SESSION 2010

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

Partie I - Préliminaires géométriques

I.A -

I.A.1) Vérifions que $\tau_1 \subset \tau$. Soit $z \in \tau_1$. Il existe trois réels positifs α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $z = \text{bar}\{0(\alpha), 1(\beta), i(\gamma)\}$. Mais alors par associativité de la barycentration,

$$z = \text{bar}\{-1(\alpha/2), 1(\alpha/2), 1(\beta), i(\gamma)\} = \text{bar}\{-1(\alpha/2), 1(\alpha/2+\beta), i(\gamma)\} \in \tau,$$

car les trois réels $\alpha' = \dfrac{\alpha}{2}$, $\beta' = \dfrac{\alpha}{2}+\beta$ et $\gamma' = \gamma$ sont trois réels positifs vérifiant $\alpha'+\beta'+\gamma' = \alpha+\beta+\gamma = 1$. Donc $\tau_1 \subset \tau$. De même, si $z = \text{bar}\{-1(\alpha), 0(\beta), i(\gamma)\} \in \tau_0$

$$z = \text{bar}\{-1(\alpha), -1(\beta/2), 1(\beta/2), i(\gamma)\} = \text{bar}\{-1(\alpha+\beta/2), 1(\beta/2), i(\gamma)\} \in \tau$$

et donc $\tau_0 \subset \tau$. On a montré que $\tau_0 \cup \tau_1 \subset \tau$.

Inversement, soit $z \in \tau$. Il existe trois réels positifs α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $z = \text{bar}\{-1(\alpha), 1(\beta), i(\gamma)\}$.

• Si $\alpha < \beta$, on peut écrire

$$z = \text{bar}\{1(-\alpha), 1(\beta), i(\gamma)\} = \text{bar}\{1(\beta-\alpha), i(\gamma)\} = \text{bar}\{0(2\alpha), 1(\beta-\alpha), i(\gamma)\} \in \tau_1.$$

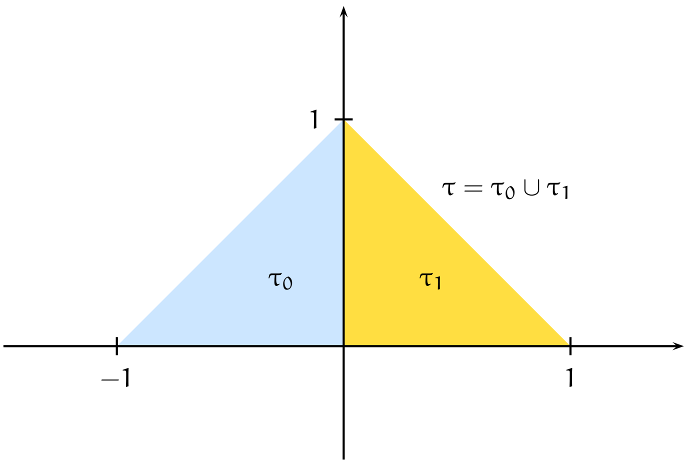
• Si $\alpha \geqslant \beta$, on peut écrire

$$z = \text{bar}\{-1(\alpha), -1(-\beta), i(\gamma)\} = \text{bar}\{-1(\alpha-\beta), i(\gamma)\} = \text{bar}\{-1(\alpha-\beta), 0(2\beta), i(\gamma)\} \in \tau_0.$$

On a ainsi montré que $\tau \subset \tau_0 \cup \tau_1$ et finalement que

$$\boxed{\tau = \tau_0 \cup \tau_1.}$$

I.A.2)



I.A.3) a) Soient s la réflexion d'axe la droite passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$, s' la réflexion d'axe la droite passant par a et dirigée par 1 et r la rotation de centre a et d'angle 2θ. On sait que $s \circ s' = r$ et donc $s = r \circ s'$.
Si on note z_1 l'image de z par s' et z' l'image de z_1 par r, on a

$$z' - a = e^{2i\theta}(z_1 - a) = e^{2i\theta}\overline{(z-a)}.$$

$$\boxed{z' - a = e^{2i\theta}\overline{(z-a)}.}$$

b) Il est connu que

$$\boxed{z' - a = \rho(z - a).}$$

c) D'après les questions a) et b), l'image z' de z par la composée de la réflexion d'axe la droite passant par a et dirigée par $e^{i\theta}$ et de lhomothétie de centre a et de rapport ρ est

$$z' - a = \rho e^{2i\theta}\overline{(z - a)}.$$

On doit noter que puisque le centre de l'homothétie appartient à l'axe de la réflexion, l'homothétie et la réflexion commutent.

• Déterminons les points invariants par ϕ_0. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
\phi_0(z) = z &\Leftrightarrow \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{-1+i}{2} = z \Leftrightarrow (1+i)(x - iy) + (-1+i) = 2(x + iy) \\
&\Leftrightarrow (-x + y - 1) + i(x - 3y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x - 3y = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow z = -1.
\end{aligned}$$

Posons alors $a_0 = -1$.

$$\begin{aligned}
z' = \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{-1+i}{2} &\Leftrightarrow z' - a_0 = \left(\frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{-1+i}{2}\right) - \left(\frac{1+i}{2}\overline{a_0} + \frac{-1+i}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow z' - a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}\overline{(z - a_0)}.
\end{aligned}$$

ϕ_0 est donc la composée de l'homothétie de centre $a_0 = -1$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de la réflexion d'axe la droite passant par a_0 et dirigée par $e^{i\pi/8}$.

