

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Filière MP

Dans tout ce problème E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Les vecteurs de E sont représentés par des lettres surmontées de flèches et le produit scalaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de E est noté $(\vec{x} | \vec{y})$. L'orthogonal d'un sous-espace F de E est noté F° . On note a^* l'adjoint de $a \in \mathcal{L}(E)$ pour la structure euclidienne définie par le produit scalaire $(|)$ et ab le composé de deux endomorphismes a et b de E .

Le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$. On appelle endomorphisme antisymétrique un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a^* = -a$ et on note $\mathcal{A}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ constitué par les endomorphismes antisymétriques. L'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E est noté $\mathcal{S}^+(E)$.

On désigne par $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E et $O^+(E)$ l'ensemble de ceux dont le déterminant est positif.

L'objectif de ce problème est de prouver que certains sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ contiennent des automorphismes orthogonaux. Les deux parties du problème sont indépendantes nonobstant la question I.B.2.

Partie I - Cas d'un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$

I.A -

I.A.1) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et $(e) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E .

Prouver que

$$\text{Tr } a = \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i | a(\vec{e}_i))$$

I.A.2) Soient a et b deux endomorphismes de E .

On pose $\langle\langle a, b \rangle\rangle = \text{Tr}(a^*b)$,

montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{L}(E)$. L'orthogonal, pour ce produit scalaire, d'un sous-espace $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(E)$ sera noté \mathcal{E}^\perp .

I.A.3) Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{L}(E)$ pour $\langle\langle , \rangle\rangle$.

I.B -

I.B.1) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ de rang $r \geq 1$.

a) Montrer que $\text{Ker } a^*a = \text{Ker } a$ et que $\text{rg } a^*a = \text{rg } a$.

b) Montrer que a^*a possède au moins une valeur propre non nulle.

c) Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de a^*a . En notant $E(\lambda)$ le sous-espace propre de a^*a associé à la valeur propre λ , montrer que :

$$\text{Im } a^* = \text{Im } a^*a = \bigoplus_{i=1}^s E(\lambda_i)$$

d) Prouver l'existence d'une base orthonormée $(e) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E et de scalaires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ avec $\mu_i \neq 0$ pour $i \leq r$ tels que $a^*a(\vec{e}_i) = \mu_i^2 \vec{e}_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour toute base orthonormée (e) vérifiant ces propriétés, que valent les μ_i si $i > r$?

e) La base (e) étant choisie comme dans la question précédente, prouver l'existence d'une base orthonormée $(f) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ telle que $a(\vec{e}_i) = \mu_i \vec{f}_i$ pour tout i .

I.B.2) Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, $a \neq 0$, déduire de la question précédente l'existence de $u \in O(E)$ tel que $ua \in \mathcal{S}^+(E)$, et $\text{Tr}(ua) > 0$.

I.C - Soit \mathcal{H} un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ et a un élément non nul de \mathcal{H}^\perp .

I.C.1) La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de E étant toujours choisie comme dans la question I.B.1.d, prouver l'existence de $h \in O(E)$ tel que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $ha(\vec{e}_i) \in \text{Vect}(\vec{e}_i)^\circ$.

I.C.2) Montrer que \mathcal{H} contient au moins un automorphisme orthogonal.

Partie II - Cas où $\dim E = 3$

Dans toute cette partie l'espace euclidien E est de dimension 3 et orienté. On se propose de prouver que tout sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 7 contient au moins une rotation.

II.A - Si $\vec{k} \in E$ est un vecteur unitaire et si $\theta \in \mathbf{R}$, on note $p_{\vec{k}}$ le projecteur orthogonal d'image $\text{Vect}(\vec{k})$, $\omega_{\vec{k}}$ l'endomorphisme $\vec{x} \mapsto \vec{k} \wedge \vec{x}$ et $r_{\theta, \vec{k}}$ la rotation d'angle θ autour de \vec{k} .

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, \vec{k} un vecteur unitaire et θ un réel.

II.A.1) Exprimer simplement le produit scalaire $\langle\langle a, p_{\vec{k}} \rangle\rangle$ à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs de E .

II.A.2) Exprimer simplement $r_{\theta, \vec{k}}$ à l'aide de $p_{\vec{k}}$ et de $\omega_{\vec{k}}$. En déduire la relation :

$$\langle\langle a, r_{\theta, \vec{k}} \rangle\rangle = \cos \theta \operatorname{Tr}(a) + (1 - \cos \theta) \left(\vec{k} | a(\vec{k}) \right) + \sin \theta \langle\langle a, \omega_{\vec{k}} \rangle\rangle \quad (1)$$

II.A.3) Que devient cette relation (1) lorsque $a \in \mathcal{S}(E)$, lorsque $a \in \mathcal{A}(E)$?

