SESSION 2011

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

I - Caractérisation des matrices symétriques définies positives

I.A -

I.A.1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On sait que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

• Supposons que A soit positive. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Puisque $X \neq 0$, on a ${}^tXX = \|X\|_2^2 > 0$ puis

$$\lambda = \frac{{}^tX(\lambda X)}{{}^tXX} = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant 0 \quad \text{(I)}.$$

Par suite, les valeurs propres de A sont positives.

• Réciproquement, supposons que toutes les valeurs propres de A soient positives. D'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. Donc, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) /\ A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En posant $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $X' = {}^tPX = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$${}^tXAX = {}^tX(PD{}^tP)X = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tX'DX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2 \geqslant 0 \quad \text{(II)}$$

et la matrice A est positive.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+.}$$

I.A.2) • Supposons que A soit définie positive. Avec les notations de la question précédente, puisque $X \neq 0$, on a ${}^tXAX > 0$ et l'inégalité (I) s'écrit

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} > 0.$$

Par suite, les valeurs propres de A sont strictement positives.

• Réciproquement, supposons que les valeurs propres de A soient strictement positives. L'inégalité (II) de la question précédente persiste. De plus,

$$\begin{aligned} {}^tXAX = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2 \geqslant 0 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i^2 (x'_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x'_i = 0 \text{ (car } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow {}^tPX = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ (car } {}^tP \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})), \end{aligned}$$

et la matrice A est définie positive.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}.}$$

I.B -

I.B.1) Puisque $A^{(n)} = A$ est définie positive, on a $\det(A^{(n)} = \det(A) > 0$ car $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A..
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. La matrice A s'écrit sous la forme $A = \begin{pmatrix} A^{(i)} & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$ où $D_i \in \mathcal{M}_{n-i}(\mathbb{R})$, $B_i \in \mathcal{M}_{i,n-i}(\mathbb{R})$ et $C_i \in \mathcal{M}_{n-i,i}(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{i,1}(\mathbb{R})$. On complète X en $X' = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$^tX'AX' = (^tX\ 0)\begin{pmatrix} A^{(i)} & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = (^tX\ 0)\begin{pmatrix} A^{(i)}X \\ C_iX \end{pmatrix} = {}^tXA^{(i)}X.$$

Par suite, $^tXA^{(i)}X = {}^tX'AX' \geqslant 0$ et de plus, $^tXA^{(i)}X = 0 \Leftrightarrow {}^tX'AX' = 0 \Leftrightarrow X' = 0 \Leftrightarrow X = 0$. Donc la matrice $A^{(i)}$ est définie positive. D'après la question précédente, les valeurs propres de $A^{(i)}$ sont des réels strictement positifs puis le déterminant de $A^{(i)}$ qui est le produit des valeurs propres de $A^{(i)}$, est un réel strictement positif.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ A^{(i)} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \det(A_i) > 0.}$$

I.B.2) • Soient $a \in \mathbb{R}$ puis $A = (a) = aI_1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. L'unique valeur propre de A est a et donc

$$A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a > 0 \Leftrightarrow \det(A^{(1)}) > 0.$$

• Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, telle que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$^tXAX = ax^2 + 2byxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \geqslant 0.$$

De plus, $^tXAX = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = \frac{ac - b^2}{a}y^2 = 0 \Leftrightarrow +\frac{b}{a}y = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = 0$. Donc A est définie positive.

