SESSION 2006

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES II. FILIERE MP

Partie I - Une fonction polynômiale

I.A -

I.A.1) $I_1 = \int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $I_2 = \int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$. Donc, $L_1 = 6\int_0^x t(1-t)\,dt = 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = -2x^3 + 3x^2$ et $L_2 = 30\int_0^x t^2(1-t)^2\,dt = 30\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

$$\boxed{L_1 = -2x^3 + 3x^2 \text{ et } L_2 = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3.}$$

I.A.2) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} I_m L_m(1-x) &= \int_0^{1-x} t^m(1-t)^m\,dt = -\int_1^x (1-u)^m u^m\,du = \int_0^1 (1-u)^m u^m\,du - \int_0^x (1-u)^m um\,du \\ &= I_m - I_m L_m(1-x), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_m(x) + L_m(1-x) = 1.}$$

On en déduit encore que $2L_m\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et donc que $L_m\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

I.B -

I.B.1) Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $L'_m(x) = \frac{1}{I_m}x^m(1-x)^m$. Donc, L'_m, qui est de degré $2m$, admet 0 et 1 pour racines d'ordre m.
De plus, la fonction L'_m est strictement positive sur $]0,1[$ et donc la fonction L_m est strictement croissante sur $[0,1]$. Comme $L_m(0) = 0$, L_m admet une et une seule racine dans $[0,1]$, à savoir 0. Enfin, puisque 0 est racine de L'_m d'ordre m, 0 est racine de L_m d'ordre $m+1$.

I.B.2) La fonction $x \mapsto \frac{L_0(x)}{x} = 1$ est constante sur l'intervalle sur $]0, \frac{1}{2}[$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$I_m L''_m(x) = mx^{m-1}(1-x)^m - mx^m(1-x)^{m-1} = mx^{m-1}(1-x)^{m-1}(1-2x) > 0.$$

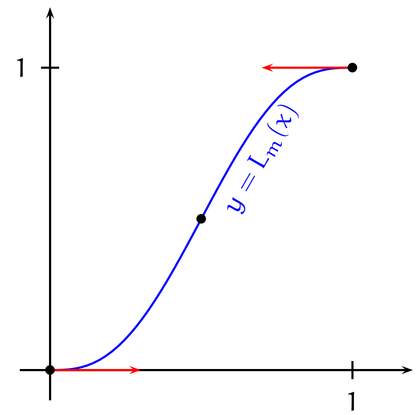
On en déduit que la fonction L_m est strictement convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc que la fonction pente $x \mapsto \frac{L_m(x)}{x} = \frac{L_m(x) - L_m(0)}{x - 0}$ est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{2}]$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } x \mapsto \frac{L_m(x)}{x} \text{ est strictement croissante sur }]0, \tfrac{1}{2}].}$$

I.B.3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de L_m.
- La relation : $\forall x \in [0,1],\ L_m(x) + L_m(1-x) = 1$ montre que le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_m$.

• L_m est convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc, par symétrie concave sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
• L_m est croissante sur $[0,1]$ et $L'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$. Donc, $\mathscr{C}_m$ admet deux points en lesquels la tangente est horizontale, les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Graphe de L_m pour $m \geq 1$.



I.C -

I.C.1) Puisque $L'_0(x) = 1$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ L'_0(x) = L'_0(y)$.
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in [0,1]^2$.

$$\begin{aligned} L'_m(x) = L'_m(y) &\Leftrightarrow (x(1-x))^m = (y(1-y))^m \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = y(1-y) \text{ (car } x(1-x) \geq 0 \text{ et } y(1-y) \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (y-x)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = 1-x. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ L'_m(x) = L'_m(y) \Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = 1-x.}$$

I.C.2) Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in [0,1$. D'après 1), pour $(\beta, \gamma) \in [0,1]^2$,

$$L'_m(\beta) = L'_m(\alpha) \text{ et } L'_m(\gamma) = L'_m(\alpha) \Leftrightarrow (\beta,\gamma) \in \{(\alpha,\alpha), (\alpha, 1-\alpha), (1-\alpha, \alpha), (1-\alpha, 1-\alpha)\}.$$

