < \varepsilon)$ et donc que $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

• Supposons que $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\nu,\nu[$, $\|T_\alpha(h) - h\|_\infty < \varepsilon$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|y-x| < \alpha$. Alors $|h(y) - h(x)| = |h(y) - h(y-(y-x))| < \|T_{y-x}(h) - h\|_\infty < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu > 0/$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(|y-x| < \nu \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$ et donc h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Finalement,

$$\boxed{\text{Pour toute fonction } h,\ h \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \lim_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0.}$$

I.B.2) Puisque f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$, $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après la question I.A.1)b).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel x, en posant $u = t+\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned}T_\alpha(f*g)(x) &= f*g(x-\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-\alpha-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-\alpha)g(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\alpha(f)(u)g(x-u)\,du \\ &= T_\alpha(f)*g(x),\end{aligned}$$

et donc $T_\alpha(f*g) = T_\alpha(f)*g$.

I.B.3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après la question I.A.1)b) et par bilinéarité du produit de convolution,

$$\|T_\alpha(f*g) - f*g\|_\infty = \|T_\alpha(f)*g - f*g\|_\infty = \|(T_\alpha(f) - f)*g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2\,\|g\|_2.$$

I.B.4) Supposons f à support compact. Il existe $A > 0$ tel que f s'annule en dehors de $[-A,A]$. En particulier, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in]-1,1[$. $T_\alpha(f)$ s'annule en dehors de $[-A+\alpha, A+\alpha]$ et f est nulle en dehors de $[-A,A]$. Par suite, $T_\alpha(f) - f$ est nulle en dehors de $[-A-1, A+1]$ puis

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-\alpha) - f(x))^2\,dx.$$

Soit $F : \begin{array}{ccc} [-A-1,A+1]\times]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ (x,\alpha) & \mapsto & (f(x-\alpha)-f(x))^2 \end{array}$.

- Pour chaque $\alpha \in]-1,1[$, la fonction $x \mapsto F(x,\alpha)$ est continue par morceaux sur $[-A+1, A+1]$.
- Pour chaque $x \in [-A-1, A+1]$, la fonction $\alpha \mapsto F(x,\alpha)$ est continue sur $]-1,1[$.
- Pour chaque $(x,\alpha) \in [-A-1,A+1]\times]-1,1[$, $|F(x,\alpha)| \leqslant (\|f\|_\infty + \|f\|_\infty)^2 = 4\|f\|_\infty^2 = \varphi(x)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[-A-1, A+1]$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\alpha \mapsto \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-\alpha) - f(x))^2\,dx$ est continue sur $]-1,1[$. En particulier, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-\alpha) - f(x))^2\,dx = \int_{-A-1}^{A+1} (f(x-0) - f(x))^2\,dx = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$. Puisque d'autre part, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\|T_\alpha(f*g) - f*g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2\,\|g\|_2$, on a encore $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(f*g) - f*g\|_\infty = 0$ et la question I.B.1) permet d'affirmer que $f*g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.B.5) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe $A > 2$ tel que $\int_{-\infty}^{-A} f^2(t)\,dt + \int_{A}^{+\infty} f^2(t)\,dt < \frac{\varepsilon^2}{32}$. On pose $M = \sup\{|f(x)|,\ x \in [-A,A]\}$ (M existe car f est continue sur le segment $[-A,A]$) puis $\nu = \text{Min}\left\{\frac{\varepsilon^2}{32(8M^2+1)}, \frac{A}{2}\right\}$ (de sorte que $0 < \nu < A$).

Soit f_1 la fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui coïncide avec f sur $[-A+\nu, A-\nu]$, qui est nulle en dehors de $[-A, A]$ et qui est affine sur $[-A, -A+\nu]$ et sur $[A-\nu, A]$. On note que pour $x \in [-A, -A+\nu] \cup [A-\nu, A]$, on a $|f(x) - f_1(x)| \leqslant |f(x)| + |f_1(x)| \leqslant M + M = 2M$. Par suite,

$$\begin{aligned}\|f-f_1\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{-A}(f-f_1)^2 + \int_{-A}^{-A+\nu}(f-f_1)^2 + \int_{-A+\nu}^{A-\nu}(f-f_1)^2 + \int_{A-\nu}^{A}(f-f_1)^2 + \int_{A}^{+\infty}(f-f_1)^2\\ &= \int_{-\infty}^{-A} f^2 + \int_{A}^{+\infty} f^2 + \int_{-A}^{-A+\nu}(f-f_1)^2 + \int_{A-\nu}^{A}(f-f_1)^2\\ &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{32} + 8M^2\nu \leqslant \frac{\varepsilon^2}{32} + 8M^2 \times \frac{\varepsilon^2}{32(8M^2+1)} < 2 \times \frac{\varepsilon^2}{32} = \frac{\varepsilon^2}{16}\end{aligned}$$

puis $\|f - f_1\|_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ (on a montré au passage que l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$). Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leqslant \|T_\alpha(f) - T_\alpha(f_1)\|_2 + \|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 + \|f_1 - f\|_2 = \|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 + 2\|f_1 - f\|_2 < \|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ à support compact et donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 = 0$ d'après la question précédente. Par suite, il existe $r > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-r, r[$, $\|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour $\alpha \in]-r, r[$, on a $\|T_\alpha(f) - f\|_2 < \|T_\alpha(f_1) - f_1\|_2 + \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$. Les questions I.B.1) et I.B.3) permettent encore une fois d'affirmer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C - Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

I.C.1) a) Soit $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times C_b(\mathbb{R})$. Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)g(x-t) \end{array}$.

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|F(x,t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $f * g \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1 + 1}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x - y| < \alpha$. Alors,

$$\begin{aligned}|f*g(x) - f*g(y)| &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t) - g(y-t)|\, dt\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\|f\|_1+1}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\, dt \text{ (car pour tout } t \in \mathbb{R},\ |(x-t)-(y-t)| = |x-y| < \alpha)\\ &= \frac{\varepsilon\|f\|_1}{\|f\|_1+1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f * g(x) - f * g(y)| < \varepsilon)$ et donc $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) F est la fonction de la question I.C.1)a).

