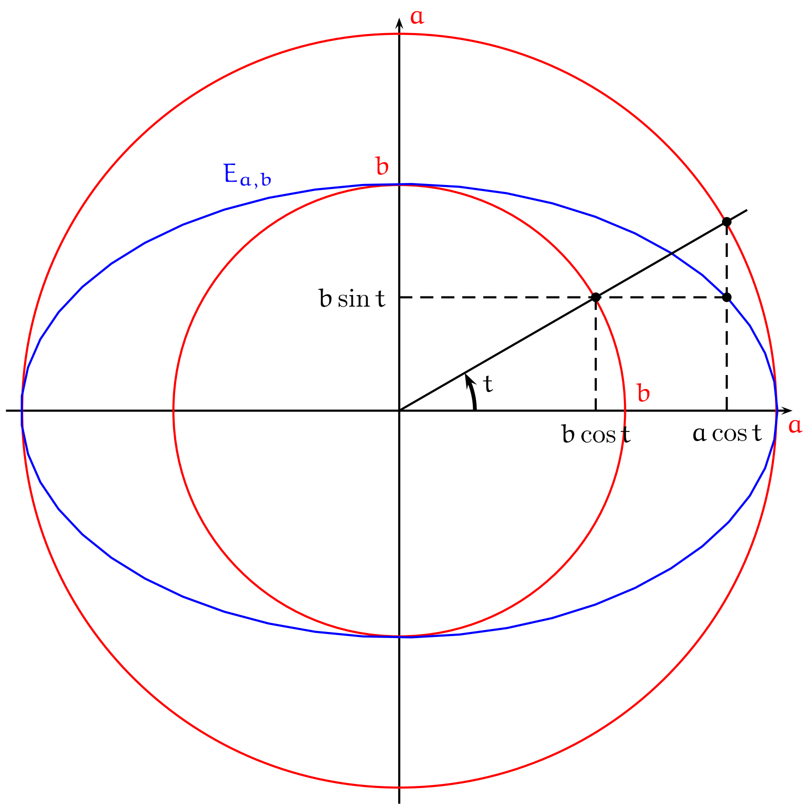
SESSION 2006

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES I. FILIERE MP

Partie I - Préliminaires

I.A -



I.B - • L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array}$ est linéaire. Comme $\mathscr{S}_r = \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathscr{S}_r$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

• On sait qu'une combinaison linéaire de séries entières de rayons au moins égaux 1 est une série entière de rayon au moins égal à 1 et que la série entière nulle a un rayon au moins égal à 1. L'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que le rayon de la série entière de terme général $a_n z^n$ est au moins égal à 1 est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Comme $\mathscr{B}_r$ est l'intersection de ce sous-espace et du sous-espace $\mathscr{S}_r$, $\mathscr{B}_r$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

• Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_r & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (a_0, a_1) \end{array}$.

- ψ est une application linéaire.
- Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_r$. Si $a \in \mathrm{Ker}\psi$, $a_0 = a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$. Mais alors, puisque la suite $(r(2n+3))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$. Ainsi, ψ est injectif.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit a la suite définie par $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{r(2n+3)}\left((1+r^2)2na_n - r(2n-3)a_{n-1}\right)$.
  a est un élément de $\mathscr{S}_r$ tel que $\psi(a) = (\alpha, \beta)$. ψ est surjectif et donc ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On en déduit que $\dim('\mathscr{S}_r) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

$$\boxed{\mathscr{S}_r \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 et } \mathscr{B}_r \text{ est un sous-espace de } \mathscr{S}_r.}$$

I.C - Théorème de PARSEVAL. Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$. La suite $(|c_n(f)|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable et

$$\boxed{\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\ dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2).}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}|\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)| &\leq |c_n(f)| \times |c_n(g)| + |c_{-n}(f)| \times |c_{-n}(g)| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right) + \frac{1}{2}\left(|c_{-n}(f)|^2 + |c_{-n}(g)|^2\right).\end{aligned}$$

Puisque les séries de terme généraux $|c_n(f)|^2$ et $|c_n(g)|^2$ convergent, la série de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g) + c_n(f)\overline{c_n(g)}$ est absolument convergente.

