SESSION 2011

# Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

---

## Partie I - Étude préliminaire

### I.A - Convergence des séries de Riemann

**I.A.1)** Soit $k \in [a+1, +\infty[\cap\mathbb{Z}$. Alors $[k, k+1] \subset [a, +\infty[$ et $[k-1, k] \subset [a, +\infty[$. Par suite, $f$ est continue et décroissante sur $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$. Mais alors

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = (k+1-k)f(k) = f(k),$$

(cette inégalité étant valable pour $k \in [a, +\infty[$) et aussi

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = (k-(k-1))f(k) = f(k).$$

$$\boxed{\forall k \in [a+1, +\infty[\cap\mathbb{Z},\ \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.}$$

**I.A.2)** • Supposons $\alpha > 1$. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 1 + \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$ ce qui reste vrai pour $n = 1$. Mais alors, la suite des sommes partielles de la série de terme général positif $\dfrac{1}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}^*$, est majorée et donc la série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}^*$ converge.

• Supposons $\alpha \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ et donc la série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}^*$ diverge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{n^\alpha},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

**I.A.3)** Soit $\alpha > 1$. D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1},$$

 

et quand $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 1,\ 1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.}$$

***I.B - Première étude asymptotique du reste***

**I.B.1)** Pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ou enfin, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &\leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx - \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \\ &\leqslant (n-(n-1)) \times \frac{1}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{(n-1)^\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant n^\alpha \left(R_n(\alpha) - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^\alpha = \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^\alpha \leqslant 2^\alpha$.

Ainsi, $n^\alpha \left(R_n(\alpha) - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$ ou encore

$$\boxed{R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).}$$

**I.B.2)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f$ est de classe $C^3$ sur $]0,+\infty[$. La formule de Taylor-Laplace à l'ordre 2 s'écrit

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= (k+1-k)f'(k) + \frac{(k+1-k)^2 f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{x^{\alpha+2}}\,dx, \end{aligned}$$

En posant $A_k = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{x^{\alpha+2}}\,dx$, on a $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec

$$0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{1^2}{k^{\alpha+2}}\,dx = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.$$

**I.B.3)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k\right).$$

• Pour $N \geqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} (f(k+1) - f(k)) = f(N) - f(n)$ (somme télescopique). Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} f(N) = 0$ (car $\alpha - 1 > 0$), la série de terme général $f(k+1) - f(k)$, $k \geqslant n$, converge et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (f(k+1) - f(k)) = -f(n) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

• $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{2}\frac{1}{((\alpha+1)-1)n^{(\alpha+1)-1}} + O\left(\frac{1}{((\alpha+1)-1)n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

• $\displaystyle\left|-\sum_{k=n}^{+\infty} A_k\right| = \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} R_n(\alpha+2)$ avec $\displaystyle R_n(\alpha+2) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$ et en particulier $\displaystyle R_n(\alpha+2) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. Par suite, $\displaystyle -\sum_{k=n}^{+\infty} A_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

En résumé, $\displaystyle R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

 

$$\boxed{R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).}$$

## Partie II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

### II.A - Nombres de Bernoulli

**II.A.1)** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^\infty(I,\mathbb{C})$. On pose $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$. Alors $g \in C^\infty(I,\mathbb{C})$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)}\right) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant p-1\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \left(\frac{a_i}{j!} f^{(i+j)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2p-1} \left(\left(\sum_{\substack{i+j=k\\ 0\leqslant i\leqslant p-1\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \frac{a_i}{j!}\right) f^{(k)}\right) \\
&= a_0 f' + \sum_{k=2}^{p} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!}\right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!}\right) f^{(k)}
\end{aligned}$$

(si $p = 1$ les deux dernières sommes sont conventionnellement nulles)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{n+1-j}}{j!}$.
Alors, $(a_0 f)' = f' + 0$ et l'égalité requise est vraie quand $p = 1$ puis pour $p \geqslant 2$ et $2 \leqslant k \leqslant p$, on a