• Déterminons les points invariants par ϕ_1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puis $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) = z &\Leftrightarrow \frac{1-i}{2}\overline{z} + \frac{1+i}{2} = z \Leftrightarrow (1-i)(x - iy) + (1+i) = 2(x + iy) \\
&\Leftrightarrow (-x - y + 1) + i(-x - 3y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow z = 1.
\end{aligned}$$

Posons alors $a_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
z' = \frac{1-i}{2}\overline{z} + \frac{1+i}{2} &\Leftrightarrow z' - a_0 = \left(\frac{1-i}{2}\overline{z} + \frac{1+i}{2}\right) - \left(\frac{1-i}{2}\overline{a_1} + \frac{-1+i}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow z' - a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}\overline{(z - a_1)}.
\end{aligned}$$

ϕ_1 est donc la composée de l'homothétie de centre $a_1 = 1$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de la réflexion d'axe la droite passant par a_1 et dirigée par $e^{-i\pi/8}$.

• Soit $k \in \{0, 1\}$. Supposons que $\phi_k = h_k \circ s_k$ où h_k est une homothétie de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rapport $\rho > 0$ et s_k est une réflexion d'axe passant par a. L'image z' de z par ϕ_k vérifie donc $z' - a = \rho e^{2i\theta}\overline{(z - a)}$.
Puisque $\phi_i(a) = h_i \circ s_i(a) = a$, a est nécessairement a_i. Ensuite, puisque $\rho > 0$, pour $z \neq a$, on a nécessairement $\rho = \left|\dfrac{z' - a}{\overline{(z - a)}}\right| = \left\{\begin{array}{ll} \left|\dfrac{1+i}{2}\right| & \text{si } k = 0 \\ \left|\dfrac{1-i}{2}\right| & \text{si } k = 1 \end{array}\right. = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Par suite, h_k est nécessairement l'homothétie de centre a_k et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis s_k est nécessairement $h_k^{-1} \circ \phi_k$. Les décompositions de ϕ_0 et ϕ_1 sont donc uniques.

I.A.4) ϕ_0 et ϕ_1 sont des applications affines. On sait alors que, pour $k \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}\phi_k(\tau) &= \{\phi_k\left(\text{bar}\{a(\alpha), b(\beta), c(\gamma)\}\right),\ (\alpha,\beta,\gamma) \in K\} = \{\text{bar}\{\phi_k(a)(\alpha), \phi_k(b)(\beta), \phi_k(c)(\gamma)\},\ (\alpha,\beta,\gamma) \in K\} \\ &= \phi_k(a)\widehat{\phi_k(b)}\phi_k(c).\end{aligned}$$

- $\phi_0(-1) = -1$, $\phi_0(1) = i$ et $\phi_0(i) = \dfrac{1+i}{2}(-i) + \dfrac{-1+i}{2} = 0$. Donc $\phi_0(\tau) = \widehat{-10i} = \tau_0$.
- $\phi_1(-1) = i$, $\phi_1(1) = 1$ et $\phi_1(i) = \dfrac{1-i}{2}(-i) + \dfrac{1+i}{2} = 0$. Donc $\phi_0(\tau) = \widehat{01i} = \tau_1$.

$$\boxed{\phi_0(\tau) = \tau_0 \text{ et } \phi_1(\tau) = \tau_1.}$$

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1) a) Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on sait que toutes les normes sur $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes. On munit alors $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|\ \|_1$.

Les applications $e_1^* : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \alpha$, $e_2^* : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \beta$, $e_3^* : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \alpha$ et $e = e_1^* + e_2^* + e_3^*$ sont quatre formes linéaires et donc sont continues sur $\mathbb{R}^3$ puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Donc les quatre ensembles $E_1 = \{(\alpha,\beta,\gamma)/\ \alpha \geqslant 0\} = (e_1^*)^{-1}([0,+\infty[)$, $E_2 = \{(\alpha,\beta,\gamma)/\ \beta \geqslant 0\} = (e_2^*)^{-1}([0,+\infty[)$, $E_3 = \{(\alpha,\beta,\gamma)/\ \gamma \geqslant 0\} = (e_3^*)^{-1}([0,+\infty[)$ et $E = \{(\alpha,\beta,\gamma)/\ \alpha+\beta+\gamma = 1\} = e^{-1}(\{1\})$ sont quatre fermés de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'images réciproques de fermés de $\mathbb{R}$ par des applications continues sur $\mathbb{R}^3$. Mais alors $K = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^3$.

D'autre part, $\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|(\alpha,\beta,\gamma)\|_1 = |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = \alpha+\beta+\gamma = 1 \leqslant 1.$$

Donc K est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

En résumé, K est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^3$ et donc un compact de $\mathbb{R}^3$ d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

$$\boxed{K \text{ est un compact de } \mathbb{R}^3.}$$

b) Soient $u = (\alpha,\beta,\gamma) \in K$ et $v = (\alpha',\beta',\gamma') \in K$ puis $t \in [0,1]$. Alors $tu + (1-t)v = (t\alpha + (1-t)\alpha', t\beta + (1-t)\beta', t\gamma + (1-t)\gamma')$. Les trois réels $\alpha'' = t\alpha + (1-t)\alpha'$, $\beta'' = t\beta + (1-t)\beta'$ et $\gamma'' = t\gamma + (1-t)\gamma'$ sont trois réels positifs tels que

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = t(\alpha+\beta+\gamma) + (1-t)(\alpha'+\beta'+\gamma') = t + 1 - t = 1,$$

et donc $tu + (1-t)v \in K$. On a montré que

$$\boxed{K \text{ est un convexe de } \mathbb{R}^3.}$$

c) Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta,\gamma) & \mapsto & \alpha a + \beta b + \gamma c \end{array}$. ψ est une application $\mathbb{R}$-linéaire et $\psi(K) = \widehat{abc}$.

