**SESSION 2007**

# Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES II. FILIERE MP

---

## *Partie I - Cas d'un hyperplan de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.*

**I. A -**

**I. A. 1)** Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Puisque la base $(e)$ est orthonormée, la $i$-ème coordonnée du vecteur $a(\overrightarrow{e_i})$ dans la base $(e)$ est $(\overrightarrow{e_i}|a(\overrightarrow{e_i}))$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ a = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{e_i}|a(\overrightarrow{e_i})\right).}$$

**I. A. 2)** Soit $(a, b) \in (\mathcal{L}(E))^2$. Notons $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ (resp. $(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$) la matrice de $a$ (resp. $b$) dans la base $(e)$. Puisque la base $(e)$ est orthonormée, pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\left(\overrightarrow{e_j}|a^*b(\overrightarrow{e_j})\right) = \left(a(\overrightarrow{e_j}), b(\overrightarrow{e_j})\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j},$$

et donc

$$\langle\langle a, b\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On reconnaît alors le produit scalaire canonique sur $\mathcal{L}(E)$ et donc

$$\boxed{\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{L}(E).}$$

On notera dorénavant $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-espace $F$ de $\mathcal{L}(E)$ pour ce produit scalaire.

**I. A. 3)** Soit $(a, b) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{A}(E)$.

$$\langle\langle b, a\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(b^*a) = -\mathrm{Tr}(ba) = -\mathrm{Tr}(ab) = -\mathrm{Tr}(a^*b) = -\langle\langle a, b\rangle\rangle,$$

et donc $\langle\langle a, b\rangle\rangle = 0$. Ainsi, $(\mathcal{S}(E))^{\perp} \subset \mathcal{A}(E)$ et puisque d'autre part on sait que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont supplémentaires,

$$\boxed{\mathcal{L}(E) = \mathcal{S}(E) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}(E).}$$

**I. B -**

**I. B. 1) a)** On a bien sur $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a^*a)$.

Inversement, soit $\overrightarrow{x} \in E$.

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(a^*a) \Rightarrow a^*a(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow (\overrightarrow{x}|a^*a(\overrightarrow{x})) = 0 \Rightarrow (a(\overrightarrow{x})|a(\overrightarrow{x})) = 0 \Rightarrow a(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(a),$$

et finalement, $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(a^*a)$. Avec le théorème du rang, on en déduit encore que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^*a)$.

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Ker}(a^*a) = \mathrm{Ker}(a) \text{ et } \mathrm{rg}(a^*a) = \mathrm{rg}(a).}$$

**b)** $a^*a$ est un endomorphisme symétrique car $(a^*a)^* = a^*(a^*)^* = a^*a$. D'après le théorème spectral, le polynôme caractéristique de $a^*a$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $a^*a$ est diagonalisable. En particulier, l'ordre de multiplicité de la valeur propre $0$ est $\dim(\mathrm{Ker}(a^*a))$.

 

Mais

$$\dim(\mathrm{Ker}(a^*a)) = \dim(\mathrm{Ker}(a)) = n - r \leq n - 1 < n,$$

et donc

$$\boxed{a^*a \text{ possède au moins une valeur propre non nulle.}}$$

**c)** • On a bien sûr $\mathrm{Im}(a^*a) \subset \mathrm{Im}(a)$ puis, comme ces sous-espaces ont même dimension finie, $\mathrm{Im}(a^*) = \mathrm{Im}(a^*a)$.

• Puisque $a^*a$ est diagonalisable d'après le théorème spectral, on a $E = \left(\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i)\right) \oplus \mathrm{Ker}(a^*a)$. En particulier, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} E(\lambda_i)$ est directe et $\dim\left(\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i)\right) = \dim(\mathrm{Im}(a^*a))$.

