SESSION 2007

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES I. FILIERE MP

Partie I - Questions prélimininaires

I.A - Question de cours. Théorème d'interversion des limites.

• Montrons que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction U sur I, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de CAUCHY. Il existe donc un rang n_0 tel que pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à n_0, $\|u_n - u_p\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Soient alors n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0. Il existe deux voisinages V_1 et V_2 de a tels que pour $x \in V_1 \cap I$, $|u_n(x) - \ell_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et pour $x \in V_2 \cap I$, $|u_p(x) - \ell_p| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit $x_0 \in V_1 \cap V_2 \cap I$.

$$|\ell_n - \ell_p| \leq |\ell_n - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u_p(x_0)| + |u_p(x_0) - \ell_p| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0 \Rightarrow |\ell_n - \ell_p| < \varepsilon)$. Ainsi, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY et donc converge puisque $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont complets. Notons ℓ sa limite.

• Montrons que $\lim\limits_{x\to a} U(x) = \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_1 tel que pour n entier naturel supérieur ou égal à n_1, $\|U - u_n\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ et un rang n_2 tel que pour n entier naturel supérieur ou égal à n_2, $|\ell_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Soient $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour tout réel x de I, on a

$$|U(x) - \ell| \leq |U(x) - u_{n_0}(x)| + |u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| + |\ell_{n_0} - \ell| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}|.$$

Maintenant, il existe V voisinage de a tel que pour tout réel x de $V \cap I$, $|u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pour tout réel x de $V \cap I$, on a alors

$$|U(x) - \ell| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathscr{V}(a)/\ \forall x \in I\ (x \in V \Rightarrow |U(x) - \ell| < \varepsilon)$ et donc que $\lim\limits_{x\to a} U(x) = \ell$.

I.B - Soit $t \in [T, +\infty[$. Posons $n = E\left(\dfrac{t}{T}\right)$ de sorte que $nT \leq t < (n+1)T$ (car $T > 0$). On a $n \in \mathbb{N}^*$ et puisque g est T-périodique,

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{ikx} g(x)\,dx &= \sum_{p=0}^{n-1} \int_{pT}^{(p+1)T} e^{ikx} g(x)\,dx + \int_{nT}^t e^{ikx} g(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1} e^{ikpT} \int_0^T e^{iky} g(y + pT)\,dy + \int_{nT}^t e^{ikx} g(x)\,dx \\ &= \left(\int_0^T e^{iky} g(y)\,dy\right)\left(\sum_{p=0}^{n-1} (e^{ikT})^p\right) + \int_{nT}^t e^{ikx} g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Déjà, $\left|\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{nT}^t e^{ikx} g(x)\,dx\right| \leq \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{nT}^t |g(x)|\,dx \leq \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} |g(x)|\,dx = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^T |g(x)|\,dx$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{nT}^t e^{ikx} g(x)\,dx = 0$. Il reste à déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\left(\displaystyle\int_0^T e^{iky} g(y)\,dy\right)\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (e^{ikT})^p\right)$.

• Si $kT \in 2\pi\mathbb{Z}$, posons $K = \dfrac{kT}{2\pi}$. On a d'une part $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(e^{ikT})^p = n$ et d'autre part,

$$\int_0^T e^{iky}g(y)\ dy = \int_0^T e^{i\frac{2\pi K}{T}y}g(y)\ dy = T \times c_{-K}(g),$$

et donc $\displaystyle\frac{1}{t}\left(\int_0^T e^{iky}g(y)\ dy\right)\left(\sum_{p=0}^{n-1}(e^{ikT})^p\right) = \frac{nT}{t}c_{-K}(g)$. Or, $1 - \dfrac{T}{t} < \dfrac{nT}{t} \leq 1$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{nT}{t} = 1$. Ainsi,

$$\text{si } kt \in 2\pi\mathbb{Z},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{ikx}g(x)\ dx = c_{-K}(g) \text{ où } K = \frac{kT}{2\pi}.$$

• Si $kT \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ikT} \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(e^{ikT})^p = \frac{1-e^{iknt}}{1-e^{ikT}}$. Mais alors

$$\left|\frac{1}{t}\left(\int_0^T e^{iky}g(y)\ dy\right)\left(\sum_{p=0}^{n-1}(e^{ikT})^p\right)\right| \leq \frac{1}{t}\int_0^T |g(y)|\ dy \frac{2}{|1-e^{ikT}|} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{ikx}g(x)\ dx = \begin{cases} c_{-K}(g) \text{ où } K = \dfrac{kT}{2\pi} \text{ si } kT \in 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } kT \notin 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}}$$

I.C - Soit $t \in]0, +\infty[$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, on sait que la série de FOURIER de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$ et donc la suite de fonctions $S_n(f)\ :\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{-ikx}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
Posons alors $\forall t \in]0, +\infty[,\ U(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\ dx$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t S_n(f)(x)g(x)\ dx$. Puisque la fonction g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, g est bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire

$$|U(t) - u_n(t)| \leq \frac{1}{t}\int_0^t |f(x) - S_n(f)(x)| \times |g(x)|\ dx \leq \frac{1}{t} \times t\|f - S_n(f)\|_\infty\|g\|_\infty = \|f - S_n(f)\|_\infty\|g\|_\infty,$$

et donc

$$\|U - u_n\|_\infty \leq \|f - S_n(f)\|_\infty\|g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction U sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème d'interversion des limites redémontré en I.A -

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{ikx}g(x)\ dx.$$

I.C.1) Supposons $\dfrac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ kT \notin 2\pi\mathbb{Z}$. D'après I.B -, on a alors

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e^{ikx}g(x)\ dx = c_0(f)\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g(x)\ dx = c_0(f)c_0(g).$$

$$\boxed{\text{Si } \frac{T}{2\pi} \notin \mathbb{Q},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\ dx = c_0(f)c_0(g).}$$

I.C.2) On suppose que $T = \dfrac{2p\pi}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$kT \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow kp \in q\mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in q\mathbb{Z} \text{ d'après le théorème de GAUSS puisque } p \wedge q = 1.$$

D'après I.B -, on a

$$\lim_{t\to+\infty} U(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{ikx}g(x)\,dx = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{jq}(f) \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{jqx}g(x)\,dx$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{jq}(f)c_{-jqT/2\pi}(g) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{jq}(f)c_{-jp}(g).$$

$$\boxed{\text{Si } \frac{T}{2\pi} = \frac{p}{q},\ (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ p\wedge q = 1,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{kq}(f)c_{-kp}(g).}$$

