SESSION 2009

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES I. FILIERE MP

Partie I - Questions préliminaires

I.1) La fonction Γ est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et vérifie $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$.

I.2) Γ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\Gamma''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}\ dt>0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). Donc la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et par suite strictement positive sur $]c,+\infty[$ et en particulier sur $[2,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } \Gamma \text{ est strictement croissante sur } [2,+\infty[.}$$

I.3) Soit $\gamma>1$.
Pour $x>0$, on pose $n_x=E(x)$. Soit $x\geqslant 2$.
- La fonction Γ est croissante sur $[2,+\infty[$ et donc $\Gamma(x)\geqslant\Gamma(n_x)=(n_x-1)!$
- La fonction $t\mapsto\gamma^t$ est croissante sur $[2,+\infty[$ car $\gamma>1$ et donc $\gamma^x\leqslant\gamma^{n_x+1}$.

Par suite, pour $x\geq 2$,

$$0\leqslant\frac{\gamma^x}{\Gamma(x)}\leqslant\frac{\gamma^{n_x+1}}{(n_x-1)!}=\gamma^2\frac{\gamma^{n_x-1}}{(n_x-1)!}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, n_x tend vers $+\infty$ car $n_x\geqslant x-1$ puis $\dfrac{\gamma^{n_x-1}}{(n_x-1)!}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $\dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)}$ tend vers 0 et donc que $\gamma^x=o(\Gamma(x))$ quand x tend vers $+\infty$.

Si $\gamma\in]0,1]$, on a $\gamma^x\underset{x\to+\infty}{=}o(2^x)$ et $2^x\underset{x\to+\infty}{=}o(\Gamma(x))$. Donc encore une fois $\gamma^x\underset{x\to+\infty}{=}o(\Gamma(x))$.

On a montré que

$$\boxed{\forall\gamma>0,\ \gamma^x\underset{x\to+\infty}{=}o(\Gamma(x)).}$$

Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence

II.A -

II.A.1) Si ϕ n'est pas positive sur $[t_0,+\infty[$, il existe $t_1\geqslant t_0$ tel que $\phi(t_1)<0$. Puisque la fonction ϕ est décroissante sur $[t_0,+\infty[$, pour tout réel $t\geqslant t_1$, on a $\phi(t)\leqslant\phi(t_1)$ et donc $|\phi(t)\geqslant|\phi(t_1)|$. Comme la fonction $t\mapsto|\phi(t_1)|$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, il en est de même de la fonction ϕ. Ceci est une contradiction et donc

$$\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est positive sur } [t_0,+\infty[.}$$

II.A.2)

a) Soit $h>0$. Soit $n\geqslant 1+\dfrac{t_0}{h}$. On a $nh\geqslant(n-1)h\geqslant t_0$ et donc la fonction ϕ est positive et décroissante sur $[(n-1)h,nh]$. On en déduit d'une part que $h\phi(nh)\geqslant 0$ et d'autre part que $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ dt\geqslant\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(nh)\ dt=h\phi(nh)$.

$$\boxed{\forall n\geqslant 1+\frac{t_0}{h},\ 0\leqslant h\phi(nh)\leqslant\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ dt.}$$

b) Soit $h > 0$. Pour n entier naturel non nul on a

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)h}^{kh} \phi(t)\ dt = \int_{0}^{nh} \phi(t)\ dt$$

Puisque la fonction ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$, cette suite converge et a pour limite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt$. Ainsi, la série numérique de terme général $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt$ converge et l'encadrement du a) montre alors que

$$\boxed{\text{la série numérique de terme général } h\phi(nh) \text{ converge.}}$$

II.A.3) Etablissons tout d'abord une majoration valable pour tout $h \in]0, 1]$.