- ψ est affine et K est convexe. Donc $\psi(K)$ est convexe.
- ψ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car linéaire et K est compact. Donc $\psi(K)$ est compact.

En résumé, $\widehat{abc} = \psi(K)$ est un compact convexe de $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\widehat{abc} \text{ est un compact convexe de } \mathbb{C}.}$$

d) Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (z,z') & \mapsto & |z'-z| \end{array}$. Δ est continue sur $\mathbb{C}^2$ car composée de l'application $(z,z') \mapsto z'-z$ continue sur $\mathbb{C}^2$ (car $\mathbb{R}$-linéaire) et de l'application $u \mapsto |u|$ continue sur $\mathbb{C}$. Puisque Δ est continue sur $\mathbb{C}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on sait que sur le compact $\widehat{abc}^2$, Δ admet un maximum. On en déduit l'existence de $\delta\left(\widehat{abc}\right)$.

I.B.2) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $z' \in \widehat{abc}$. Il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in K$ tel que $z' = \alpha a + \beta b + \gamma c$. Posons $m(z) = \max\{|z-a|, |z-b|, |z-c|\}$. Supposons par exemple $m(z) = |z-a|$ sans perte de généralité.

$$\begin{aligned}|z - z'| &= |(\alpha+\beta+\gamma)z - (\alpha a + \beta b + \gamma c)| = |\alpha(z-a) + \beta(z-b) + \gamma(z-c)| \\ &\leqslant \alpha|z-a| + \beta|z-b| + \gamma|z-c| \leqslant (\alpha+\beta+\gamma)m(z) = m(z),\end{aligned}$$

avec égalité effectivement obtenue quand $z' = a$. Donc

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \max\left\{|z'-z|,\ z' \in \widehat{abc}\right\} = \max\{|z-a|, |z-b|, |z-c|\}.}$$

b) Posons $M = \max\{|b-c|, |c-a|, |a-b|\}$. Pour $z = \alpha a + \beta b + \gamma c$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$, on a

$$|z-a| = |\alpha(a-a) + \beta(b-a) + \gamma(c-a)| \leqslant \alpha|a-a| + \beta|b-a| + \gamma|c-a| \leqslant (\alpha+\beta+\gamma)M = M,$$

et de même $|z-b| \leqslant M$ et $|z-c| \leqslant M$. On en déduit, avec les notations de la question précédente, que

$$\forall z \in \widehat{abc},\ m(z) \leqslant M.$$

Mais alors, pour $(z, z') \in \widehat{abc}^{\,2}$, $|z'-z| \leqslant m(z) \leqslant M$ avec égalité effectivement obtenue quand z et z' sont deux des trois points a ou b ou c tels que $|z'-z| = \max\{|b-c|, |c-a|, |a-b|\}$ (les points a, b et c sont bien dans $\widehat{abc}$ car par exemple $a = 1a + 0b + 0c$). Finalement

$$\boxed{\delta\left(\widehat{abc}\right) = \max\{|b-c|, |c-a|, |a-b|\}.}$$

I.B.3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(a)$, $b_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(b)$ et $c_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(c)$. D'après la question I.A.4), $\widetilde{\tau}_n = \widehat{a_n b_n c_n}$.

Unicité. Soient z et z' deux nombres complexes appartenant à $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} \widetilde{\tau}_n$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, z et z' sont dans $\widetilde{\tau}_n$ et puisque ϕ_0 et ϕ_1 sont des similitudes de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$|z'-z| \leqslant \delta\left(\widetilde{\tau}_n\right) = \max\{|b_n - c_n|, |c_n - a_n|, |a_n - b_n|\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \max\{|b-c|, |c-a|, |a-b|\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \delta(\tau).$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $|z'-z| = 0$ et donc $z = z'$. Ceci montre l'unicité d'un point commun à tous les $\widetilde{\tau}_n$.

Existence. D'après la question I.4.A), $\phi_0(\tau) \subset \tau$ et $\phi_1(\tau) \subset \tau$. Mais alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{\tau}_{n+1} = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(\phi_{r_{n+1}}(\tau)) \subset \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_n}(\tau).$$

Ainsi, la suite $(\widetilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts d'après la question I.B.1)c), décroissante pour l'inclusion. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit alors un élément z_n dans $\widetilde{\tau}_n$. La suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact τ. On peut donc en extraire une sous-suite convergente $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ dont la limite z est un élément de τ.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \geqslant 0$, on a $\varphi(n+p) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ et donc $z_{\varphi(n+p)} \in \widetilde{\tau}_n$. La suite $\left(z_{\varphi(n+p)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments du compact $\widetilde{\tau}_n$ et converge vers z. Un compact étant fermé, on en déduit que $z \in \widetilde{\tau}_n$. Ainsi, z est élément de chaque $\widetilde{\tau}_n$ et donc élément de $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \widetilde{\tau}_n$.