En particulier, si les coefficients de Fourier de f et g sont des réels positifs, dans tous les cas on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx \geq c_0(f)c_0(g).$$

Partie II - Equation différentielle

II.A - Soit $k\in\mathbb{Z}$.

$$c_k(\phi) = \frac{1}{T}\int_0^T \phi(t)e^{-\frac{2ik\pi}{T}t}\,dt = c_0(e_k\phi).$$

II.B - Soit $\phi = y_0'' + c_0(a)y_0' + c_0(b)y_0$. On sait que y_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et T-périodique et donc ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. D'après la formule de Parseval, ϕ est nulle si et seulement si tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

Soit $k\in\mathbb{Z}$. Par linéarité des coefficients de Fourier, on a

$$\begin{aligned}c_k(\phi) &= c_0(e_k\phi)\\ &= c_0(e_ky_0'') + c_0(a)c_0(e_ky_0') + c_0(b)c_0(e_ky_0) = c_0(1)c_0(e_ky_0'') + c_0(a)c_0(e_ky_0') + c_0(b)c_0(e_ky_0)\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t e_k(x)(y_0''(x) + a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x))\,dx \text{ (d'après I.C.1) car } \frac{T}{2\pi}\notin\mathbb{Q})\\ &= c_0(1)c_0(e_k(y_0''+ay_0'+by_0)) = c_k(y_0''+ay_0'+by_0) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, tous les coefficients de Fourier de ϕ sont nuls et donc ϕ est nulle.

$$\boxed{y_0 \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + c_0(a)y_0' + c_0(b)y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Partie III - Epicycloïde

III.A - Définition de l'épicycloïde

III.A.1) Soit $t\in\mathbb{R}$. La distance $O\Omega(t)$ entre les centres des cercles (C_0) et $(C(t))$ est égale à $R+r$ la somme des rayons de (C_0) et $(C(t))$. On sait alors que (C_0) et $(C(t))$ sont tangents extérieurement. Leur point de contact est le point d'intersection $H(t)$ entre (C_0) et le segment $[O,\Omega(t)]$. L'affixe $h(t)$ est le nombre complexe de module R et d'argument e^{it}.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ (C_0) \text{ et } (C(t)) \text{ sont tangents extérieurement en le point } H(t) \text{ d'affixe } h(t) = Re^{it}.}$$

III.A.2) Soit $t\in\mathbb{R}$. En notant $\omega(t)$ l'affixe de $\Omega(t)$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\Omega(t)M(t)}\right) &= \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\Omega(t)H(t)}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega(t)H(t)}, \overrightarrow{\Omega(t)M(t)}\right) = \arg(h(t)-\omega(t)) + qt = \arg(-re^{it}) + qt\\ &= t + \pi + qt = (q+1)t + \pi.\end{aligned}$$

$z(t)-\omega(t)$ est le nombre complexe de module r et d'argument $(q+1)t+\pi$. Donc

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=(R+r)e^{it}-re^{i(q+1)t}=re^{it}((q+1)-e^{iqt}).}$$

III.B - Propriétés de l'épicycloïde

III.B.1) Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$z(t)=0\Leftrightarrow re^{it}((q+1)-e^{iqt})=0\Leftrightarrow e^{iqt}=q+1.$$

Comme $q+1$ est un réel strictement plus grand que 1, l'équation précédente n'a pas de solution et donc la fonction $\rho\ :\ t\mapsto z(t)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction z est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\rho=\sqrt{z\overline{z}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $t\mapsto\dfrac{z(t)}{|z(t)|}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Puisque cette fonction est à valeurs dans U l'ensemble des complexes de module 1, le théorème de relèvement montre qu'il existe une fonction θ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{z(t)}{|z(t)|}=e^{i\theta(t)}$ ou encore $\forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=\rho(t)e^{i\theta(t)}$.

Pour tout réel t, on a $\rho(t)=|(R+r)e^{it}-re^{i(q+1)t}|=|re^{iqt}|\times|q+1-e^{iqt}|=r|q+1-e^{iqt}|$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction }\rho\text{ est }\frac{2\pi}{q}\text{-périodique.}}$$

III.B.2) • Pour tout réel t, $z(t)=r\left(\dfrac{7}{2}e^{it}-e^{\frac{7it}{2}}\right)=re^{it}\left(\dfrac{7}{2}-e^{\frac{5it}{2}}\right)$. z est 4π-périodique et $\rho=|z|$ est $\dfrac{4\pi}{5}$-périodique. On obtient la courbe complète quand t décrit $[0,4\pi]$.

• $z(t+\dfrac{4\pi}{5})=re^{it}e^{\frac{4i\pi}{5}}\left(\dfrac{7}{2}-e^{\frac{5it}{2}}\right)=e^{\frac{4i\pi}{5}}z(t)$. On étudie et on construit la courbe quand t décrit $[0,\dfrac{4\pi}{5}]$ puisque on obtient la courbe complète par rotations successives de centre O et d'angle $\dfrac{4\pi}{5}$.

• Pour tout réel t,

$$z'(t)=\frac{7ir}{2}\left(e^{it}-e^{\frac{7it}{2}}\right)=\frac{7ire^{it}}{2}\left(1-e^{\frac{5it}{2}}\right).$$