Pour tous $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $h > 0$, on a déjà

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| &= \left|\int_0^{n_0 h} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh) + \int_{n_0 h}^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{n_0 h} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh)\right| + \left|\int_{n_0 h}^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \\
&= A(h) + B(h).
\end{aligned}$$

• Analysons $B(h)$. Pour tout $h > 0$, et tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{n_0 h}^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} h\phi(nh) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - h\phi(nh)\right).$$

On prend déjà $n_0 = \left[\dfrac{t_0}{h}\right] + 1$ (n_0 est un entier naturel non nul dépendant de h). Par suite, $n_0 h \geqslant t_0$. Pour $n \geqslant n_0 + 1$, on a $(n-1)h \geqslant t_0$ et donc $[(n-1)h, nh] \subset [t_0, +\infty[$. Puisque la fonction ϕ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$, on a alors

$$h\phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt \leqslant h\phi((n-1)h) \text{ et donc } 0 \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - \phi(nh) \leqslant h\phi((n-1)h) - h\phi(nh),$$

puis, pour p entier naturel supérieur à $n_0 + 1$ et $h > 0$,

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{p} \left(\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - h\phi(nh)\right) \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{p} h\phi((n-1)h) - h\phi(nh) = h\phi(n_0 h) - h\phi(ph) \text{ (somme télescopique)}$$

Comme la série de terme général $h\phi(nh)$ converge, $\lim\limits_{p\to+\infty} h\phi(ph) = 0$ et quand p tend vers $+\infty$ on obtient

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - \phi(nh)\right) \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{p} \phi((n-1)h) - \phi(nh) = h\phi(n_0 h),$$

et donc pour tout $h > 0$

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - \phi(nh)\right)\right| \leqslant h\phi(n_0 h)$$

On prend alors plus précisément $h \in]0, 1]$. On a alors $n_0 h \leqslant \left(\dfrac{t_0}{h} + 1\right) h = t_0 + h \leqslant t_0 + 1$. La fonction ϕ, étant continue sur le segment $[0, t_0 + 1]$, est continue sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|\phi|$ sur ce segment. On a montré que

$$\forall h \in]0, 1],\ B(h) = \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(\int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\ dt - \phi(nh)\right)\right| \leqslant hM.$$

• Analysons maintenant $A(h)$. Soit $h \in]0,1]$.

$$A(h) = \left|\int_0^{n_0 h} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{n_0} h\phi(nh)\right| = \left|\sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{nh}^{(n+1)h} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{n_0-1} h\phi(nh) - h\phi(n_0h)\right|$$
$$= \left|\sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(t) - \phi(nh)\ dt - h\phi(n_0h)\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t) - \phi(nh)|\ dt + h|\phi(n_0h)| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t) - \phi(nh)|\ dt + hM.$$

En résumé

$$\forall h \in]0,1],\ \left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t) - \phi(nh)|\ dt + 2hM,\ \text{où } n_0 = \left[\frac{t_0}{h}\right] + 1.$$

Maintenant, pour tout $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$,

$$\{|\phi(t) - \phi(nh)|,\ t \in [nh, (n+1)h]\} \subset \{|\phi(x) - \phi(y)|,\ (x,y) \in [0, n_0h]^2,\ |x-y| \leqslant h\}$$
$$\subset \{|\phi(x) - \phi(y)|,\ (x,y) \in [0, t_0+1]^2,\ |x-y| \leqslant h\}$$

et finalement, en posant $M(h) = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|,\ (x,y) \in [0, t_0+1]^2,\ |x-y| \leqslant h\}$, pour $h \in]0,1]$ on a,

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} hM(h) + 2hM = n_0hM(h) + 2hM \leqslant (t_0+1)M(h) + 2hM.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction ϕ est continue sur le segment $[0, t_0+1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment. Il existe donc $\alpha' > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0, t_0+1]^2$, $|x-y| < \alpha' \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2(t_0+1)}$.

Soit $\alpha = \text{Min}\left\{\alpha', \dfrac{\varepsilon}{2(2M+1)}, 1\right\} > 0$. Pour $h \in]0, \alpha[$, on a $M(h) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(t_0+1)}$ et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant (t_0+1)\frac{\varepsilon}{2(t_0+1)} + \frac{\varepsilon}{2(2M+1)}M < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall h \in]0, +\infty[,\ \left(0 < h < \alpha \Rightarrow \left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| < \varepsilon\right)$ et donc

$$\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\ dt.}$$

II.B -

II.B.1) Si $\alpha \geqslant 1$, la fonction g_α est continue sur $[0, +\infty[$, intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
De plus, g_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$g'_\alpha(t) = (\alpha-1)t^{\alpha-2}e^{-t} - t^{\alpha-1}e^{-t} = (\alpha - 1 - t)t^{\alpha-2}e^{-t}.$$

g_α est donc décroissante sur $[\alpha-1, +\infty[$ et finalement g_α satisfait aux conditions du II.A.

