SESSION 2010

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

Partie I -

I.A -

I.A.1) a) Soit $x \in E$. $h(x)$ est une application de E dans $\mathbb{K}$, linéaire par linéarité de φ par rapport à sa deuxième variable. Donc $\forall x \in E$, $h(x) \in E^*$.

b) h est donc une application de E dans E^*. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $z \in E$,

$$h(\alpha x + \beta y)(z) = \varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z) = (\alpha h(x) + \beta h(y))(z),$$

et donc $h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$. h est donc une application linéaire de E dans E^*.

$$\boxed{h \in \mathscr{L}(E, E^*).}$$

I.A.2) Soit A une partie non vide de E. Pour chaque $a \in A$, $\{a\}^{\perp\varphi} = \{x \in E/\ h(a)(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(h(a))$ et donc pour chaque $a \in A$, $\{a\}^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E. Mais alors $A^{\perp\varphi} = \displaystyle\bigcap_{a\in A}\{a\}^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de E.

I.A.3) E et E^* sont deux $\mathbb{K}$-espaces de mêmes dimensions finies et $h \in \mathscr{L}(E, E^*)$. Donc, h est un isomorphisme si et seulement si h est injective. Or

$$\begin{aligned} h \text{ injective} &\Leftrightarrow \mathrm{Ker} h = 0 \Leftrightarrow \{x \in E/\ h(x) = 0\} = \{0\} \Leftrightarrow \{x \in E/\ \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow E^{\perp\varphi} = \{0\} \Leftrightarrow \varphi \text{ non dégénérée.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est non dégénérée si et seulement si } h \text{ est un isomorphisme.}}$$

I.A.4) a) On sait que pour toute forme linéaire f sur E, on a $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$. En particulier, $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$h(e_j) = \sum_{i=1}^{n} h(e_j)(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)e_i^*.$$

Pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de $\mathrm{mat}(h, e, e^*)$ est donc $\begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_j) \\ \varphi(e_2, e_j) \\ \vdots \\ \varphi(e_n, e_j) \end{pmatrix}$ ou encore

$$\boxed{\mathrm{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$$

b) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) y_j\right) \\ &= {}^t X \Omega Y. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y.}$$

I.B -

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$. Par définition de $Q(E)$, il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que $q = q_\varphi$. Vérifions que φ est unique. Soit ψ une forme bilinéaire symétrique sur E telle que $q = q_\psi$.
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $q(x+y) = \psi(x+y, x+y) = \psi(x, x)+2\psi(x, y)+\psi(y, y) = q(x)+2\psi(x, y)+q(y)$ et on obtient l'identité de polarisation

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x, y).$$

Donc $\psi = \varphi$ et φ est uniquement définie.

I.B.2) Soit q (resp. q') une forme quadratique sur E (resp. E'). On note φ (resp. φ') la forme bilinéaire symétrique associée à q (resp. q').

• Supposons qu'il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')$. Soit f l'application linéaire de E dans E' définie par $f(e) = e'$. Tout d'abord l'image par f d'une base de E est une base de E' et donc f est un isomorphisme de E sur E'. Puis, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$\begin{aligned} q'(f(x)) &= \varphi'\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \varphi'(f(e_i), f(e_j)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \varphi'(e'_i, e'_j) \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) \text{ (puisque mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = q(x). \end{aligned}$$

• Réciproquement, supposons qu'il existe une isométrie f de (E, q) dans (E', q'). f est un isomorphisme de E sur E' et pour tout $x \in E$, $q'(f(x)) = q(x)$. Plus généralement, pour $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \varphi'(f(x), f(y)) &= \frac{1}{2}(q'(f(x) + f(y)) - q'(f(x)) - q'(f(y))) = \frac{1}{2}(q'(f(x+y)) - q'(f(x)) - q'(f(y))) \\ &= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Soient alors e une base de E puis $e' = f(e)$. Puisque f est un isomorphisme de E sur E', e' est une base de E'. De plus, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\varphi'(e'_i, e'_j) = \varphi'(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j),$$

et donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient ligne i colonne j de $\text{mat}(q', e')$ est égal au coefficient ligne i colonne j de $\text{mat}(q, e)$. Par suite, $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')$.

I.B.3) a) Pour $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i$ et $y = \sum_{i=1}^{2p} y_i c_i$ éléments de $\mathbb{K}^{2p}$, posons $\varphi_p(x, y) = \sum_{i=1}^{p} (x_i y_{i+p} + y_i x_{i+p})$. φ_p est une forme bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in \mathbb{K}^{2p}$, $q_p(x) = \varphi_p(x, x)$. Donc q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et φ_p est la forme bilinéaire symétrique associée à q_p. De plus, pour $(i, j) \in [\![1, 2p]\!]^2$, $\varphi_p(c_i, c_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i + p \text{ ou } i = j + p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et donc

$$\text{mat}(q_p, c) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}.$$

b) Déterminons l'orthogonal de $\mathbb{K}^{2p}$ pour φ_p c'est à dire l'ensemble des $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i$ tels que

$$\forall y = \sum_{i=1}^{2p} y_i c_i, \sum_{i=1}^{p} (x_i y_{i+p} + x_{i+p} y_i) = 0.$$

En appliquant l'égalité précédente à $y = c_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, on obtient $x_{i+p} = 0$ et pour $y = c_i$, $p+1 \leqslant i \leqslant 2p$, on obtient $x_{i-p} = 0$. Par suite, $\forall i \in [\![1, 2p]\!]$, $x_i = 0$ et donc $x = 0$. q_p est donc non dégénérée.
Si maintenant (F, q) est un espace isométrique à $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$, d'après la question I.B.2), il existe une base e de E dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$. Les calculs précédents s'appliquent donc à q et q est non dégénérée.