• Pour $i \in [\![1,s]\!]$ puis $\overrightarrow{x} \in E(\lambda_i)$, $\overrightarrow{x} = \dfrac{1}{\lambda_i}a^*a(\overrightarrow{x}) = a^*a\left(\dfrac{1}{\lambda_i}\overrightarrow{x}\right) \in \mathrm{Im}(a^*a)$. Ainsi, $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $E(\lambda_i) \subset \mathrm{Im}(a^*a)$ et donc $\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i) \subset \mathrm{Im}(a^*a)$.

En résumé, $\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i) \subset \mathrm{Im}(a^*a)$ et $\dim\left(\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}(a^*a)\right) < +\infty$ et donc $\underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i) = \mathrm{Im}(a^*a)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(a^*) = \mathrm{Im}(a^*a) = \underset{1\leq i\leq s}{\oplus} E(\lambda_i).}$$

**d)** Soit $\lambda$ une valeur propre de $a^*a$ et $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre associé.

$$\lambda\|\overrightarrow{x}\|^2 = (\lambda\overrightarrow{x}|\overrightarrow{x}) = (a^*a(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{x}) = (a(\overrightarrow{x})|a(\overrightarrow{x})) = \|a(\overrightarrow{x})\|^2,$$

et puisque $\|x\|^2 > 0$,

$$\lambda = \frac{\|a(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2} \geq 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de $a^*a$ sont des réels positifs. On rappelle alors que le rang de $a^*a$ est $r$ et que $a^*a$ est diagonalisable. On peut donc classer les valeurs propres de $a^*a$ de sorte que les $r$ premières soient strictement positives et les $n-r$ dernières soient nulles et on note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les racines carrées de ces valeurs propres. On a donc $\mathrm{Sp}(a^*a) = (\mu_1^2, \ldots \mu_r^2, \mu_{r+1}^2, \ldots \mu_n^2)$ avec $\mu_i \neq 0$ si $i \in [\![1,r]\!]$ et $\mu_i = 0$ si $i > r$.
D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $E$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a^*a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i^2\overrightarrow{e_i}$.

**e)** Pour $i \in [\![1,r]\!]$, posons $\overrightarrow{f_i} = \dfrac{1}{\mu_i}a(\overrightarrow{e_i})$ et vérifions que $(\overrightarrow{f_i})_{1\leq i\leq r}$ est une famille orthonormée.

Soit $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$.

$$(\overrightarrow{f_i}|\overrightarrow{f_j}) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(a(\overrightarrow{e_i})|a(\overrightarrow{e_j})) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(\overrightarrow{e_i}|a^*a(\overrightarrow{e_j})) = \frac{1}{\mu_i\mu_j}(\overrightarrow{e_i}|\mu_j^2\overrightarrow{e_j}) = \frac{\mu_j}{\mu_i}\delta_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

La famille $(\overrightarrow{f_i})_{1\leq i\leq r}$ est bien une famille orthonormée. On la complète en une base orthonormée $(\overrightarrow{f_i})_{1\leq i\leq n}$ de $E$. Puisque les $\mu_i$ sont nuls pour $i > r$, par construction on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i\overrightarrow{f_i}$.

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormée } (\overrightarrow{f_i})_{1\leq i\leq n} \text{ de } E \text{ telle que } \forall i \in [\![1,n]\!],\ a(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i\overrightarrow{f_i}.}$$

**I. B. 2)** Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $u(\overrightarrow{f_i}) = \overrightarrow{e_i}$. L'image par $u$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$ et donc $u \in O(E)$.
De plus, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $ua(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i\overrightarrow{e_i}$. Ainsi, l'endomorphisme $ua$ diagonalise en base orthonormée et ses valeurs propres sont des réels positifs. On en déduit que $ua \in \mathcal{S}^+(E)$.
Enfin, $\mathrm{Tr}(ua) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i > 0$.