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- F admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à sa première variable x jusqu'à l'ordre k et

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t) = f(t)g^{(i)}(x-t).$$

De plus,

- Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\right| \leqslant \|g^{(i)}\|_\infty |f(t)| = \varphi_i(t)$ où φ_i est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $f*g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme ou encore

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ (f*g)^{(i)} = f*\left(g^{(i)}\right).$$

I.C.3) a) Si g est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de FOURIER de g converge normalement vers la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) • Pour tout réel x,

$$(f*g)(x+2\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x+2\pi-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = (f*g)(x),$$

et donc $f*g$ est 2π-périodique.

• On sait que la série de Fourier de g converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$ ou encore les deux séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |c_n(g)|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}(g)|$ sont convergentes.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $h_n(t) = c_n(g)f(t)e^{in(x-t)}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $f \in L^1(\mathbb{R})$).
- Pour tout réel t,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(t) = f(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{in(x-t)} = f(t)g(x-t),$$

et la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_n(t)|\ dt = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|\right) \||f\|_1 < +\infty.$

D'après un théorème d'intégration terme à terme (appliqué à chacune des séries $/dsumn \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n\leqslant -1}$), on peut écrire

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{in(x-t)}\right)\ dt \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-int}\ dt\right)e^{inx} \end{aligned}$$

Maintenant, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left|c_n(g)\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-int}\ dt\right)e^{inx}\right| \leqslant |c_n(g)|\||f\|_1$ et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|\||f\|_1 < +\infty$, la série trigonométrique précédente converge normalement sur $\mathbb{R}$. On sait alors que cette série est la série de FOURIER de $f*g$ (les coefficients de FOURIER de $f*g$ se récupérant par intégration terme à terme).

Ainsi, $f*g$ est somme de sa série de FOURIER et

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f*g) = c_n(g)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-int}\ dt.$$

I.D - Approximation de l'unité

I.D.1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}|(f*\delta_n)(x) - f(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\delta_n(t)\,dt - f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x-t)-f(x))\delta_n(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{-\alpha}(f(x-t)-f(x))\delta_n(t)\,dt + \int_{-\alpha}^{\alpha}(f(x-t)-f(x))\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}(f(x-t)-f(x))\delta_n(t)\,dt\right| \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) + \int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x-t)-f(x)|\delta_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x, on peut choisir $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $|f(x-t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé.

Puisque δ_n est positive, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}|f(x-t)-f(x)|\delta_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\delta_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |(f*\delta_n)(x) - f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) = 0$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, on a $|(f*\delta_n)(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |(f*\delta_n)(x) - f(x)| < \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f*\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.D.2) On reprend la démonstration précédente en supposant de plus f nulle en dehors de $[-A, A]$ pour un certain $A > 0$. f est continue sur le segment $[-A-1, A+1]$ et donc f est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. On peut donc choisir $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [-A, A]$ et tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, $|f(x-t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. α étant ainsi choisi indépendemment de x, pour tout x réel et $n \in \mathbb{N}$,

$$|(f*\delta_n)(x) - f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) + \frac{\varepsilon}{2},$$

puis on choisit n_0, cette fois-ci indépendant de x, tel que pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle 2\|f\|_\infty\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\delta_n(t)\,dt + \int_{\alpha}^{+\infty}\delta_n(t)\,dt\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc pour tout réel x, $|(f*\delta_n)(x) - f(x)| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow |(f*\delta_n)(x) - f(x)| < \varepsilon)$ et donc la suite de fonctions $(f*\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n > 0$. On en déduit que chaque fonction h_n, $n \in \mathbb{N}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite,

- Chaque fonction h_n, $n \in \mathbb{N}$, est positive sur $\mathbb{R}$ (car pour $t \in [-1, 1]$, $1 - t^2 \geqslant 0$) et continue par morceaux.
- Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt = 1$ et en particulier, puisque h_n est positive, h_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geqslant 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$. On suppose dorénavant que $\varepsilon \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_{\varepsilon}^{1}(1-t^2)^n\,dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \leqslant t$ puis $0 \leqslant 1 - t \leqslant 1 - t^2$ et donc $(1 - t)^n \leqslant (1 - t^2)^n$. On en déduit que

$$\lambda_n = 2\int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt \geqslant 2\int_0^1 (1 - t)^n \, dt = \frac{2}{n + 1} > 0.$$

Mais alors,

$$0 \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\int_\varepsilon^1 (1 - t^2)^n \, dt \leqslant \frac{n + 1}{2}(1 - \varepsilon^2)^n(1 - \varepsilon) \leqslant (n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n = 0$ (car $0 \leqslant 1 - \varepsilon^2 < 1$) et on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_\varepsilon^{+\infty} h_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda_n}\int_\varepsilon^1 (1 - t^2)^n \, dt = 0$.

h_n étant paire, on a aussi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n = 0$. Finalement

$$\boxed{\text{la suite } (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une approximation de l'unité.}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x,

$$f * h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_n(x - t) \, dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\left(1 - (x - t)^2\right)^n \, dt$$

Si $x > \frac{3}{2}$, alors $x - 1 > \frac{1}{2}$ et donc $\forall t \in [x - 1, x + 1]$, $f(t) = 0$. On en déduit que $f * h_n(x) = 0$.
Si $x < -\frac{3}{2}$, alors $x + 1 < -\frac{1}{2}$ et donc $\forall t \in [x - 1, x + 1]$, $f(t) = 0$. On en déduit que $f * h_n(x) = 0$.
Finalement, $f * h_n$ s'annule en dehors de $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Alors $-\frac{3}{2} \leqslant x - 1 \leqslant -\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leqslant x + 1 \leqslant \frac{3}{2}$. Puisque f est nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, il reste

$$f * h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_n(x - t) \, dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\left(1 - (x - t)^2\right)^n \, dt.$$