c) Posons $A = \text{mat}(q_p, c) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ I_p & 0_p \end{pmatrix}$. La matrice A est symétrique réelle et donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle d'après le théorème spectral. Déterminons les valeurs propres de A. Un calcul par blocs fournit $A^2 = I_{2p}$ et donc A est une matrice de symétrie et puisque A n'est ni I_{2p}, ni $-I_{2p}$, les valeurs propres de A sont 1 et -1. Enfin, $A + I_{2p} = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & I_p \end{pmatrix}$ est de rang p car les p premières colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes et la famille des p dernières est égales à la famille des p premières. Donc -1 est d'ordre $2p - p = p$ puis 1 est d'ordre p. En résumé, il existe $P \in O_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$ où $D = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_{p}\underbrace{-1 \dots -1}_{p})$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ la base de $\mathbb{C}^{2p}$ dont les vecteurs sont les colonnes de la matrice P puis $e' = (e_1, \dots, e_p, ie_{p+1}, \dots, ie_{2p}) = (e'_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2p}$. e' est une base de $\mathbb{C}^{2p}$ car $\det_c(e') = i^p \det(P) \neq 0$. Pour $x \in E$, posons $x = \sum_{k=1}^{2p} x''_k e'_k = \sum_{k=1}^{2p} x'_k e_k = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k$. D'après la question I.A.4)b)

$$q_p(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k x_{k+p} = {}^tXAX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{k=1}^{p} x'^2_k - \sum_{k=p+1}^{2p} x'^2_k = \sum_{k=1}^{p} x''^2_k - \sum_{k=p+1}^{2p} (ix''_k)^2 = \sum_{k=1}^{2p} x''^2_k.$$

Par suite, $\text{mat}(q_p, e') = I_{2p} = \text{mat}(q, c)$. Comme $\text{mat}(q_p, e') = \text{mat}(q, c)$, les espaces $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ et $(\mathbb{C}^{2p}, q_p)$ sont isométriques d'après la question I.B.2) et donc

$$\boxed{(\mathbb{C}^{2p}, q) \text{ est un espace de Artin.}}$$

d) La matrice de q' dans la base c est $D = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_{p}\underbrace{-1 \dots -1}_{p})$. D'autre part, d'après la réduction usuelle d'une forme quadratique d'un espace euclidien en base orthonormée, il existe une base e de $\mathbb{R}^{2p}$ telle que $\text{mat}(q, e) = D$. D'après la question I.B.2), les espaces $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ et $(\mathbb{R}^{2p}, q_p)$ sont isométriques et donc

$$\boxed{(\mathbb{R}^{2p}, q') \text{ est un espace de Artin.}}$$

e) Soit f une isométrie de $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sur (F, q). On pose $G = f(\text{Vect}(c_1, \dots, c_p))$. Puisque f est un isomorphisme, G est un sous-espace de F de dimension p. Pour tout $x \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_p)$, les p dernières composantes de x sont nulles et donc $q_p(x) = 0$. Soit alors $y \in G$. Il existe $x \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_p)$ tel que $y = f(x)$ et donc $q(y) = q(f(x)) = q_p(x) = 0$. En résumé, G est un sous-espace vectoriel de F de dimension p et la restriction de q à G est nulle.

Partie II -

II.A -
II.A.1) a) On suppose $p < n$. Puisque la forme φ est non dégénérée, h est un isomorphisme d'après la question I.A.3).
Soit $x \in E$. On sait que $h(x) \in E^*$ puis $h(x) = \sum_{i=1}^{n} (h(x)(e_i))e_i^*$ $(*)$.

$$\begin{aligned}
x \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \varphi(x, y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \varphi(x, e_i) = 0 \text{ ($\Leftarrow$ est vraie par linéarité de φ par rapport à sa 2 ème variable)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ h(x)(e_i) = 0 \Leftrightarrow h(x) \in \text{Vect}(e^*_{p+1}, \dots, e^*_n) \text{ (d'après $(*)$)} \\
&\Leftrightarrow x \in h^{-1}\left(\text{Vect}(e^*_{p+1}, \dots, e^*_n)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{F^\perp = h^{-1}\left(\text{Vect}(e^*_{p+1}, \dots, e^*_n)\right).}$$

b) Puisque h^{-1} est un isomorphisme,

$$\dim(F^\perp) = \dim\left(h^{-1}\left(\text{Vect}(e^*_{p+1}, \dots, e^*_n)\right)\right) = \dim\left(\text{Vect}(e^*_{p+1}, \dots, e^*_n)\right) = n - p = n - \dim(F).$$

La formule précédente reste vraie quand $p = n$ (dans ce cas $F = E$ et donc $F^\perp = \{0\}$ car φ est non dégénérée) et quand $p = 0$ (dans ce cas $F = \{0\}$ et donc $F^\perp = E$).

$$\boxed{\text{Pour tout sous-espace } F \text{ de } E,\ \dim(F) + \dim(F^\perp) = n.}$$

c) $\forall x \in F$, $\forall y \in F^\perp$, $\varphi(x, y) = 0$. En particulier, tout x de F est dans $(F^\perp)^\perp$ ou encore $F \subset (F^\perp)^\perp$.
De plus, $\dim((F^\perp)^\perp) = n - (n - \dim(F)) = \dim(F) < +\infty$ et donc

$$\boxed{(F^\perp)^\perp = F.}$$

II.A.2) a) Soit $x \in E$. Si x est dans $(F + G)^\perp$, x est en particulier orthogonal à tout élément de F (car $F \subset F + G$) et tout élément de G et donc x est dans $F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, si x est dans $F^\perp \cap G^\perp$ alors x est orthogonal à tout élément de F et tout élément de G et donc x est orthogonal à toute somme d'un élément de F et d'un élément de G par linéarité de φ par rapport à chacune de ses variables. On a montré que

$$\boxed{(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.}$$

b) D'après ce qui précède $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G$ et donc $(F \cap G)^\perp = ((F^\perp + G^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

$$\boxed{(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.}$$

II.A.3) • L'ensemble des éléments de F qui sont orthogonaux à tous les éléments de F est $F \cap F^\perp$.
Donc, F est non singulier $\Leftrightarrow$ φ_F non dégénérée $\Leftrightarrow$ l'orthogonal de F pour φ dans F est réduit à $\{0\}$ $\Leftrightarrow$ $F \cap F^\perp = \{0\}$.
• Ensuite, si $F \cap F^\perp = \{0\}$, $\dim(F + F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap F^\perp) = n - 0 = n$ et donc $E = F \oplus F^\perp$. Réciproquement, si $E = F \oplus F^\perp$ alors $F \cap F^\perp = \{0\}$.
• Si F est non singulier alors $F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = F^\perp \cap F = \{0\}$ et donc $F^\perp$ est non singulier. Mais alors, si $F^\perp$ est non singulier, $F = (F^\perp)^\perp$ est non singulier.

On a montré que : F non singulier $\Leftrightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F^\perp$ non singulier.