Si $\alpha \in]0,1[$, g_α n'est pas continue en 0, ni même prolongeable par continuité en 0 et g_α ne vérifie donc pas les hypothèses du II.A.

Soit donc $\alpha \geqslant 1$. D'après II.A.3)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\ln x \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = \int_0^{+\infty} g_\alpha(t)\ dt = \Gamma(\alpha).$$

II.B.2) a) La série proposée diverge grossièrement si $|x| > 1$ et converge absolument si $|x| < 1$. Son rayon est donc 1.

b) De la question II.B.1), on déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_\alpha(-n\ln x)}{(-\ln x)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(-\ln x)^{\alpha-1}}\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \frac{1}{(1-x)^\alpha} \times \Gamma(\alpha).$$

$$\boxed{\forall\alpha \geqslant 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.}$$

Partie III - La première fonction eulérienne

III.A -

III.A.1) Soit $(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2$.

- La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$ et positive.
- La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est équivalente en 0 à $t^{\alpha-1}$ et est donc intégrable sur un voisinage de 0 à droite car $\alpha - 1 > -1$.
- La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est équivalente en 0 à $(1-t)^{\beta-1}$ et est donc intégrable sur un voisinage de 1 à gauche car $\beta - 1 > -1$.

Donc, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

III.A.2) (i) Soit $(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2$. Le changement de variables affine $u = 1-t$ fournit

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\ dt = \int_1^0 (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1} \times -du = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\ du = B(\beta,\alpha).$$

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2,\ B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).}$$

(ii) Soit $(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2$. L'application $\varphi\ :\ t \mapsto \dfrac{t}{1-t}$ est de classe C^1 sur $]0,1[$, bijective de $]0,1[$ sur $]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x), \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi(x)[=]0,+\infty[$. On peut donc poser $u = \dfrac{t}{1-t} = -1 + \dfrac{1}{1-t}$ puis $t = 1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u}$ et $dt = \dfrac{1}{(1+u)^2}\ du$ et on obtient

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{\beta-1}\frac{1}{(1+u)^2}\ du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\ du.$$

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2,\ B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\ du.}$$

(iii) Soit $(\varepsilon, A) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon < A$. Une intégration par parties licite fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}\ dt &= \left[-\frac{t^\alpha}{(\alpha+\beta)(1+t)^{\alpha+\beta}}\right]_\varepsilon^A + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_\varepsilon^A \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\ dt\\ &= -\frac{A^\alpha}{(\alpha+\beta)(1+A)^{\alpha+\beta}} + \frac{\varepsilon^\alpha}{(\alpha+\beta)(1+\varepsilon)^{\alpha+\beta}} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_\varepsilon^A \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\ dt.\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$B(\alpha+1,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}\ dt = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\ dt = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2,\ B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).}$$

III.B -

III.B.1) Supposons la formule acquise pour tout $(\alpha,\beta)\in]2,+\infty[^2$.
Soit $(\alpha,\beta)\in]0,+\infty[^2$. D'après III.A.2).i) et III.A.2.iii),

$$\begin{aligned}
B(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\beta,\alpha+1) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{\alpha\beta}B(\beta+1,\alpha+1)\\
&= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}B(\alpha+2,\beta+2)\\
&= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)}\\
&= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)\Gamma(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

III.B.2) a) Puisque $\alpha-1>1$ et $\beta-1>1$, la fonction $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Sa dérivée étant définie et continue sur ce segment, est bornée sur ce segment. Soit $A_{\alpha,\beta}$ un majorant de $|\psi'_{\alpha,\beta}|$ sur $[0,1]$.
L'inégalité des accroissements finis montre alors que $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne sur $[0,1]$ de rapport $A_{\alpha,\beta}$.