I.B.3) a) D'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
Notons $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ la famille des valeurs propres de A puis $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A associée.
Puisque $\det(A) = \det(A^{(n+1)}) > 0$, aucune valeur propre de A n'est nulle. Puisque A n'est pas définie positive, il existe au moins une valeur propre strictement négative mais A ne peut avoir une unique valeur propre négative car alors $\det(A) < 0$ ce qui n'est pas. Donc A admet au moins deux valeurs propres λ_i et λ_j, $i \neq j$, strictement négative (avec éventuellement $\lambda_i = \lambda_j$). Les vecteurs e_i et e_j sont deux vecteurs linéairement indépendants associés à des valeurs propres strictement négatives.

b) La question II.B.2) montre que l'on ne peut avoir $n = 1$. Donc, $n \geqslant 2$ puis $n + 1 \geqslant 3$. Soient e'_1 et e'_2 deux vecteurs propres de A linéairement indépendants et associés à des valeurs propres strictement négatives λ et μ.
Si la dernière composante de e'_1 est nulle, on peut prendre $X = e'_1$ car

$$^tXAX = \lambda\, {}^te'_1e_1 = \lambda\|e'_1\|_2^2 < 0 \text{ (car } e'_1 \neq 0).$$

De même, si la dernière composante de e'_2 est nulle, $X = e'_2$ convient. Supposons maintenant que la dernière composante de e'_1 et la dernière composante de e'_2 soient non nulles.
Notons a' (resp. b') la dernière composante de e'_1 (resp. e'_2). Soit $X = b'e'_1 - a'e'_2$. La dernière composante de X est nulle et d'autre part, puisque la famille (e'_1, e'_2) est orthonormée,

$$^tXAX = \lambda b'^2 + \mu a'^2 < 0.$$

Dans tous les cas, il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que $^tXAX < 0$.

c) Posons $X = \begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question I.B.1), $0 > {}^tXAX = {}^tX'A^{(n)}X'$ et donc $A^{(n)}$ n'est pas définie positive puis, par hypothèse de récurrence, $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\det(A^{(i)}) \leqslant 0$. Ceci est une contradiction et donc la matrice A est définie positive.

On a ainsi montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ (A \text{ est définie positive} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A^{(i)} > 0).}$$

I.C - L'équivalence est vraie si $n = 1$. Soient $n \geqslant 2$ puis $A = \text{diag}(0, \ldots, 0 - 1) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Puisque A admet une valeur propre strictement négative, A n'est pas positive. Mais $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A^{(i)}) = 0 \geqslant 0$. L'équivalence « A est positive $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\det(A^{(i)}) \geqslant 0$ » est fausse quand $n \geqslant 2$.

I.D **- Procédure en Maple.**

```
with(LinearAlgebra) :
defpositif :=proc(A,n)
local i ;
   i :=1 ;
   while i<=n and Determinant(Submatrix(A,[1..i],[1..i]))>0
   do i :=i+1 od ;
   evalb(i=n+1)
end ;
```

II - Étude d'une suite de polynômes

II.A **-** • $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale, symétrique, positive par positivité de l'intégrale. De plus, pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\ dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

En résumé, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[X]$ ou encore

$$\boxed{\langle\ ,\ \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

II.B **-** Soit $n \in \mathbb{N}$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et donc $P_n^{(n)}$ est un polynôme de degré $2n - n = n$.

Quand x tend vers 1, $P_n(x) \sim (x-1)^n$ ou encore $P_n(x) = 1 \times (x-1)^n + o((x-1)^n)$. Puisque P_n est n fois dérivable en 1, par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que $\dfrac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$ ou encore

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n^{(n)}(1) = n!.}$$

II.C **-** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Une intégration par parties fournit

$$\langle Q, L_n\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\ dt = \frac{1}{n!}\left(\left[Q(t)P_n^{(n-1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)\ dt\right).$$

Maintenant, 0 et 1 sont racines de P_n d'ordre n et donc racines d'ordre $n - (n-1) = 1$ de $P_n^{(n-1)}$. On en déduit que $\langle Q, L_n\rangle = -\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)\ dt$.

Plus généralement, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\langle Q, L_n\rangle = \dfrac{(-1)^k}{n!}\displaystyle\int_0^1 Q(k)(t)P_n^{(n-k)}(t)\ dt$. Une intégration par parties fournit

$$\langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{n!}\left(\left[Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k-1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 Q(k+1)(t)P_n^{(n-k-1)}(t)\ dt\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{n!}\int_0^1 Q^{(k+1)}(t)P_n^{(n-(k+1))}(t)\ dt.$$

car 0 et 1 sont racines de P_n d'ordre n et donc racines d'ordre $n - (n-(k+1)) = k+1 \geqslant 1$ de $P_n^{(n-1)}$.