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{k-j}}{j!} = a_{k-1} + \sum_{j=2}^{(k-1)+1} \frac{a_{(k-1)-j}}{j!} = 0,$$

et donc $g' = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$ où les $b_{l;p}$ sont indépendants de $f$. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. On a ainsi montré l'existence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**II.A.2)** Montrons l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite solution.
On applique l'égalité de 1) à la fonction $f : x \mapsto x$ et à $p = 1$. On obtient $a'_0 \times 1 = 1$ et donc $a'_0 = 1$.
Soit $p \geqslant 2$. On applique l'égalité de 1) à la fonction $f : x \mapsto x^p$.
Dans ce cas, $\sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)} = 0$ de sorte que $f' = \sum_{k=1}^{p} \frac{g^{(k)}}{k!}$ $(*)$. Mais $g = a'_0 x^p + p a'_1 x^{p-1} + \ldots + p! a'_{p-1} x = \sum_{j=1}^{p} \frac{p!}{j!} a'_{p-j} x^j$.
En identifiant les coefficients constants dans l'égalité $(*)$, on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!} \left(\frac{p!}{i!} a'_{p-i} i!\right) = p! \sum_{i=1}^{p} \frac{a'_{p-i}}{i!},$$

et donc $a'_{p-1} = -\sum_{i=2}^{p} \frac{a'_{p-i}}{i!}$. En résumé, $\forall p \geqslant 2$, $a'_{p-1} = \sum_{i=2}^{p} \frac{a'_{p-i}}{i!}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a'_n = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a'_{n+1-i}}{i!}$.

Ainsi, si $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite solution, on a nécessairement $a'_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a'_n = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a'_{n+1-i}}{i!}$. Mais alors, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a'_n = a_n$ ce qui montre l'unicité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{a_0 = 1 \text{ et } \forall p \geqslant 1,\ a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}.}$$

 

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leqslant 1$.

- Puisque $a_0 = 1$, l'inégalité est vraie quand $p = 0$.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $|a_k| \leqslant 1$. Alors

$$|a_{p+1}| \leqslant \sum_{i=2}^{p+2} \frac{|a_{p+2-i}|}{i!} \leqslant \sum_{i=2}^{p+2} \frac{1}{i!} \leqslant \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i!} = e - 2 \leqslant 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ |a_p| \leqslant 1.}$$

$a_1 = -\dfrac{a_0}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $a_2 = -\dfrac{a_1}{2} - \dfrac{a_0}{6} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$.

$$\boxed{a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{12}.}$$

**II.A.3) a)** Pour $p \in \mathbb{N}$, posons $u_p = 1$. Puisque $\forall p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leqslant u_p$, on a $R_a \geqslant R_u = 1$ et en particulier, pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ converge.

**b)** On effectue le produit de Cauchy des deux séries entières considérées et pour $|z| < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}(e^z - 1)\varphi(z) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_p z^p\right)\\ &= z + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}}{i!}\right) z^n = z + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{n+1-i}}{i!}\right) z^{n+1}\\ &= z.\end{aligned}$$

Ensuite, on rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Donc, si $z \neq 0$ et $|z| < 1$, on a $e^z - 1 \neq 0$ puis $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$. D'autre part, $\varphi(0) = a_0 = 1$.

**c)** Notons D le disque unité ouvert. Pour tout $z$ de $D \setminus \{0\}$, posons $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = a_0 + \sum_{p=2}^{+\infty} a_p z^p$. Pour $z \in D \setminus \{0\}$, on a

$$\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)}.$$

Pour $z \in D \setminus \{0\}$, on a $\psi(-z) = \dfrac{-z\left(\dfrac{1}{e^z} + 1\right)}{2\left(\dfrac{1}{e^z} - 1\right)} = \dfrac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \psi(z)$ ce qui reste vrai pour $z = 0$. Donc, la fonction $\psi$ est paire et on sait que $\forall k \geqslant 1$, $a_{2k+1} = 0$.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ a_{2k+1} = 0.}$$

$a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{2}$, $a_3 = 0$ puis

$$a_4 = -\frac{a_3}{2} - \frac{a_2}{6} - \frac{a_1}{24} - \frac{a_0}{120} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{-10 + 15 - 6}{720} = -\frac{1}{720}.$$

$$\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}.}$$

 

### *II.B - Formule de Taylor*

**II.B.1)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et il en est de même de la fonction $g$. En particulier, $g$ est de classe $C^{2p+1}$ sur $[k, k+1]$. La formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre $2p$ s'écrit alors

$$\begin{aligned}
g(k+1)-g(k) &= \sum_{i=1}^{2p} \frac{(k+1-k)^i}{i!} g^{(i)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} g^{(2p+1)}(t)\,dt \\
&= f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t)\right) dt.
\end{aligned}$$

On peut poser $R(k) = \displaystyle\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t)\right) dt$.