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\},\ \exists u \in O(E) /\ ua \in \mathcal{S}^+(E) \text{ et } \mathrm{Tr}(ua) > 0.}$$

 

**I. C -** On supposera $n \geq 2$.

**I. C. 1)** Soit $v$ l'endomorphisme de $E$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v(\overrightarrow{e_i}) = e_{i+1}$ avec la convention $\overrightarrow{e_{n+1}} = \overrightarrow{e_1}$ puis $h = vu$. Puisque $v$ transforme une base orthonormée en une base orthonormée, $v \in O(E)$ et puisque $(O(E), \circ)$ est un groupe, $h \in O(E)$. Enfin, pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$ha(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i v(\overrightarrow{e_i}) = \mu_i \overrightarrow{e_{i+1}} \in \left(\text{Vect}(\overrightarrow{e_i})\right)^{\text{o}}.$$

**I. C. 2)** Mais alors,

$$\langle\langle h^*, a\rangle\rangle = \text{Tr}(ha) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{e_i}|ha(\overrightarrow{e_i})) = 0$$

et donc $h^* \in a^\perp = \mathcal{H}$. Enfin, $h^* = h^{-1} \in O(E)$ car $(O(E), \circ)$ est un groupe.

$$\boxed{\text{Tout hyperplan } \mathcal{H} \text{ de } \mathcal{L}(E) \text{ contient un automorphisme orthogonal.}}$$

## *Partie II - Cas où dim* E = 3.

**II. A -**

**II. A. 1)** On complète la famille orthonormée $(\overrightarrow{k})$ en une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $E$. On a

$$\langle\langle a, p_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = (\overrightarrow{i}|a^*p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{i})) + (\overrightarrow{j}|a^*p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{j})) + (\overrightarrow{k}|a^*p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{k})) = (\overrightarrow{k}|a^*(\overrightarrow{k})) = (a(\overrightarrow{k})|\overrightarrow{k}).$$

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{L}(E),\ \langle\langle a|p_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = (a(\overrightarrow{k}), \overrightarrow{k}).}$$

**II. A. 2)** Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Posons $\overrightarrow{x_1} = p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})$ et $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x} - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})$. On a

$$\begin{aligned} r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) &= r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x_1}) + r_{\theta,\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{x_1} + \left(\cos\theta\overrightarrow{x_2} + \sin\theta(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x_2})\right) \\ &= p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x}) + \cos\theta(\overrightarrow{x} - p_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})) + \sin\theta\left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{r_{\theta,\overrightarrow{k}} = \cos\theta \text{Id}_E + (1-\cos\theta)p_{\overrightarrow{k}} + \sin\theta\omega_{\overrightarrow{k}}.}$$

Maintenant, $\langle\langle a, \text{Id}_E\rangle\rangle = \text{Tr}(\text{Id}_E^* a) = \text{Tr}(a)$ et $\langle\langle a, p_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = (\overrightarrow{k}|a(\overrightarrow{k}))$ d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{\forall a \in \mathcal{L}(E),\ \langle\langle a, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \cos\theta\ \text{Tr}(a) + (1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{k}, a(\overrightarrow{k})\right) + \sin\theta\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle.}$$

**II. A. 3)** Montrons que $\omega_{\overrightarrow{k}} \in \mathcal{A}(E)$. Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$.

$$(\omega_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{y}) = \left((\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{x})|\overrightarrow{y}\right) = [\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}] = -[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}] = -\left((\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{y})|\overrightarrow{x}\right) = -(\overrightarrow{x}|\omega_{\overrightarrow{k}}(\overrightarrow{y})).$$

Ainsi, $\omega_{\overrightarrow{k}} \in \mathcal{A}(E)$. On sait d'autre part que $p_{\overrightarrow{k}} \in \mathcal{S}(E)$. Comme $\mathcal{A}(E) = (\mathcal{S}(E))^\perp$,

$$\boxed{\text{si } a \in \mathcal{S}(E),\ \langle\langle a, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \cos\theta\ \text{Tr}(a) + (1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{k}, a(\overrightarrow{k})\right) \text{ et si } a \in \mathcal{A}(E),\ \langle\langle a, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \sin\theta\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k}}\rangle\rangle.}$$