Retrouvons alors une formule de polarisation.

$$\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 = ((f|f) + (f|g) + (g|f) + (g|g)) - ((f|f) - (f|g) - (g|f) + (g|g)) = 2\left((f|g) + \overline{(f|g)}\right) = 4\mathrm{Re}\,((f|g)).$$

De même

$$\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2 = \left((f|f) + i(f|g) - i(g|f) - i^2(g|g)\right) - \left((f|f) - i(f|g) + i(g|f) - i^2(g|g)\right) = 2i((f|g) - \overline{(f|g)}) = -4\mathrm{Im}\,((f|g)).$$

Par suite, d'après la formule de PARSEVAL et par linéarité des coefficients de FOURIER

$$\begin{aligned}(f|g) &= \mathrm{Re}\,((f|g)) + i\mathrm{Im}\,((f|g)) = \frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 - i\|f+ig\|^2 + i\|f-ig\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)+c_n(g)|^2 - |c_n(f)-c_n(g)|^2 - i|c_n(f)+ic_n(g)|^2 + i|c_n(f)-ic_n(g)|^2\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)}c_n(g) = \overline{c_0(f)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)\right),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant vraie car la série de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)$ est absolument convergente de sorte que l'on peut permuter et associer les termes à volonté.

$$\boxed{\forall (f,g) \in (\mathscr{C}_{2\pi})^2,\ (f|g) = \overline{c_0(f)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)\right).}$$

I.D - Pour $t \in \mathbb{R}$, $f_r(t) = \sqrt{1 - 2r\cos t + r^2}$. Donc f_r est paire. Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$2c_n(f_r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt = a_n(f_r).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f_r) = 2c_n(f_r).}$$

I.E - En posant $z(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$, on a

$$\begin{aligned}L(a,b) &= \int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|\ dt = 2\int_0^{\pi} |-a\sin(t) + ib\cos(t)|\ dt \\ &= 2\int_0^{\pi} |-a\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + ib\frac{e^{it}+ie^{-it}}{2}|\ dt = \int_0^{\pi} |a(e^{it}-e^{-it}) + b(e^{it}+e^{-it})|\ dt \\ &= \int_0^{\pi} |(a+b)e^{it} - (a-b)e^{-it}|\ dt = (a+b)\int_0^{\pi} |1 - re^{-2it}|\ dt \\ &= (a+b)\int_0^{-2\pi} |1 - re^{iu}|\ -\frac{du}{2} = \frac{a+b}{2}\int_0^{2\pi} f_r(u)\ du \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)} \\ &= \frac{\pi(a+b)}{2}a_0(f_r).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{L(a,b)}{a_0(f_r)} = \frac{\pi(a+b)}{2}.}$$

Partie II - Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Soit $n \in \mathbb{N}$. $\alpha_n \neq 0$ et

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n}\frac{4^n(2n-1)}{4^{n+1}(2n+1)} = \frac{(2n+2)!n!^2}{(2n)!(n+1)!^2}\frac{2n-1}{4(2n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2}.$$

En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = 1$. D'après la règle de d'ALEMBERT,

$$\boxed{R = 1.}$$

II.B - Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2n-1}{2n+2} &\Rightarrow (2n+2)\alpha_{n+1} - (2n-1)\alpha_n = 0\\ &\Rightarrow 2(n+1)\alpha_{n+1} - 2n\alpha_n + \alpha_n = 0\\ &\Rightarrow \alpha_n = -2(n+1)\alpha_{n+1} + 2n\alpha_n.\end{aligned}$$

Soit alors $x \in]-1,1[$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par x^n et on somme. On obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}n\alpha_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n - 2x\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha_n x^{n-1} = -2(1-x)f'(x).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ 2(1-x)f'(x) + f(x) = 0.}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[,\ 2(1-x)f'(x) + f(x) = 0 &\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ e^{-1/2\ln(1-x)}f'(x) + \frac{1}{2(1-x)}e^{-1/2\ln(1-x)}f(x) = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1-x}}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{f(0)}{\sqrt{1-0}}\\ &\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sqrt{1-x}.}$$

II.C - Pour $x \in]-1,1[$, on a $f(x)^2 = 1-x$. On sait que pour $x \in]-1,1[$, on peut effectuer le produit de CAUCHY de la série entière $\sum \alpha_n x^n$ par elle-même et par unicité des coefficients d'une série entière, pour chaque n de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k} = \begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ -1 \text{ si } n=1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Mais alors, pour $|z| < 1$,

$$f(z)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)z^n = 1-z.$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| < 1 \Rightarrow (f(z))^2 = 1-z).}$$