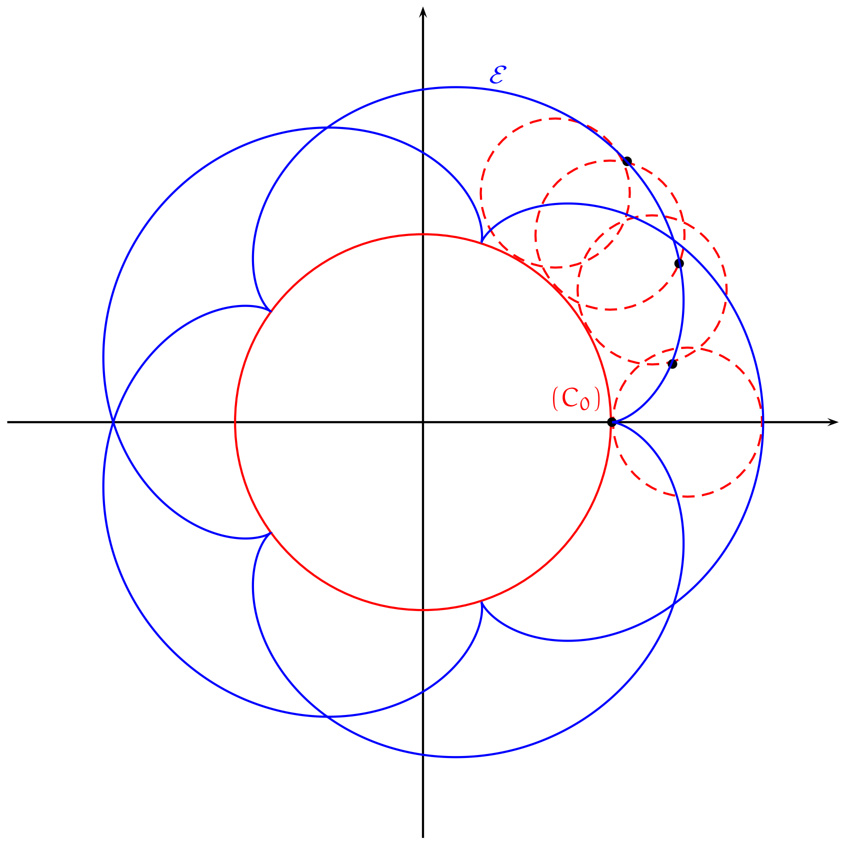
Par suite, $z'(t)=0\Leftrightarrow e^{\frac{5it}{2}}=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\ t=\dfrac{4k\pi}{5}$. Pour $k\in\mathbb{Z}$, notons alors M_k le point d'affixe $z_k=z\left(\dfrac{4k\pi}{5}\right)$. Tout point de l'épicycloïde distinct des M_k est régulier et les points M_k sont des points singuliers.

• Etudions le point M_0 d'affixe $z(0)=R$. Quand t tend vers 0,

$$\begin{aligned}z(t)&=r\left(\frac{7}{2}(1+it-\frac{t^2}{2}-\frac{it^3}{6})-(1+\frac{7it}{2}-\frac{49t^2}{8}-\frac{343it^3}{48})+o(t^3)\right)=r(\frac{5}{2}+\frac{35}{8}t^2+\frac{315it^3}{48}+o(t^3))\\&=R+\frac{7R}{4}t^2+\frac{63R}{24}it^3+O(t^3).\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{M_0M(t)}$ tend vers le vecteur $(\dfrac{7R}{4},0)$ quand t tend vers 0. On en déduit que l'épicycloïde $\mathcal{E}$ admet en M_0 une tangente dirigée par le vecteur $(1,0)$. De plus, quand t est au voisinage de 0, l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{M_0M(t)}$ est du signe de $\dfrac{7R}{4}t^2$ et l'ordonnée est du signe de $\dfrac{63R}{24}t^3$. M_0 est donc un point de rebroussement de première espèce.

• Pour $t\in[0,\dfrac{4\pi}{5}]$, $x'(t)=\dfrac{7r}{2}(-\sin t+\sin\dfrac{7t}{2})=7r\sin\dfrac{5t}{4}\cos\dfrac{9t}{4}$ et $y'(t)=\dfrac{7r}{2}(\cos t-\cos\dfrac{7t}{2})=7r\sin\dfrac{5t}{4}\sin\dfrac{9t}{4}$. On en déduit aisément la construction de la courbe $\mathcal{E}$.



III.B.3) L'étude précédente se généralise aisément.

• Si $q = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels non nuls et premiers entre eux, la fonction z est $2b\pi$-périodique et la fonction ρ est $\dfrac{2\pi}{q}$-périodique.

• Pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t + \dfrac{2\pi}{q}) = e^{\frac{2i\pi}{q}} z(t)$. On construit l'arche obtenue quand t décrit $[0, \dfrac{2\pi}{q}]$ et on obtient la courbe complète par rotations successives d'angle $\dfrac{2\pi}{q}$. L'épicycloïde $\mathcal{E}$ est alors composée de a arches isométriques.

• Pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = (R+r)ie^{it} - ir(q+1)e^{i(q+1)t} = ir(q+1)e^{it}(1-e^{iqt})$. Par suite, les points singuliers de l'arc sont les points M_k d'affixes $z_k = z(\dfrac{2k\pi}{q})$, $k \in \mathbb{Z}$ et les a arches de $\mathcal{E}$ se rejoignent en les M_k qui sont des points de rebroussements de première espèce.

III.B.4) La longueur d'une arche est la longueur de l'arche d'extrémités M_0 et M_1 c'est-à-dire

$$L = \int_0^{2\pi/q} \left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \right\| \, dt = \int_0^{2\pi/q} |z'(t)| \, dt.$$

Or, pour $t \in [0, \dfrac{2\pi}{q}]$,

$$z'(t) = ir(q+1)e^{it}(1 - e^{iqt}) = i(R+r)e^{it}e^{iqt/2}(e^{-iqt/2} - e^{iqt/2}) = 2(R+r)e^{i(q+1)t/2} \sin\left(\frac{qt}{2}\right),$$

et donc, puisque $\dfrac{qt}{2} \in [0, \pi]$

$$|z'(t)| = 2(R+r) \sin\left(\frac{qt}{2}\right).$$

Ainsi,

$$L = 2(R+r) \int_0^{2\pi/q} \sin\left(\frac{qt}{2}\right) \, dt = \frac{4(R+r)}{q} \left[-\cos\left(\frac{qt}{2}\right) \right]_0^{2\pi/q}] = \frac{8(R+r)}{q}.$$

$$\boxed{\text{La longueur d'une arche de l'épicycloïde est } \frac{8(R+r)}{q}.}$$

Si de plus q est un entier, l'épicycloïde est composée de q arches et donc la longueur de l'épicycloïde est $8(R+r) = 8R\left(1+\frac{1}{q}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{q+1}{q}2\pi\ R = \frac{4(q+1)}{q\pi} \times$ longueur de (C_0).

$$\boxed{\text{si } q \in \mathbb{N}^*, \text{ la longueur de l'épicycloïde est } 8(R+r) \text{ où aussi } \frac{4(q+1)}{q\pi} \times \text{longueur de } (C_0).}$$