**II. B -**

**II. B. 1)** Montrons que la famille $(s, v)$ est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha s + \beta v = 0 \Rightarrow \text{Tr}(\alpha s + \beta v) = 0 \Rightarrow \alpha\text{Tr}(s) + \beta\text{Tr}(v) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Il reste alors $\beta v = 0$ et donc $\beta = 0$ car $v \neq 0$. Ainsi, la famille $(s, v)$ est libre.

On en déduit que $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{L}(E)) - \dim(\text{Vect}(s, v)) = 9 - 2 = 7$.

$$\boxed{\dim(\mathcal{V}) = 7.}$$

 

**II. B. 2)**

$$
\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|s(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) &= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\sum_{1\leq i,j\leq 3}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\overrightarrow{e_i}|s(\overrightarrow{e_j})\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i^2\left(\overrightarrow{e_i}|s(\overrightarrow{e_i})\right)\right)+\frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\left(\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\overrightarrow{e_i}|s(\overrightarrow{e_j})\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\mathrm{Tr}(s)+\frac{1}{3}\sum_{i\neq j}\left(\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\varepsilon_i\varepsilon_j\right)\left(\overrightarrow{e_i}|s(\overrightarrow{e_j})\right)
\end{aligned}
$$

Maintenant, $\mathrm{card}(\{-1,1\}^3 = 8$ et donc $\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\mathrm{Tr}(s) = 8\mathrm{Tr}(s) = 8$. D'autre part pour $i\neq j$, par symétrie des rôles,

$$
\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\varepsilon_i\varepsilon_j = \sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1\times 1+1\times 1+1\times(-1)+1\times(-1)-1\times 1-1\times 1-1\times(-1)-1\times(-1) = 0.
$$

Fianlement,

$$
\boxed{\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|s(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) = \frac{8}{3}.}
$$

**II. B. 3) a)** Soit $(e) = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée formée de vecteurs propres de $v$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ la famille des valeurs propres associées. $(e)$ existe car $v$ est symétrique. Pour $\varepsilon\in\{-1,1\}^3$, on a

$$
\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|v(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) &= \frac{1}{3}\sum_{1\leq i,j\leq 3}\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\overrightarrow{e_i}|v(\overrightarrow{e_j})\right) = \frac{1}{3}\sum_{1\leq i,j\leq 3}\lambda_j\varepsilon_i\varepsilon_j\left(\overrightarrow{e_i}|\overrightarrow{e_j}\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\\
&= \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(v) = 0.
\end{aligned}
$$

**b)** Si pour chaque $\varepsilon\in\{-1,1\}^3$, on a $\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|s(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) > \dfrac{1}{3}$, alors $\displaystyle\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^3}\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|s(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) > \frac{8}{3}$ ce qui contredit le résultat de II.B.2).

Donc, l'un au moins des vecteurs $\overrightarrow{x_\varepsilon}$ est tel que $\left(\overrightarrow{x_\varepsilon}|s(\overrightarrow{x_\varepsilon})\right) \leq \dfrac{1}{3}$. On le note $\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{k}$ est un vecteur unitaire, vérifie $\left(\overrightarrow{k},v(\overrightarrow{k})\right) = 0$ et $\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right) \leq \dfrac{1}{3}$. Enfin, puisque $s$ est positif, on a aussi $\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right) \geq 0$.