On a montré par récurrence que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\langle Q, L_n\rangle = \dfrac{(-1)^k}{n!}\displaystyle\int_0^1 Q(k)(t)P_n^{(n-k)}(t)\ dt$. En particulier, $\langle Q, L_n\rangle = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^1 Q(n)(t)P_n(t)\ dt = 0$ car $\deg(Q) < n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle Q, L_n\rangle = 0.}$$

II.D -

II.D .1) $I_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des intégrations par parties successives fournissent

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 t^n(t-1)^n \ dt = \left[t^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n-1}(t-1)^{n+1} \ dt = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n-1}(t-1)^{n+1} \ dt \\
&= (-1)^2 \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n-2}(t-1)^{n+2} \ dt \\
&\ \vdots \\
&= (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\int_0^1 t^0(1-t)^{2n} \ dt = (-1)^n \frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)(2n+1)} \\
&= (-1)^n \frac{n!^2}{(2n+1)!} \text{ ce qui reste vrai quand } n = 0.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (-1)^n \frac{n!^2}{(2n+1)!}.}$$

II.D .2) La formule de la question II.C reste valable pour $Q = L_n$. P_n est unitaire de degré $2n$. Donc $\text{dom}(P_n^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}$ puis $\text{dom}(L_n) = \dfrac{(2n)!}{n!^2}$. Par suite,

$$
\begin{aligned}
\langle L_n, L_n\rangle &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 L_n^{(n)}(t)P_n(t) \ dt = \frac{(-1)^n}{n!} \times n!\text{dom}(L_n) \times I_n \text{ (car } \deg(L_n) = n) \\
&= (-1)^n \times \frac{(2n)!}{n!^2} \times (-1)^n \frac{n!^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \langle L_n, L_n\rangle = \frac{1}{2n+1}.}$$

II.E **-** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $K_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|} = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{n!}((X(X-1))^n)^{(n)}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(K_n) = \deg(L_n) = n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{dom}(K_n) = \dfrac{(2n)!\sqrt{2n+1}}{n!^2} > 0$.
- Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(K_n) = n$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. Ensuite, chaque K_n, $n \in \mathbb{N}$, est de norme 1. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, K_n est orthogonal à K_0, K_1, ..., K_{n-1} d'après la question I.C et en particulier, les K_n, $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux orthogonaux.

En résumé, $\forall N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$.

Montrons alors l'unicité de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les mêmes propriétés que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = \text{Vect}(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.
- $\langle P_0, X^0\rangle = 1 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
\langle P_n, X^n\rangle &= \frac{1}{\text{dom}(P_n)}\langle P_n, \text{dom}(P_n)X^n\rangle \\
&= \frac{1}{\text{dom}(P_n)}\langle P_n, P_n\rangle \text{ (car } P_n \text{ est orthogonal à } \text{Vect}(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]) \\
&= \frac{\|P_n\|^2}{\text{dom}(P_n)} > 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui montre l'unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a aussi montré que la famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'orthonormalisée de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.F - $K_0 = L_0 = P_0 = 1$. $K_1 = \sqrt{3}(X(X-1))' = \sqrt{3}(2X-1)$ et $K_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}(X^4 - 2X^3 + X^2)'' = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

$$\boxed{K_0 = 1,\ K_1 = \sqrt{3}(2X-1) \text{ et } K_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1).}$$

III - Matrices de Hilbert

III.A - Etude de quelques propriétés de H_n

III.A.1) • $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. $\Delta_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12} \neq 0$ et donc $H_2 \in GL_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$H_2^{-1} = \frac{1}{1/12}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