• Pour $1 \leqslant l \leqslant 2p-1$, $f^{(2p+l)}(k) = \dfrac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)(-\alpha)\ldots(-\alpha-2p-l+2)k^{1-\alpha-2p-l} = \dfrac{(-\alpha)\ldots(-\alpha-2p-l+2)}{k^{2p+l-1+\alpha}}$ et donc, pour $1 \leqslant l \leqslant 2p-1$, $|f^{(2p+l)}(k)| \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+2p-1+2)}{k^{2p+1-1+\alpha}} = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+4p+1)}{k^{2p+\alpha}}$ puis

$$\left|\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,p} f^{(2p+l)}(k)\right| \leqslant \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+4p+1)\left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|\right)\frac{1}{k^{2p+\alpha}} = A_1 k^{-(2p+\alpha)}.$$

• Ensuite, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\left|\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(2p+1+i)}(t)\right) dt\right| &\leqslant \int_k^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} |a_i||f^{(2p+1+i)}(t)|\right) dt \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} |a_i||f^{(2p+1+i)}(k)| \\
&\quad \text{(par décroissance de chaque fonction } |f^{(2p+1+i)}| \text{ sur } [k, k+1]) \\
&\leqslant \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+3p+2)\left(\sum_{i=0}^{p-1} |a_i|\right)\frac{1}{k^{2p+\alpha}} = A_2 k^{-(2p+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Finalement, $|R(k)| \leqslant (A_1 + A_2)k^{-(2p+\alpha)} = Ak^{-(2p+\alpha)}$ où $A$ ne dépend pas de $k$.

**II.B.2)** Le développement proposé a déjà été établi à la question I.B.3) quand $p = 1$. On suppose dorénavant $p \geqslant 2$.

D'après la question II.B.1), $R(k) \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$. De plus, puisque $2p+\alpha > 2+1 = 3$, la série de terme général $\dfrac{1}{k^{2p+\alpha}}$ converge. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} R(k) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(R_n(2p+\alpha)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right) \text{ (d'après I.B.1)).}$$

D'autre part, puisque $g$ est une combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha-1+k}}$, $k \in \mathbb{N}$, avec $\alpha - 1 + k > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(g(k+1)-g(k)) = \lim_{N\to+\infty}(g(N+1)-g(n)) = -g(n) = -\sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n) = -\sum_{k=0}^{2p-2} a_k f^{(k)}(n)$$

(car $2p-1 \geqslant 3$ et donc $a_{2p-1} = 0$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = \sum_{k=n}^{+\infty}((g(k+1)-g(k)-R(k)) &= -\sum_{k=0}^{2p-1} a_k f^{(k)}(n) \\
\underset{n\to+\infty}{=} -\sum_{k=0}^{2p-2} a_k f^{(k)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).
\end{aligned}$$

 

**II.B.3)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(3) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \to +\infty}{=} -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \frac{1}{12}f''(n) + \frac{1}{720}f^{(4)}(n) + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$
$$\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right).$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right).}$$

## *Partie III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*

### *III.A - Polynômes de Bernoulli*

### III.A.1) Propriétés élémentaires

**a)** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $A_n$ existe et est unique.

- C'est vrai pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A_n$ existe et soit unique.

$A'_{n+1} = A_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ A_{n+1}(x) = \lambda + \int_0^x A_n(t)\ dt$ puis

$$\int_0^1 A_{n+1}(t)\ dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)\ dt\right) dx,$$

ce qui montre l'existence et l'unicité de $A_{n+1}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $A_n$ existe et est unique.

Les égalités $A_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = A_n$ fournissent $\deg A_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(A_{n+1}) = 1 + \deg(A_n)$ puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(A_n) = n.}$$

- $A'_1 = A_0 = 1$ et donc il existe $a$ tel que $A_1 = X + a$ puis $0 = \int_0^1 (t + a)\ dt = \frac{1}{2} + a$ et donc $a = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $A_1 = X - \frac{1}{2}$.
- $A'_2 = A_1 = X - \frac{1}{2}$ et donc il existe $a$ tel que $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + a$ puis $0 = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + a\right)\ dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + a$ et donc $a = \frac{1}{12}$. Ainsi, $A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.
- $A'_3 = A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$ et donc il existe $a$ tel que $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} + a$ puis $0 = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12} + a\right)\ dt = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + a$ et donc $a = 0$. Ainsi, $A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$.

$$\boxed{A_1 = X - \frac{1}{2},\ A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} - \frac{1}{12} \text{ et } A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}.}$$

**b)** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, posons $B_n(t) = (-1)^n A_n(1 - t)$.

$B_0 = 1$ puis, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $B'_{n+1}(t) = (-1)^{n+1}(-A'_{n+1}(1 - t)) = (-1)^n A_n(1 - t) = B_n(t)$. Enfin, en posant $u = 1 - t$, on obtient

$$\int_0^1 B_{n+1}(t)\ dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 A_{n+1}(1 - t)\ dt = (-1)^n \int_0^1 A_{n+1}(u)\ du = 0$$