**c)** Soit $\theta\in\mathbb{R}$. D'après la question II.A.3)

$$
\langle\langle v, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \cos\theta\ \mathrm{Tr}(v)+(1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{k},v(\overrightarrow{k})\right) = 0.
$$

D'autre part,

$$
\langle\langle s, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \cos\theta\ \mathrm{Tr}(s)+(1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right) = \left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right)+\cos\theta\left(1-\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right)\right),
$$

et donc

$$
\langle\langle s, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right)}{1-\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right)}\ (*).
$$

Maintenant, la fonction $f\ :\ x\mapsto -\dfrac{x}{1-x} = 1-\dfrac{1}{1-x}$ réalise une bijection de $[0,\dfrac{1}{3}]$ sur $[f(\dfrac{1}{3}),f(0)] = [-\dfrac{1}{2},0]\subset]-1,0]$. Comme $\left(\overrightarrow{k},s(\overrightarrow{k})\right)\in[0,\dfrac{1}{3}]$, l'équation $(*)$ admet au moins une solution $\theta\in[\dfrac{\pi}{2},\pi[$.

 

Pour ce réel $\theta$, on a $\langle\langle s, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = \langle\langle v, r_{\theta,\overrightarrow{k}}\rangle\rangle = 0$ et donc $r_{\theta,\overrightarrow{k}} \in \mathcal{V}$.

$$\boxed{\exists\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[/\ r_{\theta,\overrightarrow{k}} \in \mathcal{V}.}$$

**II. B. 4) a)** Soit $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire. Puisque $s$ est symétrique et que $\mathrm{Tr}(s) = 1$.

$$\langle\langle s, r_{\pi,\overrightarrow{k_2}}\rangle\rangle = -1 + 2\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right).$$

On rappelle maintenant que $s$ est symétrique positif, de rang au plus $2$ et de trace $1$. Soit alors $(e) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormée de $E$ formée de vecteurs propres de $s$, $\overrightarrow{e_3}$ étant dans le noyau de $s$. Quite à remplacer $\overrightarrow{k_1}$ par $-\overrightarrow{k_1}$, on supposera que $c_1 \geq 0$.

Posons alors $\overrightarrow{k_2} = \dfrac{\mathrm{sgn}(a_1)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{\mathrm{sgn}(a_2)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}$. $\overrightarrow{k_2}$ est unitaire et ses coordonnées sont de mêmes signes que celles de $\overrightarrow{k_1}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right) &= \left(\frac{\mathrm{sgn}(a_1)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\mathrm{sgn}(a_2)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}, s\left(\frac{\mathrm{sgn}(a_1)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_1} + \frac{\mathrm{sgn}(a_2)}{\sqrt{2}}\overrightarrow{e_2}\right))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{e_1}|s(\overrightarrow{e_1})) + (\overrightarrow{e_2}|s(\overrightarrow{e_2}))\right) \text{ (car } (e) \text{ est orthonormée et car } \forall i \in [\![1,3]\!],\ s(e_i) \text{ est colinéaire à } e_i) \\
&= \frac{1}{2}\left((\overrightarrow{e_1}|s(\overrightarrow{e_1})) + (\overrightarrow{e_2}|s(\overrightarrow{e_2})) + (\overrightarrow{e_3}|s(\overrightarrow{e_3}))\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(s) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mais alors

$$\langle\langle s, r_{\pi,\overrightarrow{k_2}}\rangle\rangle = -1 + 2\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right) = 0,$$

et le vecteur $\overrightarrow{k_2}$ convient.

**b)** La fonction $t \mapsto 2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2$ est affine sur $[0, \frac{1}{2}]$ et ses valeurs aux bornes de $[0, \frac{1}{2}]$, à savoir $a_1^2$ et $a_2^2$, sont positives. On en déduit que la fonction $t \mapsto 2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2$ est positive sur $[0, \frac{1}{2}]$. La fonction $a$ est donc définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis sur $[0, 1]$ par symétrie. De même, les fonctions $b$ et $c$ sont définies sur $[0, 1]$ et finalement

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \overrightarrow{k}(t) \text{ est définie sur } [0, 1].}$$

Pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) &= (a(t))^2\left(\overrightarrow{e_1}, s(\overrightarrow{e_1})\right) + (b(t))^2\left(\overrightarrow{e_2}, s(\overrightarrow{e_2})\right) + (c(t))^2\left(\overrightarrow{e_3}, s(\overrightarrow{e_3})\right) \\
&= (2ta_2^2 + (1-2t)a_1^2)\left(\overrightarrow{e_1}, s(\overrightarrow{e_1})\right) + (2tb_2^2 + (1-2t)b_1^2)\left(\overrightarrow{e_2}, s(\overrightarrow{e_2})\right) + (2tc_2^2 + (1-2t)c_1^2)\left(\overrightarrow{e_3}, s(\overrightarrow{e_3})\right) \\
&= 2t\left(a_2^2\left(\overrightarrow{e_1}, s(\overrightarrow{e_1})\right) + b_2^2\left(\overrightarrow{e_2}, s(\overrightarrow{e_2})\right) + c_2^2\left(\overrightarrow{e_3}, s(\overrightarrow{e_3})\right)\right) \\
&\quad + (1-2t)\left(a_1^2\left(\overrightarrow{e_1}, s(\overrightarrow{e_1})\right) + b_1^2\left(\overrightarrow{e_2}, s(\overrightarrow{e_2})\right) + c_1^2\left(\overrightarrow{e_3}, s(\overrightarrow{e_3})\right)\right) \\
&= 2t\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right) + (1-2t)\left(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1})\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1})\right) \in [0, \frac{1}{3}]$ et $\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right) = \frac{1}{2}$. Donc, puisque $2t \geq 0$ et $1 - 2t \geq 0$,

$$\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) = \mathrm{bar}\left\{\left(\overrightarrow{k_2}|s(\overrightarrow{k_2})\right) \quad (2t), \left(\overrightarrow{k_1}|s(\overrightarrow{k_1})\right) \quad (1-2t)\right\} \in [0, \frac{1}{2}].$$

Mais alors, à l'aide de la fonction $f$ de la question II.B.3)c),

 

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}],\ \frac{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)}{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) - 1} \text{ existe et est élément de } [-1, 0].$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ puis sur $[0, 1]$ par symétrie.

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \theta(t) \text{ est définie sur } [0, 1].}$$

**c)** Soit $t \in [0, \frac{1}{2}]$.

$$\|\overrightarrow{k}(t)\|^2 = 2t(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + (1 - 2t)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 2t\|\overrightarrow{k_2}\|^2 + (1 - 2t)\|\overrightarrow{k_1}\|^2 = 2t + 1 - 2t = 1.$$

Ceci reste vrai pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ par symétrie et donc

$$\boxed{\forall t \in [0, 1],\ \|\overrightarrow{k}(t)\| = 1.}$$

Soit $t \in [0, \frac{1}{2}]$. D'après la relation (1),

$$\begin{aligned}\langle\langle s, \rho(t)\rangle\rangle &= \cos(\theta(t)) + (1 - \cos(\theta(t)))\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) = \cos(\theta(t))\left(1 - \left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)\right) + \left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)\\ &= \frac{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)}{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) - 1}\left(1 - \left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)\right) + \left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui reste vrai si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ par symétrie.

$$\boxed{\forall t \in [0, 1],\ \langle\langle s, \rho(t)\rangle\rangle = 0.}$$

**d)** • On note $\theta_1 = \theta(0)$ (resp. $\theta_2 = \theta\left(\frac{1}{2}\right)$) le réel associé à $\overrightarrow{k_1}$ (resp. $\overrightarrow{k_2}$). D'après II.B.3)c), $\theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ et d'après II.B.4)a), $\theta_2 = \pi$.