• $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. $\Delta_3 = \left(\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{16}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{12}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{240} - \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{216} = \dfrac{1}{2160} \neq 0$. Donc $H_3 \in GL_3(\mathbb{R})$. De plus

$$H_3^{-1} = \frac{1}{\Delta_3}{}^t(\text{com}(H_3)) = 2160\begin{pmatrix} \frac{1}{240} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{72} \\ -\frac{1}{60} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{72} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.}$$

III.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\Delta_{n+1} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}) = \det(C_1 - C_{n+1}, C_2 - C_{n+1}, \ldots, C_n - C_{n+1}, C_{n+1})$. Puis, pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} C_j - C_{n+1} &= \left(\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{i+n+1-1}\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1} = \left(\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1} \\ &= (n-j+1)\left(\frac{1}{(i+j-1)(i+n)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1} \end{aligned}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à chacune de ses n premières colonnes puis par rapport à chacune de ses lignes, on obtient

$$\Delta_{n+1} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times 1}{(n+1) \times (n+2) \times \ldots \times (2n+1)}\det(C_1, \ldots, C_n, C'_{n+1}) = \frac{n!^2}{(2n+1)!}\det(C_1, \ldots, C_n, C'_{n+1}),$$

où $C'_{n+1} = (1)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$. On retranche alors la dernière ligne à toutes les autres. La dernière colonne s'écrit alors $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En développant suivant cette dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{n!^2}{(2n+1)!}\det\left(\frac{1}{i+j-1} - \frac{1}{i+n}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{n!^2}{(2n+1)!}\det\left(\frac{n-j+1}{(i+j-1)(i+n)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\ &= \frac{n!^2}{(2n+1)!}\frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)\ldots(2n)}\det\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\ &= \frac{n!^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_{n+1} = \frac{n!^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n.}$$

III.A.3) Soit $n \geqslant 2$. Puisque $\Delta_1 = 1$,

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k!^4}{(2k)!(2k+1)!}\right)\Delta_1 = \frac{\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!\right)^4}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k)!(2k+1)!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

$$\boxed{\Delta_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ \Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.}$$

III.A.4) En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \neq 0$ et donc $H_n \in GL_n(\mathbb{R})$. Ensuite,

$$\det(H_n^{-1}) = \frac{1}{\det(H_n)} = \frac{c_{2n}}{c_n^4} = \frac{2!}{1!}1!\ldots\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\frac{3!}{2!1!}\ldots\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \times n = n\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k}\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k+1}{k} \in \mathbb{N}^*.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}^*.}$$

III.A.5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations de la partie I, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $H_n^{(k)} = H_k$ et donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\det(H_n^{(k)}) = \Delta_k > 0$. D'après la partie I, H_n est une matrice symétrique réelle définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Sp}(H_n) \subset]0, +\infty[.}$$

III.B - Approximation au sens des moindres carrés

III.B.1) Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) < +\infty$, le théorème de la projection orthogonale permet d'affirmer l'existence et l'unicité de Π_n : Π_n est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$.

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\Pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et donc $\|f - \Pi_n\| \geqslant \|f - \Pi_{n+1}\|$ par définition de Π_{n+1}. Ainsi, la suite $(\|f - \Pi_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$. On sait de plus que l'on peut imposer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) \leqslant n$ (polynômes de Bernstein).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\|f - \Pi_n\| \leqslant \|f - P_n\| = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - P_n(t))^2\, dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 \|f - P_n\|_\infty^2\, dt} = \|f - P_n\|_\infty,$$

et puisque $\|f - P_n\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a encore $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - \Pi_n\| = 0$.