- Si $(\beta,\gamma) = (\alpha,\alpha)$, $\alpha+\beta+\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.
- Si $(\beta,\gamma) = (\alpha, 1-\alpha)$ ou $(\beta,\gamma) = (1-\alpha,\alpha)$, $\alpha+\beta+\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ et $\gamma = 1$ ou $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = 1$.
- Si $(\beta,\gamma) = (1-\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha+\beta+\gamma = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ et $\beta = \gamma = 0$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right\}.}$$

I.C.3) Si l'un des trois réels α_2, α_3 ou α_4 vaut $1-\alpha_1$, la condition $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 1$ impose aux deux autres d'être nuls puis $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 = 1$. Ceci fournit les 4 solutions extrémales $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Sinon, les trois réels α_2, α_3 et α_4 sont égaux à α_1 ce qui fournit la solution $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\right\}.}$$

Partie II - Les polynômes de Taylor

II.A - Soient $F = \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}\left((X-a)^p\right)_{0 \leq p \leq n}$ et $G = \text{Vect}\left((X-a)^p\right)_{p \geq n+1}$. Puisque la famille $\left((X-a)^p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, on a $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $T_{n,a}(P) \in F$ et d'après la formule de Taylor, $P - T_{n,a}(P) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{P^{(p)}(a)}{p!}(X-a)^p \in G$ (la somme étant finie). Ainsi, $T_{n,a}$ est le projecteur sur F parallèlement à G.

$\mathrm{Im}(T_{n,a}) = F = \mathbb{R}_p[X]$ et $\mathrm{Ker}(T_{n,a}) = G = (X-a)^{n+1}\mathbb{R}[X]$. $\mathrm{Ker}(T_{n,a})$ est l'ensemble des multiples du polynôme $(X-a)^{n+1}$ ou encore l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $(X-a)^{n+1}$.

II.B - Soit $(R, S) \in (\mathbb{R}_m[X])^2$. D'après I.A.2),

$$U(X) = R(X)L_m(1-X) + S(X)L_m(X) = R(X)(1 - L_m(X)) + S(X)L_m(X) = R(X) + (S(X) - R(X))L_m(X).$$

Mais d'après I.B.1), 0 est racine d'ordre $m+1$ de L_m et donc le polynôme $(S-R)L_m$ est dans $X^{m+1}\mathbb{R}[X]$. On en déduit que $T_{m,0}(U) = R$. De même, puisque 1 est racine d'ordre $m+1$ du polynôme $L_m(1-X)$, $T_{m,1}(U) = S$

$$\boxed{\forall (R, S) \in (\mathbb{R}_m[X])^2,\ T_{m,0}(U) = R \text{ et } T_{m,1}(U) = S.}$$

II.C -

II.C.1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déjà, $\deg(\Phi(P)) \leq m + (2m+1) = 3m+1 \leq (n-1)+1 = n$ ce qui montre que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité de Φ étant claire, on a donc $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

D'après 1), $T_{m,0}(\Phi(P)) = P_0$ et $T_{m,1}(\Phi(P)) = P_1$. Donc,

$$\Phi(\Phi(P))(X) = T_{m,0}(\Phi(P))L_m(X) + T_{m,1}(\Phi(P))L_m(1-X) = P_0L_m(X) + P_1L_m(1-X) = \Phi(P).$$

Ainsi, Φ est un endomorphisme idempotent de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\boxed{\Phi \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_n[X].}$$