• La fonction $a$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$. De plus, pour $t > \frac{1}{2}$, $a(t) = a(1 - t)$. On en déduit que $a\left(\frac{1}{2}^+\right) = a\left(\frac{1}{2}^-\right) = a\left(\frac{1}{2}\right)$ et la fonction est également continue à droite en $\frac{1}{2}$. Ainsi, la fonction $a$ est continue sur $[0, 1]$. Il en est de même des fonctions $b$ et $c$ et finalement de la fonction $\overrightarrow{k}$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right)}{\left(\overrightarrow{k}(t)|s(\overrightarrow{k}(t))\right) - 1}$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Il en est de même de la fonction $\theta$. De plus, $\theta\left(\frac{1}{2}^+\right) = 2\pi - \theta\left(\frac{1}{2}^-\right) = 2\pi - \pi = \pi = \theta\left(\frac{1}{2}\right)$ La fonction $\theta$ est donc continue sur $[0, 1]$.

• Soit $t \in [0, 1]$. Puisque $a$ est antisymétrique, $\mathrm{Tr}(a) = 0$ et donc $\mathrm{Tr}(\nu_1) = \mathrm{Tr}(\nu) = 0$. On en déduit que

$$\langle\langle \rho(t), \nu\rangle\rangle = \langle\langle \rho(t), \nu_1\rangle\rangle + \langle\langle \rho(t), a\rangle\rangle = (1 - \cos(\theta(t)))\left(\overrightarrow{k}(t)|\nu_1(\overrightarrow{k}(t))\right) + \sin(\theta(t))\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k}(t)}\rangle\rangle \quad (*).$$

Puisque la fonction $\overrightarrow{k}$ est continue sur $[0, 1]$, il en est de même de la fonction $t \mapsto \langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k}(t)}\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{3}\left(\overrightarrow{e_i}|a^*(\overrightarrow{k}(t) \wedge \overrightarrow{e_i})\right)$.

Finalement

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \langle\langle \rho(t), \nu\rangle\rangle \text{ est continue sur } [0, 1].}$$

 

• On a $\overrightarrow{k}(0) = \overrightarrow{k}(1) = \overrightarrow{k_1}$. Puis $\theta(0) = \theta_1$ et $\theta(1) = 2\pi - \theta_1$. Ainsi, $\sin(\theta(1)) = -\sin(\theta(0))$. Mais alors, d'après (*)

$$\langle\langle \rho(0), \nu\rangle\rangle = (1 - \cos(\theta_1))\left(\overrightarrow{k_1})|\nu_1(\overrightarrow{k_1})\right) + \sin(\theta_1)\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k_1}}\rangle\rangle = \sin(\theta_1)\langle\langle a, \omega_{\overrightarrow{k_1}}\rangle\rangle = -\langle\langle \rho(1), \nu\rangle\rangle.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \langle\langle \rho(t), \nu\rangle\rangle$ est continue sur $[0, 1]$ et prend des valeurs de signes contraires en $0$ et $1$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction $t \mapsto \langle\langle \rho(0), \nu\rangle\rangle$ s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$. Ainsi, il existe un réel $t$ tel que $\langle\langle r_{\theta(t),\overrightarrow{k}(t)}, \nu\rangle\rangle = 0$. Comme d'autre part $\langle\langle r_{\theta(t),\overrightarrow{k}(t)}, s\rangle\rangle = 0$ d'après la question précédente, pour ce réel $t$, $r_{\theta(t),\overrightarrow{k}(t)} \in \mathcal{V}$.

$$\boxed{\text{Il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } r_{\theta(t),\overrightarrow{k}(t)} \in \mathcal{V}.}$$

**II. C -**

**II. C. 1)** Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 7. Posons $\mathcal{W} = \mathcal{V}^\perp$.

• $\mathcal{W}$ est de dimension 2. Soit donc $(f, g)$ une base de $\mathcal{W}$.