Partie II - Construction de l'application f

II.1) Soit f une application affine de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Il existe deux complexes α et β tels que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \alpha x + \beta$. Les égalités $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ sont équivalentes à $\beta = -1$ puis $\alpha = 2$. Donc

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ f_0(x) = 2x - 1.}$$

II.2) Soit $g \in \mathcal{E}$. L'application $x \mapsto g(2x)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et l'application ϕ_0 est continue sur $\mathbb{C}$ en tant qu'application affine. Donc l'application $x \mapsto \phi_0(g(2x))$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ ou encore Tg est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. De même, Tg est continue sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Enfin,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} Tg(x) = \phi_1(g(0)) = \phi_1(-1) = i = \phi_0(1) = \phi_0(g(0)) = Tg\left(\frac{1}{2}\right).$$

Donc Tg est continue en $\dfrac{1}{2}$ et par suite sur $[0, 1]$. D'autre part, $Tg(0) = \phi_0(g(0)) = \phi_0(-1) = -1$ et $Tg(1) = \phi_1(1) = 1$. Donc $Tg \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\forall g \in \mathcal{E},\ Tg \in \mathcal{E}.}$$

II.3) Soit $(g_1, g_2) \in \mathcal{E}^2$. ϕ_0 est ϕ_1 sont des similitudes de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|\phi_0(z') - \phi_0(z)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|z' - z|$ et $|\phi_1(z') - \phi_0(z)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|z' - z|$. On en déduit que $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$|Tg_2(x) - Tg_1(x)| = |\phi_0(g_2(2x)) - \phi_0(g_1(2x))| = \frac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x) - g_1(2x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty.$$

De même, $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$ et finalement, $\forall x \in [0, 1]$, $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$. D'autre part, l'application $|g_2 - g_1|$ est continue sur le segment $[0, 1]$ est donc il existe $t \in [0, 1]$ tel que $|g_2(t) - g_1(t)| = \|g_2 - g_1\|_\infty$. Pour $x = \dfrac{t}{2} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x) - g_1(2x)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|g_2(t) - g_1(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$.

En résumé, $\forall x \in [0, 1]$, $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$ et $\exists x_0 \in [0, 1]/\ |Tg_2(x_0) - Tg_1(x_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$. Ceci montre que $\|Tg_2 - Tg_1\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$.

$$\boxed{\forall (g_1, g_2) \in \mathcal{E}^2,\ \|Tg_2 - Tg_1\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty.}$$

II.4) a) Pour tout entier n, on a $f_n = T^n f_0$. D'après les questions II.1) et II.2), on montre par récurrence que chaque fonction f_n est dans $\mathcal{E}$. D'autre part, f_0 est à valeurs dans τ et si pour $n \geqslant 0$, f_n est à valeurs dans τ, alors $f_{n+1} = Tf_n$ est à valeurs dans τ car $\phi_0(\tau) \subset \tau$ et $\phi_1(\tau) \subset \tau$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant \delta(\tau) = 2$ et donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant 2$.

Pourx $\in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question II.3)

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |Tf_n(x)) - Tf_{n-1}(x)| \leqslant \|Tf_n - Tf_{n-1}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty,$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty \leqslant 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

Soient alors $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_{n+p} - f_n\|_\infty &= \left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} (f_{k+1} - f_k) \right\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leqslant 2 \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \\
&\leqslant 2 \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in [0, 1]$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \varepsilon$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Ainsi, pour chaque $x \in [0, 1]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY et donc converge vers un complexe noté $f(x)$ car $\mathbb{C}$ est complet. On a montré que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une certaine fonction f.

Montrons que la la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$ et $(n, p) \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Quand p tend vers $+\infty$ à x et n fixés, on obtient $\forall x \in [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$.

Puisque chaque fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$, la fonction f est continue sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$ et $f(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Finalement, $f \in \mathcal{E}$.

b) Soit $x \in [0,1]$. Pour tout entier n, on a $f_{n+1}(x) = T(f_n(x)) = \begin{cases} \phi_0(f_n(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \phi_1(f_n(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$. Par continuité de ϕ_0 et ϕ_1 sur $\mathbb{C}$, quand n tend vers $+\infty$ on obtient $f(x) = \begin{cases} \phi_0(f(2x)) \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \phi_1(f(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = Tf(x)$. Donc $\forall x \in [0,1]$, $Tf(x) = f(x)$.

$$\boxed{Tf = f.}$$

c) Montrons par récurrence que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\overline{f_n(1-x)} = f_n(x)$.
• C'est vrai pour $n = 0$ car $\forall x \in [0,1]$, $-\overline{f_0(1-x)} = -(2(1-x)-1) = 2x - 1 = f_0(x)$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall x \in [0,1]$, $-\overline{f_n(1-x)} = f_n(x)$.
Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $1 - x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et

$$\begin{aligned} -\overline{f_{n+1}(1-x)} &= -\overline{Tf_n(1-x)} = -\overline{\phi_1(f_n(2(1-x)-1))} = -\frac{1+i}{2}\overline{f_n(1-2x)} + \frac{-1+i}{2} \\ &= \frac{1+i}{2}f_n(2x) + \frac{-1+i}{2} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \phi_0(f_n(2x)) = Tf_n(x) = f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

et si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\begin{aligned} -\overline{f_{n+1}(1-x)} &= -\overline{Tf_n(1-x)} = -\overline{\phi_0(f_n(2(1-x)))} = -\frac{1-i}{2}\overline{f_n(2-2x)} + \frac{1+i}{2} \\ &= \frac{1-i}{2}f_n(1-(2-2x)) + \frac{1+i}{2} = \phi_1(f_n(2x-1)) = Tf_n(x) = f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall x \in [0,1]$, $-\overline{f_n(1-x)} = f_n(x)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) = -\overline{f(1-x)}.}$$

Ainsi, l'image par f de deux réels de $[0,1]$ symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$ sont des complexes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et en particulier, pour obtenir le support de l'arc paramétré $x \mapsto f(x)$, on construit la portion de courbe obtenue quand x décrit $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy).

Partie III - Propriétés de f

III.A - Image de f

III.A.1) a) Pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant \frac{r_n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Comme $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente, on en déduit que la série de terme général $\frac{r_n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers un certain réel noté x. De plus,

$$0 \leqslant x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

b) Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$.