III.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient lign i, colonne j, de la matrice du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est

$$\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}\, dt = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \frac{1}{i+j-1}.$$

H_n est donc la matrice du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III.B.4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(K_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On sait alors que

$$\Pi_n = \sum_{p=0}^{n} \langle f, K_p\rangle K_p.$$

Soit P la matrice de passage de la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $(K_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$. Les coefficients de Π_n sont les coordonnées de Π_n dans la base $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et donc les composantes du vecteur colonne $P\times(\langle f,K_p\rangle)_{0\leqslant p\leqslant n}$.
Ensuite, en notant $p_{i,j}$, $0\leqslant i,j\leqslant n$, les coefficients de la matrice P (de sorte que les $p_{i,p}$ sont les coordonnées de K_p dans la base canonique), pour $0\leqslant p\leqslant n$,

$$\langle f,K_p\rangle=\sum_{i=0}^{n}p_{i,p}\langle f,X^i\rangle,$$

puis $(\langle f,K_p\rangle)_{0\leqslant p\leqslant n}={}^tP\left(\langle f,X^i\rangle\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et finalement les coefficients de Π_n sont les composantes du vecteur colonne $P\times{}^tP\times\left(\langle f,X^i\rangle\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$.

La matrice du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base canonique est H_{n+1} et sa matrice dans la base $(K_p)_{0\leqslant p\leqslant n}$ est I_{n+1}. Les formules de changement de bases fournissent $I_n={}^tPH_{n+1}P$ ou encore $H_{n+1}=({}^tP)^{-1}P^{-1}$ puis $H_{n+1}^{-1}=P^tP$. Par suite, les coefficients de Π_n sont les composantes du vecteur colonne $H_{n+1}^{-1}\left(\langle f,X^k\rangle\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

$$\boxed{\forall i\in[\![0,n]\!],\ \frac{\Pi_n^{(i)}(0)}{i!}=\sum_{i=0}^{n}h_{i+1,j+1}^{(-1,n+1)}\langle f,X^i\rangle.}$$

III.B.5) • $\langle f,1\rangle=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$.

• $\langle f,X\rangle=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac{\ln 2}{2}$.

• $\langle f,X^2\rangle=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt=1-\frac{\pi}{4}$.

D'après la question III.A.1), $H_3^{-1}=\begin{pmatrix}9&-36&30\\-36&192&-180\\30&-180&180\end{pmatrix}$ et donc

- $\Pi_2(0)=9\dfrac{\pi}{4}-36\dfrac{\ln 2}{2}+30\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=30-\dfrac{21\pi}{4}-18\ln 2$,
- $\Pi_2'(0)=-36\dfrac{\pi}{4}+192\dfrac{\ln 2}{2}-180\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=180+36\pi+96\ln 2$,
- $\dfrac{\Pi_2''(0)}{2}=30\dfrac{\pi}{4}-180\dfrac{\ln 2}{2}+180\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=180-\dfrac{75\pi}{2}-90\ln 2$

$$\boxed{\pi_2=\left(180-\frac{75\pi}{2}-90\ln 2\right)X^2+(180+36\pi+96\ln 2)X+\left(30-\frac{21\pi}{4}-18\ln 2\right).}$$

Partie IV - Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A - Somme des coefficients de H_n^{-1}

IV.A.1) • $H_1=(1)$ puis $H_1^{-1}=(1)$ et donc $s_1=1$.
$s_2=4-6-6+12=4$ et $s_3=9-36+30-36+192-180+30-180+180=9$. On peut conjecturer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_n=n^2.$$

IV.A.2) a) On note U le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1 et on note (S) le système de l'énoncé. Soit $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Puisque H_n est inversible,

$$(S)\Leftrightarrow H_nX=U\Leftrightarrow U=H_n^{-1}U.$$

(S) admet donc un et un seul n-uplet solution.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=0}^{n-1}a_p^{(n)}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}h_{p+1,j}^{(-1,n)}\times 1\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}h_{i,j}^{(-1,n)}=s_n.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}.}$$

IV.A.3)

$$\langle S_n, Q\rangle = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n-1} \alpha_i a_j^{(n)} \langle X^i, X^j\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j^{(n)}}{i+j+1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = Q(1).$$

IV.A.4) En particulier, puisque $(K_p)_{0\leqslant p\leqslant n-1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = S_n(1) = \langle S_n, S_n\rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\langle S_n, K_p\rangle\right)^2 \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2.}$$