II.A.4) Puisque F et G sont orthogonaux alors $G \subset F^\perp$ et puisque F est non singulier, $F \cap G \subset F \cap F^\perp = \{0\}$. La somme $F + G$ est donc directe. Ensuite, d'après la question II.A.2)a)

$$(F + G) \cap (F + G)^\perp = (F + G) \cap F^\perp \cap G^\perp.$$

Soient alors $(x_1, x_2) \in F \times G$ puis $x = x_1 + x_2 \in F + G$.

$$\begin{aligned}
x \in F^\perp \cap G^\perp &\Leftrightarrow \forall (y, z) \in F \times G,\ \varphi(x, y) = \varphi(x, z) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall (y, z) \in F \times G,\ \varphi(x_1, y) = \varphi(x_2, z) = 0 \text{ (car } F \text{ et } G \text{ sont orthogonaux et par bilinéarité de } \varphi) \\
&\Leftrightarrow x_1 \in F \cap F^\perp \text{ et } x_2 \in G \cap G^\perp \\
&\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ (car } F \text{ et } G \text{ sont non singuliers)} \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Donc $(F + G) \cap (F + G)^\perp = \{0\}$ et on a montré que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B -

II.B.1) On note $c = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Pour $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2$ et $\varphi'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + y_1x_2$.
Par suite, $\varphi(c_1, c_2) = 0$ et la base c est q-orthogonale. Ensuite, $\varphi'((1, 1), (1, -1)) = 0$ et donc la famille $e = (c_1 + c_2, c_1 - c_2)$ qui est une base de $\mathbb{R}^2$ est q'-orthogonale.

II.B.2) Soients $e_1 = (x_1, y_1)$ et $e_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \varphi(e_1, e_2) = 0 \\ \varphi'(e_1, e_2) = 0 \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1x_2 - y_1y_2 = 0 \\ x_1y_2 + y_1x_2 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_1, -y_1)|(x_2, y_2) = 0 \\ \det((x_1, -y_1), (x_2, y_2)) = 0 \end{array}\right. \quad \text{(où } | \text{ et det désignent le produit scalaire et le déterminant usuels)} \\
&\Leftrightarrow (x_1, -y_1) = 0 \text{ ou } (x_2, y_2) = 0 \Leftrightarrow e_1 = 0 \text{ ou } e_2 = 0.
\end{aligned}$$

Il n'existe donc pas de base de $\mathbb{R}^2$ qui soit à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.

II.B.3) h est un isomorphisme de E sur E^* et h' est une application linéaire de E dans E^*. Donc $h^{-1}\circ h'$ est un endomorphisme de E.
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$. $h'(e_i)$ est une forme linéaire sur E telle que $\forall j\neq i$, $h'(e_i)(e_j)=\varphi'(e_i,e_j)=0$. Mais alors $h'(e_i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(h'(e_i)(e_j))e_j^*=(h'(e_i)(e_i))e_i^*=q(e_i)e_i^*$ puis

$$h^{-1}\circ h'(e_i)=q(e_i)h^{-1}(e_i^*).$$

Maintenant, d'après la question II.A.1.a), $h^{-1}(e_i^*)\in \text{Vect}(e_j)_{j\neq i}^{\perp\varphi}$. Mais puisque la base e est q-orthogonale, $\text{Vect}(e_i)\subset \text{Vect}(e_j)_{j\neq i}^{\perp\varphi}$ puis $\text{Vect}(e_i)=\text{Vect}\,(e_j)_{j\neq i}^{\perp\varphi}$ car ces deux sous-espaces ont même dimension finie d'après II.A.1)b). Finalement,

$$h^{-1}\circ h'(e_i)=q(e_i)h^{-1}(e_i^*)\in\text{Vect}(e_i),$$

et donc e_i est un vecteur propre de $h^{-1}\circ h'$ (car $e_i\neq 0$).

$\boxed{\text{Une base } e \text{ à la fois } q\text{-orthogonale et } q'\text{-orthogonale est une base de vecteurs propres de } h^{-1}\circ h'.}$

II.B.4) Si $h^{-1}\circ h'$ admet n valeurs propres distinctes, $h^{-1}\circ h'$ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites. Notons $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la famille des valeurs propres de $h^{-1}\circ h'$ puis $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres associée.

Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

$$h^{-1}\circ h'(e_i)=\lambda_ie_i\Rightarrow h'(e_i)=\lambda_ih(e_i)\Rightarrow (h'(e_i))(e_j)=\lambda_i(h(e_i))(e_j)\Rightarrow \varphi'(e_i,e_j)=\lambda_i\varphi(e_i,e_j)$$

Puisque φ et φ' sont symétriques, en échangeant les rôles de i et j on a aussi $\varphi'(e_i,e_j)=\lambda_j\varphi(e_i,e_j)$ et donc

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_i-\lambda_j)\varphi(e_i,e_j)=0.$$

Si de plus $i\neq j$, puisque $\lambda_i-\lambda_j\neq 0$, on obtient $\varphi(e_i,e_j)=0$ puis $\varphi'(e_i,e_j)=\lambda_i\varphi(e_i,e_j)=0$. La base e est donc une base à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.

II.C -

II.C.1) a) Puisque q est non dégénérée, $E^{\perp\varphi}=\{0\}$. Par suite, $x\notin E^{\perp\varphi}$ et il existe $z'\in E$ tel que $\varphi(x,z')\neq 0$. Soit $z=\dfrac{1}{\varphi(x,z')}z'$. Alors, $\varphi(x,z)=\dfrac{1}{\varphi(x,z')}\varphi(x,z')=1$. Donc il existe $z\in E$ tel que $\varphi(x,z)=1$.
b)

$$q(y)=\varphi\left(z-\frac{q(z)}{2}x,z-\frac{q(z)}{2}x\right)=q(z)-2\frac{q(z)}{2}\varphi(x,z)+\frac{q^2(z)}{4}q(x)=q(z)-q(z)=0$$

c) Montrons que la famille (x,y) est libre. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $\alpha x+\beta y=0$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x,\alpha x+\beta y)=0&\Rightarrow \alpha\varphi(x,x)+\beta\varphi(x,y)=0\\&\Rightarrow \beta\varphi\left(x,z-\frac{q(z)}{2}x\right)=0 \text{ (car } q(x)=0)\\&\Rightarrow \beta\varphi(x,z)=0\Rightarrow\beta=0\end{aligned}$$

Il reste $\alpha x=0$ et donc $\alpha=0$ car $x\neq 0$. Finalement, la famille (x,y) est libre et si on pose $\Pi=\text{Vect}(x,y)$, Π est un plan et (x,y) est une base de ce plan.

On a déjà $\varphi(x,x)=\varphi(y,y)=0$. On a aussi $\varphi(x,y)=\varphi(x,z)=1$. Par suite, la matrice de q_Π dans la base (x,y) est $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Comme la matrice de q_1 dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$ est aussi $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, la question I.B.2) permet d'affirmer que Π est un plan artinien. (En particulier, la dimension n de E est nécessairement supérieure ou égale à 2.)