Maintenant, l'expression $\left(1 - (x - t)^2\right)^n$ peut s'écrire sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k$ où les a_k sont des polynômes en t et donc

$$f * h_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n}\int_{-1/2}^{1/2} f(t)a_k(t) \, dt\right) x^k.$$

Par suite, la fonction $f * h_n$ est bien polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

c) Soit f une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.
Soit f_1 la fonction qui coïncide avec f sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, affine sur $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
Puisque f_1 est continue sur $\mathbb{R}$, à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, d'après la question précédente, il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f_1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
En particulier, la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Soit maintenant f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Soit h la fonction affine telle que $h\left(-\frac{1}{4}\right) = a$ et $h\left(\frac{1}{4}\right) = b$ (c'est-à-dire $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $h(x) = a + 2(b - a)\left(x + \frac{1}{4}\right)$) puis $g = f \circ h$.

La fonction g est une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Il existe donc une suite de polynômes (Q_n) convergeant uniformément vers g sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$, posons $P_n(x) = Q_n\left(h^{-1}(x)\right)$. (P_n) est une suite de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ (puisque h^{-1} est affine). De plus

$$\begin{aligned}
\sup\{|f(x) - P_n(x)|,\ x \in [a, b]\} &= \sup\left\{|f(h^{-1}(y)) - P_n(h^{-1}(y))|,\ y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right\} \\
&= \sup\left\{|g(y) - Q_n(y)|,\ y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right\},
\end{aligned}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\left\{|g(y) - Q_n(y)|,\ y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right\} = 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{|f(x) - P_n(x)|,\ x \in [a, b]\} = 0$.

Ainsi, toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g = f$.
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n * g = h_n$. D'après la question I.D.1), la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Si $|t| > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(t) = 0$ et donc $g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = 0$.
- Si $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, d'après la question I.D.3)a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant h_n(t) \leqslant \frac{n+1}{2}(1 - t^2)^n$ et donc $g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = 0$ d'après un théorème de croissances comparées.
- Enfin, $g(0) = 0$ par continuité de g en 0.

En résumé, g est nécessairement la fonction nulle et on doit donc avoir $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f = f * 0 = 0$. Réciproquement, la fonction nulle ne convient pas car il existe des fonctions non nulles dans $L^1(\mathbb{R})$ comme par exemple la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$.

Il n'existe donc pas d'application $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g = f$.

Partie II - Transformée de Fourier

II.A - Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Posons $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & f(t)e^{-ixt} \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)\ dt$.

- Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|F(x, t)| = |f(t)| = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)\ dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt = \|f\|_1$. Donc $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$ et $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Finalement

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}) \text{ et } \left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1.}$$

II.B - Transformée de Fourier d'un produit de convolution

II.B.1) a) D'après la question I.C.1).a), $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction $(x, t) \mapsto f(t)g(x - t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de plus, en posant $u = x - t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x - t)|\ dx\right)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\ du\right)\ dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

D'après le théorème de Fubini, la fonction $f * g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)\ dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt \right)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dx \right)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\, dx \right)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du \right)\, dt \text{ (en posant } u = x-t) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g.
\end{aligned}
$$

b) Ainsi, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{f * g}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $(t, u) \mapsto f(u)g(t-u)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de plus, en posant $v = t - u$,

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)g(t-u)e^{-ixt}|\, dt \right)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(v)|\, dv \right)\, dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty
$$

D'après le théorème de Fubini,

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)e^{-ixt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)\, du \right) e^{-ixt}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)e^{-ixt}\, dt \right)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{-ix(v+u)}\, dv \right) du \text{ (en posant } v = t-u) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)e^{-ixv}\, dv \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu}\widehat{g}(x) du = \widehat{g}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-ixu} du \\
&= \widehat{f}(x)\widehat{g}(x),
\end{aligned}
$$

et donc $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

II.B.2) Un contre-exemple Construisons une fonction f dans $L^1(\mathbb{R})$ et paire telle que $f^2 \notin L^1(\mathbb{R})$ ou encore telle $f \notin L^2(\mathbb{R})$.

Soit f la fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[0, 2 - \frac{1}{8}]$ et en dehors des intervalles $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$, $n \geqslant 2$, affine sur chaque $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$, $n \geqslant 2$, et $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$, $n \geqslant 2$, et telle que $\forall n \geqslant 2$, $f(n) = n$. Alors

$$
\int_{\mathbb{R}} |f| = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{2}{n^3} \times n}{2} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,
$$

et donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, pour $n \geqslant 2$,

$$
\int_{n}^{n+\frac{1}{n^3}} f^2(x)\, dx = \int_{n}^{n+\frac{1}{n^3}} \left(-n^4 \left(x - n - \frac{1}{n^3} \right) \right)^2\, dx = n^8 \left[\frac{\left(x - n - \frac{1}{n^3} \right)^3}{3} \right]_{n}^{n+\frac{1}{n^3}} = n^8 \frac{1}{3n^9} = \frac{1}{3n},
$$

puis

$$
\int_{\mathbb{R}} f^2 \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+\frac{1}{n^3}} f^2(x)\, dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n} = +\infty,
$$

et donc $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Maintenant,

$$
f * f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\, dt = +\infty,
$$

et donc f et $g = f$ sont deux éléments de $L^1(\mathbb{R})$ tels que $f * g(0)$ n'est pas défini.