Si q est entier, la fonction z est 2π-périodique et les arches ne se superposent pas. Par suite, si $\mathscr{A}$ est l'aire du domaine considéré, la formule de Green-Riemann fournit

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_0^{2\pi}\overline{z(t)}z'(t)\ dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_0^{2\pi} r((q+1)e^{-it} - e^{-i(q+1)t}) \times ir(q+1)(e^{it} - e^{i(q+1)t})\ dt\right)\\
&= \frac{r^2(q+1)}{2}\mathrm{Im}\left(i\int_0^{2\pi}((q+1)+1)\ dt\right)\ \left(\text{car } \int_0^{2\pi} e^{iqt}\ dt = \ldots = 0\right)\\
&= \pi r^2(q+1)(q+2) = \frac{(q+1)(q+2)}{q^2} \times \pi R^2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } q \in \mathbb{N}^*, \text{ l'aire de l'épicycloïde est } \pi r^2(q+1)(q+2) \text{ ou aussi } \frac{(q+1)(q+2)}{q^2} \times \text{aire de } (C_0).}$$

III.C - Le travail effectué en III.B.1) est valable dans tous les cas : la fonction ρ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\frac{2\pi}{q}$-périodique.

III.C.1) (erreur d'énoncé : lire « déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)e^{in\theta(x)}\ dx$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ ».)
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{R}$

$\rho^m(x)e^{in\theta x} = \rho^{m-n}(x)z^n(x) = r^{m-n}|q+1-e^{iqx}|^{m-n}r^n e^{inx}(q+1-e^{iqx})^n = e^{inx} \times r^m|q+1-e^{iqx}|^{m-n}(q+1-e^{iqx})^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose alors $f(x) = e^{inx}$ et $g(x) = r^m|q+1-e^{iqx}|^{m-n}(q+1-e^{iqx})^n$. f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique et g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $\frac{2\pi}{q}$-périodique. Puisque $\frac{2\pi/q}{2\pi} = q \notin \mathbb{Q}$, la question I.C.1) permet d'affirmer que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)e^{inx}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\ dx = c_0(f)c_0(g).$$

Maintenant, $c_0(f) = \left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } n=0\\ 0 \text{ si } n\neq 0\end{array}\right.$ et donc si $n \neq 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)e^{inx}\ dx = 0$ et si $n=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)e^{inx}\ dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t 1\times\rho^m(x)\ dx = c_0(\rho^m)$.

$$\boxed{\forall(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \rho^m(x)e^{inx}\ dx = \left\{\begin{array}{l}c_0(\rho^m) \text{ si } n=0\\ 0 \text{ si } n\neq 0\end{array}\right..}$$

III.C.2) Par linéarité,

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P(\rho(x))Q(\theta(x))\ dx = c_0(P\circ\rho)c_0(Q).}$$

Soient alors f une fonction définie et continue sur $[R, R+2r]$ et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après les théorèmes de WEIERSTRASS, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[R, R+2r]$ et il existe une suite de polynômes trigonométriques $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))\,dx = c_0(P_n\circ\rho)c_0(Q_n).$$

Puisque la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[R, R+2r]$, la suite de fonctions $(P_n\circ\rho)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f\circ\rho$ sur le segment $[0, \dfrac{2\pi}{q}]$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} c_0(P_n\circ\rho) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi/q}\int_0^{2\pi/q} P_n(\rho(x))\,dx = \frac{1}{2\pi/q}\int_0^{2\pi/q}\lim_{n\to+\infty} P_n(\rho(x))\,dx = \frac{1}{2\pi/q}\int_0^{2\pi/q} f(\rho(x))\,dx = c_0(f\circ\rho).$$

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_0(Q_n) = c_0(g)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_0(P_n\circ\rho)c_0(Q_n) = c_0(f\circ\rho)c_0(g)$.

Vérifions alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t P_n(\rho(x))Q_n(x)\,dx\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t P_n(\rho(x))Q_n(x)\,dx\right)$. Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$ posons $u_n(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))\,dx$ et $U(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\,dx$.
Déjà, la fonction f est continue sur un segment et donc bornée sur ce segment. D'autre part, chaque Q_n est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et donc bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in [0, t]$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}|f(\rho(x))g(\theta(x)) - P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))| &\leq |f(\rho(x))| \times |g(\theta(x)) - Q_n(\theta(x))| + |Q_n(\theta(x))| \times |f(\rho(x)) - P_n(\rho(x))|\\ &\leq \|f\|_\infty \times \|g-Q_n\|_\infty + \|Q_n\|_\infty \times \|f-P_n\|_\infty.\end{aligned}$$

Mais alors pour $t \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|U(t) - u_n(t)| \leq \frac{1}{t}\int_0^t |f(\rho(x))g(\theta(x)) - P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))|\,dx \leq \|f\|_\infty \times \|g-Q_n\|_\infty + \|Q_n\|_\infty \times \|f-P_n\|_\infty,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|U - u_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \times \|g-Q_n\|_\infty + \|Q_n\|_\infty \times \|f-P_n\|_\infty,$$

Comme la suite (Q_n) converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$, la suite $(\|g-Q_n\|_\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la suite $(\|Q_n\|_\infty)$ est bornée. De même, la suite $(\|f-P_n\|_\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors, la suite $(\|U-u_n\|_\infty)$ tend vers 0 et donc la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers U sur $]0, +\infty[$. D'après une généralisation du théorème d'interversion des limites, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{t\to+\infty} u_n(t)$ et donc

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\,dx = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_n(\rho(x))Q_n(\theta(x))\,dx = \lim_{n\to+\infty} c_0(P_n\circ\rho)c_0(Q_n) = c_0(f\circ\rho)c_0(g).$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\,dx = c_0(f\circ\rho)c_0(g).}$$

III.C.3) Soit f la fonction définie et continue sur $[R, R+2r]$, nulle en dehors de $[\rho_0-\varepsilon, \rho_0+\varepsilon]$, valant 1 sur $[\rho_0-\dfrac{\varepsilon}{2}, \rho_0+\dfrac{\varepsilon}{2}]$, affine sur $[\rho_0-\varepsilon, \rho_0-\dfrac{\varepsilon}{2}]$ et sur $[\rho_0+\dfrac{\varepsilon}{2}, \rho_0+\varepsilon]$ et g la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique valant 1 sur $[\theta_0-\dfrac{\eta}{2}, \theta_0+\dfrac{\eta}{2}]$, affine sur $[\theta_0-\eta, \theta_0-\dfrac{\eta}{2}]$ et sur $[\theta_0+\dfrac{\eta}{2}, \theta_0+\eta]$.
f est continue sur $[R, R+2r]$ et g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. D'après la question précédente,