II.C.2) a) Soit $x\in G\cap G^\perp$. Pour tout élément y_1 de G, on a $\varphi(x,y_1)=0$. Maintenant, x est dans G et donc dans F et pour tout élément y_2 de $F\cap F^\perp$, $\varphi(x,y_2)=0$. En résumé, $\forall (y_1,y_2)\in G\times(F\cap F^\perp)$, $\varphi(x,y_1)=\varphi(x,y_2)=0$. Puisque $F=G+(F\cap F^\perp)$, on en déduit par linéarité que $\forall y\in F$, $\varphi(x,y)=0$. Donc $x\in F^\perp$.
Finalement, $x\in G\cap(F\cap F^\perp)=\{0\}$ et donc $x=0$. On a montré que $G\cap G^\perp=\{0\}$ et d'après la question II.A.3),

$\boxed{G \text{ est non singulier.}}$

b) Démontrons le résultat par récurrence sur $s = \dim(F \cap F^{\perp})$.
• Si $s = 1$, e_1 un vecteur non nul de $F \cap F^{\perp}$. En particulier, e_1 est dans $F^{\perp}$ et donc dans $G^{\perp}$. D'après la question précédente, G est non singulier et donc $G^{\perp}$ est non singulier d'après la question II.A.3) ou encore la restriction $\varphi_{G^{\perp}}$ de φ à $G^{\perp}$ est non dégénérée.
Maintenant $q(e_1) = \varphi(e_1, e_1) = 0$ et d'après II.C.1)c), il existe un plan artinien P_1 pour $\varphi_{G^{\perp}}$ et donc pour φ contenu dans $G^{\perp}$ et contenant e_1.
On a donc montré l'existence d'un plan artinien P_1 contenant e_1 et orthogonal à G.

• Soit $s \geqslant 2$. Supposons le résultat acquis si $\dim(F \cap F^{\perp}) = s-1$. Soient F un sous-espace singulier de E tel que $\dim(F \cap F^{\perp}) = s$ et $(e_1, \dots, e_s)$ une base de $F \cap F^{\perp}$.
Je n'ai pas encore trouvé : on cherche à appliquer l'hypothèse de récurrence à $F_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{s-1})$ ou à $F_1 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{s-1}) \oplus G$. Les vecteurs e_s et e'_s doivent être orthogonaux aux e_i, $1 \leqslant i \leqslant s-1$ mais malheureusement, $(\text{Vect}(e_s) \oplus G)^{\perp}$ est singulier car $\text{Vect}(e_s) \oplus G$ l'est ... Toute solution est la bienvenue.

II.C.3) G est non singulier d'après II.C.2)a) et les P_i sont non singuliers d'après I.B.3)b). De plus G et les P_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, sont deux à deux orthogonaux. On en déduit que $\overline{F}$ est non singulier d'après II.A.4)

II.C.4) Si $q_{/F} = 0$, alors $\varphi_{/F} = 0$ (car $\forall (x,y) \in F^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = 0$) et donc $F \subset F^{\perp}$. On en déduit que $F = F \cap F^{\perp}$ puis que $s = p = \dim(F)$ et $G = \{0\}$. Le sous-espace $\overline{F} = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ et de dimension $s = 2p$ et donc $2p \leqslant n$ ou encore $\dim(F) = p \leqslant \frac{n}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } q_{/F} = 0, \text{ alors } \dim(F) \leqslant \frac{n}{2}.}$$

II.C.5) D'après I.B.3)e), si (E, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, il existe un sous-espace F de dimension p tel que $q_{/F} = 0$. Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-espace F de dimension p tel que $q_{/F} = 0$.
D'après la question précédente, F est singulier, $s = p$ et $G = \{0\}$. Un complété non singulier de F est $\overline{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s = P_1 \oplus \dots \oplus P_p$. Comme $\dim(\overline{F}) = 2p = \dim(E)$, on a donc

$$E = P_1 \oplus \dots \oplus P_p.$$

Mais alors, avec les notations de la question II.C.2), $e = (e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_p)$ est une base de E dans laquelle la matrice est égale à $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} = \text{mat}(q_p, c)$ et donc (E, q) est un espace de Artin.

Partie III -

III.A -

III.A.1) a) Si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$, en particulier pour tout x de E, $q(f(x)) = \varphi(f(x), f(x)) = \varphi(x,x) = q(x)$.
Réciproquement, supposons que $\forall x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$. Alors, pour $(x,y) \in E^2$, une identité de polarisation fournit

$$\begin{aligned}\varphi(f(x), f(y)) &= \frac{1}{2}\left(q(f(x) + f(y)) - q(f(x)) - q(f(y))\right) = \frac{1}{2}\left(q(f(x+y)) - q(f(x)) - q(f(y))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \varphi(x,y).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{f \in O(E, q) \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \ \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y).}$$

Soient $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$. $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y) = 0$. Donc $\forall y \in F^{\perp}$, $f(y) \in (f(F))^{\perp}$ ou encore $f\left(F^{\perp}\right) \subset (f(F))^{\perp}$. Vérifions alors que f est un automorphisme de E. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \forall y \in E, \ \varphi(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow \forall y \in E, \ \varphi(x,y) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \text{ (car } \varphi \text{ est non dégénérée).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et f est un automorphisme (car $\dim(E) < +\infty$). Mais alors

$$\dim(f(F))^{\perp} = n - \dim(f(F)) = n - \dim(F) = \dim(F^{\perp}) = \dim(f(F^{\perp})) < +\infty$$

et finalement $f\left(F^{\perp}\right) = (f(F))^{\perp}$.

$$\boxed{\forall f \in O(E, q), \ f\left(F^{\perp}\right) = (f(F))^{\perp}.}$$

b) Posons $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$ et $M = \text{mat}(f, e)$. Pour x et y éléments de E, on note X et Y les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées des vecteurs x et y dans la base e. On note enfin φ' la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ et Ω' la matrice de φ' dans la base e.