II.D - Soient $r \in]0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$. Puisque $|re^{it}| < 1$, $|f(re^{it})|^2 = |(f(re^{it}))^2| = |1-re^{it}| = f_r(t)$.

$$\boxed{\forall r \in]0,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(re^{it})|^2 = f_r(t).}$$

II.E - Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons e_n la fonction $t \mapsto e^{int}$ et $\tilde{f}$ la fonction $t \mapsto f(re^{it})$.

$$\begin{aligned}
c_n(f_r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(re^{it})e^{int}} f(re^{it})\,dt = (\tilde{f}e_n|\tilde{f}) \\
&= \overline{c_0(\tilde{f}e_n)}c_0(\tilde{f}) + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\overline{c_p(\tilde{f}e_n)}c_p(\tilde{f}) + \overline{c_{-p}(\tilde{f}e_n)}c_{-p}(\tilde{f})\right) \text{ (d'après I.C -)} \\
&= \overline{c_{-n}(\tilde{f})}c_0(\tilde{f}) + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\overline{c_{p-n}(\tilde{f})}c_p(\tilde{f}) + \overline{c_{-p-n}(\tilde{f})}c_{-p}(\tilde{f})\right) \ (*).
\end{aligned}$$

Soit alors $p \in \mathbb{Z}$. $c_p(\tilde{f}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k r^k e^{i(k-p)t}\right)dt$. Maintenant, $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $|\alpha_k r^k e^{i(k-p)t}| = |\alpha_k| r^k$. Comme la série numérique de terme général $|\alpha_k| r^k$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto \alpha_k r^k e^{i(k-p)t}$ converge normalement et donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$c_p(\tilde{f}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k r^k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)t}\,dt\right) = \left\{\begin{array}{l}\alpha_p r^p \text{ si } p \geq 0\\ 0 \text{ si } p < 0\end{array}\right. .$$

Mais alors, la relation $(*)$ s'écrit plus simplement

$$\begin{aligned}
\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} &= \frac{1}{\alpha_n r^n}\sum_{p=n}^{+\infty}\overline{c_{p-n}(\tilde{f})}c_p(\tilde{f}) = \frac{1}{\alpha_n r^n}\sum_{p=n}^{+\infty}\alpha_{p-n}r^{p-n}\alpha_p r^p = \sum_{p=n}^{+\infty}\frac{\alpha_{p-n}\alpha_p}{\alpha_n}r^{2(p-n)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k\alpha_{n+k}}{\alpha_n}r^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\alpha_{[x]}\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}r^{2[x]}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\alpha_{[x]}\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}r^{2[x]}\,dx.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty}\frac{\alpha_{[x]}\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}r^{2[x]}\,dx.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = \dfrac{\alpha_{[x]}\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}r^{2[x]}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a vu que pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{2n-1}{2n+2}$. On en déduit que $\alpha_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$ et plus généralement, x étant fixé, $\alpha_{n+[x]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$.
Mais alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \alpha_{[x]}r^{2[x]}$. Ainsi, la suite de fonction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $u\ :\ x \mapsto \alpha_{[x]}r^{2[x]}$ qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi $\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \dfrac{2n-1}{2n+2} < 1$. On en déduit que la suite $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ |u_n(x)| \leq |\alpha_{[x]}|r^{2[x]}| = |u(x)|$.
Vérifions alors que la fonction u est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}|u(x)|\,dx &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1}|u(x)|\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_k|r^{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k r^{2k} = 2 - \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k r^{2k} \\
&= 2 - \sqrt{1-r^2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, u est intégrable sur $[0,+\infty[$.

• En résumé, chaque u_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction u qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leq |u|$ où $|u|$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} &= \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_{[x]}\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n}r^{2[x]}\,dx = \int_0^{+\infty}\alpha_{[x]}r^{2[x]}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k r^{2k} = f(r^2) = \sqrt{1-r^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n}=\sqrt{1-r^2}.}$$

II.F - D'après la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}
a_n(f_r)&=2c_n(f_r)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{1-r^2}\alpha_n r^n=-2\sqrt{1-r^2}\frac{(2n)!}{4^n n!^2(2n-1)}r^n\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim}-2\sqrt{1-r^2}\frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n(n/e)^{2n}(2\pi n)(2n-1)}r^n=-\frac{\sqrt{1-r^2}r^n}{\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_n(f_r)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\sqrt{1-r^2}r^n}{\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}.}$$