II.C - Sinus cardinal

II.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. k_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car $k_n(\pm n) = 0$) à support compact. En particulier, k_n est dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après la question II.A-, $\widehat{k_n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
\widehat{k_n}(x) &= \int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) e^{-ixt}\, dt = \int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \cos(xt)\, dt - i\int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \sin(xt)\, dt \\
&= 2\int_{0}^{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right) \cos(xt)\, dt \text{ (par parité)} \\
&= 2\int_{0}^{1} (1-u)\cos(nxu)\, n du \text{ (en posant } t = nu) \\
&= 2\left(\left[(1-u)\frac{\sin(nxu)}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(nxu)}{x}\, du\right) = \frac{2}{x}\left[\frac{-\cos(nxu)}{nx}\right]_0^1 = \frac{2}{n}\frac{1-\cos(nx)}{x^2} = \frac{4}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{x^2} \\
&= n\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\left(\frac{nx}{2}\right)^2} = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right),
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de $\widehat{k_n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{k_n}(x) = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right).}$$

II.C.2) φ est continue sur $\mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$) et est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ ou $-\infty$. Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

II.C.3) • Chaque fonction $K_n\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\widehat{k_n}(x) = \dfrac{n}{2\pi}\varphi\left(\dfrac{nx}{2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et positive.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2\pi}\varphi\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2\pi}\varphi\left(u\right) \frac{2du}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, du = 1.$$

et en particulier, puisque K_n est positive, K_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{+\infty} K_n(x)\, dx &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{2\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\frac{n^2x^2}{4}}\, dx = \frac{2}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{x^2}\, dx \\
&\leqslant \frac{2}{n\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{2}{n\pi\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \widehat{k_n}(x)\, dx \leqslant \frac{2}{n\pi\varepsilon}$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \widehat{k_n}(x)\, dx = 0$.

Par parité, on a aussi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \widehat{k_n}(x)\, dx = 0$.

Finalement, la suite de fonctions $(K_n)_{n \geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D - Inversion de Fourier

II.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |k_n(x)f(y)e^{-ix(t-y)}|dx\right)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)\, dx\right)\, dy = n\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\, dy = n\|f\|_1 < +\infty,$$

et, toujours d'après le théorème de FUBINI,

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} k_n(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{ixy}\,dy\right)e^{-ixt}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)e^{-ix(t-y)}dx\right)\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\widehat{k_n}(t-y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)K_n(t-y)\,dy \\ &= (f*K_n)(t) \end{aligned}$$

II.D.2) Soit $t \in \mathbb{R}$.

• Chaque fonction $\kappa_n\ :\ x \mapsto k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \geqslant |x|$, $k_n(x) = 1 - \dfrac{|x|}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(x) = 1$. Mais alors, la suite de fonctions $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \widehat{f}(-x)e^{-itx}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \mapsto \widehat{f}(-x)e^{-itx}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'après la question II.A-.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\kappa_n(x)| \leqslant \left|\widehat{f}(-x)\right| = \psi(x)$ où ψ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\widehat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$).

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-x)e^{-itx}\,dx$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} f*K_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(-x)e^{-itx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{ity}\,dy \text{ (en posant } y = -x\text{)}.$$

En résumé, la suite de fonctions $(f*K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $t \mapsto \widehat{\left(\widehat{f}\right)}(-t)$.

D'autre part, la question I.D.1) permet d'affirmer que si on suppose de plus f bornée sur $\mathbb{R}$, alors la suite de fonctions $(f*K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f sur $\mathbb{R}$. La formule d'inversion de FOURIER est donc démontrée pour les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$, bornées sur $\mathbb{R}$ et telles que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il reste à vérifier que dans le cas général ($f \in L^1(\mathbb{R})$ le résultat persiste.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Vérifions que la suite de fonctions $(f*K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $t \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On choisit déjà $\alpha > 0$ indépendant de n (mais dépendant de t), tel que $\sup\{|f(t-x)-f(t)|,\ x \in [-\alpha,\alpha]\} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible puisque, f étant continue sur le segment $[-1,1]$ par exemple, f est uniformément continue sur ce segment).

$$\left|\int_{-\alpha}^{\alpha}(f(t-x)-f(t))K_n(x)\,dx\right| \leqslant \sup\{|f(t-x)-f(t)|,\ x \in [-\alpha,\alpha]\}\int_{-\alpha}^{\alpha} K_n(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\times 1 = \frac{\varepsilon}{2},$$

et comme à la question I.D.1), on a alors tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |(f*K_n)(t) - f(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{-\alpha}(f(t-x)-f(t))K_n(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{\alpha}(f(t-x)-f(t))K_n(x)\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty}(f(t-x)-f(x))K_n(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{-\alpha}|f(t-x)-f(t)|K_n(x)\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty}|f(t-x)-f(t)|K_n(x)\,dx. \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty}|f(t-x)-f(t)|K_n(x)\,dx &\leqslant \int_{\alpha}^{+\infty}|f(t-x)|n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)\,dx + |f(t)|\int_{\alpha}^{+\infty}K_n(x)\,dx \\ &\leqslant \frac{4}{n\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{|f(t-x)|}{x^2}\,dx + |f(t)|\int_{\alpha}^{+\infty}K_n(x)\,dx \end{aligned}$$

la fonction $x \mapsto \dfrac{|f(t-x)|}{x^2}$ étant intégrable sur $[\alpha, +\infty[$ car continue sur $[\alpha, +\infty[$ et dominée en $+\infty$ par la fonction intégrable $x \mapsto |f(t-x)|$. Puisque l a suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \dfrac{|f(t-x)|}{x^2}\, dx + |f(t)|\int_{\alpha}^{+\infty} K_n(x)\, dx = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} |f(t-x)-f(t)|K_n(x)\, dx = 0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} |f(t-x)-f(t)|K_n(x)\, dx = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dépendant de t) tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} |f(t-x)-f(t)|K_n(x)\, dx + \int_{\alpha}^{+\infty} K_n(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $|f * K_n(t) - f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a ainsi montré que la suite de fonctions $(f * K_n)$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit la formule d'inversion de FOURIER valable pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{itx}\, dx.$$

On note que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \widehat{(\widehat{f})}(-t)$ et donc f est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$ d'après la question II.A-.

Partie III - Convolution et codimension finie

III.A -

III.A.1) Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. Donc $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(t)g(-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après I.A.1)b). Donc $\varphi_g(f)$ existe. De plus, $\varphi_g(f) = (f * g)(0)$.