• Vérifions tout d'abord la proposition quand $p = 1$.

$$x_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} = 2\left(x - \frac{r_1}{2}\right) = 2x - r_1.$$

Maintenant, si $r_1 = 1$, alors $x = \dfrac{x_1+1}{2} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

- si $r_1 = 0$, alors $x = \dfrac{x_1}{2} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ (car $x_1 \in [0,1]$) et $\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_0(f(x_1)) = \phi_0(f(2x)) = Tf(x) = f(x)$.

- si $r_1 = 1$, alors $x = \dfrac{x_1+1}{2} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et de plus $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = 0$.

Si $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_1(f(x_1)) = \phi_1(f(2x-1)) = Tf(x) = f(x)$.

Si $x = \dfrac{1}{2}$, $x_1 = 0$ et $\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_1(f(0)) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^+} \phi_1(f(2t-1)) = \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}^+} Tf(2t-1) = Tf\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ainsi, dans tous les cas, $f(x) = \phi_{r_1}(f(x_1))$.

• Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$. En appliquant le travail précédent au réel x_p, on obtient $\phi_{r_{p+1}}(f(x_{p+1})) = \phi_{r_{p+1}}(f(2x_p - r_p)) = f(x_p)$ et donc $f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_p} \circ \phi_{r_{p+1}}(f(x_{p+1}))$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_p}(f(x_p)).}$$

III.A.2) a) Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k = [2^{n-1}x]$. On a $k \leqslant 2^{n-1}x < k+1$ et donc $2k \leqslant 2^n x < 2k+2$ puis $[2^n x] = 2k = 2[2^{n-1}x]$ ou $[2^n x] = 2k+1 = 2[2^{n-1}x]+1$. Par suite, $r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1}x] \in \{0,1\}$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n(x) \in \{0,1\}.}$$

b) Soient $x \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{[2^n x]}{2^n} - \frac{[2^{n-1}x]}{2^{n-1}}\right) \\
&= \frac{[2^N x]}{2^N} - \frac{[2^0 x]}{2^0} \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{[2^N x]}{2^N} - [x] = \frac{[2^N x]}{2^N} \text{ (car } x \in [0,1[).
\end{aligned}$$

Maintenant, $x - \dfrac{1}{2^N} = \dfrac{2^N x - 1}{2^N} < \dfrac{[2^N x]}{2^N} \leqslant \dfrac{2^N x}{2^N} = x$ et quand N tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} = \frac{[2^N x]}{2^N}$ tend vers x.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}.}$$

c) Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{2}\right] \cap [0,1[$. Il existe $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = \dfrac{k}{2^p}$. Mais alors pour $n > p = N$,

$$r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1}x] = [k2^{n-p}] - 2[k2^{n-p-1}] = k2^{n-p} - 2k2^{n-p-1} = 0.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right],\ \exists N \in \mathbb{N}^* /\ \forall n > N,\ r_n(x) = 0.}$$

d) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = Tf\left(\dfrac{1}{2}\right) = \phi_0(f(1)) = \phi_0(1) = i$ et $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = Tf\left(\dfrac{1}{4}\right) = \phi_0\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \phi_0(i) = 0$.

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = i \text{ et } f\left(\frac{1}{4}\right) = 0.}$$

On a vu que $\phi_0 = s \circ h = h \circ s$ où h est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et s est la réflexion d'axe passant par -1 et dirigé par $e^{i\pi/8}$. Puisque h et s commutent, on a $\phi_0^2 = h^2 s^2 = h^2$ et $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\dfrac{1}{2}$. On note H cette homothétie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k=0$, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = f(1) = 0$ et si $k=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = i$.

Supposons dorénavant $k \geqslant 2$. Posons $x = \frac{1}{2^k}$ de sorte que $r_k(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \neq k$. Alors, $x_{k-1} = \frac{r_{1+(k-1)}}{2} = \frac{1}{2}$ puis d'après la question II.A.1)b),

$$f\left(\frac{1}{2^k}\right) = f(x) = \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_{k-1}}(f(x_{k-1})) = \underbrace{\phi_0 \circ \ldots \circ \phi_0}_{k-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \phi_0^{k-1}(i)$$

Donc, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{1}{2^{2p+1}}\right) = \phi_0^{2p}(i) = H^p(i) = -1 + \frac{1}{2^p}(i+1),$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$. Puis pour $p \geqslant 1$,

$$f\left(\frac{1}{2^{2p}}\right) = \phi_0^{2p-1}(i) = H^{p-1} \circ \phi_0(i) = H^{p-1}(0) = -1 + \frac{1}{2^{p-1}}(0+1) = -1 + \frac{1}{2^{p-1}},$$

ce qui reste vrai quand $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{1}{2^{2p}}\right) = -1 + \frac{1}{2^{p-1}} \text{ et } f\left(\frac{1}{2^{2p+1}}\right) = -1 + \frac{1}{2^p}(i+1).}$$

III.A.3) a) Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$.

Si $x = 1$, alors $f(x) = 1 \in \tau$.

Sinon, $x \in [0,1[$ et d'après les questions III.A.2)b) et III.A.2)c), il existe un entier naturel non nul N tel que $x = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n}$.