D'après la question I.4)b),

$$^tX\Omega'Y = \varphi'(x, y) = \varphi(f(x), f(y)) = {}^t(MX)\Omega(MY) = {}^tX({}^tM\Omega M)Y.$$

Ainsi, $\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$, ${}^tX\Omega'Y = {}^tX({}^tM\Omega M)Y$ et on sait alors que $\Omega' = {}^tM\Omega M$ (obtenu par exemple en appliquant les égalités ci-dessus aux vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

$$\boxed{\text{mat}(\varphi', e) = {}^t(\text{mat}(f, e)) \times \text{mat}(\varphi, e) \times \text{mat}(f, e).}$$

c) D'après les questions a) et b)

$$f \in O(E, q) \Leftrightarrow \varphi' = \varphi \Leftrightarrow \Omega' = \Omega \Leftrightarrow \Omega = {}^tM\Omega M.$$

d) Puisque $\Omega = {}^tM\Omega M$, $\det(\Omega) = \det(\Omega)(\det M)^2$. Vérifions alors que la matrice Ω est inversible. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} Y \in \text{Ker}(\Omega) &\Rightarrow \Omega Y = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tX\Omega Y = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (car } \varphi \text{ est non dégénérée).} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(\Omega) = \{0\}$ et Ω est inversible.
Par suite, $\det(\Omega) \neq 0$ et l'égalité $\det(\Omega) = \det(\Omega)(\det M)^2$ fournit $(\det(M))^2 = 1$ puis $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\forall f \in \mathscr{L}(E),\ f \in O(E, q) \Rightarrow \det(\text{mat}(f, e)) \in \{-1, 1\}.}$$

III.A.2) a) • Si $s \in O(E, q)$, Pour tout $(x, y) \in F \times G$,

$$\varphi(x, y) = \varphi(s(x), s(y)) = \varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$$

et donc $\varphi(x, y) = 0$. On en déduit que $G \subset F^\perp$ puis que $G = F^\perp$ par égalité des dimensions.

• Réciproquement, supposons que $G = F^\perp$. Soit $z \in E$. Il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$ et

$$q(s(z)) = q(x - y) = \varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y) = \varphi(x + y, x + y = q(x + y) = q(z).$$

Donc $s \in O(E, q)$.

$$\boxed{s \in O(E, q) \Leftrightarrow G = F^{\perp_\varphi}.}$$

b) D'après la question II.A.3), $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ non singulier. Donc les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, où F est un sous-espace non singulier de E.

c) Soit e une base adaptée à la décomposition $E = H \oplus H^\perp$. $\text{mat}(f, e) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ et donc $\det(s) = -1$.

$$\boxed{\text{Toute réflexion est dans } O^-(E, q).}$$

d) Puisque $\varphi(x + y, x - y) = q(x) - q(y) = 0$, on a $x + y \in \{x - y\}^\perp = H$. D'autre part $x - y \in H^\perp$ et donc $y = s(x)$ (si on pose $x + y = 2x_1 \in H$ et $x - y = 2x_2 \in H^\perp$, alors $x = x_1 + x_2$ et $y = x_1 - x_2 = s(x)$).

III.B -

III.B.1) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète cette base en $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_p)$ base de E telle que, avec les notations de la partie II, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\varphi(e_i, e_i) = \varphi(e'_i, e'_i) = 0$ et $\varphi(e_i, e'_i) = 1$ puis, si $\overline{F} = P_1 \oplus \dots \oplus P_p$ avec $P_i = \text{Vect}(e_i, e'_i)$ base de P_i, alors $\overline{F}$ est un complété non singulier de F.

Dans une telle base, on a $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ puis $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$ car $f(F) = F$. D'après la question III.A.1.c), $f \in O(E, q) \Leftrightarrow \Omega = {}^tM\Omega M$. Ceci fournit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tM_1 & 0 \\ {}^tM_2 & {}^tM_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tM_1 \\ {}^tM_3 & {}^tM_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & {}^tM_1M_3 \\ {}^tM_3M_1 & {}^tM_3M_2 + {}^tM_2M_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, ${}^t M_3 M_1 = I_p$. On en déduit que

$$\det(f) = \det(M) = \det(M_1)\det(M_3) = \det({}^t M_1)\det(M_3) = \det({}^t M_1 M_3) = \det(I_p) = 1.$$

Donc $f \in O^+(E, q)$.

III.B.2) Si $F = \{0\}$, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$ puis $G = \{0\}$ et donc $E \neq \overline{F}$.
Donc $F \neq \{0\}$. Si F est non singulier, alors $E = \overline{F} = F$ et donc $f = Id_E$. Dans ce cas, on a $\det(f) = 1$. Sinon, avec les notations de la partie II, $E = G \oplus (P_1 \oplus \ldots \oplus P_s)$. Chaque P_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, est orthogonal à G et donc $P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ est orthogonal à G ou encore $P_1 \oplus \ldots \oplus P_s \subset G^\perp$. Comme de plus, $\dim(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s) = n - \dim(G) = \dim(G^\perp)$, on en déduit que

$$G^\perp = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s.$$

Ensuite, $f_{/F} = Id_F$ et donc $f_{/G} = Id_G$. En particulier, $f(G) = G$ et donc d'après la question III.A.1)a), $f(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s) = f(G^\perp) = G^\perp = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$. Ainsi, les restrictions de f aux deux sous-espaces supplémentaires G et $P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ sont des endomorphismes de ces sous-espaces et on en déduit que

$$\det(f) = \det(f_{/G}) \times \det(f_{/G^\perp}) = 1 \times \det(f_{/P_1 \oplus \ldots \oplus P_s}) = \det(f_{/P_1 \oplus \ldots \oplus P_s}).$$

Maintenant, $P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ est un espace artinien de dimension $2s$ et $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_s) = F \cap F^\perp$ est un sous-espace de dimension s tel que $q_{/\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_s)} = 0$ (car $(e_1, \ldots, e_s)$ est une base de $F \cap F^\perp$). De plus, $f_{/P_1 \oplus \ldots \oplus P_s} \in O(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s, q)$ et $f_{/P_1 \oplus \ldots \oplus P_s}(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_s)) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_s)$ car $f_{/(\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_s)} = Id_{\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_s)}$. D'après la question précédente, $\det(f_{/P_1 \oplus \ldots \oplus P_s}) = 1$ et finalement $\det(f) = 1$. On a montré que $f \in O^+(E, q)$.

III.B.3) a) On ne peut avoir $q = 0$ car alors $\varphi = 0$ ce qui n'est pas car φ est non dégénérée. Donc il existe $x_0 \in E$ tel que $q(x_0) \neq 0$ (en particulier, $x_0 \neq 0$). Par hypothèse, on a alors $f(x_0) - x_0 \neq 0$ et $q(f(x_0) - x_0) = 0$.