On note en particulier que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_n(f_r)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ce qui est assuré à priori par le fait que f_r est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Partie III - Approximation de $L(a,b)$

III.A - Pour $t\in\mathbb{R}$, $f_r(t)=\sqrt{1-2r\cos t+r^2}$ puis $f_r'(t)=\dfrac{r\sin t}{\sqrt{1-2r\cos t+r^2}}$. Par suite

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ (1-2r\cos t+r^2)f_r'(t)-r\sin t f_r(t)=0\ (*).}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que $b_n(f_r')=-na_n(f_r')$. Ensuite

$$\begin{aligned}
b_n(\cos\times f_r')&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r'(t)\sin(nt)\cos(t)\ dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r'(t)\sin((n+1)t)\ dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r'(t)\sin((n-1)t)\ dt\right)\\
&=\frac{1}{2}(b_{n+1}(f_r')+b_{n-1}(f_r'))=-\frac{1}{2}((n+1)a_{n+1}(f_r)+(n-1)a_{n-1}(f_r))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_n(\sin\times f_r)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(t)\sin(nt)\sin(t)\ dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(t)\cos((n-1)t)\ dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(t)\cos((n+1)t)\ dt\right)\\
&=\frac{1}{2}(a_{n-1}(f_r)-a_{n+1}(f_r)).
\end{aligned}$$

Par linéarité des coefficients de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}
(*)&\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (1+r^2)b_n(f_r')-2rb_n(\cos\times f_r')-rb_n(\sin\times f_r)=0\\
&\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ -n(1+r^2)a_n(f_r)+r(((n+1)a_{n+1}(f_r)+(n-1)a_{n-1}(f_r)))-\frac{r}{2}(a_{n-1}(f_r)-a_{n+1}(f_r))=0\\
&\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ r(2n+3)a_{n+1}(f_r)-(1+r^2)2na_n(f_r)+r(2n-3)a_{n-1}(f_r)=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(a_n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathscr{S}_r$ et puisque d'autre part, la série entière de terme général $a_n(f_r)z^n$ est de rayon 1,

$$\boxed{a_n(f_r)z^n\in\mathscr{B}_r.}$$

III.B - Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$r(2n+3)a_{n+1}-(1+r^2)2na_n+r(2n-3)a_{n-1}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{n-1}=\dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)}a_n-\dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1} \\ a_n=a_n \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n=\begin{pmatrix} \dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Algorithme en MAPPLE.

```
restart ;
suites_anAnBn:=proc(a0,a1,r,n)
local u,v,w,A,A0,A1,B,B0,B1,i;
if n=0 then u:=a0;A:=1;B:=0;
elif n=1 then u:=a1; A:=-2*(1+r^2)/r; b:=1;
else
     v:=a0; A0:=1; B0:=0;
     w:=a1; A1:=-2*(1+r^2)/r; B1:=1;
     for i from 2 to n do
          u:=((1+r^2)/r)*(2*i-2)/(2*i+1)*w-((2*i-5)/(2*i+1))*v;
          A:=((1+r^2)/r)*((2*i)/(2*i+1))*A1-((2*i+1)/(2*i-5))*A0;
          B:=((1+r^2)/r)*((2*i)/(2*i+1))*B1-((2*i+1)/(2*i-5))*B0;
          v:=w; w:=u; A0:=A1; A1:=A; B0:=B1; B1:=B;
     od;
     u; A; B;
fi;
end:
```

Soit $n\geq 2$.

$$M_{n-1}T_n=\begin{pmatrix} A_{n-1}(r) & -\dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2}(r) \\ B_{n-1}(r) & -\dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2}(r) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)}A_{n-1}(r)-\dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2}(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}(r) \\ \dfrac{2(1+r^2)n}{r(2n-3)}B_{n-1}(r)-\dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2}(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}(r) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}(r) \end{pmatrix}=M_n.$$

$$\boxed{\forall n\geq 2,\ M_{n-1}T_n=M_n.}$$

Soit $n\geq 2$. $M_{n-1}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}=M_{n-1}T_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. On en déduit encore que pour $n\geq 1$,

$$M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=M_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{r}(1+r^2) & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.}$$