$\varphi\ :\ g \mapsto \varphi_g$ est bien une application, clairement linéaire, de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\left(L^1(\mathbb{R})\right)^*$. Vérifions que cette application est injective.

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\varphi_g = 0 &\Rightarrow \forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t)\, dt = 0\\
&\Rightarrow \forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}} f(u-\alpha)g(\alpha-u)\, du = 0 \text{ (en posant } t = u-\alpha)\\
&\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} T_\alpha(f)(u)g(\alpha-u)\, du = 0\\
&\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall h \in L^1(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} h(u)g(\alpha-u)\, du = 0\\
&\text{(en appliquant à } f = T_{-\alpha}(h) \text{ où } h \in L^1(\mathbb{R}) \text{ (et donc } T_{-\alpha}(h) \in L^1(\mathbb{R})))\\
&\Rightarrow \forall h \in L^1(\mathbb{R}),\ h * g = 0.
\end{aligned}$$

En particulier, si $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n * g = 0$. Comme $g \in C_b(\mathbb{R})$, la suite $(\delta_n * g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}$ d'après la question I.D.1). Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $g = 0$. On a montré que φ est injective.

Soit $(g_1, \dots, g_p) \in (C_b(\mathbb{R}))^p$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$.

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{g_k} = 0 \Leftrightarrow \varphi\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k = 0,$$

et donc

$$\left(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p}\right) \text{ est libre} \Leftrightarrow (g_1, \dots, g_p) \text{ est libre.}$$

III.A.2) Si $\operatorname{rg}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$, toutes les f_n sont nulles puis $K = E$. Un supplémentaire de E est $\{0\}$ et donc la codimension de K est 0 qui est bien le rang de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supposons $\operatorname{rg}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = p \in \mathbb{N}^*$. Quite à renuméroter, on peut supposer qu'une base de $\operatorname{Vect}(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(f_0, \dots, f_{p-1})$.

Soit $n \geqslant p$. $f_n \in \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_{p-1})$ et donc $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{p-1} \operatorname{Ker}(f_k) \subset \operatorname{Ker}(f_n)$ puis $K = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{p-1} \operatorname{Ker}(f_k)$.

Montrons alors par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, si $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre, alors $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)$ admet un supplémentaire F_p de dimension p.

• Pour $p = 1$, si (f_0) est libre, f_0 est une forme linéaire non nulle. Donc $\text{Ker}(f_0)$ est un hyperplan ou encore il existe une droite vectorielle D telle que $E = \text{Ker}(f_0) \oplus D$. $\bigcap_{k=0}^{1-1} \text{Ker}(f_k)$ admet donc un supplémentaire de dimension 1.

• Soit $p \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour p.
Soit $(f_k)_{0\leqslant \leqslant p}$ une famille libre de formes linéaires. Alors $(f_k)_{0\leqslant \leqslant p-1}$ est libre et par hypothèse de récurrence, il existe F_p sous-espace de E de dimension p tel que

$$E = \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k) \oplus F_p.$$

Vérifions alors que $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k) \not\subset \text{Ker}(f_p)$. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} F_p & \mapsto & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1} \end{array}$. ψ est linéaire. De plus, pour $x \in F_p$,

$$x \in \text{Ker}\psi \Rightarrow \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ f_k(x) = 0 \Rightarrow x \in \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k),$$

et donc $x = 0$ puisque F_p est un supplémentaire de $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)$. Par suite, ψ est injective et finalement ψ est un isomorphisme de F_p sur $\mathbb{C}^p$.
Soit $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ l'image par l'isomorphisme ψ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{C}^p$. $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ est une base de F_p telle que $\forall (i, j) \in [\![0, p-1]\!]^2$, $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

Supposons par l'absurde que $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k) \subset \text{Ker}(f_p)$. Soit $f = \sum_{k=0}^{p-1} f_p(e_k) f_k$. Alors

- Pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $f(e_k) = f_p(e_k)$ et donc f et f_p coïncident sur une base de F_p puis f et f_p coïncident sur F_p.
- Les restrictions de f et f_p à $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)$ sont nulles et en particulier coïncident.

Finalement, f et f_p coïncident sur deux sous espaces supplémentaires de E et donc $f_p = f = \sum_{k=0}^{p-1} f(e_k) f_k$ ce qui contredit la liberté de la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$. Finalement $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k) \not\subset \text{Ker}(f_p)$.

On peut donc choisir un vecteur x_p dans $\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)$ et non dans $\text{Ker}(f_p)$. Soit $D = \text{Vect}(x)$. Puisque $x \notin \text{Ker}(f_p)$, on a déjà $E = \text{Ker}(f_p) \oplus D$ puis

$$\begin{aligned}
E &= \left(\left(\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)\right) \cap (\text{Ker}(f_p) \oplus D)\right) \oplus F_p \\
&= \bigcap_{k=0}^{p} \text{Ker}(f_k) \oplus \left(\left(\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)\right) \cap D\right) \oplus F_p \text{ (car } D \subset \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)) \\
&= \bigcap_{k=0}^{p} \text{Ker}(f_k) \oplus D \oplus F_p \text{ (car } D \subset \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(f_k)) \\
&= \bigcap_{k=0}^{p} \text{Ker}(f_k) \oplus F_{p+1},
\end{aligned}$$

où $F_{p+1} = D \oplus F_p$ est de dimension $p + 1$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Supposons enfin que $\text{rg}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = +\infty$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{rg}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \geqslant p$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $(f_{n_0}, \dots, f_{n_{p-1}})$ libre extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $K \subset \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker} f_{n_k} = K'$ et donc

$$\text{codim}(K) \geqslant \text{codim}(K') = p.$$

Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\text{codim}(K) \geqslant p$ et donc $\text{codim}(K) = +\infty$. Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{codim}(K) = \text{rg}(f_n)_{n\in\mathbb{N}}.}$$