Si la famille $(x_0, f(x_0) - x_0)$ est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) - x_0 = \lambda x_0$ (car $x_0 \neq 0$). On en déduit $0 = q(f(x_0) - x_0) = \lambda^2 q(x_0)$ et donc $\lambda = 0$ (car $q(x_0) \neq 0$) puis $f(x_0) - x_0 = 0$ ce qui n'est pas. Donc la famille $(x_0, f(x_0) - x_0))$ est libre.

Ensuite, $0 = q(f(x_0) - x_0) = \varphi(f(x_0) - x_0, f(x_0) - x_0) = \varphi(f(x_0), f(x_0)) - 2\varphi(f(x_0), x_0) + \varphi(x_0, x_0) = 2(\varphi(x_0, x_0) - \varphi(f(x_0), x_0))$ (car $f \in O(E, q)$) et donc $\varphi(f(x_0), x_0) = \varphi(x_0, x_0)$. On en déduit que $\varphi(f(x_0) - x_0, x_0) = 0$. Comme d'autre part, $\varphi(f(x_0) - x_0, f(x_0) - x_0) = q(f(x_0) - x_0) = 0$, on a montré que $f(x_0) - x_0 \in (\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0) - x_0))^\perp$ et en particulier $\dim\left((\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0) - x_0))^\perp\right) \geqslant 1$ car $f(x_0) - x_0 \neq 0$. Mais alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0) - x_0)) + \dim\left((\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0) - x_0))^\perp\right) \geqslant 2 + 1 = 3.$$

b) Soit $x \in V = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$. Si $q(x) \neq 0$, alors par hypothèse $f(x) - x \neq 0$ ce qui n'est pas. Donc $q(x) = 0$. On a montré que $q_{/V} = 0$.

c) $\dim(H) \in \{n-1, n\}$ ou encore $\dim(H) \geqslant n - 1 = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} - 1 \geqslant \dfrac{n}{2} + \dfrac{3}{2} - 1 > \dfrac{n}{2}$. La question II.C.4) permet alors d'affirmer que $q_{/H} \neq 0$.

Soit alors $y \in H^\perp = \{x\}^\perp$ tel que $q(y) \neq 0$. On a $q(x \pm y) = q(x) \pm 2\varphi(x, y) + q(y) = 0 + 0 + q(y) = q(y) \neq 0$. On a montré que pour tout x de E tel que $q(x) = 0$, il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$.

d) Soit $x \in E$. Si $q(x) \neq 0$, alors $q(f(x) - x) = 0$.
Sinon, $q(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$. Or

$$\left\{\begin{array}{l} q(y) \neq 0 \\ q(x+y) \neq 0 \\ q(x-y) \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q(f(y) - y) = 0 \\ q(f(x+y) - (x+y)) = 0 \\ q(f(x-y) - (x-y)) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q(f(y) - y) = 0 \\ q(f(x) - x) + 2\varphi(f(x) - x, f(y) - y) + q(f(y) - y) = 0 \\ q(f(x) - x) - 2\varphi(f(x) - x, f(y) - y) + q(f(y) - y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q(f(x) - x) + 2\varphi(f(x) - x, f(y) - y) = 0 \\ q(f(x) - x) - 2\varphi(f(x) - x, f(y) - y) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2q(f(x) - x) = 0 \Rightarrow q(f(x) - x) = 0.$$

Ainsi, pour tout x de E, $q(f(x) - x) = 0$ et donc $q_{/V} = 0$.

e) D'après le théorème du rang, $\dim(U) + \dim(V) = n$. Mais d'après les questions b) et d), $q_{/U} = 0$ et $q_{/V} = 0$. La question II.C.4) permet d'affirmer que $\dim(U) \leqslant \dfrac{n}{2}$ et $\dim(V) \leqslant \dfrac{n}{2}$. On en déduit que $\dim(U) = \dim V = \dim(U^\perp) = \dfrac{n}{2}$ (et en particulier n est pair).

Puisque $q_{/U} = 0$, pour tout $x \in U$ on a $\varphi(x, x) = q(x) = 0$ et donc $U = U^\perp$ puis $U = U^\perp$ car ces deux sous-espaces ont mêmes dimensions finies. D'autre part, pour tous $x \in V$ et $y \in E$. $\varphi(x, f(y) - y) = \varphi(x, f(y)) - \varphi(x, y) = \varphi(f(x), f(y)) - \varphi(x, y) = 0$. Donc $V \subset U^\perp$ puis $V = U^\perp$ car ces deux sous-espaces ont mêmes dimensions finies.

On a montré que $U^\perp = V = U$.

f) On a montré que n est pair et qu'il existe un sous-espace V de dimension $\frac{n}{2}$ tel que $q_{/F} = 0$. D'après la question II.C.5), (E, q) est un espace de Artin. et d'après la question III.B.1, puisque $f_{/V} = 0$, $f \in O^+(E, q)$.

Partie IV -

IV.A -

IV.A.1) Si $n = 1$, $\mathscr{L}(E)$ est constitué des homothéties. Maintenant, il n'y a que deux homothéties de déterminant ± 1 à savoir Id_E et $-Id_E$. Réciproquement Id_E et $-Id_E$ sont dans $O(E, q)$ car pour tout $x \in E$, $q(-Id_E(x)) = q(-x) = (-1)^2 q(x) = q(x) = q(Id_E(x))$. Donc si $n = 1$, $O(E, q) = \{Id_E, -Id_E\}$.

$-Id_E$ est la réflexion par rapport à $\{0\}$ (qui est un hyperplan non singulier de E). Donc $-Id_E$ est la composée de 1 réflexion et puisque Id_E est la composée de 0 réflexions, tout élément de $O(E, q)$ est la composée d'au plus 1 réflexion. Le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré dans le cas $n = 1$.

Soit alors $n > 1$. Supposons le théorème de Cartan-Dieudonné démontré pour tout espace de dimension $n - 1$. Soient E un espace de dimension n et $f \in O(E, q)$.

IV.A.2) Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$ et $q(x_0) \neq 0$. En particulier, $x_0 \neq 0$ et $D = \text{Vect}(x_0)$ est une droite vectorielle. Si $f = Id_E$, c'est fini. Sinon, puisque $q(x_0) \neq 0$, $q_{/D}$ est non dégénérée ou encore D est non singulier. D'après la question II.A.3), $H = D^\perp = \{x_0\}^\perp$ est non singulier et $E = D \oplus H$.