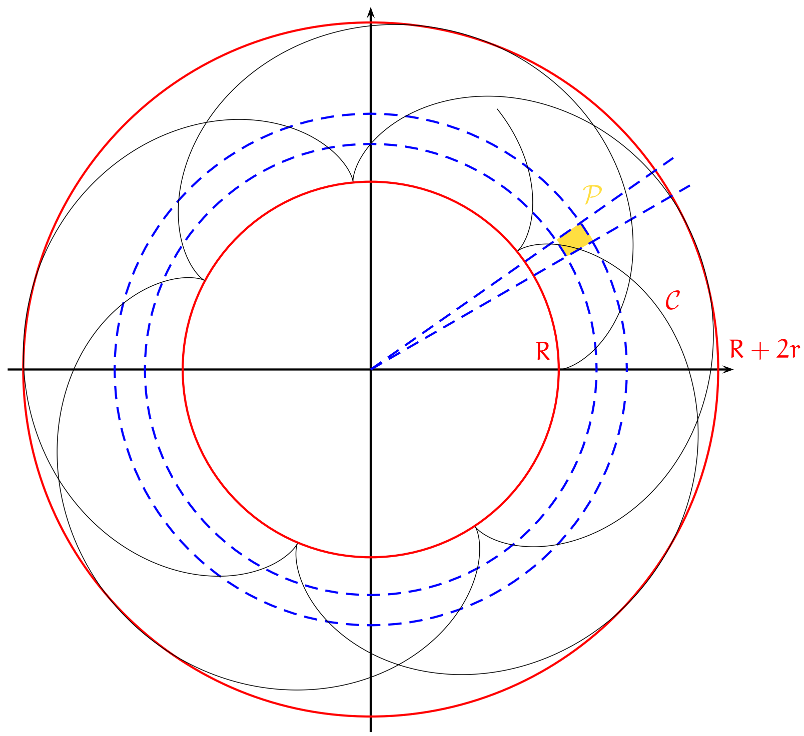
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\,dx = c_0(f\circ\rho)c_0(g).$$

• Pour tout réel x on a $\rho(x) = r|q+1-e^{iqt}|$. Donc $\rho(0) = R$ et $\rho\left(\dfrac{\pi}{q}\right) = r(q+2) = R+2r$. Puisque ρ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires montre que $[R, R+2r] \subset \rho(\mathbb{R})$. Comme d'autre part, on a bien sûr $\rho(\mathbb{R}) \subset [R, R+2r]$, on a donc $\rho(\mathbb{R}) = [R, R+2r]$. Mais alors, puisque ρ est $\dfrac{2\pi}{q}$-périodique, $\rho[0, \dfrac{2\pi}{q}] = [R, R+2r]$. En particulier, la fonction $f \circ \rho$ est une fonction continue, positive et non nulle sur $[0, \dfrac{2\pi}{q}]$ et donc $c_0(f \circ \rho) = \dfrac{1}{2\pi/q} \displaystyle\int_0^{2\pi/q} f \circ \rho(x)\, dx \neq 0$.

• g est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, positive et non nulle et donc $c_0(g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\, dx \neq 0$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\rho(x))g(\theta(x))\, dx \neq 0$ et en particulier, $f \circ \rho \times g \circ \theta \neq 0$. Il existe donc un réel x tel que $f(\rho(x))g(\theta(x)) \neq 0$ et donc tel que $z(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)} \in \mathcal{P}$. Finalement

$$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{E} \neq \varnothing.}$$

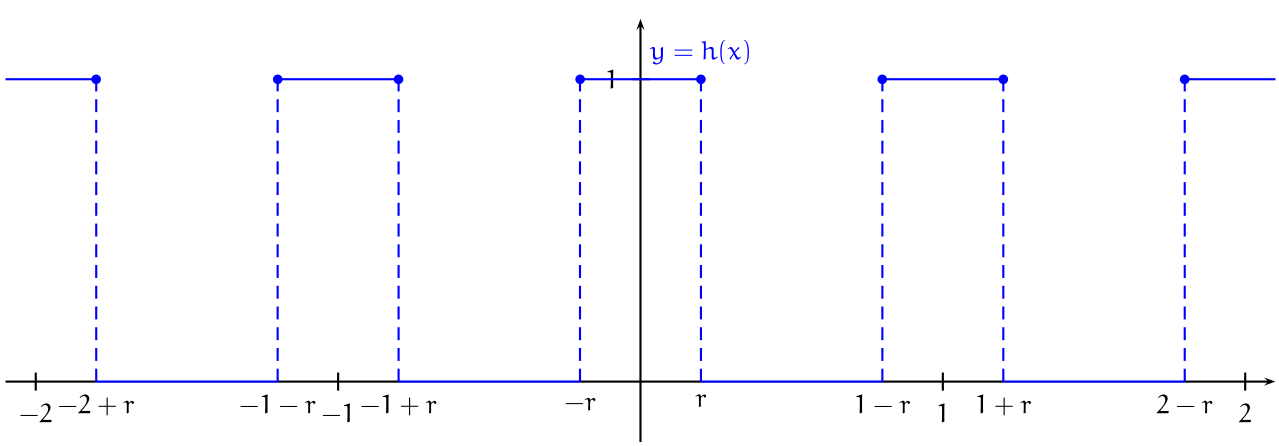


III.C.4) D'après III.C.3)

$$\boxed{\text{l'épicycloïde } \mathcal{E} \text{ est dense dans la couronne } \mathcal{C}.}$$

Partie IV - Problème de visibilité

IV.A - Graphe de h.



h est la fonction caractéristique de l'ensemble des réels dont la distance à $\mathbb{Z}$ est au plus égale à r.