III.A.3)

$$\begin{aligned} N_g &= \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) / \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f * g(-\alpha) = 0 \right\} = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) / \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f * (T_\alpha(g)) = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) / \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi_{T_\alpha(g)}(f) = 0 \right\} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right). \end{aligned}$$

Si $\text{rg}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}} = p \in \mathbb{N}$, on peut extraire $\left(\varphi_{T_{\alpha_k}(g)}\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ base de $\text{Vect}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$. Dans ce cas,

$$\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{Ker}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right) = \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}\left(\varphi_{T_{\alpha_k}(g)}\right),$$

et donc, d'après la question précédente, $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{Ker}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)$ est de codimension $p = \text{rg}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

Si $\text{rg}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}} = +\infty$, on peut extraire $\left(\varphi_{T_{\alpha_n}(g)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ famille libre de $\text{Vect}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$. Dans ce cas, $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{Ker}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)$ est de codimension supérieure ou égale à $\text{rg}\left(\varphi_{T_{\alpha_n}(g)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = +\infty$.

Dans tous les cas, $\text{codim}(N_g) = \text{rg}\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$. D'après la question III.A.1), ce rang est aussi le rang de $(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}$ c'est-à-dire la dimension de V_g.

$$\boxed{\forall g \in C_b(\mathbb{R}),\ \text{codim}(N_g) = \dim(V_g).}$$

III.A.4) a) $V_g = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{i\beta(t-\alpha)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}} = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{-i\alpha\beta} g(t)\right)_{\alpha\in\mathbb{R}} \subset \text{Vect}(g)$. Mais d'autre part, $g \in V_g$ et donc $\text{Vect}(g) \subset V_g$ (car V_g est un espace vectoriel). Finalement, $V_g = \text{Vect}(g)$.

Ainsi, V_g est une droite vectorielle et d'après la question précédente, N_g est de codimension 1.

b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_k(t) = e^{ikt}$. On sait que la famille $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre (famille orthonormale pour le produit scalaire $(u, v) \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{u(t)} v(t)\ dt$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_k$. g est un élément de $C_b(\mathbb{R})$ ($\|g\|_\infty \leqslant n$).

Puisque $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $T_\alpha\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\alpha} g_k \in \text{Vect}(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$, on a $V_g \subset \text{Vect}(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$. En particulier, $\dim(V_g) \leqslant n$.

Maintenant, V_g contient les $T_{\frac{2l\pi}{n}}(g)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$. La matrice de la famille $\left(T_{\frac{2l\pi}{n}}(g)\right)_{0\leqslant k,l\leqslant n-1}$ dans la base $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de $\text{Vect}(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est la matrice de Vandermonde $\left(e^{2ikl\pi/n}\right)_{0\leqslant k,l\leqslant n-1}$. Puisque les $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts, on sait que cette matrice est inversible. La famille $\left(T_{\frac{2l\pi}{n}}(g)\right)_{0\leqslant k,l\leqslant n-1}$ est donc libre et on en déduit que $\dim(V_g) \leqslant n$.

Finalement, $\dim(V_g) = n$ (et une base de V_g est $(g_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$). D'après la question III.A.3), N_g est de codimension n

III.B - Hypothèse A

III.B.1) Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées de g sont bornées.
D'après la question I.C.2), pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$f \in N_{g^{(k)}} \Rightarrow f * g^{(k)} = 0 \Rightarrow (f * g)^{(k)} = 0 \Rightarrow (f * g)^{(k+1)} = 0 \Rightarrow f \in N_{g^{(k+1)}}.$$

Donc la suite $\left(N_{g^{(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion puis la suite $\left(\text{codim}\left(N_{g^{(k)}}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisque codim$(N_{g^{(0)}}) \in \mathbb{N}$, la suite des codimensions est nécessairement constante à partir d'un certain rang (dans le cas contraire, l'une des codimensions au moins serait un entier strictement négatif) puis la suite $\left(N_{g^{(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang p (dans le cas contraire, la suite des codimensions ne serait pas constante à partir d'un certain rang). On note n la valeur constante des codimensions à partir d'un certain rang.

On a donc $N_{g^{(p)}} = N_{g^{(p+1)}} = \ldots = N_{g^{(p+n)}} = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{p}\left(\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{Ker}\left(T_\alpha(g^{(n+k)})\right)\right)$. Si la famille $(g^{(n+k)})_{0\leqslant k\leqslant p}$ était libre, il en serait de même de la famille $\left(\varphi_{g^{(n+k)}}\right)_{0\leqslant k\leqslant p}$ d'après la question III.A.1) et l'intersection de noyaux ci-dessus serait de codimension au moins égale à $n+1$ d'après la question III.A.2) ce qui n'est pas.

Donc la famille $(g^{(n+k)})_{0\leqslant k\leqslant p}$ est liée ou encore g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III.B.2) On suppose que l'équation caractéristique de cette équation différentielle linaire homogène à coefficients constants d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit :

$$\prod_{j=1}^{k}(z - z_j)^{\alpha_j} = 0,$$

où les z_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des nombres complexes deux à deux distincts et les α_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des entiers naturels non nuls tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = n$. On sait alors qu'il existe des polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, où $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $\deg(P_j) \leqslant \alpha_j - 1$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \sum_{j=1}^{k} P_j(t)e^{z_j t} \quad (*).$$

Montrons par récurrence sur n que, si $g \neq 0$, $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $\text{Re}(z_j) = 0$ et $P_j \in \mathbb{C}_0[X]$.

- Le résultat est immédiat si $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit $g \neq 0$ de la forme $(*)$ au rang $n+1$.
  - Si $k = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = P_1(t)e^{z_1 t}$ où P_1 est un polynôme non nul de degré au plus $n+1$.
  Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| = |P_1(t)|e^{\text{Re}(z_1)t}$. Si $\text{Re}(z_1) > 0$, $|g(t)| \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées ce qui est exclu puisque g est bornée et Si $\text{Re}(z_1) < 0$, $|g(t)| \underset{t\to-\infty}{\rightarrow} +\infty$ ce qui est exclu. Donc $\text{Re}(z_1) = 0$.
  Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| = |P_1(t)|$. Si P_1 n'est pas constant, $|g(t)| \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ ce qui est exclu.
  Donc P_1 est constant.