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta)\in]2,+\infty[^2,\text{ la fonction }\psi_{\alpha,\beta}\text{ est lipschitzienne sur }[0,1].}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\psi_{\alpha,\beta}(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right)\,dt\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|\psi_{\alpha,\beta}(t)-\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right|\,dt \leqslant A_{\alpha,\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)dt\\
&= A_{\alpha,\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = A_{\alpha,\beta}\times n\times\frac{1}{2n^2} = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta)\in]2,+\infty[^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)|\leqslant\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.}$$

c) On effectue sur $[0,1[$ le produit de Cauchy des deux séries de sommes respectives S_α et S_β. Pour tout $x\in[0,1[$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_\alpha(x)S_\beta(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\alpha-1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}n^{\beta-1}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}\right)x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}\right)n^{\alpha+\beta-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n \text{ en posant de plus } u_0(\alpha,\beta)=0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta)\in]2,+\infty[^2,\ \forall x\in[0,1[,\ S_\alpha(x)S_\beta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n.}$$

Par suite, d'après b), pour $x\in[0,1[$ on a

$$\begin{aligned}
|S_\alpha(x)S_\beta(x)-B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta))n^{\alpha+\beta-1}x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)|n^{\alpha+\beta-1}x^n\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}n^{\alpha+\beta-1}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n^{\alpha+\beta-2}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (\alpha,\beta) \in]2,+\infty[^2,\ \forall x \in [0,1[,\ |S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2} S_{\alpha+\beta-1}(x).}$$

On multiplie les deux membres de cet encadrement par $(1-x)^{\alpha+\beta}$. On obtient

$$|(1-x)^\alpha S_\alpha(x)(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+\beta} S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x)^{\alpha+\beta-1} S_{\alpha+\beta-1}(x)(1-x).$$

D'après la question II.B.2.b), le membre de droite est équivalent $\dfrac{A_{\alpha,\beta}\Gamma(\alpha+\beta-1)}{2}(1-x)$ (car $\alpha+\beta-1 > 1$) et tend donc vers 0 quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Comme le membre de gauche tend vers $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)|$, on a montré que $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$.

Ce résultat a été établi pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ et finalement pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ d'après III.B.1).

$$\boxed{\forall (\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2,\ \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta).}$$

III.C - Formule des compléments

III.C.1) Soit $\alpha \in]0,1[$. D'après ce qui précède, $B(\alpha,1-\alpha) = B(\alpha,1-\alpha)\Gamma(\alpha+1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. Comme la fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, la fonction Γ est en particulier continue sur $]0,1[$ et il en est de même de la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha,1-\alpha)$.

III.C.2) a) Puisque p et q sont des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant q-1$, $0 < \dfrac{2p+1}{2q} \leqslant \dfrac{2(q-1)+1}{2q} = \dfrac{2q-1}{2q} < 1$ et $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right)$ existe. De plus, la fonction $t \mapsto t^{1/2q}$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. On peut donc poser $u = t^{1/2q}$ et d'après III.A.2.(ii) on obtient

$$\begin{aligned} B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{(u^{2q})^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+u^{2q}}\,2qu^{2q-1}\,du \\ &= 2q\int_0^{+\infty} \frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\,du. \end{aligned}$$

b) La fraction proposée est irréductible et sa partie entière est nulle car $2p < 2q$. Les racines $2q$-èmes de -1 sont les nombres de la forme $z_k = e^{i(\pi+2k\pi)/(2q)} = e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$, $-q \leqslant k \leqslant (q-1)$. Comme le polynôme $1+X^{2q}$ est pair, les z_k, $-q \leqslant k \leqslant -1$, qui ont une partie imaginaire strictement négative (car $-\pi < \dfrac{2k+1}{2q}\pi < 0$), sont les opposés des z_k, $0 \leqslant k \leqslant q-1$, qui ont une partie imaginaire strictement positive (car $0 < \dfrac{2k+1}{2q}\pi < \pi$). Comme la fraction proposée est paire, sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est de la forme

$$\sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{\lambda_k}{X-z_k} - \frac{\lambda_k}{X+z_k}\right).$$