Un point du plan de coordonnées (α, β) appartient à la forêt $\mathcal{F}$ si et seulement si les coordonnées de ce point sont à une distance au plus égale à r de $\mathbb{Z}$ ou encore

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ ((\alpha, \beta) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow h(\alpha) \times h(\beta) \neq 0).$$

IV.A.1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $t \mapsto h(t)h(x-t)$ est continue par morceaux sur le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. La fonction $t \mapsto h(t)h(x-t)$ est donc intégrable sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

b) Puisque h est paire, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(-x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(-x-t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} h(-w)h(-x+w) \times -dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(w)h(x-w)\ dw = u(x).$$

Puisque h est 1-périodique, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(x+1) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(x+1-t)\ dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(x-t)\ dt = u(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = x - t$, on obtient

$$u(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(t)h(x-t)\ dt = \int_{-r}^{r} h(x-t)\ dt = \int_{x+r}^{x-r} h(y) \times -dy = \int_{x-r}^{x+r} h(y)\ dy.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \int_{x-r}^{x+r} h(y)\ dy.}$$

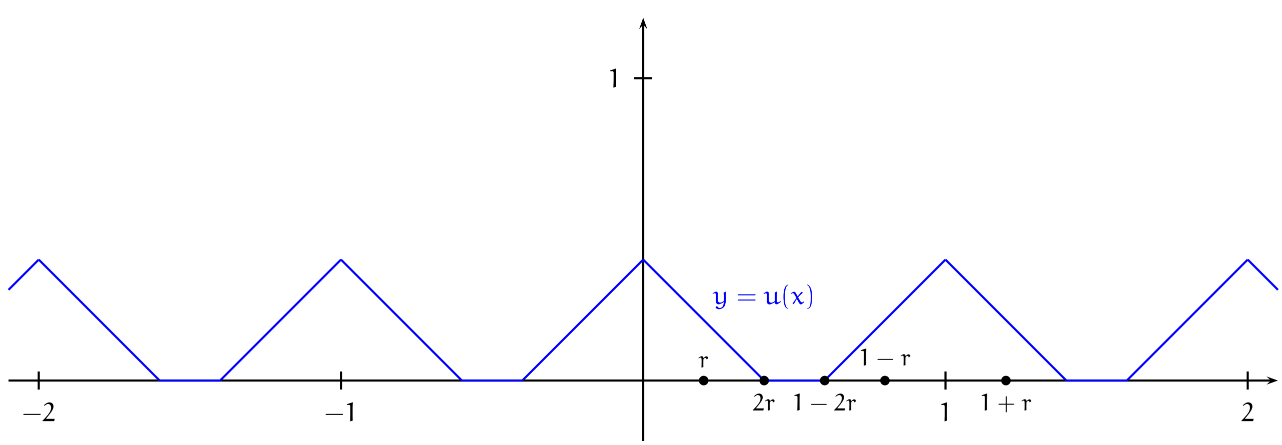
Puisque la fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on sait que la fonction $u\ :\ x \mapsto \int_{x-r}^{x+r} h(y)\ dy = \int_{0}^{x+r} h(y)\ dy - \int_{0}^{x-r} h(y)\ dy$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{u \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}, \text{ de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}, \text{ paire et 1-périodique.}}$$

Soit $y \in [0, 1]$. Puisque h est paire et 1-périodique, on a $h(y) = 1$ si $y \in [-r, r] \cup [1-r, 1+r]$ et $h(y) = 0$ si $y \in]r, 1-r[$. Soit $x \in [0, 1]$.

- Si $x \in [0, 2r]$, alors $-r \leq x - r \leq 0$ et $r \leq x + r \leq 3r \leq 1 - r$. Dans ce cas, $u(x) = \int_{x-r}^{r} 1\ dy = 2r - x$.
- Par parité et 1-périodicité, si $x \in [1-2r, 1]$, $u(x) = u(1-x) = x + 2r - 1$.
- Si $x \in]2r, 1-2r[$, alors $r < x - r \leq x + r < 1 - r$ et donc $u(x) = 0$.

Graphe de u.



Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
c_n(u) &= \frac{1}{2}(a_{|n|}(u) \pm i b_{|n|}(u)) = \frac{a_{|n|}(u)}{2} \text{ (car } u \text{ est paire)}\\
&= \int_0^1 u(x)\cos(2n\pi x)\,dx = \int_0^{2r}(2r-x)\cos(2n\pi x)\,dx + \int_{1-2r}^1 (x+2r-1)\cos(2n\pi x)\,dx\\
&= \int_0^{2r}(2r-x)\cos(2n\pi x)\,dx + \int_0^{2r}((1-y)+2r-1)\cos(2n\pi(1-y)) \times -dy = 2\int_0^{2r}(x-2r)\cos(2n\pi x)\,dx.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$c_0(u) = 2\int_0^{2r}(x-2r)\,dx = 2 \times \frac{2r \times 2r}{2} = 4r^2,$$

puis pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n(u) &= 2\left[(2r-x)\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^{2r} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2r}\sin(2n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^{2r}\\
&= \frac{1}{2n^2\pi^2}(1-\cos(4n\pi r) \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{c_0(u) = 4r^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(u) \in \mathbb{R}^+.}$$

IV.A.2) 1er cas. Si $\theta \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, on a $\cos\theta = 0$ et $\sin\theta = \pm 1$ ou $\sin\theta = 0$ et $\cos\theta = \pm 1$. Pour tout réel x, on a alors $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) = u(0)u(\pm x) = 2ru(x)$ puisque u est paire. Par suite, pour $t > 0$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = 2r\frac{1}{t}\int_0^t u(x) \times 1\,dx.$$

La fonction u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique et la fonction constante 1 est continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Puisque $\frac{1}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, la question I.C.1) permet d'affirmer que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = 2rc_0(u)c_0(1) = 2r \times 4r^2 \times 1 = 8r^3.$$

$$\boxed{\text{Si } \theta \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = 8r^3.}$$

2ème cas. Si $\theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{Z}}$, posons $y = 2\pi x\cos\theta$. On obtient pour $t > 0$ (puisque u est paire),

$$\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = \frac{1}{2\pi t\cos\theta}\int_0^{2\pi t\cos\theta} u\left(\frac{y}{2\pi}\right)u\left(\frac{y\tan\theta}{2\pi}\right)\,dy = \frac{1}{2\pi t|\cos\theta|}\int_0^{2\pi t|\cos\theta|} u\left(\frac{y\tan\theta}{2\pi}\right)u\left(\frac{y}{2\pi}\right)\,dy.$$