  - Si $k \geqslant 2$, pour $t \in \mathbb{R}$, posons $h(t) = g'(t) - z_k g(t)$. La fonction h vérifie aussi l'hypothèse A.
  Ensuite, pour tout réel t,

$$h(t) = \sum_{j=1}^{k}\left(z_j P_j(t) + P_j'(t) - z_k P_j(t)\right)e^{z_j t} = \sum_{j=1}^{k-1}\left((z_j - z_k)P_j(t) + P_j'(t)\right)e^{z_j t} + P_k'(t)e^{z_k t}.$$

  L'écriture ci-dessus est de la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} Q_j(t)e^{z_j t}$ où les Q_j sont des polynômes dont le degré total est au plus

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j + \alpha_k - 1 = (n+1) - 1 = n.$$

  Il est connu que h est nulle si et seulement si tous les Q_j sont nuls (une famille de fonctions de la forme $t \mapsto P(t)e^{zt}$ où les polynômes P sont tous non nuls et les z sont deux à deux distincts est libre). Dans ce cas, pour $j < k$, $(z_j - z_k)P_j + P_j' = Q_j = 0$ puis $P_j = 0$ car si $P_j \neq 0$, $\deg(Q_j) = \deg(P_j)$ (car $z_j - z_k \neq 0$). Ensuite, $P_k' = 0$ et donc P_k est une constante λ (non nulle).
  Mais alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \lambda e^{z_k t}$ ce qui impose $\text{Re}(z_k) = 0$. Le résultat est démontré quand $h = 0$.

  Si $h \neq 0$, par hypothèse de récurrence, les Q_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont des constantes et les z_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sont imaginaires purs. Pour $j < k$, si P_j n'est pas constant, $\deg(Q_j) = \deg(P_j) > 0$ ce qui est exclu. Donc les polynômes P_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, sont constants. Enfin, P_k' est constant et donc P_k est de degré au plus 1. Mais si P_k est de degré 1,

$|g(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} |P_k(t)| \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ ce qui est exclu. Donc P_k est constant.

Le résultat est démontré par récurrence.

Ainsi, si g vérifie l'hypothèse A et si N_g est de codimension finie, g est nécessairement de la forme

$$g\ :\ t \mapsto \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e^{i\beta_j t},$$

où les β_j sont des réels deux à deux distincts et les α_j sont des complexes.

Réciproquement, si g est de cette forme, comme à la question III.A.4.b), $V_g \subset \mathrm{Vect}\left(e_{i\beta_j}\right)_{1\leqslant j\leqslant k}$ où $e_{\beta_j}(t) = e^{i\beta_j t}$ et donc V_g est de dimension finie puis N_g est de codimension finie.

III.C - Cas général

III.C.1) Par hypothèse, $\dim(V_g) = n$ (d'après la question III.A.3)). Donc, il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de V_g. Mais alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists (m_i(\alpha))_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g).$$

III.C.2) a) On supposera que $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $e_x\ :\ \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un élément de F^*. Puisque $\dim(F) = p$, on sait que $\dim(F^*) = p$.

Soit $r \leqslant p$ le rang de la famille $(e_x)_{x\in\mathbb{R}}$. Soit $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_r})$ une base de $\mathrm{Vect}(e_x)_{x\in\mathbb{R}} \subset F^*$. Pour chaque x, il existe $(\lambda_i(x))_{1\leqslant i\leqslant r} \in \mathbb{C}^r$ tel que

$$e_x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) e_{a_i},$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (\lambda_i(x))_{1\leqslant i\leqslant r} \in \mathbb{C}^r / \ \forall f \in F,\ f(x) = \sum_{i=1}^{r} f(a_i)\lambda_i(x).$$

Mais alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall f \in F,\ f = \sum_{i=1}^{r} f(a_i)\lambda_i$. Par suite $F \subset \mathrm{Vect}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et donc

$$p = \dim(F) \leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}\right) \leqslant r.$$

Finalement $p = r$. Par suite, $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ est une famille libre de F^* de cardinal $p = \dim(F^*) < +\infty$ et donc $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ est une base de F^*.

b) • Si la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est liée, il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{C}^n$ tel que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$.

Mais alors, si on note L_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, les lignes de $\mathrm{Det}\left(f_i(a_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant p}$, on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i = 0$ et donc la famille $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est liée. On en déduit que $\mathrm{Det}\left(f_i(a_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant p} = 0$.

• Si $\mathrm{Det}\left(f_i(a_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant p} = 0$, il existe $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathbb{C}^n$ tel que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i = 0$. Soit $f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i$. f est un élément de F tel que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$e_{a_j}(f) = f(a_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(a_j) = 0.$$

Mais $(e_{a_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de F^* et on sait que les coordonnées de f dans la préduale de $(e_{a_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont les $e_{a_j}(f)$ et sont donc nulles. Par suite, $f = 0$ ou encore $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i = 0$. Ceci montre que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée.