De plus, pour $0 \leqslant k \leqslant q-1$,

$$\lambda_k = \frac{(X^{2p})(z_k)}{(1+X^{2q})'(z_k)} = \frac{z_k^{2p}}{2qz_k^{2q-1}} = -\frac{z_k^{2p+1}}{2q} \text{ (car } z_k^{2q} = -1).$$

$$\boxed{\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k}\right).}$$

c)

$$\int \frac{1}{t-c}\,dt = \int \frac{t-\mathrm{Re}(c)}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}\,dt + i\mathrm{Im}(c)\int \frac{1}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln((t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right) + K,\ K\in\mathbb{C}.$$

Soit A un réel strictement positif. D'après ce qui précède

$$\int_0^A \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{1}{2q}\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\ln((t-\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\ln((t-\mathrm{Re}(-z_k))^2+(\mathrm{Im}(-z_k))^2)\right]_0^A$$
$$-\frac{i}{2q}\left[\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) - \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\mathrm{Re}(-z_k)}{\mathrm{Im}(-z_k)}\right)\right]_0^A$$
$$= \frac{1}{4q}\left[\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\ln\left(\frac{(t+\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}{(t-\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}\right)\right]_0^A$$
$$-\frac{i}{2q}\left[\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{t+\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right)\right)\right]_0^A. \quad (*)$$

• Pour chaque $k\in[\![0,q-1]\!]$, la fonction $t\mapsto \ln\left(\frac{(t+\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}{(t-\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}\right)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et s'annule en 0. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{4q}\left[\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}\ln\left(\frac{(t+\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}{(t-\mathrm{Re}(z_k))^2+(\mathrm{Im}(z_k))^2}\right)\right]_0^A = 0$.

• Pour chaque $k\in[\![0,q-1]\!]$, $\mathrm{Arctan}\left(\frac{0-\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{0+\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{A-\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{A+\mathrm{Re}(z_k)}{\mathrm{Im}(z_k)}\right) = 2\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_k)) = \pi\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(z_k)) = \pi$ (car $-\pi < \frac{2k+1}{2q}\pi < 0$ et donc $\mathrm{Im}(z_k) > 0$).

Quand A tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = -\frac{i\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}.}$$

Enfin,

$$\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = \sum_{k=0}^{q-1}\left(e^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}\right)^{2p+1} = \sum_{k=0}^{p-1} e^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}\times\left(e^{i\frac{2p+1}{q}\pi}\right)^k$$
$$= e^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}\frac{1-\left(e^{i\frac{2p+1}{q}\pi}\right)^q}{1-e^{i\frac{2p+1}{q}\pi}} \text{ (car } \frac{2p+1}{q}\pi = \frac{2p+1}{2q}\times 2\pi \notin 2\pi\mathbb{Z} \text{ puisque } 2p+1 \text{ n'est pas pair)}$$
$$= \frac{e^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}}{e^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}}\times\frac{1-(-1)}{-2i\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)} = \frac{i}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)},$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = -\frac{i\pi}{2q}\times\frac{i}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)} = \frac{\pi}{2q\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \frac{\pi}{2q\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}.}$$

III.C.3) Posons $\mathscr{E} = \left\{\dfrac{2p+1}{2q},\ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p < q\right\}$. D'après III.C.2.a) et III.C.2.c), pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < q$, $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1 - \dfrac{2p+1}{2q}\right) = 2q\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\,dt = \dfrac{\pi}{\sin\left(\dfrac{2p+1}{2q}\pi\right)}$, ou encore

$$\forall \alpha \in \mathscr{E},\ B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Vérifions alors que $\mathscr{E}$ est dense dans $]0,1[$.

Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < q$ puis $r = \dfrac{p}{q}$. Si on pose $u_n = \dfrac{2np+1}{2nq}$, $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{E}$ convergeant vers r. Donc $\mathscr{E}$ est dense dans $\mathbb{Q}\cap]0,1[$. Mais alors, en notant $\overline{A}$ l'adhérence dans $]0,1[$ d'une partie A de $]0,1[$, $]0,1[= \overline{\mathbb{Q}\cap]0,1[} = \overline{\overline{\mathscr{E}}} = \overline{\mathscr{E}}$ et donc $\mathscr{E}$ est également dense dans $]0,1[$.