En résumé, $B_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\ dt = 0$. Par unicité de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n$ ou encore

 

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t).}$$

**c)** Soit $n \geqslant 2$. $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A'_n(t)\ dt = \int_0^1 A_{n-1}(t)\ dt = 0$ (car $n-1 \geqslant 1$). En particulier, puisque $2n-1 \geqslant 2$, $A_{2n-1}(0) = A_{2n-1}(1)$. Mais d'après la question précédente, $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1}A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(0)$ et finalement $A_{2n-1}(0) = A_{2n-1}(1) = 0$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ A_n(0) = A_n(1) \text{ et } A_{2n-1}(0) = 0.}$$

**d)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\deg(A_n) = n$. La formule de Taylor pour les polynômes fournit

$$A_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^{(k)}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}(0)}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\frac{X^k}{k!}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(X) = \sum_{k=0}^{n} c_{n-k}\frac{X^k}{k!}.}$$

Soit $n \geqslant 1$.

$$0 = \int_0^1 A_n(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{k!}\int_0^1 t^k\ dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{(k+1)!}.$$

**e)** $c_0 = A_0(0) = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{n-k}}{(k+1)!} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}.$$

Ainsi, la suite $(c_n)$ vérifie les égalités définissant la suite $(a_n)$ de manière unique et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(0) = a_n.}$$

**III.A.2) Fonction génératrice**

**a)** Soit $t \in [-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|A_n(t)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}t^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k!}|t|^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ (d'après la question II.A.2))} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.\end{aligned}$$

Mais alors, si $z$ est un nombre complexe tel que $|z| < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|A_n(t)z^n| \leqslant e \times |z|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. On a montré que pour tout nombre $z$ tel que $|z| < 1$ et tout réel $t \in [-1, 1]$, la série de terme général $A_n(t)z^n$, $n \in \mathbb{N}$, est absolument convergente et donc convergente.

**b)** Soit $z$ un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Pour $t \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = A_n(t)z^n$.

- La série de fonctions de terme général $f_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction $t \mapsto f(t, z)$.
- Chaque $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, est une fonction dérivable sur $[-1, 1]$.
- $f'_0 = 0$ puis, pour $n \geqslant 1$,

$$|f'_n(t)| = |A'_n(t)z^n| = |A_{n-1}(t)||z|^n \leqslant e|z|^n.$$

Comme la série numérique de terme général $e|z|^n$, $n \in \mathbb{N}$, est convergente, on en déduit que la série de fonctions de terme général $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, est normalement et donc uniformément convergente sur $[-1, 1]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $t \mapsto f(t, z)$ est dérivable sur $[-1, 1]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ainsi, pour tout réel $t \in [-1, 1]$,

 

$$\frac{d}{dt}f(t,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n'(t)z^n=\sum_{n=1}^{+\infty}A_{n-1}(t)z^n=z\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(t)z^n=zf(t,z).$$

Par suite, $\exists K\in\mathbb{C}/\ \forall t\in[-1,1],\ f(t,z)=Ke^{zt}$. Pour $t=0$, on obtient si $z\neq 0$

$$K=f(0,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n=\varphi(z)=\frac{z}{e^z-1}.$$

$$\boxed{\forall t\in[-1,1],\ \forall z\in D\setminus\{0\},\ f(t,z)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(t)z^n=\frac{ze^{zt}}{e^z-1}=\varphi(z)e^{zt}.}$$

La dernière égalité reste vraie quand $z=0$ et donc $\forall t\in[-1,1]$ et $\forall z\in D$, $f(t,z)=\varphi(z)e^{zt}$.

**c)** Soit $z\in\mathbb{C}$. $e^z=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ z=2ik\pi$. Donc si $z\neq 0$ et $|z|<2\pi|$, on a $e^z\neq 1$.