II.B - Dans cette section $s \in \mathcal{S}^+(E)$ est un endomorphisme symétrique positif de rang ≤ 2 et de trace égale à 1 et ν est un endomorphisme de E non nul mais de trace nulle. On pose $\mathcal{V} = \operatorname{Vect}(s, \nu)^\perp$ et on veut montrer que $\mathcal{V} \cap \mathcal{O}^+(E) \neq \emptyset$.

II.B.1) Quelle est la dimension de \mathcal{V} ?

II.B.2) Soit $(e) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de E . Pour $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$, on note \vec{x}_ϵ le vecteur $\frac{\epsilon_1 \vec{e}_1 + \epsilon_2 \vec{e}_2 + \epsilon_3 \vec{e}_3}{\sqrt{3}}$.

Prouver l'identité : $\sum_{\epsilon \in \{-1, 1\}^3} (\vec{x}_\epsilon | s(\vec{x}_\epsilon)) = \frac{8}{3}$.

II.B.3) Dans cette question seulement, on rajoute l'hypothèse ν symétrique.

a) Prouver l'existence d'une base (e) telle que $(\vec{x}_\epsilon | \nu(\vec{x}_\epsilon)) = 0$ pour tout $\epsilon \in \{-1, 1\}^3$.

b) Démontrer l'existence d'un vecteur \vec{k} unitaire vérifiant :

$$0 \leq \left(\vec{k} | s(\vec{k}) \right) \leq \frac{1}{3} \text{ et } \left(\vec{k} | \nu(\vec{k}) \right) = 0$$

c) Établir l'existence de $\theta \in [\pi/2, \pi[$ tel que $r_{\theta, \vec{k}} \in \mathcal{V}$.

II.B.4) On décompose maintenant ν sous la forme $\nu_1 + a$ où ν_1 est symétrique et a antisymétrique. On choisit \vec{k}_1 unitaire tel que :

$$0 \leq \left(\vec{k}_1 | s(\vec{k}_1) \right) \leq \frac{1}{3} \text{ et } \left(\vec{k}_1 | \nu_1(\vec{k}_1) \right) = 0$$

a) Dans la suite on posera, pour tout réel x :

$$\operatorname{sgn}(x) = 1 \text{ si } x \geq 0, -1 \text{ sinon.}$$

On note $(e) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de vecteurs propres de s et l'on pose :

$$\vec{k}_i = a_i \vec{e}_1 + b_i \vec{e}_2 + c_i \vec{e}_3 \text{ pour } i = 1, 2.$$

Démontrer l'existence d'un vecteur unitaire \vec{k}_2 tel que r_{π, \vec{k}_2} soit orthogonale à s pour $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ et que les composantes de \vec{k}_2 dans une base de diagonalisation de s soient de mêmes signes que celles de \vec{k}_1 .

b) Justifier l'existence d'une fonction $t \mapsto \vec{k}(t)$ de $[0, 1]$ dans E et d'une fonction $t \mapsto \theta(t)$ de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} vérifiant les propriétés suivantes :

$\vec{k}(t) = a(t)\vec{e}_1 + b(t)\vec{e}_2 + c(t)\vec{e}_3$ avec :

$$a(t) = \operatorname{sgn}(a_1) \sqrt{2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, a(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1$$

$$b(t) = \operatorname{sgn}(b_1) \sqrt{2tb_2^2 + (1-2t)b_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, b(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1$$

$$c(t) = \operatorname{sgn}(c_1) \sqrt{2tc_2^2 + (1-2t)c_1^2} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, c(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1$$

$$\theta(t) = \operatorname{Arccos} \frac{\left(\vec{k}(t) | s(\vec{k}(t)) \right)}{\left(\vec{k}(t) | s(\vec{k}(t)) \right) - 1} \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2, 2\pi - \theta(1-t) \text{ si } 1/2 < t \leq 1$$

c) Vérifier que $\vec{k}(t)$ est unitaire et que $\rho(t) = r_{\theta(t), \vec{k}(t)}$, est orthogonale à s pour $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

d) Montrer que la fonction $t \mapsto \langle\langle \rho(t), \nu \rangle\rangle$ de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} est continue. Étudier les signes de $\langle\langle \rho(0), \nu \rangle\rangle$ et de $\langle\langle \rho(1), \nu \rangle\rangle$ et prouver qu'existe t tel que $\rho(t) \in \mathcal{V}$.

II.C - Cas général

II.C.1) En utilisant le résultat de la question I.B.2, prouver que tout sous espace vectoriel de dimension 7 de $\mathcal{L}(E)$ contient au moins un automorphisme orthogonal.

II.C.2) Un sous-espace vectoriel de dimension 6 de $\mathcal{L}(E)$ contient-il toujours un automorphisme de E ?

••• FIN •••