On a vu que $\forall \alpha \in \mathscr{E},\ B(\alpha, 1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ $(**)$. Or $\mathscr{E}$ est dense dans $]0,1[$ et la fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est continue sur $]0,1[$ d'après III.C.1). On sait alors que l'égalité $(**)$ se prolonge à $]0,1[$ tout entier.

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,1[,\ B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.}$$

Partie IV - L'opérateur d'Abel

IV.A -

IV.A.1) Soit $f \in E$. Soit $x \in]0,1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,x[$. De plus, f est continue en x et donc bornée au voisinage de x à gauche. On en déduit que $\dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \underset{t\to x,\ t<x}{=} O\left(\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}\right)$ puis que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0,x[$ car $\alpha < 1$. En particulier, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,x[$

IV.A.2) a) Puisque $1-\alpha > 0$, la formule est vraie pour $x = 0$. Soit $x \in]0,1]$. En posant $t = xu$, on obtient $A_\alpha f(x) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(xu)}{(x-xu)^\alpha}\,x\,du = x^{1-\alpha}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(xu)}{(1-u)^\alpha}\,du$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(tx)}{(1-t)^\alpha}\,dt.}$$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue par morceaux sur $[0,1[$ et pour tout $t \in [0,1[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$. Enfin, pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,1[$,

$$\left|\frac{f(tx)}{(1-t)^\alpha}\right| \leqslant \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha} = \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination)},$$

où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(tx)}{(1-t)^\alpha}\,dt$ est continue sur $[0,1]$. Il en est de même de la fonction $A_\alpha f$ puisque $1-\alpha \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall f \in E,\ A_\alpha f \in E.}$$

c) D'après la question précédente, A_α est une application de E dans E. De plus, pour $(f,g) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ et $x \in [0,1]$,

$$A_\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{(\lambda f + \mu g)(tx)}{(1-t)^\alpha}\,dt = \lambda x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{f(tx)}{(1-t)^\alpha}\,dt + \mu x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{g(tx)}{(1-t)^\alpha}\,dt = \lambda A_\alpha f(x) + \mu A_\alpha g(x).$$

Donc, $A_\alpha \in L(E)$.

Soit $f \in E$ tel que $\|f\| \leqslant 1$. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$|A_\alpha f(x)| = x^{1-\alpha}\left|\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,dt\right| \leqslant x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\,dt \leqslant 1\times\int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\,dt = \frac{\|f\|}{1-\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}.$$

et donc $\|A_\alpha f\| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$. Ainsi, pour tout $f \in E$ tel que $\|f\| \leqslant 1$, $\|A_\alpha f\| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$. Ceci montre déjà que l'endomorphisme A_α est continu sur l'espace normé $(E, \|\ \|)$ et que $|||A_\alpha||| \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$ $(***)$.

Soit f la fonction $x \mapsto 1$. f est un élément de E tel que $\|f\| \leqslant 1$. De plus, pour $x \in [0,1]$, $A_\alpha f(x) = \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Mais alors $\|A_\alpha f\| = f(1) = \dfrac{1}{1-\alpha}$. L'inégalité $(***)$ peut donc être une égalité pour un certain $f \in E$ tel que $\|f\| \leqslant 1$. On a montré que

$$\boxed{A_\alpha \in L_c(E) \text{ et } |||A_\alpha||| = \frac{1}{1-\alpha}.}$$

IV.B -

IV.B.1) a) Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^{n\beta}\,(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$.