Soit $z$ un nombre complexe non nul tel que $|z|<2\pi$.

$$\frac{ze^{z/2}}{e^z-1}+\frac{z}{e^z-1}=\frac{z(e^{z/2}+1)}{(e^{z/2}-1)(e^{z/2}+1)}=\frac{z}{e^{z/2}-1}=2\frac{z/2}{e^{z/2}-1}.$$

Cette égalité s'écrit encore $f\left(\frac{1}{2},z\right)+f(0,z)=2f\left(0,\frac{z}{2}\right)$ et reste vraie sous cette forme pour $z=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En identifiant les coefficients de $z^n$ dans l'égalité de séries entières précédente, on obtient

$$A_n\left(\frac{1}{2}\right)+a_n=2\times\frac{a_n}{2^n},$$

et donc $A_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)a_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)a_n.}$$

**III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli**

**a)** Montrons le résultat par récurrence.

• $A_2=\frac{X(X-1)}{2}+\frac{1}{12}$ est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. De plus, $A_2(0)=A_2(1)=\frac{1}{12}>0$ et $A_2\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}<0$. Donc les variations de $A_2$ sont bien du type de l'énoncé.

$A_2$ est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $A_2(0)A_2\left(\frac{1}{2}\right)<0$. Donc $A_2$ s'annule une et une seule fois en un certain $\alpha$ de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. De même, $A_2$ s'annule une et une seule fois en un certain $\beta$ de $\left]\frac{1}{2},1\right[$. $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels tels que $0<\alpha<\frac{1}{2}<\beta<1$

$A_3'=A_2$ est strictement positive sur $[0,\alpha[\cup]\beta,1]$ et strictement négative sur $]\alpha,\beta[$. Donc $A_3$ est strictement croissante sur $[0,\alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta,1]$.

De plus, $A_3(0)=A_3\left(\frac{1}{2}\right)=A_3(1)=0$ et les variations de $A_3$ sont bien du type de l'énoncé.

$A_4'=A_3$ est strictement positive sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$. Donc $A_4$ est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

D'autre part, d'après la question précédente, $A_4(0)A_4\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}-1\right)a_4^2\leqslant 0$. Mais on ne peut avoir $A_4(0)A_4\left(\frac{1}{2}\right)=0$ car alors $a_4=0=A_4(0)=A_4\left(\frac{1}{2}\right)$ ce qui contredit la stricte croissance de $A_4$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Donc $A_4(0)A_4\left(\frac{1}{2}\right)<0$ et de même $A_4(1)A_4\left(\frac{1}{2}\right)<0$ puisque $A_4(0)=A_4(1)$ d'après la question III.A.1)c).

 

Les variations de $A_4$ sont bien du type de l'énoncé.

Comme pour $A_2$, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2} < \beta < 1$ et $A_5$ est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$ et strictement décroissante sur $[\beta, 1]$ avec de plus, $A_5(0) = A_5\left(\dfrac{1}{2}\right) = A_5(1) = 0$ (d'après les questions II.A.1)c) et III.A.2)c)).
Les variations de $A_5$ sont bien du type de l'énoncé.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que les variations de $A_{4n+2}$, $A_{4n+3}$, $A_{4n+4}$ et $A_{4n+5}$ soient du type de l'énoncé.
Alors $A_{4n+6}$ est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. De plus, $A_{4n+6}(0)A_{4n+6}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{4n+5}} - 1\right) A_{4n+6}(0)^2$ avec $\dfrac{1}{2^{4n+5}} - 1 < 0$ et $A_{4n+6}(0) = A_{4n+6}(1)$. Comme pour $A_4$, on ne peut avoir $A_{4n+6}(0) = 0$ ou $A_{4n+6}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et donc $A_{4n+6}(0) = A_{4n+6}(1) < 0$ et $A_{4n+6}\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$. Les variations de $A_{4n+6}$ sont du même type que celle de $A_{4n+2}$. Mais alors, on peut appliquer à $A_{4n+7}$, $A_{4n+8}$ et $A_{4n+9}$ les raisonnements tenus sur $A_3$, $A_4$ et $A_5$ pour aboutir aux mêmes résultats.

Le résultat est démontré par récurrence.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\alpha$ et $\beta$ dans $[0, 1]$ tels que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2} < \beta < 1$ tels que la fonction $|A_{2n}|$ est décroissante sur $[0, \alpha]$, croissante sur $\left[\alpha, \dfrac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, \beta\right]$ et croissante sur $[\beta, 1]$. Donc

$$\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}}|A_{2n}(x)| = \mathrm{Max}\left\{|A_{2n}(0)|, \left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|, |A_{2n}(1)|\right\} = \mathrm{Max}\left\{|a_{2n}|, \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)|a_{2n}|)\right\} = |a_{2n}|.$$

Ainsi, $\forall x \in [0, 1]$, $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$.