IV.A.5) Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la question II.D.2), $K_p(1) = \sqrt{2p+1}L_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

IV.A.6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = \frac{(1+(2n-1))n}{2} = n^2.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = n^2.}$$

IV.B - Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers

IV.B.1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\binom{2p}{p} = (1+1)^{2p} - \sum_{0\leqslant k\leqslant 2p,\ k\neq p} \binom{2p}{k} = 2^{2p} - 2\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} = 2\left(2^{2p-1} - \sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\right).$$

Ainsi, $\displaystyle\binom{2p}{p}$ est le double d'un entier et est donc un entier pair.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $p \in [\![1, n]\!]$.

$$\binom{n+p}{p}\binom{n}{p} = \frac{(n+p)!}{n!p!}\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n+p)!}{(n-p)!(2p)!}\frac{(2p)!}{p!^2} = \binom{n+p}{n-p}\binom{2p}{p} \in 2\mathbb{N}.$$

IV.B.2) $P_n = X^n(X-1)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{n}{p} X^{n+p}$ puis

$$P_n^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{(n+p)!}{p!}X^p = n!\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n+p}{p}X^p.$$

puis, puisque $P_n^{(n)}(1) = n!$ d'après la question II.B,

$$L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n+p}{p}X^p.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \sqrt{2n+1}\, L_n \text{ où } L_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p}\binom{n+p}{p} X^p.}$$

Pour $p \in [\![1, n]\!]$, $(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n+p}{p}$ est un entier relatif pair. Pour $p = 0$, $(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{n+p}{p} = (-1)^n$ est impair.

IV.B.3) a) D'après la question III.B.4), $H_n^{-1} = P^tP$ où $P = \mathrm{Mat}_{(1,X,\dots,X^{n-1})}(K_0, K_1, \dots, K_{n-1})$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)\binom{j-1}{i-1}^2\binom{j-1+i-1}{i-1}^2$$

(avec la convention usuelle $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$).

En particulier, $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ et $h_{n,n}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)\binom{j-1}{n-1}^2\binom{j-1+n-1}{n-1}^2 = (2n-1)\binom{n-1}{n-1}^2\binom{2n-2}{n-1}^2 = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}^2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{1,1}^{(-1,n)} = n^2 \text{ et } h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}^2.}$$

b) De manière générale, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(-1,n)} &= \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}p_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1-i+1+k-1-j+1}\sqrt{(2k-1)(2k-1)}\binom{k-1}{i-1}\binom{k-1+i-1}{i-1}\binom{k-1}{j-1}\binom{k-1+j-1}{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+j}(2k-1)\binom{k-1}{i-1}\binom{k-1+i-1}{i-1}\binom{k-1}{j-1}\binom{k-1+j-1}{j-1}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\boxed{\text{les coefficients de } H_n^{-1} \text{ sont des entiers.}}$$

c) Soit $(i, j) \in [\![2, n]\!]^2$.

$$h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=\mathrm{Max}(i,j)}^{n}(-1)^{i+j}(2k-1)\binom{k-1}{i-1}\binom{k-1+i-1}{i-1}\binom{k-1}{j-1}\binom{k-1+j-1}{j-1}.$$

Puisque $k \geqslant \mathrm{Max}(i, j) \geqslant 2$, on a $k-1 \geqslant 1$. Puisque $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$, $\binom{k-1}{i-1}\binom{k-1+i-1}{i-1}$ est un entier pair de même que $\binom{k-1}{j-1}\binom{k-1+j-1}{j-1}$ d'après la question IV.B.1). Par suite, chaque $\binom{k-1}{i-1}\binom{k-1+i-1}{i-1}\binom{k-1}{j-1}\binom{k-1+j-1}{j-1}$ est un entier divisible par 4 et il en est de même de $h_{i,j}^{(-1,n)}$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![2, n]\!]^2,\ h_{i,j}^{(-1,n)} \in 4\mathbb{Z}.}$$