D'après la question II.A.1)b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(f(x_N)) = \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(f(0)) \\ &= \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(-\overline{f(1)}) \text{ (d'après la question II.4.c))} \\ &= \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(-1) \in \widetilde{\tau}_N \subset \tau. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $f(x) \in \tau$ et on a montré que

$$\boxed{f\left([0,1] \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) \subset \tau.}$$

b) On rappelle que $f(1) \in \tau$. Soit $x \in [0,1[$. La suite $(y_N)_{N \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $[0,1] \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ convergeant vers x et telle que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $f(y_N) \in \tau$. Puisque f est continue sur $[0,1]$ d'après la question II.4.a),

$$f(x) = f\left(\lim_{N \to +\infty} y_N\right) = \lim_{N \to +\infty} f(y_N) \in \overline{\tau}.$$

Mais τ est un compact d'après la question I.B.1.c) et en particulier τ est fermé. On en déduit que $\overline{\tau} = \tau$ et donc que $f(x) \in \tau$. On a montré que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in \tau$ et donc que

$$\boxed{f([0,1]) \subset \tau.}$$

III.A.4) Soit $z \in \tau$.
a) ϕ_0 et ϕ_1 sont des similitudes de rapport non nul et en particulier des permutations de $\mathbb{C}$. D'après la question I.4.A), $\phi_0^{-1}(\tau_0) = \tau$ et $\phi_1^{-1}(\tau_1) = \tau$.

- $z_0 = z$ existe et appartient à τ.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que z_{n-1} existe et appartienne à τ. Alors si $z_{n-1} \in \tau_0$, $z_n = \phi_0^{-1}(z_{n-1})$ existe et appartient à τ et si $z_{n-1} \in \tau_1$, $z_n = \phi_1^{-1}(z_{n-1})$ et appartient à τ.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, z_n existe et appartient à τ.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \in \tau.}$$

b) Pour chaque entier naturel non nul N, on a $z_{N-1} = \phi_{r_N}(z_N)$ et donc $z = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(z_N) \in \widetilde{\tau}_N$. D'autre part, si pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}$, la question III.A.1.b) permet d'écrire

$$f(y_N) = \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_N}(-1) \in \widetilde{\tau}_N.$$

En résumé, pour tout entier naturel non nul N, $f(y_N)$ et z sont dans $\widetilde{\tau}_N$. Maintenant, d'après la question I.B.3), le diamètre de $\widetilde{\tau}_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ et donc $f(y_N)$ tend vers z quand N tend vers $+\infty$. D'autre part, y_N tend vers $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}$ quand N tend vers $+\infty$ et puisque f est continue en x, on en déduit que $f(y_N)$ tend vers $f(x)$ quand N tend vers $+\infty$. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $f(x) = z$.

$$\boxed{f\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}\right) = z.}$$

L'application f est donc une application de $[0,1]$ dans τ, continue sur $[0,1]$ et surjective.

c) Tout d'abord, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}\right| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} \times \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{N+1}}} = \frac{1}{2^N},$$

et donc pour $\epsilon > 0$ donné,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}\right| < \epsilon \Leftarrow \frac{1}{2^N} < \epsilon \Leftarrow N > \log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Déterminons maintenant explicitement ϕ_0^{-1} et ϕ_1^{-1}.

$$\phi_0(z) = z' \Leftrightarrow \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{-1+i}{2} = z' \Leftrightarrow \frac{1-i}{2}z = \overline{z'} + \frac{1+i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2}{1-i}\left(\overline{z'} + \frac{1+i}{2}\right) = (1+i)\overline{z'} + i$$

et

$$\phi_1(z) = z' \Leftrightarrow \frac{1-i}{2}\overline{z} + \frac{1+i}{2} = z' \Leftrightarrow \frac{1+i}{2}z = \overline{z'} + \frac{-1+i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2}{1+i}\left(\overline{z'} - \frac{1-i}{2}\right) = (1-i)\overline{z'} + i$$

Donc, pour tout complexe z, $\phi_0(z)^{-1} = (1+i)\overline{z} + i$ et $\phi_1(z)^{-1} = (1-i)\overline{z} + i$. On note enfin que pour tester si un nombre complexe $z \in \tau$ est dans τ_0 ou pas, il suffit de regarder le signe de la partie réelle de z.

Voici une fonction écrite en MAPLE qui prend en argument z et ϵ et qui fournit une valeur approchée à ϵ près d'un antécédent de z.

```
fonction :=proc(epsilon : :real,Z : :complex)

local N,n,x ;
x :=0 ;
if epsilon>=2 then N :=1
    else N :=trunc(log2(1/epsilon))+1 ; fi ;
For n from 1 to N do
    if Re(Z)<=0 then Z :=(1+I)*conjugate(Z)+I
    else Z :=(1-I)*conjugate(Z)+I et x :=x+1/2^n ; fi ;
od ;
return(x) ;
end ;
```

Remarque. L'algorithme précédent suppose que la machine renvoie la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}$. Il peut être amélioré en supposant que la machine renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}$ à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ près et donc en choisissant N tel que $\dfrac{1}{2^N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

III.A.5) a) D'après la question III.A.2.d), $f\left(\frac{1}{4}\right)=0$ et d'après la question II.4.c), $f\left(\frac{3}{4}\right)=-\overline{f\left(\frac{1}{4}\right)}=0=f\left(\frac{1}{4}\right)$. Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas injective.}}$$

b) Soit g une éventuelle bijection de $[0,1]$ sur τ, continue sur $[0,1]$.

• On vérifie d'abord que si a et b sont deux points de τ, l'ensemble des antécédents par g des nombres complexes éléments du segment $[a,b]$ est un segment de $[0,1]$.
Soient donc a et b deux éléments de τ. Pour $\lambda\in[0,1]$, on pose $u(\lambda)=g^{-1}((1-\lambda)a+\lambda b)$ puis on pose $I=u([0,1])=g^{-1}([a,b])$. Il s'agit de vérifier que I est un segment de $[0,1]$. I est déjà un fermé de $[0,1]$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{C}$ par une application continue et puisque I est borné, I est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$. Il reste à vérifier que I est un intervalle. Pour cela, montrons que l'application u est continue sur $[0,1]$.