II.C.2) Déterminons $\mathrm{Ker}(\Phi)$. Soit donc $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a donc $P_0(X)L_m(1-X) + P_1(X)L_m(X) = 0$ ou encore, puisque $L_m(1-X) = 1 - L_m(X)$, $P_0(X) = (P_0(X) - P_1(X))L_m(X)$. Comme 0 est racine d'ordre $m+1$, le polynôme $P_0(X) = (P_0(X) - P_1(X))L_m(X)$ est de valuation au moins égale à $m+1$. Comme d'autre part, P_0 est de degré au plus m, on en déduit que $P_0 = 0$. Il reste $P_1(X)L_m(X) = 0$ et donc $P_1 = 0$. En résumé, si $\Phi(P) = 0$ alors $P_0 = P_1 = 0$. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Ker}(T_{m,0}) \cap \mathrm{Ker}(T_{m,1}) \cap \mathbb{R}_n[X] = (X^{m+1}\mathbb{R}[X]) \cap ((1-X)^{m+1}\mathbb{R}[X]) \cap \mathbb{R}_n[X] = X^{m+1}(1-X)^{m+1}\mathbb{R}[X] \cap \mathbb{R}_n[X].$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi) = X^{m+1}(1-X)^{m+1}\mathbb{R}[X] \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(X^{m+1}(1-X)^{m+1}X^k)_{0\leq k\leq n-(2m+2)} \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = n - 2m - 1.}$$

On en déduit encore que $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})) = \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = (n+1) - (n-2m-1) = 2m+2$. Comme d'autre part $\mathrm{Im}(\Phi)$ est engendrée par la famille $(X^kL_m(X))_{0\leq k\leq m} \cup (X^kL_m(1-X))_{0\leq k\leq m}$, cette famille est une base de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}((X^kL_m(X))_{0\leq k\leq m} \cup (X^kL_m(1-X))_{0\leq k\leq m}) \text{ et } \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = 2m+2.}$$

Partie III - Un raccord

III.A -

III.A.1) Unicité. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes vérifiant les conditions de l'énoncé. Le polynôme $Q_2 - Q_1$ est alors de degré au plus 3 et admet -1 et 1 pour racines d'ordre au moins 2. On en déduit que $Q_2 - Q_1$ est le polynôme nul ce qui démontre l'unicité de Q_1.

Existence. Le polynôme L_1 est de degré 3, admet 0 pour racine d'ordre 2, prend la valeur 1 en 1 et de plus $L_1'(1) = 0$. Donc, le polynôme $Q_1 = L_1\left(\dfrac{1+X}{2}\right)$ convient. De plus, $Q_1 = -2\left(\dfrac{X+1}{2}\right)^3 + 3\left(\dfrac{X+1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(-X^3+3X+2)$.

$$\boxed{Q_1 = \frac{1}{4}(-X^3+3X+2).}$$

III.A.2) De même, le polynôme $Q_2 = L_2\left(\dfrac{1+X}{2}\right)$ convient et est le seul. De plus,

$$Q_2 = 6\left(\frac{1+X}{2}\right)^5 - 15\left(\frac{1+X}{2}\right)^4 + 10\left(\frac{1+X}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}(3X^5 - 10X^3 + 15X + 8).$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{1}{16}(3X^5 - 10X^3 + 15X + 8).}$$

III.B - Posons $g = (x, y)$ puis montrons que x et y sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La fonction x est déjà de classe C_1 sur $]-\infty, -1[$, sur $[-1, 1]$ et sur $]1, +\infty[$ de même que la fonction y.

Soit f la fonction dont les restrictions à $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$ sont x_1 et x_2. Posons $f(t) = f_1\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$ ou encore $f_1(t) = f(2t-1)$. La question II.B - montre que si P_0 et P_1 sont les polynômes de TAYLOR à l'ordre 1 en 0 et 1 respectivement de la fonction f_1, la fonction $t \mapsto P_0(t)L_1(1-t)+P_1(t)L_1(t)$ a mêmes polynômes de TAYLOR à l'ordre 1 en 0 et 1 respectivement. Mais alors, par changement de variables, la fonction

$$t \mapsto P_0\left(\frac{1+t}{2}\right) L_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + P_1\left(\frac{1+t}{2}\right) L_1\left(\frac{1+t}{2}\right) = Q_1(-t)h_1(t) + Q_1(t)h_2(t) = x_3(t)$$

a mêmes polynômes de TAYLOR à l'ordre 1 en -1 et 1 respectivement que la fonction f. Ceci montre que x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de y.