Puisque $f(x_0) = x_0$, $f_{/D} = Id_D$ et en particulier, $f(D) = D$. Mais alors d'après la question III.A.1)a), $f(H) = H$ ou encore $f_{/H} \in O(H, q_{/H})$. Par hypothèse de récurrence, $f_{/H}$ est la composée d'au plus $n - 1$ réflexions $s'_1, \ldots, s'_p$, $0 \leqslant p \leqslant n - 1$. On note $H'_1, \ldots, H'_p$ les hyperplans (hyperplans non singuliers de H) de ces réflexions.
Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on pose $H_i = D \oplus H'_i$. $H_1, \ldots, H_p$ sont des hyperplans de E. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, D est non singulier, H'_i est non singulier et D et H'_i sont orthogonaux, la question II.4.A) permet d'affirmer que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, H_i est un hyperplan non singulier de E.
On peut donc $s_1, \ldots, s_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$ les réflexions d'hyperplans $H_1, \ldots, H_p$. Les endomorphismes f et $s_1 \circ \ldots \circ s_p$ coïncident sur les deux sous-espaces supplémentaires D et H et donc $f = s_1 \circ \ldots \circ s_p$. Ainsi, f est une composée d'au plus $n - 1$ réflexions et en particulier, d'au plus n réflexions.

IV.A.3) Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $q(x_0) \neq 0$ et $q(f(x_0) - x_0) \neq 0$. Soit $y_0 = f(x_0)$. On a $q(y_0) = q(f(x_0)) = q(x_0)$ et $q(x_0 - y_0) \neq 0$. D'après la question III.A.2)d), si s est la réflexion selon $H = \{x_0 - y_0\}^\perp$, alors $s(x_0) = y_0$ et donc aussi $s(y_0) = x_0$. On en déduit que $s \circ f(x_0) = s(y_0) = x_0$.

Maintenant, la composée de deux éléments u et v de $O(E, q)$ est un élément de $O(E, q)$ car pour $(x, y) \in E^2$, $q(u \circ v(x)) = q(v(x)) = q(x)$. Donc l'endomorphisme $s \circ f$ est dans $O(E, q)$ et vérifie $s \circ f(x_0) = x_0$ avec $q(x_0) \neq 0$. D'après la question précédente, il existe au plus $n - 1$ réflexions $s_1, \ldots, s_p$ telles que $s \circ f = s_1 \circ \ldots \circ s_p$ ou encore $f = s \circ s_1 \circ \ldots \circ s_p$. Dans ce cas aussi, f est la composée d'au plus n réflexions.

IV.A.4) Les cas analysés en 2) et 3) s'écrivent :

$$(\exists x \in E/\ q(x) \neq 0 \text{ et } f(x) - x = 0)) \text{ ou } (\exists x \in E/\ q(x) \neq 0 \text{ et } q(f(x) - x) \neq 0))$$
$$\text{ou encore}$$
$$\exists x \in E/\ q(x) \neq 0 \text{ et } (f(x) - x = 0 \text{ ou } q(f(x) - x) \neq 0).$$

Les cas restants sont obtenus en niant la proposition précédente :

$$\forall x \in E/\ q(x) = 0 \text{ ou } (f(x) - x \neq 0 \text{ et } q(f(x) - x) = 0)$$
$$\text{ou encore}$$
$$\forall x \in E/\ q(x) \neq 0 \Rightarrow (f(x) - x \neq 0 \text{ et } q(f(x) - x) = 0).$$

Ce dernier cas est le cas analysé en III.B.3). E est un espace de dimension paire $n = 2p \geqslant 4$ (car $n \geqslant 3$), $f \in O^+(E, q)$ et $\text{Ker}(f - Id_E) = \text{Im}(f - Id_E) = (\text{Im}(f - Id_E))^\perp$ est un sous-espace de dimension $p \geqslant 2$.

Avec les notations de III.B.3), U est un sous-espace de dimension p tel que $U = U^\perp$ (et donc U est singulier) et en particulier $U = U \cap U^\perp$. Donc un supplémentaire de $U \cap U^\perp$ dans U est $G = \{0\}$. Avec les notations de II.C.2)b), on note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $U = U \cap U^\perp = U^\perp = V$ et on note $\overline{U} = P_1 \oplus \ldots \oplus P_p$ un complété non singulier de U avec, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, (e_i, e'_i) base artinienne de P_i.

$(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\text{Ker}(f - Id_E)$ et donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) = e_i$. D'autre part, $(e_1, \ldots, e_p)$ est aussi une base de $\text{Im}(f - Id_E)$ et donc pour $i \in [\![1, p]\!]$, $f(e'_i) - e'_i \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e'_1, \ldots, e'_p)$ est donc de la forme $M = \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Réciproquement, d'après la question III.A.1)c), $f \in O(E, q) \Leftrightarrow \Omega = {}^tM\Omega M$ avec

$${}^tM\Omega M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & {}^tA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & A + {}^tA \end{pmatrix}.$$

Donc $f \in O(E, q) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ avec ${}^tA = -A$. Solution inachevée.

IV.B -

IV.B.1) Supposons le résultat acquis quand les sous-espaces sont non singuliers. Si F (et F') sont nuls, $g = Id_E$ convient. Soient F et F' deux sous-espaces non nuls tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q_{/F})$ dans $(F', q_{/F'})$. Avec les notations de II.C.2), on note $\overline{F} = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s \oplus G$ un complété non singulier de F avec, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, (e_i, e'_i) base artienne de P_i.
Puisque f est un isomorphisme, on a $F' = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_s)) \oplus f(G)$.
Puisque f est une isométrie, pour $y \in F$, $f(y) \in f(F)^\perp \Leftrightarrow \forall x \in F,\ \varphi(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in F,\ \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y \in F^\perp$. Donc $f(F \cap F^\perp) = f(F) \cap f(F)^\perp = F' \cap F'^\perp$.

En résumé, $(f(e_1), \ldots, f(e_s))$ est une base de $F' \cap F'^\perp$ et $f(G)$ est un supplémentaire de $F' \cap F'^\perp = (\text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_s))$ dans F'.

Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, on pose $\varepsilon_i = f(e_i)$ puis on note $\overline{F'} = P'_1 \oplus \ldots \oplus P'_s \oplus f(G)$ un complété non singulier de F' avec, pour $1 \leqslant i \leqslant s$, $(\varepsilon_i, \varepsilon'_i)$ base artienne de P'_i. On définit alors $\overline{f}$ l'application linéaire de $\overline{F}$ dans $\overline{F'}$ par : $\overline{f}_{/F} = f$ et $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $f(e'_i) = \varepsilon'_i$.