• Pour $n = 1$ et $x \in [0,1]$,

$$|A_\alpha f(x)| \leqslant x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\,dt \leqslant x^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}\,dt = \frac{x^{1-\alpha}\|f\|}{1-\alpha} = \frac{x^\beta\|f\|}{\beta} = \frac{x^\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\|f\|.$$

L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^{n\beta}\,(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$.
Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
|A_\alpha^{n+1} f(x)| &= |A_\alpha(A_\alpha^n(x))| = x^\beta\left|\int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha}\,dt\right| \\
&\leqslant x^\beta\int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\,dt \leqslant x^\beta\int_0^1 \frac{x^{n\beta}t^{n\beta}\,(\Gamma(\beta))^n\,\|f\|}{\Gamma(1+n\beta)(1-t)^\alpha}\,dt = \frac{x^{(n+1)\beta}\,(\Gamma(\beta))^n\,\|f\|}{\Gamma(1+n\beta)}\int_0^1 t^{n\beta}(1-t)^{\beta-1}\,dt \\
&= \frac{x^{(n+1)\beta}\,(\Gamma(\beta))^n\,\|f\|}{\Gamma(1+n\beta)}B(n\beta+1,\beta) = \frac{x^{(n+1)\beta}\,(\Gamma(\beta))^n\,\|f\|}{\Gamma(1+n\beta)}\,\frac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)} \\
&= \frac{x^{(n+1)\beta}\,(\Gamma(\beta))^{n+1}}{\Gamma(1+(n+1)\beta)}\|f\|.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |A_\alpha^n f(x)| \leqslant \frac{x^{n\beta}\,(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|.}$$

b) Soit $f \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
A_α^n est continue sur E en tant que composé d'applications continues sur E à valeurs dans E. Ensuite, d'après la question précédente, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant \dfrac{x^{n\beta}\,(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$ et donc $\|A_\alpha^n f\| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}\|f\|$.

Si de plus $\|f\| \leqslant 1$, $\|A_\alpha^n f\| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$. Ainsi, pour tout $f \in E$ tel que $\|f\| \leqslant 1$, on a $\|A_\alpha^n f\| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$ et donc $|||A_\alpha^n||| \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_\alpha^n \in L_c(E) \text{ et } |||A_\alpha^n||| \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.}$$

IV.B.2) Soit $\gamma > 0$. D'après I.3)

$$\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta}} \times \frac{\left((\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta}\right)^{1+n\beta}}{\Gamma(1+n\beta)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\forall \gamma > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0.}$$

IV.B.3) a) Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. D'après IV.B1.b) et IV.B.2) appliqué à $\gamma = \dfrac{1}{1+|\lambda|}$,

$$\|\lambda^n A_\alpha^n f\| = |\lambda|^n \|A_\alpha f\| \leqslant |\lambda|^n |||A_\alpha||| \|f\| \leqslant |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \underset{n\to+\infty}{=} |\lambda|^n o\left(\frac{1}{(1+|\lambda|)^n}\right) = o\left(\left(\frac{|\lambda|}{1+|\lambda|}\right)^n\right)$$

Comme $\dfrac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \in [0,1[$, la série numérique de terme général $\|\lambda^n A_\alpha^n f\|$ converge ou encore la série de fonction de terme général $\lambda^n A_\alpha^n f$ converge normalement et donc uniformément sur $[0,1]$ et en particulier simplement.

b) Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Chaque $A_\alpha^n f$ est dans E d'après IV.A.2.b) et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$ est dans E en tant que limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$.

On pose $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$. L'application λA_α est continue sur $(E, \|\ \|)$ et donc

$$\lambda A_\alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f\right) = \lambda A_\alpha \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_\alpha^k f\right) = \lim_{n\to+\infty} \lambda A_\alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_\alpha^k f\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} A_\alpha^{n+1} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f$$

puis

$$(\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = f.$$

c) De même, pour $f \in E$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n ((\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha(f)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda^n A_\alpha^n f - \lambda^{n+1} A_\alpha^{n+1} f) = f \text{ (somme télescopique avec } \lim_{n\to+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = 0).$$

($\lim_{n\to+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = 0$ car la série de terme général $\lambda^n A_\alpha^n f$ converge dans $(E, \|\ \|)$).

Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n \circ (\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha) = (\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \mathrm{id}_E$ et on sait alors que

$$\boxed{\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha \in GL(E) \text{ et } (\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n.}$$

.