III.C - Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe $n_1 > N$ tel que pour $p \geq n_1$, $\varepsilon_p < \dfrac{\varepsilon(1-k)}{2}$. Pour $n \geq n_1$, on a

$$\begin{aligned}|u_n - l| &\leq k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n \leq \ldots \leq k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| + \varepsilon_n + k\varepsilon_{n-1} + \ldots + k^{n_1-1}\varepsilon_{n_1+1}\\ &\leq k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| + \frac{\varepsilon(1-k)}{2}\sum_{k=0}^{n_1-1} k^p < k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| + \frac{\varepsilon(1-k)}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} k^p = k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| + \frac{\varepsilon(1-k)}{2}\frac{1}{1-k}\\ &= k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ensuite, il existe $n_0 > n_1$ tel que pour $n \geq n_0$, $k^{n-n_1}|u_{n_1} - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

III.D - Posons $l = \dfrac{a_0}{1-r^2}$ puis, pour $n \geq 1$, $u_n = A_n(r)a_n$ et $v_n = u_n - l$. D'après III.B -,

$$\begin{aligned}a_0 &= A_n(r)a_n - \frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}(r)a_{n+1} = A_n(r)a_n - \frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}(r)\left(\frac{1+r^2}{r}\frac{2n}{2n+3}a_n - \frac{2n-3}{2n+3}a_{n-1}\right)\\ &= A_n(r)a_n + A_{n-1}(r)a_{n-1} - \frac{1+r^2}{r}\frac{2n}{2n-3}A_{n-1}(r)a_n.\end{aligned}$$

D'après II.F -, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{1-r^2}r^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$. En particulier, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ra_{n-1}$ ou encore $a_n \underset{n\to+\infty}{=} ra_{n-1} + o(a_{n-1})$. En reportant dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}a_0 &\underset{n\to+\infty}{=} A_n(r)a_n + A_{n-1}(r)a_{n-1} - \frac{1+r^2}{r}\frac{2n}{2n-3}A_{n-1}(ra_{n-1} + o(a_{n-1}))\\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n + u_{n-1} - (1+r^2)\frac{2n}{2n-3}u_{n-1} + o(u_{n-1}) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - r^2u_{n-1} + o(u_{n-1})\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}v_n = u_n - l &\underset{n\to+\infty}{=} a_0 - l + r^2u_{n-1} + o(u_{n-1})\\ &\underset{n\to+\infty}{=} (1-r^2)l - l + r^2(v_{n-1} + l) + +o(v_{n-1} + l) \underset{n\to+\infty}{=} r^2v_{n-1} + o(v_{n-1}) + o(1).\end{aligned}$$

Maintenant, pour n grand, $|o(v_{n-1})| \leq \dfrac{1-r^2}{2}|v_{n-1}|$ et donc, pour n grand,

$$|u_n - l| = |r^2v_{n-1} + o(v_{n-1}) + o(1)| \leq r^2|v_{n-1}| + \frac{1-r^2}{2}|v_{n-1}| + |o(1)| = k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n,$$

où $k = \dfrac{1+r^2}{2} \in]0,1[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. D'après la question III.D -, on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou encore

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n(r)a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1-r^2}.}$$

Les calculs sont identiques pour la suite B_n en remplaçant a_0 par a_1 et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} B_n(r)a_n(f_r) = \frac{a_1(f_r)}{1-r^2}.}$$

III.E - D'après I.E - et II.D -,

$$L(a,b) = \frac{\pi(a+b)}{2}a_0(f_r) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi(a+b)(1-r^2)}{2}A_n(r)a_n(f_r) = \lim_{n\to+\infty}\pi(a+b)(1-r^2)A_n(r)c_n(f_r).$$

D'après la question II.E -, $c_n(f_r) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1-r^2}\alpha_n r^n$ et donc

$$L(a,b) = \lim_{n\to+\infty} \pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}A_n(r)\alpha_n r^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons donc $l_n = \pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}A_n(r)\alpha_n r^n$.

- Pour $n = 0$, on a $l_0 = \pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}$.
- Pour $n = 1$, on a $l_1 = \pi(a+b)(1-r^2)^{3/2} \times -\dfrac{2}{r}(1+r^2) \times -\dfrac{2}{4}r = \pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}(1+r^2) = l_0(1+r^2)$.
- Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
&(1+r^2)A_{n-1}(r)\alpha_{n-1}r^{n-1} - \frac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}A_{n-2}(r)\alpha_{n-2}r^{n-2} \\
&\quad = -(1+r^2)A_{n-1}(r)\frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2(2n-3)}r^{n-1} + \frac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}A_{n-2}(r)\frac{(2n-4)!}{4^{n-2}(n-2)!^2(2n-5)}r^{n-2} \\
&\quad = \left(-\frac{1+r^2}{r}\frac{2n}{2n-3}A_{n-1}(r) + \frac{2n+1}{2n-5}A_{n-2}(r)\right)\frac{(2n)!}{4^n n!^2(2n-1)}r^n = -A_n(r)\frac{(2n)!}{4^n n!^2(2n-1)}r^n = A_n(r)\alpha_n r^n,
\end{aligned}$$