Soit $\lambda\in[0,1]$. Supposons que u ne soit pas continue en λ. Il existe alors $\varepsilon>0$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $[0,1]$ convergeant vers λ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u(\lambda)-u(\lambda_n)|\geqslant\varepsilon$.
La suite $(u(\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact $[0,1]$ et on peut donc en extraire une sous-suite $(u(\lambda_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain $\lambda'\in[0,1]$. Par continuité de g, la suite $g(u(\lambda_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(\lambda')$.
Mais $g(u(\lambda_{\varphi(n)}))=(1-\lambda_{\varphi(n)})a+\lambda_{\varphi(n)}b$ tend aussi vers $(1-\lambda)a+\lambda b$. Donc $g(\lambda')=(1-\lambda)a+\lambda b$ puis $\lambda'=g^{-1}((1-\lambda)a+\lambda b)=u(\lambda)$. En résumé, la suite $(u(\lambda_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(\lambda)$ ce qui contredit $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u(\lambda)-u(\lambda_{\varphi(n)})|\geqslant\varepsilon$. Donc u est continue en λ. Finalement u est continue sur $[0,1]$.

On en déduit que l'image par l'application continue u de l'intervalle $[0,1]$ est un intervalle de $[0,1]$ et finalement $g^{-1}([a,b])$ est un segment de $[0,1]$.

$$\forall(a,b)\in\tau^2,\ g^{-1}([a,b]) \text{ est un segment de } [0,1].$$

• On choisit alors a et b sur la frontière de τ, distincts et non situés sur un même côté de τ. $g^{-1}([a,b])$ est un segment $[\alpha,\beta]=I$ contenu dans $[0,1]$. Si $\alpha=0$, puisque g est bijective, $\tau\backslash[a,b]=g([0,1]\backslash[0,\beta])=g(]\beta,1])$ et donc τ est un connexe par arcs en tant qu'image d'un connexe par arcs par une application continue (théorème des valeurs intermédiaires). Ceci n'est pas car a et b ne sont pas situés sur un même côté de τ. Donc $\alpha>0$ et de même $\beta<1$. Ceci signifie que $g(0)$ et $g(1)$ sont situés à l'intérieur de τ. Mais cette dernière situation est également à exclure car en prolongeant le segment $[g(0),g(1)]$ jusqu'au bord de τ, on obtient un segment $[a,b]$ dont l'ensemble des antécédents est un segment de $[0,1]$ contenant 0 et 1 et donc $g^{-1}([a,b])=[0,1]$ ce qui est impossible. Finalement

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de bijection continue de } [0,1] \text{ sur } \tau.}$$

III.A.6) a) On sait déjà que ϕ_0^2 est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\frac{1}{2}$. De même, ϕ_1^2 est l'homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{2}$. D'autre part, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\phi_0(\phi_1(z))&=\frac{1+i}{2}\overline{\left(\frac{1-i}{2}\overline{z}+\frac{1+i}{2}\right)}+\frac{-1+i}{2}=\left(\frac{1+i}{2}\right)^2z+\frac{1+i}{2}\frac{1-i}{2}+\frac{-1+i}{2}\\&=\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

$\phi_0\circ\phi_1$ est une similitude plane directe de rapport $\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ et d'angle $\arg\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Son centre ω est l'unique point invariant de $\phi_0\circ\phi_1$. Or, pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\phi_0\circ\phi_1(z)=z\Leftrightarrow\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}=z\Leftrightarrow z=\frac{i}{2-i}\Leftrightarrow z=\frac{-1+2i}{5}.$$

$\phi_0\circ\phi_1$ est la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega=\frac{-1+2i}{5}$.

Pour $z\in\mathbb{C}$,

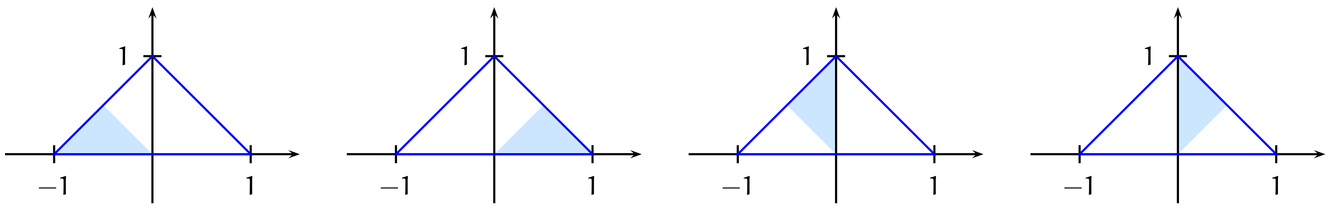
$$\begin{aligned}\phi_1(\phi_0(z))&=\frac{1-i}{2}\overline{\left(\frac{1+i}{2}\overline{z}+\frac{-1+i}{2}\right)}+\frac{1+i}{2}=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2z-\frac{1+i}{2}\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}\\&=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}.\end{aligned}$$

et

$$\phi_1 \circ \phi_0(z) = z \Leftrightarrow -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2} = z \Leftrightarrow z = \frac{i}{2+i} \Leftrightarrow z = \frac{1+2i}{5}.$$

$\phi_1 \circ \phi_0$ est la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega' = \frac{1+2i}{5}$.