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

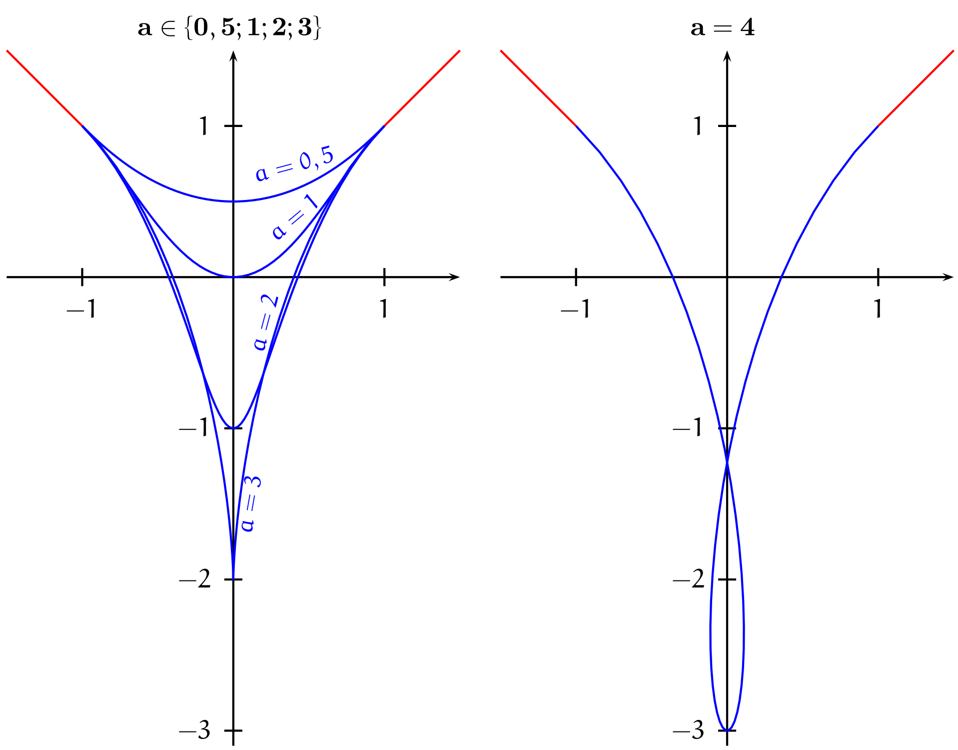
III.C - Le support de g_1 (resp. g_2) est la demi-droite d'équation $y = -x$, $x \leq -1$ (resp. $y = x$, $x \geq 1$).
Pour $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \frac{1}{4}(-(-t)^3 + 3(-t) + 2)(-1 + a(t+1)) + \frac{1}{4}(-t^3 + 3t + 2)(1 + a(t-1)) \\ &= \frac{1}{4}\left((t^3 - 3t)(2a - 2) + 2(2at)\right) = \frac{1}{2}((a-1)t^3 - (a-3)t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{1}{4}(t^3 - 3t + 2)(1 - a(t+1)) + \frac{1}{4}(-t^3 + 3t + 2)(1 + a(t-1)) \\ &= \frac{1}{4}\left((t^3 - 3t)(-2at) + 2(2 - 2a)\right) = \frac{1}{2}(-at^4 + 3at^2 + 2 - 2a). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [-1, 1],\ g_3(t) = \left(\frac{1}{2}((a-1)t^3 - (a-3)t), \frac{1}{2}(-at^4 + 3at^2 + 2 - 2a)\right).}$$



Soit $a > 3$. Pour $t \in [-1,1]$, $x(t) = 0 \Leftrightarrow (a-1)t^3 - (a-3)t = 0 \Leftrightarrow t \in t \in \left\{0, \pm\sqrt{\dfrac{a-3}{a-1}}\right\}$. Ensuite, $y(0) = 1 - a$ et

$$y\left(\pm\sqrt{\frac{a-3}{a-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(-a\left(\frac{a-3}{a-1}\right)^2 + 3a\frac{a-3}{a-1} + 2 - 2a\right) = \frac{-a(a-3)^2 + 3a(a-1)(a-3) - 2(a-1)^3}{2(a-1)^2} = \frac{1-3a}{(a-1)^2}.$$