Ensuite, d'après la question III.A.1)b), $\underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}}|A_{2n+1}(x)| = \underset{x\in[0,\frac{1}{2}]}{\mathrm{Max}}|A_{2n+1}(x)|$. Soit alors $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$A_{2n+1}(x)| = |A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(0)| \leqslant |x - 0| \underset{x\in[0,\frac{1}{2}]}{\mathrm{Sup}}|A'_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{2} \underset{x\in[0,\frac{1}{2}]}{\mathrm{Sup}}|A_{2n}(x)| \leqslant \frac{|a_{2n}|}{2}.$$

Ainsi, $\forall x \in [0, 1]$, $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ |A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}| \text{ et } |A_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|a_{2n}|}{2}.}$$

### *III.B - Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*

**III.B.1) a)** Montrons le résultat par récurrence.

• Une intégration par parties fournit :

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 A'_1(t)f'(t)\,dt = [A_1(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 A_1(t)f''(t)\,dt = \sum_{j=1}^{1}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^1\int_0^1 A_1(t)f^{(1+1)}(t)\,dt.$$

La formule est donc vraie quand $q = 1$.

• Soit $q \geqslant 1$. Supposons que $f(1) - f(0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,dt$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)\,dt &= \int_0^1 A'_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)\,dt \\ &= \left[A_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)\,dt,\end{aligned}$$

 

et donc

$$\begin{aligned}
f(1)-f(0) &= \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q\left(\left[A_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)\,dt\right)\\
&= \sum_{j=1}^{q+1}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^{q+1}\int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

L'égalité est démontrée par récurrence.

**b)** Soient $p \geqslant 1$ puis $q = 2p+1$. Puisque $\forall k \geqslant 2$, $A_k(1) = A_k(0) = a_k$ et $\forall k \geqslant 1$, $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(1)-f(0) &= \sum_{j=1}^{2p+1}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= A_1(1)f'(1) - A_1(0)f'(0) + \sum_{j=2}^{2p+1}(-1)^{j+1}(A_j(1)f^{(j)}(1) - A_j(0)f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}(f'(0)+f'(1)) + \sum_{j=1}^{p}(-1)^{2j+1}a_{2j}(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}(f'(0)+f'(1)) - \sum_{j=1}^{p}a_{2j}(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

**III.B.2)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant n$.

$$\begin{aligned}
f(k+1)-f(k) = f_k(1) - f_k(0) &= \frac{1}{2}(f_k'(0)+f_k'(1)) - \sum_{j=1}^{p}a_{2j}(f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f_k^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p}a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t+k)\,dt\\
&= \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p}a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k)f^{(2p+2)}(u)\,du\\
&= \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p}a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\,dt \quad \text{(I)}
\end{aligned}$$

Puisque $f$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$, la série télescopique de terme général $f(k+1)-f(k)$, $k \geqslant n$, converge et $\sum_{k=n}^{+\infty}(f(k+1)-f(k)) = -f(n)$.

De même, pour tout $j \geqslant 1$, la série télescopique de terme général $f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)$, $k \geqslant n$, converge et $\sum_{k=n}^{+\infty}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) = -f^{(2j)}(n)$.

Ensuite, d'après la question III.A.3)b), en notant $\varepsilon_{2p+2}$ le signe de la fonction $f^{(2p+2)}$ sur $[n,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t-k)f^{(2p+2)}(t)\,dt\right| \leqslant \int_k^{k+1}|A_{2p+1}^*(t-k)||f^{(2p+2)}(t)|\,dt &\leqslant \varepsilon_{2p+2}\frac{|a_{2p}|}{2}\int_k^{k+1} f^{(2p+2)}(t)\,dt\\
&= \varepsilon_{2p+2}\frac{|a_{2p}|}{2}(f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)).
\end{aligned}$$

Puisque la série télescopique de terme général $f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)$, $k \geqslant n$, converge, la série de terme général $\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t-k)f^{(2p+2)}(t)\,dt$ est absolument convergente et donc convergente.

Enfin, la série de terme général $f'(k)$, $k \geqslant n$, converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes.

 

En sommant les égalités (I) pour $k$ variant de $n$ à $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
-f(n) &= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}(f'(k)+f'(k+1)) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} f'(k) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt \\
&= -\frac{1}{2}f'(n) + \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt,
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt.}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\left|\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt\right| &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\left|\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt\right| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_{2p+2}\frac{|a_{2p}|}{2}(f^{(2p+1)}(k+1) - f^{(2p+1)}(k)) \\
&= \frac{|a_{2p}|}{2}\varepsilon_{2p+2}(-f^{(2p+1)}(n)) \\
&= \frac{|a_{2p}|}{2}|f^{(2p+1)}(n)| \text{ (car } \varepsilon_{2p+2}(-f^{(2p+1)}(n)) \text{ est nécessairement positif).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)\ dt\right| \leqslant \frac{|a_{2p}|}{2}|f^{(2p+1)}(n)|.}$$

**III.B.3)** Soit $p \geqslant 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f$ de la question I.B.2) vérifie les hypothèses de la question III.B.2). On peut donc lui appliquer la formule précédente et on obtient

$$\begin{aligned}
R_n(\alpha) &= \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) \\
&= \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)\ dt \\
&= -(a_0f(n) + a_1f'(n) + \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n)) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)\ dt
\end{aligned}$$

avec, par identification à la formule de I.B.2), $\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$.