La fonction $f\ :\ y \mapsto u\left(\frac{y\tan\theta}{2\pi}\right)$ est $\frac{2\pi}{\tan\theta}$-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et la fonction $g\ :\ y \mapsto u\left(\frac{y}{2\pi}\right)$ est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- Si tan $\notin \mathbb{Q}$, d'après la question I.C.1),

$$\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = \frac{1}{2\pi t|\cos\theta|}\int_0^{2\pi t|\cos\theta|} f(y)g(y)\,dy \underset{t\to+\infty}{\to} c_0(f)c_0(g).$$

Or, $c_0(f) = \frac{1}{2\pi/\tan\theta}\int_0^{2\pi/\tan\theta} u\left(\frac{y\tan\theta}{2\pi}\right)\,dy = \int_0^1 u(w)\,dw = c_0(u)$ et de même, $c_0(g) = c_0(u)$. Donc $c_0(f)c_0(g) = (c_0(u))^2 = 16r^4$ et finalement

$$\boxed{\text{si } \theta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \text{ et } \tan\theta \notin \mathbb{Q},\ \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\,dx = 16r^4 > 0.}$$

• Si tan $\in \mathbb{Q}$, avec le même travail et d'après la question I.C.2), $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx$ a une limite réelle $\ell(\theta) \geq c_0(f)c_0(g) = 16r^4$ quand t tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{si } \theta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \text{ et } \tan\theta \in \mathbb{Q},\ \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \text{ existe et appartient à }]0,+\infty[.}$$

IV.A.3) Soit $t \in \mathbb{R}$.
• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)$ est continue par morceaux sur $[0,t]$.
• $\forall x \in [0,t]$, la fonction $\theta \mapsto u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall (x,\theta) \in [0,t] \times \mathbb{R}$ (ou $[t,0] \times \mathbb{R}$), $|u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)| \leq \|u\|_\infty^2$, la fonction constante $x \mapsto \|u\|_\infty^2$ étant une fonction intégrable sur le segment $[0,t]$ ou ($[t,0]$).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \text{la fonction } \theta \mapsto \int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

IV.A.4) (erreur d'énoncé : lire $\displaystyle\int_0^R u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx > 1$)

Supposons par l'absurde que : $\forall R > 0,\ \exists \theta_R \in \mathbb{R}/\ \displaystyle\int_0^R u(x\cos\theta_R)u(x\sin\theta_R)\ dx \leq 1$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \theta_n \in \mathbb{R}/\ \displaystyle\int_0^n u(x\cos\theta_n)u(x\sin\theta_n)\ dx \leq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons alors $F_n = \left\{\theta \in \mathbb{R}/\ \displaystyle\int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \leq 1\right\}$. Par hypothèse, F_n n'est pas vide. D'autre part, F_n est l'image réciproque du fermé $]-\infty,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx$ (d'après IV.A.3)). Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n est un fermé non vide de $\mathbb{R}$. Maintenant, puisque la fonction u est positive,

$$\int_0^{n+1} u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \leq 1 \Rightarrow \int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \leq 1,$$

et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+1} \subset F_n$. En résumé, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides de $\mathbb{R}$. On sait alors que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \neq \varnothing$. Soit $\theta \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Par définition de θ, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \leq 1$ ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \frac{1}{n}\int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx \leq \frac{1}{n}.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx = 0$ ce qui contredit $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx > 0$ (IV.A.2)). On a montré que

$$\boxed{\exists R > 0/\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \int_0^R u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx > 1.}$$

R étant ainsi fixé, soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\forall x \in]0,R]$, $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^R u(x\cos\theta)u(x\sin\theta)\ dx = 0$ ce qui n'est pas. Donc, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $x \in]0,R]$ (dépendant de θ) tel que $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) \neq 0$.

Ainsi, $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \exists x \in]0,R]$ tel que $u(x\cos\theta)u(x\sin\theta) \neq 0$. On voit alors sur le graphe de u que les réels $x\cos\theta$ et $x\sin\theta$ sont à une distance au plus égale à $2r$ de $\mathbb{Z}$. Le point de coordonnées cartésiennes $(x\cos\theta, y\sin\theta)$ ou encore de coordonnées polaires $[x,\theta]$ appartient donc à la forêt $\mathcal{F}_1$ constituée d'arbres de côtés $4r$. Mais les questions IV.A.1) à IV.A.4) s'appliquent au réel $r' = \dfrac{r}{2}$ avec les mêmes conclusions de sorte que le point de coordonnées polaires $[x,\theta]$ fourni appartient cette fois à la forêt $\mathcal{F}$.
Ainsi, on a fourni un réel $R > 0$ tel que dans toute direction θ, on trouve un point d'angle polaire θ appartenant à la forêt $\mathcal{F}$ et situé à une distance au plus R de O ce qui démontre le résultat annoncé au début de IV.

IV.B - Algorithmique

IV.B.1) Posons $I = \{\rho \in \mathbb{R}^{*+} / \forall \theta \in [0, 2\pi],\ \mathcal{F} \cap [O, A(\rho, \theta)] \neq \varnothing\}$. D'après la question précédente, $I \neq \varnothing$ $(R \in I)$. Ainsi, I est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. I admet une borne inférieure que l'on note R_0 $(R_0 \geq 0)$. De plus, il est clair que $R_0 \geq 1 - r > 0$ (puisqu'il n'y a aucun morceau d'arbre dans le quart de disque $x^2 + y^2 < (1-r)^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$).

Soit $a > R_0$. Par définition de R_0, il existe $\rho \in [R_0, a[$ tel que $\rho \in I$. Mais alors $[\rho_0, +\infty[\subset I$ car si on voit un arbre dans toutes les directions à une distance au plus ρ_0, alors on voit un arbre dans toutes les directions à au plus toute distance supérieure ou égale à ρ_0. Mais alors $[a, +\infty[\subset I$. Ainsi, $\forall a > R_0$, $[a, +\infty[\subset I$ et donc

$$\boxed{]R_0, +\infty[\subset I \subset [R_0, +\infty[\text{ avec } R_0 > 0.}$$

En particulier, I est un intervalle. Montrons alors que I est fermé.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, notons $\mathcal{D}_\theta$ la demi-droite d'origine O et d'angle polaire θ. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_\theta$ est un fermé en tant qu'intersection de deux fermés, non vide car dans toute direction on trouve un point de la forêt à une distance au plus R_0. Notons ρ_θ la borne inférieure de l'ensemble des distances de O à $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_\theta$. Puisque $\mathcal{F} \cap \mathcal{D}_\theta$ est un fermé, ρ_θ est un minimum. On constate alors que