On a montré que $(f_1, \ldots, f_p)$ est liée si et seulement si $\mathrm{Det}\left(f_i(a_j)\right)_{1\leqslant i\leqslant p} = 0$ ou encore, par contraposition,

$$(f_1,\dots,f_p) \text{ est libre si et seulement si } \mathrm{Det}\,(f_i(a_j))_{1\leqslant i\leqslant p} \neq 0.$$

III.C.3) V_g est de dimension n et une base de V_g est $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leqslant i\leqslant n}$. D'après la question III.C.2), il existe des réels a_1, $\dots$,a_n, tels que $\det\,(T_{\alpha_i}(g)(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait que $T_\alpha(g) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)$. Mais alors,

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \left(T_{\alpha_i}(g)\right)(a_j)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_j).$$

On a obtenu un système de n équations linéaires à n inconnues (les $m_i(\alpha)$, $1 \leqslant i \leqslant n$) dont le déterminant n'est pas nul c'est-à-dire un système de Cramer. Les formules de Cramer fournissent alors des égalités du type :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ m_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}T_\alpha(g)(a_j)$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont des complexes indépendants de α. Plus explicitement, on a donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ m_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}g(a_j - \alpha).$$

Puisque g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$, il en est de même des fonctions m_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

III.C.4) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions I.A.1) et I.C.1), $\begin{array}{cccc}\Phi_r & : & C_b(\mathbb{R}) & \to & C_b(\mathbb{R}) \\ & & u & \mapsto & u * h_r\end{array}$ est bien une application et même un endomorphisme par bilinéarité du produit de convolution. De plus,

$$V_{h_r*g} = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(h_r*g))_{\alpha\in\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g)*h_r)_{\alpha\in\mathbb{R}} = \Phi_r\left(\mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}\right) = \Phi_r\,(V_g).$$

Mais alors, $\dim\,(V_{h_r*g}) = \dim\,(\Phi_r\,(V_g)) \leqslant \dim\,(V_g) < +\infty$.

III.C.5) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note encore Φ_r l'application $\begin{array}{cccc}\Phi_r & : & V_g & \to & V_{h_r*g} \\ & & u & \mapsto & u * h_r\end{array}$. On sait déjà que Φ_r est une application linéaire surjective. Il s'agit de vérifier que pour r assez grand, l'application Φ_r est un isomorphisme. Il revient au même de démontrer que l'image de la base $(T_{\alpha_i}(g))_{1\leqslant i\leqslant n}$ de V_g, à savoir la famille $(T_{\alpha_i}(g)*h_r)_{1\leqslant i\leqslant n}$, est une base de V_{h_r*g}.

Il existe $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det\,((T_{\alpha_i}(g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$ et d'autre part, puisque $g \in C_b(\mathbb{R})$, la suite de fonctions $(h_r*g)_{t\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la matrice $((T_{\alpha_i}(h_r*g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ tend vers la matrice $((T_{\alpha_i}(g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ quand r tend vers $+\infty$. Par continuité du déterminant, on a encore

$$\lim_{r\to+\infty} \det\,((T_{\alpha_i}(h_r*g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \det\,((T_{\alpha_i}(g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0.$$

Mais alors, à partir d'un certain rang r_0, $\det\,((T_{\alpha_i}(h_r*g))(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$. La question III.C.2)b) permet d'affirmer que, pour $r \geqslant r_0$, la famille $\left(\varphi_{T_{\alpha_i}(h_r*g)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. Il en est de même de la famille $(T_{\alpha_i}(h_r*g))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et donc, pour $r \geqslant r_0$, $\dim\,(V_{h_r*g}) \geqslant n$. Puisque d'autre part, $\dim\,(V_{h_r*g}) \leqslant n$, on a finalement

$$\forall r \geqslant r_0,\ \dim\,(V_{h_r*g}) = n.$$

III.C.6) • Montrons que $\forall r \geqslant 2$, $h_r \in C^{r-1}(\mathbb{R})$.

- h_r est continue sur $\mathbb{R}$, paire, de classe C^∞ sur $[-1,1]$, nulle sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
- h_r admet en 1 des dérivées à gauche à tout ordre. De plus,

$$h_r(t) \underset{t\to 1^-1}{=} \frac{2^r}{\lambda_r}(1-t)^r + o((1-t)^r).$$

La formule de Taylor-Young permet d'affirmer que $\forall k \in [\![0,r-1]\!]$, $(h_r)_g^{(k)}(1) = 0 = (h_r)_d^{(k)}(1)$. Par suite, $\forall k \in [\![0,r-1]\!]$, h_r est k fois dérivable en 1 et $f^{(k)}(1) = 0$. En particulier, $h_r^{(r-1)}(1) = 0$. h_r étant d'autre part de classe C^{r-1} sur $[0,1] \cup [1,+\infty[$, h_r est finalement de classe C^{r-1} sur $[0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

• D'après la question I.C.2), on en déduit que $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $h_r * g \in C^{r-1}(\mathbb{R})$.

• Pour tout réel α, $T_\alpha(g) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)$ et donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T_\alpha(h_r * g) = h_r * T_\alpha(g) = h_r * \left(\sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)h_r * T_{\alpha_i}(g).$$

D'après la question précédente, pour r assez grand, $\dim(V_{h_r * g}) = n$. On peut alors effectuer le même travail qu'à la question III.C.3) en remplaçant les $T_{\alpha_i}(g)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, par les $h_r * T_{\alpha_i}(g)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, où cette fois-ci les $h_r * T_{\alpha_i}(g)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont de classe C^{r-1} :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ m_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} h_r * g(a_j - \alpha),$$

pour r assez grand et des a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, correctement choisis.

• Mais alors les fonctions m_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont de classe C^{r-1} sur $\mathbb{R}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et donc les fonctions m_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.C.7) Pour tout réel α, $g(\alpha) = T_{-\alpha}(g)(0) = \sum_{i=1}^{n} m_i(-\alpha)T_{\alpha_i}(g)(0)$ et donc g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Vérifions que alors toutes les dérivées de g sont bornées. On sait que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x - \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)g(x - \alpha_i).$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(x - \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha)g^{(k)}(x - \alpha_i).$$

En particulier, pour $x = 0$ et en remplaçant α par $-\alpha$, on obtient

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(-\alpha)g^{(k)}(-\alpha_i).$$

La question III.C.3) (expression des m_i en fonction de g) montre en particulier que les fonctions m_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont bornées sur $\mathbb{R}$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction g vérifie l'hypothèse A ce qui ramène à la partie A. Les fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g est de codimension finie sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{i\beta_k t}$$

où les α_k sont des complexes et les β_k sont des réels deux à deux distincts.