## *Partie III - Complément sur l'erreur*

### *IV.A - Encadrement de l'erreur*

**IV.A.1)** Soit $n$ un entier naturel impair. D'après la question III.A.1)b),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 A_n(t)g(t)\ dt &= \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)\ dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)\ dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)\ dt - \int_{1/2}^0 A_n(1-u)g(1-u)\ du \\
&= \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)\ dt + \int_0^{1/2}(-1)^nA_n(t)g(1-t)\ dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t)-g(1-t))\ dt.
\end{aligned}$$

 

Pour tout réel $t$ de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on a $g(t)\leqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant g(1-t)$ (car $g$ est croissante sur $[0,1]$) et donc $g(t)-g(1-t)\leqslant 0$.

• Si $n\equiv 1$ (mod 4), d'après la question III.A.3)a), la fonction $A_n$ est négative sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et donc pour tout réel $t$ de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $A_n(t)(g(t)-g(1-t))\geqslant 0$ puis $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)(g(t)-g(1-t))\,dt\geqslant 0$.

• Si $n\equiv 3$ (mod 4), la fonction $A_n$ est positive sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et donc pour tout réel $t$ de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, $A_n(t)(g(t)-g(1-t))\leqslant 0$ puis $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)(g(t)-g(1-t))\,dt\leqslant 0$.

**IV.A.2)** Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}-(a_0f(n)+a_1f'(n)+\ldots+a_{4p}f^{(4p)}(n))\\&=S(\alpha)-R_n(\alpha)-(a_0f(n)+a_1f'(n)+\ldots+a_{4p}f^{(4p)}(n))=S(\alpha)-\int_n^{+\infty}A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

et donc

$$S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)=\int_n^{+\infty}A^*_{4p+1}(t)f^{(4p+2)}(t)\,dt.$$

Maintenant, les dérivées d'ordre pair de $f$ sont négatives et croissantes sur $]0,+\infty[$. D'après la question précédente, $S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\geqslant 0$ et donc $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\leqslant S(\alpha)$.

De même, $S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)=\displaystyle\int_n^{+\infty}A^*_{4p+3}(t)f^{(4p+4)}(t)\,dt\leqslant 0$ et donc $S(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ ou aussi en remplaçant $p$ par $p-1$, $S(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\leqslant S(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)\text{ et }\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\leqslant S(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha).}$$

• $0\leqslant S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)=-(a_{4p+1}f^{(4p+1)}(n)+a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n))=-a_{4p+2}f^{(4p+2)}(n)=|a_{4p+2}||f^{(4p+2)}(n)|$.

• $0\leqslant\widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)-S(\alpha)\leqslant\widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)-\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha)=(a_{4p-1}f^{(4p-1)}(n)+a_{4p}f^{(4p)}(n))=a_{4p}f^{(4p)}(n)=|a_{4p}||f^{(4p)}(n)|$.

Mais alors, dans tous les cas, $\left|S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right|\leqslant|a_{2p+2}||f^{(2p+2)}(n)|$.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|S(\alpha)-\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right|\leqslant|a_{2p+2}||f^{(2p+2)}(n)|.}$$

**IV.A.3)** $|S(3)-\widetilde{S}_{100,4}(3)|\leqslant|a_6||f^{(6)}(100)|=\dfrac{1}{42\times 6!}\dfrac{2\times3\times4\times5\times6\times7}{2\times 100^8}=\dfrac{1}{12}10^{-16}\leqslant 10^{-17}$.

***IV.B - Séries de Fourier***

**IV.B.1)** Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. $\dfrac{x+2\pi}{2\pi}-\left[\dfrac{x+2\pi}{2\pi}\right]=\dfrac{x}{2\pi}+1-\left[\dfrac{x}{2\pi}+1\right]=\dfrac{x}{2\pi}+1-\left[\dfrac{x}{2\pi}\right]-1=\dfrac{x}{2\pi}-\left[\dfrac{x}{2\pi}\right]$ et donc $\widetilde{A}_p(x+2\pi)=\widetilde{A}_p(x)$.
Donc la fonction $\widetilde{A}_p$ est $2\pi$-périodique.