Ceci montre déjà que le raccord coupe (Oy) en au plus deux points. Enfin,

$$1 - a = \frac{1-3a}{(a-1)^2} \Leftrightarrow -(a-1)^3 = 1 - 3a \Leftrightarrow -a^3 + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{0,3\},$$

et donc pour $a > 3$, $y(0) \neq y\left(\pm\sqrt{\dfrac{a-3}{a-1}}\right)$.

$$\boxed{\text{Si } a > 3, \text{ le raccord coupe } (Oy) \text{ en deux points distincts, les points } (0, 1-a) \text{ et } \left(0, \frac{1-3a}{(a-1)^2}\right).}$$

Partie IV - Une animation

IV.A -

I.A.1) Les quatre points A_i, $1 \leq i \leq 4$, ne sont pas coplanaires et en particulier sont deux à deux distincts.

Soit $i \in [\![1,4]\!]$. Les points $(A_j)_{j\neq i}$ définissent un unique plan. On note $a_ix + b_iy + c_iz + d_i = 0$, $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ une équation de ce plan. La point A_i n'est pas dans ce plan et donc $a_ix_i + b_iy_i + c_iz_i + d_i \neq 0$. Une autre équation de ce plan est alors $u_ix + v_iy + c_iz + h_i = 0$ où $u_i = \dfrac{a_i}{a_ix_i + b_iy_i + c_iz_i + d_i}$, $v_i = \dfrac{b_i}{a_ix_i + b_iy_i + c_iz_i + d_i}$, $w_i = \dfrac{c_i}{a_ix_i + b_iy_i + c_iz_i + d_i}$ et $h_i = \dfrac{d_i}{a_ix_i + b_iy_i + c_iz_i + d_i}$.
Posons alors $g_i(M) = u_ix + v_iy + c_iz + h_i$. Par construction, $(u_i, v_i, w_i) \neq (0,0,0)$ et $\forall j \in [\![1,4]\!],\ g_i(A_j) = \delta_{i,j}$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,4]\!],\ \exists g_i = u_ix + v_iy + w_iz + h_i /\ (u_i, v_i, w_i) \neq (0,0,0) \text{ et } \forall j \in [\![1,4]\!],\ g_i(A_j) = \delta_{i,j}.}$$

IV.A.2) D'après la question précédente on a

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}$ est donc inversible. On en déduit que ses trois premières lignes sont linéairement indépendantes et donc que la matrice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$ est de rang 3. Ce rang est encore le rang de la famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq 4}$.

$$\boxed{\text{rg}(\varphi_i)_{1\leq i\leq 4} = 3.}$$

IV.B -

I.B.1) Soit $i \in [\![1,4]\!]$.

$$g(A_i) = \sum_{j=1}^{4} g_j(A_i) = \sum_{j=1}^{4} \delta_{i,j} = 1.$$

g est une forme affine et coïncide avec la forme affine $(x, y, z) \mapsto 1$ sur le repère affine (A_1, A_2, A_3, A_4). On en déduit que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g((x, y, z)) = 1$.

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g((x, y, z)) = 1.}$$

IV.B.2) Soit $M \in \mathscr{E}_3$. Puisque (A_1, A_2, A_3, A_4) est un repère affine, M est un barycentre des points A_i, $1 \leq i \leq 4$. Posons $M = \sum_{j}^{4} \lambda_j A_j$ avec $\sum_{j}^{4} \lambda_j = 1$. Soit $i \in [\![1, 4]\!]$.

$$g_i(M) = \sum_{j}^{4} \lambda_j g_i(A_j) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i.$$

Donc,

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{E}_3,\ M = \mathrm{bar}((A_i, g_i(M)))_{1 \leq i \leq 4}.}$$

IV.B.3) Soient $(i, j) \in [\![1, 4]\!]$ tel que $i \neq j$ puis $M \in \mathscr{E}_3$. $\exists \lambda \in [0, 1]/; M = \lambda A_i + (1 - \lambda) A_j$. Dans ce cas, on a $g_i(M) = \lambda$, $g_j(M) = 1 - \lambda$ et pour $k \notin \{i, j\}$, $g_k(M) = 0$. Mais alors, d'après I.A.2),

$$G(M) = L_m(\lambda) + L_m(1 - \lambda) + L_m(0) + L_m(0) = 1.$$

$$\boxed{\forall i \neq j,\ \forall M \in [A_i, A_j],\ G(M) = 1.}$$

IV.C -

IV.C.1) • Soit $M \in \Delta$.

$$OM = \left\| \sum_{i=1}^{4} g_i(M) \overrightarrow{OA_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^{4} |g_i(M)| OA_i = \sum_{i=1}^{4} g_i(M) OA_i \leq \sum_{i=1}^{4} OA_i.$$

Donc Δ est une partie bornée de $\mathscr{E}_3$.