et en multipliant tout par $\pi(a+b)(1-r^2)^{3/2}$, on obtient $l_n = (1+r^2)l_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}l_{n-2}$.

La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien la suite de l'énoncé et on a montré que

$$\boxed{L(a,b) = \lim_{n\to+\infty} l_n.}$$

Partie IV - Etude de $\mathscr{S}_r$ et de $\mathscr{B}_r$

IV.A - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_1A_n - a_0B_n = \det\left(\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, M_n\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} A_n & A_na_n - \dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}A_{n-1} \\ B_n & B_na_n - \dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}B_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} A_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}A_{n-1} \\ B_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}B_{n-1} \end{vmatrix} \ (C_2 \to C_2 - a_nC_1) \\
&= a_{n+1}\begin{vmatrix} A_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ B_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1} \end{vmatrix} = a_{n+1}\det(M_n).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall a \in \mathscr{S}_r,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_1A_n - a_0B_n = a_{n+1}\det(M_n).}$$

IV.B - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\det(T_n) = \dfrac{2n+3}{2n-3}$. Mais alors, pour $n \geq 2$,

$$\det(M_n) = \det(T_n) \times \det(M_{n-1}) = \frac{2n+3}{2n-3}\det(M_{n-1}),$$

puis, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\det(M_n) &= \frac{2n+3}{2n-3} \times \frac{2n+1}{2n-5} \times \ldots \times \frac{7}{1}\det(M_1) = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{5\times3\times1}\begin{vmatrix} -\dfrac{2}{r}(1+r^2) & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{3}.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$ ou $n = 2$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \det(M_n) = -\frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{3} \text{ et } \det(M_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{8n^3}{3}.}$$

IV.C - La suite $(a_n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle et est dans $\mathscr{B}_r$. Donc, $\mathscr{B}_r$ est de dimension 1 ou 2.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_r$. D'après III.D - et II.F -,

$$A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_0(f_r)}{(1-r^2)a_n(f_r)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}a_0(f_r)n^{3/2}}{(1-r^2)^{3/2}r^n},$$

et de même, $B_n(f_r) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}a_1(f_r)n^{3/2}}{(1-r^2)^{3/2}r^n}$. Mais alors

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{\det(M_n)}(a_1A_n - a_0B_n)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\left(\frac{3}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\left((a_1a_0(f_r) - a_0a_1(f_r))\frac{\sqrt{\pi}}{(1-r^2)^{3/2}}n^{3/2}r^{-n} + o(n^{3/2}r^{-n})\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (a_0a_1(f_r) - a_1a_0(f_r))\frac{3\sqrt{\pi}}{8(1-r^2)^{3/2}}n^{-3/2}r^{-n} + o(n^{-3/2}r^{-n}).
\end{aligned}$$

Maintenant, si $a_0a_1(f_r) - a_1a_0(f_r) \neq 0$, la série de terme général a_nz^n diverge pour $z = \dfrac{1+r}{2} \in]0,1[$ ce qui montre que le rayon associé à la suite (a_n) est strictement inférieur à 1 et donc que $(a_n) \notin \mathscr{B}_r$.

Ainsi, si la suite (a_n) est dans $\mathscr{B}_r$ on a $a_0a_1(f_r) - a_1a_0(f_r) = 0$. On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{a_0}{a_0(f_r)}a_n(f_r)$ et donc que la suite (a_n) est proportionnelle à la suite $(a_n(f_r))$. Ainsi,

$$\boxed{\dim(\mathscr{B}_r) = 1 \text{ et } \mathscr{B}_r = \mathrm{Vect}((a_n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}).}$$

De plus,

$$\boxed{\text{si } (a_n) \notin \mathscr{B}_r,\ a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a_0a_1(f_r) - a_1a_0(f_r))\frac{3\sqrt{\pi}}{8r(1-r^2)^{3/2}}n^{-3/2}r^{-n}.}$$