• La fonction $\widetilde{A}_p$ est continue sur $[0,2\pi[$ et de plus, $\widetilde{A}_p(2\pi^-)=A_p(1-)=A_p(1)\in\mathbb{R}$. Donc la fonction $\widetilde{A}_p$ est continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par $2\pi$-périodicité.

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \widetilde{A}_p\text{ est }2\pi\text{-périodique et continue par morceaux sur }\mathbb{R}.}$$

 

**IV.B.2)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\widehat{A}_p(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(x)e^{-inx}\,dx = \int_0^{2\pi} A_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)e^{-inx}\,\frac{dx}{2\pi}\\ &= \int_0^1 A_p(t)e^{-2in\pi t}\,dt\end{aligned}$$

Donc, $\widehat{A}_p(0) = \displaystyle\int_0^1 A_p(t)\,dt = 0$ (car $p \geqslant 1$ et si $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}\widehat{A}_p(n) &= \frac{1}{(-2in\pi)^{p+1}}\int_0^1 A_p(t)\left(e^{-2in\pi t}\right)^{(p+1)}\,dt\\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}}\times(-1)^p\int_0^1 A_p(t)\left(e^{-2in\pi t}\right)^{(p+1)}\,dt\\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}}\left(e^{-2in\pi} - e^0 + \sum_{j=1}^{p}(-1)^j\left[A_j(t)\left(e^{-2in\pi t}\right)^{(j)}\right]_0^1\right)\ \text{(d'après la question III.B.1)a))}\\ &= \frac{1}{(2in\pi)^{p+1}}(-1)^1\left[A_1(t)\left(e^{-2in\pi t}\right)^{(1)}\right]_0^1 = -\frac{1}{(2in\pi)^{p+1}}\times -\frac{-2ni\pi}{2}(e^{-2in\pi}+e^0) = -\frac{1}{(2in\pi)^p}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \widehat{A}_p(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \widehat{A}_p(n) = -\frac{1}{(2in\pi)^p}.}$$

**IV.B.3)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\widetilde{A}_p$ est de classe $C^1$ sur $[0, 2\pi[$ et pour $x \in [0, 2\pi[$, $\widetilde{A}'_p(x) = \dfrac{1}{2\pi}A'_p\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) = \dfrac{1}{2\pi}A_{p-1}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$. Mais alors, $\widetilde{A}_p$ est de classe $C^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par $2\pi$-périodicité.

D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ converge en tout $x$ réel vers $\dfrac{1}{2}(\widetilde{A}_p(x^-) + \widetilde{A}_p(x^+))$.

**IV.B.4)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, $2p \geqslant 2$ puis $\widetilde{A}_{2p}(0^-) = \widetilde{A}_{2p}(2\pi^-) = A_{2p}(1^-) = A_{2p}(1) = A_{2p}(0)$ (d'après III.A.1)c) et car $2p \geqslant 2$). Donc $\dfrac{1}{2}\widetilde{A}_{2p}(0^-) + \widetilde{A}_{2p}(0^+)) = A_{2p}(0) = a_{2p}$.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}a_{2p} = A_{2p}(0) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{A}_{2p}(n)e^{in\times 0} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\frac{1}{(2in\pi)^{2p}} - \frac{1}{(-2in\pi)^{2p}} = -\frac{2}{(2i\pi)^{2p}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}\\ &= (-1)^{p+1}\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}S(2p).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1}\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}S(2p).}$$

***IV.C - Comportement de l'erreur***

**IV.C.1)** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturel non nuls.

$$\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \left|\frac{S(2p+2)2^{2p-1}\pi^{2p}\dfrac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-(2p))}{n^{\alpha+2p+1}}}{S(2p)2^{2p+1}\pi^{2p+2}\dfrac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-(2p-2))}{n^{\alpha+2p-1}}}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}.$$

**IV.C.2)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.4.3), pour $\alpha > 1$, $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ et donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} S(\alpha) = 1$. Par suite,

$$\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^2}{n^2\pi^2},$$

puis $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = +\infty$. En particulier, la série numérique de terme général $a_{2j}f^{(2j)}(n)$, $j \geqslant 1$, diverge grossièrement. Ainsi, à $n$ fixé $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$, la suite $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$, $p \in \mathbb{N}^*$, diverge.
Si on prend $p$ grand, pour obtenir une bonne approximation de $S(\alpha)$, on doit prendre $n$ grand.

 