IV.C -

IV.C.1) a) Pour $t \in [0,1]$ et $a \in [0, +\infty[$, posons plus généralement $e_a(t) = t^a$. Pour $x \in [0,1]$,

$$A_\alpha e_a(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{(xt)^a}{(1-t)^\alpha}\,dt = x^{a+1-\alpha} \int_0^1 t^a (1-t)^{-\alpha}\,dt = x^{a+1-\alpha} B(a+1, 1-\alpha).$$

et donc $A_\alpha e_a = B(a+1, 1-\alpha) e_{a+1-\alpha}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ A_\alpha e_n(x) = x^{n+1-\alpha} B(n+1, 1-\alpha).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
(A_{1-\alpha}(A_\alpha)\, e_n &= A_{1-\alpha}\left(B(n+1, 1-\alpha)e_{n+1-\alpha}\right) = B(n+1, 1-\alpha)B(n+2-\alpha, \alpha)e_{n+1-\alpha+\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+2-\alpha)} \times \frac{\Gamma(n+2-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} \text{ (d'après II.B.2.c))} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{n+1} e_{n+1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1} \text{ (d'après III.C.3)).}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in]0, 1[,\ (A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)\, e_n = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{e_{n+1}}{n+1}.}$$

IV.C.2) P est linéaire et donc un endomorphisme de E car si $f \in E$, toute primitive de f est dans E. D'après la question précédente, les endomorphismes $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ et P coïncident sur une base de $\mathbb{C}[X]$ et on sait que ces deux endomorphismes sont égaux.

IV.C.3) Formule d'inversion d'Abel.

a) P est continu en tant que composée de applications continues sur $(E, \|\ \|)$ à valeurs dans E.
Soit $f \in E$ telle que $\|f\| \leqslant 1$. Pour $x \in [0, 1]$,

$$|Pf(x)| = \left| \int_0^x f(t)\ dt \right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\ dt \leqslant \|f\| x \leqslant 1 \times 1 = 1,$$

et donc $\|Pf\| \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $f \in E$ telle que $\|f\| \leqslant 1$, on a $\|Pf\| \leqslant 1$ et donc $|||P||| \leqslant 1$.
De plus, pour $f = 1$ et $x \in [0, 1]$, $Pf(x) = x$ puis $\|Pf\| = 1$. Ainsi, 1 est un élément de E tel que $\|f\| \leqslant 1$ et $\|Pf\| = 1$
En résumé, $\forall f \in E$, $\|f\| \leqslant 1 \Rightarrow \|Pf\| \leqslant 1$ et $\exists f_0 \in E/\ \|f_0\| \leqslant 1$ et $\|Pf_0\| = 1$. Donc

$$\boxed{P \in L_c(E) \text{ et } |||P||| = 1.}$$

b) D'après le théorème de Weierstrass, pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$ ou encore l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes est dense dans l'espace $(E, \|\ \|)$. Puisque les endomorphismes $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ et $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$ sont continus sur $(E, \|\ \|)$ et coïncident sur $\mathbb{C}[X]$ qui est dense dans $(E, \|\ \|)$, on sait que les endomorphismes $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ et $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$ sont égaux.

$$\boxed{\forall \alpha \in]0, 1[,\ A_{1-\alpha} \circ A_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P.}$$

c) L'image par P d'un élément de E est en fait un élément de $C^1([0, 1], \mathbb{C})$. Il en est de même de $B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$. On note encore B_α l'application obtenue en restreignant son ensemble d'arrivée à $C^1([0, 1], \mathbb{C})$.
Avec ces notations, $D \circ B_\alpha$ est bien défini et $D \circ B_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} D \circ P = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} id_E$.

d) On sait que si u et v sont deux applications telles que $u \circ v$ soit une application injective, u est injective.
Ici, $\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} D \circ A_{1-\alpha}\right) \circ A_\alpha = id_E$ et en particulier $\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} D \circ A_{1-\alpha}\right) \circ A_\alpha$ est injective. On en déduit que A_α est injective.

$$\boxed{\forall \alpha \in]0, 1[,\ A_\alpha \text{ est injective.}}$$