• Soit $i \in [\![1, 4]\!]$. g_i est une forme affine et en particulier g_i est continue sur $\mathscr{E}_3$.
Mais alors $\Delta_i = \{M \in \mathscr{E}_3 /\ 0 \leq g_i(M) \leq 1\} = g_i^{-1}([0, 1])$ est un fermé de $\mathscr{E}_3$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
On en déduit que $\Delta = \bigcap_{1 \leq i \leq 4} \Delta_i$ est un fermé de $\mathscr{E}_3$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathscr{E}_3$.

Δ est ainsi une partie fermée et bornée de $\mathscr{E}_3$ et puisque $\mathscr{E}_3$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, le théorème de Borel-Lebesgue permet d'affirmer que

$$\boxed{\Delta \text{ est un compact de } \mathscr{E}_3.}$$

IV.C.2) Considérons la face $A_1A_2A_3$ notée $\mathscr{F}$. Elle est constituée des $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$ tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3$ et $\alpha + \beta + \gamma = 1$. C'est un compact de $\mathscr{E}_3$ en tant qu'image du compact $\{(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3 /\ \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ par l'application continue $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$. Comme G est continue sur le compact $\mathscr{F}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, G admet sur $\mathscr{F}$ un minimum et un maximum.

$\mathscr{F}$ est constituée des points $M = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Pour un tel point M, on a $g_1(M) = \alpha$, $g_2(M) = \beta$ et $g_3(M) = \gamma$. On en déduit que

$$G(M) = G(\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(\gamma) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(1 - \alpha - \beta).$$

Posons $T = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 /\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \leq 1\}$ et pour $(\alpha, \beta) \in T$, $\tilde{G}((\alpha, \beta)) = G(M) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(1 - \alpha - \beta)$.
D'après 1), on sait que $\tilde{G}$ prend la valeur 1 sur le bord de T. D'autre part, puisque $\tilde{G}$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathring{T}$, si $\tilde{G}$ admet un extremum en un point de $\mathring{T}$, ce point est un point critique de $\tilde{G}$. Or

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \alpha}((\alpha, \beta)) = L'_m(\alpha) - L'_m(1 - \alpha - \beta) = L'_m(\alpha - L'_m(\gamma) \text{ et } \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \beta}((\alpha, \beta)) = L'_m(\alpha - L'_m(\gamma).$$

Par suite, $\dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial\alpha}((\alpha,\beta)) = \dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial\beta}((\alpha,\beta)) = 0 \Leftrightarrow L'_m(\alpha) = L'_m(\beta) = L'_m(\gamma)$. Puisque α, β et γ sont strictement positifs, ces égalités sont équivalentes à $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{3}$ d'après I.C.2). Dans ce cas, $G(M) = 3L_m\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Enfin, d'après I.B.2) et I.A.2), on a $\dfrac{L_m(1/3)}{1/3} < \dfrac{L_m(1/2)}{1/2} = 1$ ou encore $3L_m\left(\dfrac{1}{3}\right) < 1$.

Résumons le travail précédent. La fonction G admet sur $\mathscr{F}$ un maximum et un minimum. Comme G prend la valeur 1 sur le bord de $\mathscr{F}$ et admet un et un seul point critique à l'intérieur de $\mathscr{F}$ en lequel la valeur est strictement plus petite que 1, on en déduit que G admet son minimum en le point $M_0 = \dfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)$ et que ce minimum vaut $3L_m\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et admet son maximum en tout point du bord de $\mathscr{F}$ et que ce maximum vaut 1.