On donne ensuite l'image de τ par chacune de ces quatre transformations



$\phi_0 \circ \phi_0(\tau)$ $\qquad$ $\phi_1 \circ \phi_1(\tau)$ $\qquad$ $\phi_0 \circ \phi_1(\tau) = \phi_0(\tau_1)$ $\qquad$ $\phi_1 \circ \phi_0(\tau) = \phi_1(\tau_0)$

b) Existence. Pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x) \in \tau$ et $\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \ldots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$. On cherche donc à construire un réel $x \in [0,1]$ tel que $x_p = x$ et dont le « développement diadique » commence par $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2^2} + \ldots + \frac{r_p}{2^p}$. Le réel

$$x = \left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2^2} + \ldots + \frac{r_p}{2^p}\right) + \left(\frac{r_1}{2^{p+1}} + \frac{r_2}{2^{p+2}} + \ldots + \frac{r_p}{2^{2p}}\right) + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{p} \frac{r_j}{2^{kp+j}}\right)$$

convient et le complexe $z = f(x) \in \tau$ vérifie

$$\phi(z) = \phi(f(x)) = \phi_{r_1} \circ \ldots \phi_{r_p}(f(x_p)) = f(x) = z.$$

Unicité. Soiz$' \in \mathbb{C}$ tel que $\phi(z') = z'$. Alors

$$|z' - z| = |\phi(z') - \phi(z)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p |z' - z|,$$

et donc $\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p\right)|z' - z| = 0$ puis $|z' - z| = 0$ car $p \geqslant 1$. Donc $z' = z$.

$$\boxed{\text{La similitude } \phi_{r_1} \circ \ldots \circ \phi_{r_p} \text{ admet un point fixe unique élément de } \tau.}$$

c) Le point fixe de ϕ est $z = f\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{p} \frac{r_j}{2^{kp+j}}\right)\right)$.

d) Soient $z \in \tau$ puis $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = z$. Il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_k}{2^k}$ (par exemple la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fournie par l'algorithme de la question III.A.4)). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $y_p = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{p} \frac{r_j}{2^{kp+j}}\right)$ puis $z_p = f(y_p)$. D'après la question précédente, pour $p \in \mathbb{N}^*$ donné, le complexe z_p est point fixe de $\phi_{r_1} \circ \ldots \phi_{r_p}$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$|x - y_p| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{l=1}^{p} \frac{r_j}{2^{kp+j}}\right) \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p}.$$

Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} y_p = x$. Puisque f est continue sur $[0,1]$ et donc en x

$$z = f(x) = f\left(\lim_{p \to +\infty} y_p\right) = \lim_{p \to +\infty} f(y_p) = \lim_{p \to +\infty} z_p.$$

Ainsi, tout complexe élément de τ est limite d'une suite de complexes qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 et donc l'ensemble des nombres complexes qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1 est dense dans τ.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Puisque f est dérivable en x, $f(t) \underset{t \to x}{=} f(x) + (t-x)f'(x) + (t-x)\varepsilon(t-x)$ avec $\lim\limits_{t \to x} \varepsilon(t-x) = 0$. Puisque les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(f(x)+f'(x)(\beta_n-x)+(\beta_n-x)\varepsilon(\beta_n-x))-(f(x)+(\alpha_n-x)+(\alpha_n-x)\varepsilon(\alpha_n-x))}{\beta_n-\alpha_n}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} f'(x)+\frac{(\beta_n-x)\varepsilon(\beta_n-x)-(\alpha_n-x)\varepsilon(\alpha_n-x)}{(\beta_n-x)+(x-\alpha_n)},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\left|\frac{(\beta_n-x)\varepsilon(\beta_n-x)-(\alpha_n-x)\varepsilon(\alpha_n-x)}{(\beta_n-x)+(x-\alpha_n)}\right| &\leqslant \frac{((\beta_n-x)+(x-\alpha_n))\max\{|\varepsilon(\alpha_n-x)|,|\varepsilon(\beta_n-x)|\}}{\beta_n-\alpha_n}\\ &= \max\{|\varepsilon(\alpha_n-x)|,|\varepsilon(\beta_n-x)|\} \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

(car si u et v sont deux suites réelles convergeant vers 0, alors $\max\{u,v\}=\frac{1}{2}(u+v+|u-v|)$ est une suite réelle convergeant vers 0).

III.B.2) a) Pour tout entier naturel non nul n, on a bien $\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k(x)}{2^k}\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r_k(x)}{2^k}=x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k(x)}{2^k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\beta_n$ et $\beta_n-\alpha_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}>0$. De plus, les deux suites (α_n) et (β_n) sont convergentes de limite x. D'après la question précédente, si f est dérivable en x, $\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ tend vers $f'(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question II.A.1.b), pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}|f(\beta_n)-f(\alpha_n)| &= \left|\phi_{r_1}\circ\ldots\circ\phi_{r_n}\left(f\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right)\right)-\phi_{r_1}\circ\ldots\circ\phi_{r_n}(f(0))\right|\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n|f(1)-f(0)|=\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^n},\end{aligned}$$

puis $\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\right|=\frac{2/\left(\sqrt{2}\right)^n}{1/2^n}=2\left(\sqrt{2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\right)$ ne peut converger et f n'est pas dérivable en x.

$\boxed{f \text{ n'est dérivable en aucun réel } x \text{ de } [0,1[.}$

b) Si $x=1$, on adapte ce qui précède en posant $\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ et $\beta_n=1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$ pour tout entier naturel non nul n. On a toujours

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\right|=\frac{2/(\sqrt{2})^n}{1/2^n}=2(\sqrt{2})^n\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty,$$

et de nouveau la suite $\left(\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}\right)$ ne peut converger et f n'est pas dérivable en 1.

$\boxed{f \text{ continue sur } [0,1] \text{ mais n'est dérivable en aucun réel } x \text{ de } [0,1].}$