• Montrons tout d'abord que $\mathcal{W}$ contient un endomorphisme $a$ de rang $r$ tel que $1 \leq r \leq 2$. Si $f$ n'est pas inversible, $a = f$ convient. Sinon, le polynôme

$$P(\lambda) = \det(g + \lambda f) = (\det f) \times \det(f^{-1}g + \lambda Id_E) = \det(f) \times \chi_{f^{-1}g}(-\lambda)$$

est un polynôme à coefficients réels de degré 3 et admet donc au moins une racine $\lambda_0$ dans $\mathbb{R}$. L'endomorphisme $a = \lambda_0 f + g$ est alors non inversible, mais n'est pas nul car la famille $(f, g)$ est libre.

Dans tous les cas, $\mathcal{W}$ contient un endomorphisme $a$ de rang $r$ tel que $1 \leq r \leq 2$. La question I.B.2) fournit alors un automorphisme orthogonal $u$ tel que l'endomorphisme $s' = ua$ soit symétrique positif de rang au plus 2 (car $\mathrm{rg}(s') = \mathrm{rg}(a)$) et tel que $\mathrm{Tr}(ua) > 0$.

On complète alors la famille libre $(a)$ de $\mathcal{W}$ en une base $(a, b)$ de $\mathcal{W}$. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} h \in \mathcal{V} &\Leftrightarrow \langle\langle h, a\rangle\rangle = \langle\langle h, b\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle\langle h, u^{-1}s'\rangle\rangle = \langle\langle h, b\rangle\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(h^*u^{-1}s') = \mathrm{Tr}(h^*b) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}((uh)^*s') = \mathrm{Tr}((uh)^*ub) = 0 \text{ (car } u^{-1} = u^*) \\ &\Leftrightarrow \langle\langle uh, s'\rangle\rangle = \langle\langle uh, ub\rangle\rangle = 0 \Leftrightarrow uh \in (s', ub)^\perp. \end{aligned}$$

Ceci montre que $u\mathcal{W} = \mathrm{Vect}(s', ub)$ ou encore que $\mathcal{W} = u^{-1}\mathrm{Vect}(s', ub)$. Posons $\mathcal{V}' = (s', ub)^\perp$.

• Montrons que $(\mathcal{V}')^\perp$ contient un endomorphisme $s$ symétrique positif de rang au plus $2$ et de trace égale à $1$ et aussi un endomorphisme $\nu$ non nul de trace nulle.

Soit $s = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(s')}s'$. $s$ est un endomorphisme symétrique positif de trace $1$ et $s \in (\mathcal{V}')^\perp$ car $(\mathcal{V}')^\perp$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$. Soit ensuite $\nu = ub - \mathrm{Tr}(ub)s$. $\nu$ est dans $(\mathcal{V}')^\perp$ et de plus $\mathrm{Tr}(\nu) = \mathrm{Tr}(ub) - \mathrm{Tr}(ub)\mathrm{Tr}(s) = 0$. Enfin, $\nu \neq 0$ car $(s, ub)$ est libre.

D'après la partie II.B., il existe une rotation $\rho$ dans $\mathcal{V}' = (s', ub)^\perp$. Mais alors $h = u^{-1}\rho$ est un automorphisme orthogonal car $(O(E), \circ)$ est un groupe et $h \in \mathcal{V}$ car $uh \in \mathcal{V}'$.

$$\boxed{\text{Tout sous-espace de } \mathcal{L}(E) \text{ de dimension 7 contient au moins un automorphisme.}}$$

**II. C. 2)** Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base orthonormmée de $E$. Considérons $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui s'annulent en $\overrightarrow{e_1}$. $\mathcal{V}$ est constitué des endomorphismes dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}, \ (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6,$$

et est donc un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $6$. Mais tous les éléments de $\mathcal{V}$ ont un noyau non nul et donc aucun des éléments de $\mathcal{V}$ n'est un automorphisme de $E$.

$$\boxed{\text{Un sous-espace de } \mathcal{L}(E) \text{ de dimension } 6 \text{ ne contient pas nécessairement un automorphisme orthogonal.}}$$

 