Sur une face,
G atteint son maximum en tout point du bord et son maximum vaut 1,
G atteint son minimum en son isobarycentre et son minimum vaut $3L_m\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

IV.C.3) Puisque $\Omega = \dfrac{1}{4}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$, $G(\Omega) = 4L_m\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Pour $i \in [\![1,4]\!]$, g_i est une application affine. Donc sa différentielle en tout point est sa partie linéaire φ_i. On en déduit que

$$\forall M \in \mathscr{E}_3,\ dG_M = \sum_{i=1}^{4} L'_m(g_i(M))\varphi_i.$$

Maintenant, d'après IV.B.1), $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} g_i = 1$. En différentiant, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 0$. Donc, $dG_\Omega = L'_m\left(\dfrac{1}{4}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 0$.

$$G(\Omega) = 4L_m\left(\frac{1}{4}\right) \text{ et } dG_\Omega = 0.$$

IV.C.4) Soit $M \in \Delta$. En tenant compte de $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = 0$ et du fait que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est de rang 3 de sorte que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre, on a

$$\begin{aligned} dG_M = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \left(L'_m(g_i(M)) - L'_m(g_4(M))\right)\varphi_i = 0 \Leftrightarrow L'_m(g_1(M)) = L'_m(g_2(M)) = L'_m(g_3(M)) = L'_m(g_4(M)) \\ &\Leftrightarrow M \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, \Omega \text{ (d'après I.C.3))}. \end{aligned}$$

Les points critiques de G, éléments de Δ sont A_1, A_2, A_3, A_4 et Ω.

IV.C.5) Par un raisonnement identique à celui de la question IV.C.2), on obtient

G atteint son maximum en tout point d'une arête de $A_1A_2A_3A_4$ et $G_{max} = 1$,
G atteint son minimum en Ω et son minimum vaut $G_{min} = 4L_m\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

IV.D -

IV.D.1) D'après IV.C.4), on sait déjà que le point O et les sommets A_i, $1 \leq i \leq 4$, sont des points critiques de G. Comme $O \notin \Sigma$ et que $\forall i \in [\![1,4]\!],\ A_i \in \Sigma$, on a déjà quatre points singuliers de Σ à savoir les points A_i, $1 \leq i \leq 4$. Déterminons s'il y en a d'autres.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x}((x,y,z)) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}((x,y,z)) = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial z}((x,y,z)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{8}(2x - 2yz) = 0 \\ \dfrac{3}{8}(2y - 2xz) = 0 \\ \dfrac{3}{8}(2z - 2xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = xy \\ x(1-y^2) = 0 \\ y(1-x^2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(0,0,0), (1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\}.$$

$$\boxed{\text{Les points singuliers de } \Sigma \text{ sont les quatre points } A_i,\ 1 \leq i \leq 4.}$$

IV.D.2) Soit $P(a,b,c) \in \mathscr{E}_3$ tel que $a^2+b^2+c^2 = 3$. Un point du segment $[OP]$ est un point de la forme $Q = (ta, tb, tc)$, $t \in [0,1]$.

Pour $t \in [0,1]$, posons

$$h(t) = G(ta, tb, tc) = \frac{1}{8}(3t^2(a^2+b^2+c^2) - 6t^3abc) + 5) = \frac{1}{8}(-6abct^3 + 9t^2 + 5).$$

Pour $t \in [0,1]$, $h'(t) = \dfrac{9t}{4}(1 - abct)$. D'après le résultat admis par l'énoncé, on a $|abc| \leq 1$ de sorte que $\dfrac{1}{|abc|} \geq 1$. Par suite, h' est strictement positive sur $]0,1[$ et donc h est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus $h(0) = \dfrac{5}{8} < 1$ et $h(1) = \dfrac{7-3abc}{4} \geq \dfrac{7 - 3\times 1}{4} = 1$ et puisque h est continue sur $[0,1]$, h prend une et une seule fois la valeur 1, ou encore

$$\boxed{\forall P \in S(O, \sqrt{3}),\ \exists! Q \in [OP] /\ Q \in \Sigma.}$$

IV.D.3) • Ainsi, depuis le point O, dans toute direction, on voit un et un seul point de Σ'.
• La question IV.C.5) montre que les arêtes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont contenues dans Σ' et que tout autre point du tétraèdre n'est pas sur Σ' (et est plus précisément intérieur à Σ').
• L'intersection de Σ' avec la sphère $S(O, \sqrt{3})$ est constituée des points A_1, A_2, A_3 et A_4.