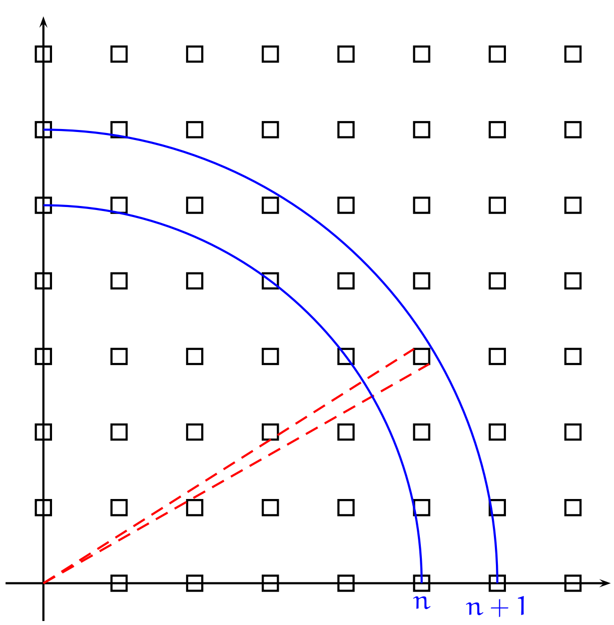
$$\forall \rho \in \mathbb{R},\ \rho \in I \Leftrightarrow \forall \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \geq \rho_\theta.$$

Par suite, $I = \displaystyle\bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} [\rho_\theta, +\infty[$ et donc I est un fermé en tant qu'intersection de fermés.

$$\boxed{I = [R_0, +\infty[\text{ avec } R_0 > 0.}$$

IV.B.2) • Puisque $r \in]0, \frac{1}{4}[$, il est clair que $R_0 \geq 2$. Par symétrie, il suffit de regarder les arbres du quart de plan supérieur gauche. Les arbres de centre $(1, 0)$ et $(0, 1)$ cachent les arbres situés sur les axes de coordonnées et bouchent la vue dans le secteur angulaire compris entre 0 et $\text{Arctan}\, \dfrac{r}{1-r}$ et dans le secteur angulaire compris entre $\text{Arctan}\, \dfrac{1-r}{r}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. Il reste à déterminer la valeur minimale R_0 à partir de laquelle la vue est bouchée dans toute direction comprise entre $\text{Arctan}\, \dfrac{r}{1-r}$ et $\text{Arctan}\, \dfrac{1-r}{r}$.

• On se donne donc deux entiers naturels non nuls x_0 et y_0. Les sommets de l'arbre A_0 de centre (x_0, y_0) sont les points de coordonnées $(x_0 \pm r, y_0 \pm r)$. L'arbre $\mathcal{A}_0$ couvre l'angle allant de son coin inférieur droit $(x_0 + r, y_0 - r)$ à son coin supérieur gauche $(x_0 - r, y_0 + r)$. Les angles limites ont pour tangentes respectives $\dfrac{y_0 - r}{x_0 + r}$ et $\dfrac{y_0 + r}{x_0 - r}$. On associe donc à chaque arbre A_0 le couple $\left(\dfrac{y_0 - r}{x_0 + r}, \dfrac{y_0 + r}{x_0 - r}\right)$.
La distance de l'origine à l'arbre A_0 est la distance de O à son coin inférieur gauche $(x_0 - r, y_0 - r)$ et vaut donc $\sqrt{(x_0 - r)^2 + (y_0 - r)^2}$.



• Décrivons alors l'algorithme. On suppose que $R_0 \geq n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On ajoute à la liste des arbres dont la distance à l'origine est strictement plus petite que n, les arbres dont la distance à l'origine appartient à $[n, n+1[$. Ces arbres vérifient

$$n^2 \leq (x_0 - r)^2 + (y_0 - r)^2 < (n+1)^2.$$

Pour un tel arbre on a $1 \leq x_0 < n + 1 + r$ ou encore $1 \leq x_0 \leq n + 1$ (car $r < 1$) et de même $1 \leq y_0 \leq n + 1$. On fait alors trier la nouvelle liste de couples dans l'ordre croissant des premiers éléments des couples.
On fait alors systématiquement tester pour deux couples consécutifs si la deuxième composante du premier couple est supérieure ou égale à la première composante du second couple. Si c'est le cas, on affiche l'encadrement de $n \leq R_0 < n+1$ et sinon on passe au n suivant. Puisque R_0 existe, l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes.

Algorithme.

n=1 ; (on initialise n)

F= $\left\{\left(\dfrac{r}{1-r}, \dfrac{r}{1-r}\right), \left(\dfrac{1-r}{r}, \dfrac{1-r}{r}\right)\right\}$; (on initialise la partie de la forêt $\mathscr{F}$ à tester)

c=2 ; (on initialise le cardinal de F)

t=0 ; (on initialise un test t)

Tant que t=0 faire

  Pour x variant de 1 à n+1 et y variant de 1 à n+1 faire (on ajoute maintenant les arbres dont la distance à O appartient à $[n, n+1[$)

    Si $(x-r)^2 + (y-r)^2 \geq n^2$ et $(x-r)^2 + (y-r)^2 < (n+1)^2$ faire

      F=F$\cup \left\{\left(\dfrac{y-r}{x+r}, \dfrac{y+r}{x-r}\right)\right\}$;

      c=c+1;

  Trier F;

  k=1;

  u=0; (un nouveau test u)

  Tant que u=0 et k≤c-1 faire

    Si $F[k+1](1) - F[k](2) > 0$ alors u=1;

    Sinon k=k+1;

  Si u=1 alors t=1;

  n=n+1;

Afficher $n \leq R_0 < n+1$.

IV.C - On suppose maintenant que la forêt, notée $\mathcal{F}'$ est constituée d'arbres ronds de rayon $r' > 0$. Soient $\mathcal{F}$ la forêt dont les arbres sont des carrés de coté $r = \dfrac{2r'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}r'$ puis R_0 le rayon associé à la forêt $\mathcal{F}$ en IV.B.1). Chaque arbre de la forêt $\mathcal{F}$ est contenu dans un arbre de la forêt $\mathcal{F}'$ et donc dans toute direction on voit un arbre de la forêt $\mathcal{F}'$ situé à une distance au plus égale à R_0.