Soient $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} x_i e_i + \sum_{i=1}^{s} x'_i e'_i + z$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} y_i e_i + \sum_{i=1}^{s} y'_i e'_i + t$ deux vecteurs de F avec $(z, t) \in G^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\overline{f}(x), \overline{f}(y)\right) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{s} x_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{s} x'_i \varepsilon'_i + f(z), \sum_{i=1}^{s} y_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{s} y'_i \varepsilon'_i + f(t)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} x_i y'_i + x'_i y_i + \varphi(f(z), f(t)) = \sum_{i=1}^{s} x_i y'_i + x'_i y_i + \varphi(z, t) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i + \sum_{i=1}^{s} x'_i e'_i + z, \sum_{i=1}^{s} y_i e_i + \sum_{i=1}^{s} y'_i e'_i + t\right) = \varphi(x, y).
\end{aligned}$$

Donc $\overline{f}$ est une isométrie de $(\overline{F}, q_{/\overline{F}})$ sur $(\overline{F'}, q_{/\overline{F'}})$. Par hypothèse, il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g_{/\overline{F}} = \overline{f}$ et en particulier $g_{/F} = f$. Il suffit donc de démontrer le théorème de Witt quand F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) a) Si $q(x + y) = q(x - y) = 0$, alors $q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) = q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y) = 0$ et donc $\varphi(x, y) = q(x) + q(y) = 0$. Comme $y = f(x)$ et que f est une isométrie de $(F, q_{/F})$ sur $(F', q_{/F'})$, on obtient $0 = q(x) + q(y) = q(x) + q(f(x)) = 2q(x)$ et donc $\varphi(x, x) = 0$. Mais (x) est une base de F et donc $q_{/F} = 0$ ce qui contredit l'hypothèse « F est non singulier ». On a montré que l'un des deux nombres $q(x + f(x))$ ou $q(x - f(x))$ est non nul.

b) Si $q(x - y) \neq 0$, soit s la réflexion selon $\{x - y\}^\perp$. Puisque d'autre part, $q(y) = q(f(x)) = q(x)$, la question III.A.2)d) permet d'affirmer que $s(x) = y = f(x)$ et donc $s_{/F} = f$. s es un élément g de $O(E, q)$ tel que $g_{/F} = f$. Le théorème de Witt est démontré dans le cas $\dim(F) = \dim(F') = 1$.

IV.B.3) a) Puisque F est non singulier, il existe $x \in F$ tel que $q(x) \neq 0$. Soit $F_2 = \text{Vect}(x)$. $q_{/F}$ est non dégénérée et F_2 est un sous-espace non singulier de $(F, q_{/F})$ car $\varphi(x, x) = q(x) \neq 0$. Donc, si F_1 est l'orthogonal de F_2 dans F, d'après la question II.A.3), F_1 est un sous-espace non singulier de $(F, q_{/F})$ et donc de (E, q) et F_1 est un supplémentaire de F_2 dans F.
On a montré l'existence de deux sous-espaces non singuliers F_1 et F_2 de F tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$.

b) Soient $x \in F_2$ et $y \in F_1$. $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) = 0$. Donc, $\forall x \in F_2$, $f(x) \in F_1'^\perp$ ou encore $f(F_2) \subset F_1'^\perp$. Ensuite, $F_2 \subset F_1^\perp$ et donc $g(F_2) \subset g(F_1^\perp) = g(F_1)^\perp = f(F_1)^\perp = F_1'^\perp$.

c) $g(F_2) \subset F_1'^\perp$. D'autre part, $g^{-1}(g(F_2)) = F_2$ puis $f \circ g^{-1}(g(F_2)) = f(F_2) \subset F_1'^\perp$.
Ainsi, $g(F_2)$ et $f(F_2)$ sont deux droites vectorielles non singulières de $F_1'^\perp$ (l'image d'un sous-espace non singulier par une isométrie est clairement un sous-espace non singulier) et $(f \circ g^{-1})_{/g(F_2)}$ est une isométrie de $g(F_2)$ sur $f(F_2)$. D'après la question IV.B.2), il existe $h \in O(F_1'^\perp, q_{F_1'^\perp})$ telle que $h_{/g(F_2)} = (f \circ g^{-1})_{/g(F_2)}$.

d) Puisque F_1 est non singulier, $E = F_1 \oplus F_1^\perp$. Soit k l'endomorphisme de E défini par les égalités : $k_{/F_1} = f$ et $k_{/F_1^\perp} = h \circ (g_{/F_1^\perp})$ $(g(F_1^\perp) = g(F_1)^\perp = F_1'^\perp$ et donc $h \circ (g_{/F_1^\perp})$ est bien défini).
On a déjà $k_{/F_1} = f_{/F_1}$. Puis pour $x \in F_2 \subset F_1^\perp$, $g(x) \in g(F_2)$ et $k(x) = h(g(x)) = (f \circ g^{-1})(g(x)) = f(x)$. Donc $k_{/F_2} = f_{/F_2}$. On en déduit encore que $k_{/F} = f_{/F}$ car $F = F_1 \oplus F_2$. Il reste à vérifier que $k \in O(E, q)$.

Soit $(x, y) \in F_1 \times F_1^\perp$. $\varphi(k(x), k(y)) = \varphi(f(x), h(g(y))) = 0$ car $f(x) \in f(F_1) = F'_1$ et $h(g(y)) \in h(g(F_1^\perp)) = h(F_1'^\perp) = F_1'^\perp$. Donc $k(F_1)$ et $k(F_1^\perp)$ sont des sous-espaces orthogonaux.
Soit alors $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_1^\perp$ tel que $x = x_1 + x_2$ et donc $q(k(x)) = q(k(x_1)) + 2\varphi(k(x_1), k(x_2)) + q(k(x_2)) = q(f(x_1)) + q(h(g(x_2))) = q(x_1) + q(x_2) = q(x)$. Donc $k \in O(E, q)$. On a montré qu'il existe $k \in O(E, q)$ tel que $k_{/F} = f$.

IV.B.4) D'après IV.B.2), le théorème de Witt est vrai quand F et F' sont deux sous-espaces non singuliers de dimension 1, et d'après IV.B.3), pour $p \geqslant 2$, si le théorème de Witt est vrai quand F et F' sont deux sous-espaces non singuliers de dimension $p - 1$ alors le théorème de Witt est vrai quand F et F' sont deux sous-espaces non singuliers de dimension p. Ceci montre le théorème de Witt par récurrence pour deux sous-espaces non singuliers et finalement d'après IV.B.1), le théorème de Witt est démontré pour tous sous-espaces F et F'.