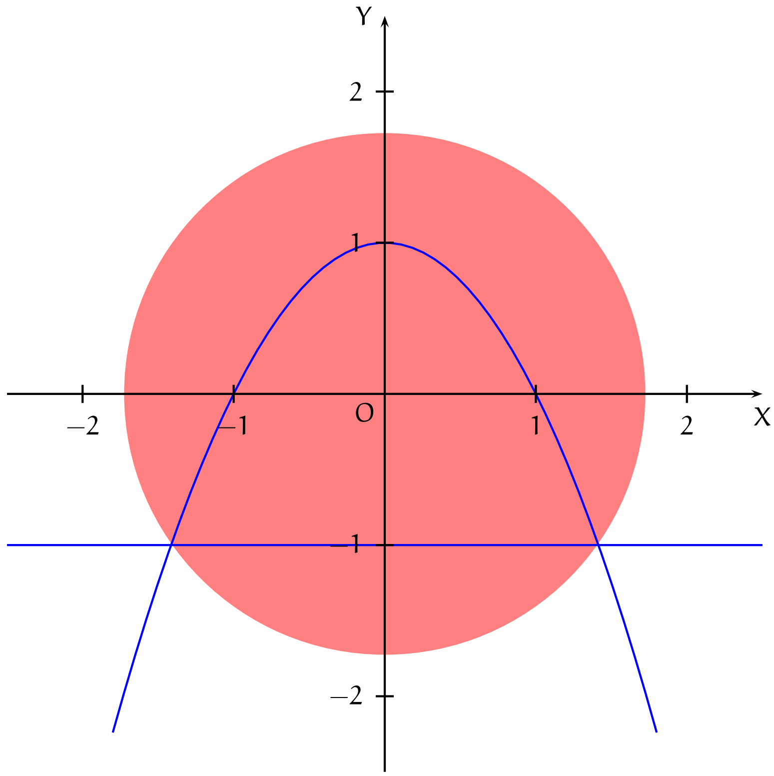
IV.D.4) Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}_3$. On note (P) le plan médiateur du segment $[A_3A_4]$. Puisque (P) contient O, l'intersection de (P) et de $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ est un disque de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. Ensuite

$$M \in (P) \cap \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \dfrac{1}{8}[3(x^2+y^2+z^2-2xyz)+5] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 + z^2 + 2x^2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (z+1)(2x^2+z-1) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ z = -2x^2 + 1 \end{cases}$$

$(P) \cap \Sigma$ est donc la réunion de la droite $\mathscr{D}$ d'équations $\begin{cases} y = -x \\ z = -1 \end{cases}$ et de la courbe $\mathscr{P}$ d'équations $\begin{cases} y = -x \\ z = -2x^2 + 1 \end{cases}$.

Pour tracer ces deux courbes, changeons de repère orthonormé et prenons comme plan (XOY) le plan (P). La matrice de ce changement de repère est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases} x = \dfrac{X+Z}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{-X+Z}{\sqrt{2}} \\ z = Y \end{cases}$.

Un système d'équations de $\mathscr{D}$ dans le nouveau repère est $\begin{cases} Y = -1 \\ Z = 0 \end{cases}$ et un système d'équations de $\mathscr{P}$ dans le nouveau repère est $\begin{cases} Y = -2\left(\dfrac{X+Z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \\ Z = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} Y = 1 - X^2 \\ Z = 0 \end{cases}$. $\mathscr{P}$ est une parabole.



IV.D.5) Pour $G = G_{Min} = 0$, S_α est le point Ω. Quand α croît, S_α grossit à l'intérieur du tétrèdre puis vient toucher les faces du tétraèdre, les traverse et dans sa position finale obtenue pour $G = G_{max} = 1$, contient les sommets et les arêtes du tétraèdre.

